

СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ НУКЛОНОВ
И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ
СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. Г. Кривохижин, А. В. Котиков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	226
ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЙАНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ	228
КХД В ПРИЛОЖЕНИИ К ПРОЦЕССУ ГНР	240
КОНСТАНТА СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ	260
ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗ ДАННЫХ ПО ГЛУБОКОНЕУПРУГОМУ РАССЕЙАНИЮ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ	267
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	293
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	293

СТРУКТУРНЫЕ ФУНКЦИИ НУКЛОНОВ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. Г. Кривохижин, А. В. Котиков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлены характеристики процесса глубоконеупругого рассеяния при высоких энергиях и результаты аппроксимации экспериментальных данных по структурным функциям, полученных коллаборациями BCDMS, SLAC, NMC и BFP в экспериментах на фиксированных мишенях, с целью извлечения как значений константы связи сильного взаимодействия $\alpha_s(M_Z^2)$, так и формы партонных распределений и величин степенных поправок к $F_2(x, Q^2)$.

Characteristics of the deep inelastic scattering are shown in the high-energy region. The results of the fits of fixed-target experimental data of BCDMS, SLAC, NMC and BFP Collaborations for structure functions are presented. The values of the strong coupling constant $\alpha_s(M_Z^2)$ at the next-to-leading order and parameters of the parton distributions with and without power corrections for $F_2(x, Q^2)$ are presented.

PACS: 12.38.-t; 12.38.Bx; 12.38.Cy; 13.60.Hb

ВВЕДЕНИЕ

Классический способ изучения структуры материи и свойств ее фундаментальных составляющих частей — это облучение объекта исследования пучком зондирующих частиц и изучение характеристик происходящего рассеяния. Точечная структура лептонов, а также их свойство не вступать в сильные взаимодействия существенно облегчает интерпретацию картины их соударения с частицами объекта (мишени), что делает этот подход одним из самых плодотворных путей исследования.

Для изучения структуры на достаточно малых расстояниях переданные импульсы в соответствии с принципом неопределенности Гейзенберга должны быть достаточно большими. Это требует использования пучков лептонов достаточно высоких энергий.

Первые эксперименты по исследованию упругих электромагнитных формфакторов нуклонов [1, 2] показали, что протоны и нейтроны имеют конечный размер порядка 10^{-13} см. Дальнейшие исследования неупругого рассеяния электронов с большей передачей импульса [3, 4] выявили более

сложную картину нуклонной структуры, указав на существование точечных рассеивающих центров [5–7]. В этих экспериментах также проявилось слабое нарушение бьеркеновского скейлинга, т. е. появилась зависимость поведения структурных функций от переданных четырехимпульсов Q^2 .

Детальному изучению характеристик глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния (ГНР) с целью экспериментальной проверки так называемой партонной модели [7] и теории сильных взаимодействий — квантовой хромодинамики (КХД) — были посвящены большие экспериментальные усилия в 1970–1990 гг.

Строительство новых мощных ускорителей в 1970-х гг. — SPS ЦЕРН, тэватрон FNAL — позволило обеспечить условия для создания мощных высокоэнергетических мюонных пучков, которые дали возможность существенно увеличить значения переданных импульсов, т. е. достичь значительно меньших расстояний ($\sim 10^{-15}$ см).

Процесс глубоконеупругого рассеяния лептонов на нуклонах является уникальным, прежде всего, из-за возможности изучать структуру нуклона только по относительным характеристикам налетающего и рассеянного лептонов без привлечения процессов адронизации образующихся в процессе партонных: кварков и глюонов, которые существенным образом зависят от непертурбативной динамики взаимодействия кварков и глюонов. Необходимость учета непертурбативных эффектов сильно уменьшает предсказательную силу любого процесса. Другим важным свойством ГНР является малость константы связи электромагнитного взаимодействия, что позволяет при теоретическом анализе ограничиться только однобозонным (однофотонным или одно(W , Z)-бозонным) обменом между лептоном и нуклоном, т. е. ведущим членом разложения по электрослабой константе связи α_{ew} . Сечение однофотонного обмена может быть представлено согласно оптической теореме как мнимая часть амплитуды рассеяния виртуального фотона на нуклоне, что позволяет применить к ГНР вильсоновское операторное разложение на световом конусе и разделить этот процесс на части, ответственные за большие и малые расстояния. Часть, ответственная за малые расстояния, а также эволюция второй части (связанной с большими расстояниями) при изменении виртуальности обменной частицы могут быть найдены из пертурбативной КХД с учетом одного параметра — константы связи сильных взаимодействий α_s . Нормировка адронной части процесса ГНР (т. е. части, связанной с большими расстояниями, при одной фиксированной виртуальности) не вычисляется в рамках пертурбативной КХД и вместе с константой α_s может быть определена из экспериментальных данных по ГНР.

Основной целью настоящей работы является:

- определение структурных функций нуклона и описание экспериментальных данных по ГНР на фиксированных мишенях,

• КХД-анализ структурных функций из данных по ГНР заряженных лептонов и извлечение константы связи сильных взаимодействий α_s .

Основное содержание работы представлено в четырех разделах. Во введении обозначена цель настоящей работы. В разд. 1 введены общие положения процесса ГНР. В разд. 2 и 3 содержатся основные положения КХД в приложении к процессу ГНР и метода КХД-анализа экспериментальных данных. В разд. 4 представлен КХД-анализ структурных функций и определение константы связи сильного взаимодействия и параметров партонных распределений. В заключении приведены основные результаты, представленные в обзоре.

1. ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ

1.1. Кинематика и сечение инклюзивного неупругого рассеяния. Для изучения процесса инклюзивного неупругого рассеяния заряженных лептонов на нуклонах:

$$l + N \rightarrow l + X, \quad (1.1)$$

где X означает любую адронную систему, допустимую законами сохранения, достаточно измерять только импульсы и угол вылета первичного и рассеянного лептонов. Процесс (1.1) может происходить за счет разных механизмов взаимодействия. Для рассматриваемого в этой работе случая, когда энергия лептонного пучка порядка несколько сотен ГэВ, доминирует электромагнитное взаимодействие. В низшем порядке по константе электромагнитного взаимодействия процесс (1.1) описывается однофотонным обменом, изображенным диаграммой на рис. 1 (см. [8, 9]).

Если обозначить четырехимпульсы начального и конечного лептона через $K(E, \mathbf{K})$ и $K'(E', \mathbf{K}')$, где E, E' — энергии и \mathbf{K}, \mathbf{K}' — трехмерные импульсы лептонов в лабораторной системе, когда нуклонная мишень покоится, а через p, p' — четырехимпульсы начального нуклона и системы адронов

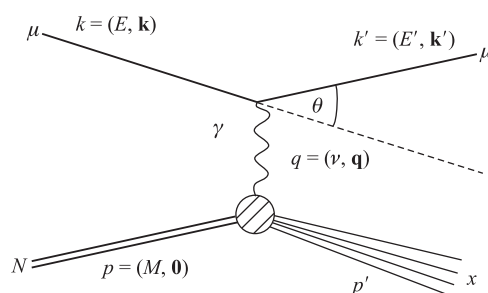


Рис. 1. Диаграмма однофотонного обмена ГНР заряженных лептонов

конечного состояния, то, согласно закону сохранения четырехимпульса:

$$K + p \rightarrow K' + p'. \quad (1.2)$$

Обозначим через $q = K - K'$ переданный четырехимпульс. Тогда процесс инклюзивного неупругого рассеяния (при фиксированной энергии пучка) можно характеризовать двумя лоренц-инвариантными переменными q^2 и (pq) .

В процессе ГНР квадрат четырехмерного передаваемого импульса q^2 является отрицательным, поэтому для удобства вводится величина $Q^2 = -q^2$, которая в лабораторной системе равна

$$Q^2 = -q^2 = 2EE' - 2|\mathbf{K} \parallel \mathbf{K}'| \cos \theta - 2m_{\mu,e}^2, \quad (1.3)$$

где θ — угол рассеяния лептона относительно направления падающего пучка; $m_{\mu,e}$ — масса лептона. Так как $E, E' \gg m_{\mu,e}$,

$$Q^2 \approx 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (1.4)$$

Вторая кинематическая величина, удобная для использования:

$$\nu = \frac{(pq)}{M} = E - E', \quad (1.5)$$

где M — масса нуклона.

Из баланса четырех импульсов (1.2) можно получить соотношение

$$q^2 + 2M\nu + M^2 = W^2, \quad (1.6)$$

где величина $W^2 = (p + q)^2$ — инвариантная масса адронной системы X в конечном состоянии. Порог неупругого процесса (1.1), когда X является адронной системой $N+m_\pi$, получается из (1.6) подстановкой $W^2 = (M+m_\pi)^2$:

$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - (M + m_\pi)^2. \quad (1.7)$$

Пренебрегая для простоты вкладом небольшого члена $M^2 - (M + m_\pi)^2$ в (1.7), получим, что область разрешенных значений ν, Q^2 для неупругого процесса (1.1) ограничивается прямой $Q^2 = 2M\nu$. Для примера на рис. 2 изображена область переменных ν и Q^2 при фиксированной энергии пучка $E = 280$ ГэВ.

При анализе ГНР пользуются безразмерными величинами:

$$\begin{aligned} x &= Q^2/2M\nu \quad (\text{переменная Бьеркена}), \\ y &= \nu/E \quad (\text{доля переданной энергии первичного пучка, в лаб. сист.}), \\ \nu &= Q^2/2ME = xy, \end{aligned} \quad (1.8)$$

которые принимают значения в интервале (0, 1).

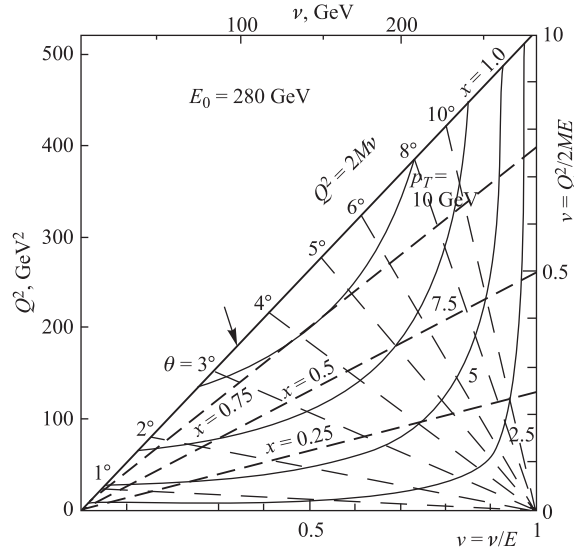


Рис. 2. Физическая область неупругого μN -рассеяния в терминах переменных ν и Q^2 при начальной энергии 280 ГэВ. На рисунке показаны линии постоянного значения переменных θ и x

Структура лептонной вершины процесса (1.1), который в низшем порядке по константе электромагнитного взаимодействия описывается однофотонным обменом (см. рис. 1), хорошо известна из квантовой электродинамики.

Структуру адронной вершины, соответствующую поглощению виртуального фотона нуклоном, в настоящее время нельзя точно теоретически рассчитать. Она описывается феноменологически введением некоторых величин, характеризующих динамику взаимодействия.

Дифференциальное сечение процесса (1.1) в однофотонном приближении определяется матричным элементом [8]:

$$A = \frac{e^2}{q^2} \bar{U}(\kappa') \gamma_\mu U(\kappa) \langle X | J_\mu(0) | P \rangle, \quad (1.9)$$

где $\bar{U}(\kappa') \gamma_\mu U(\kappa)$ — электромагнитный ток, связанный с переходом лептона из состояния с четырехимпульсом κ в состояние с четырехимпульсом κ' , описываемый биспинорами $U(\kappa)$ и $\bar{U}(\kappa')$; γ_μ — матрицы Дирака; $\langle X | J_\mu(0) | P \rangle$ — матричный элемент оператора электромагнитного тока адронов j_μ между начальным и конечным адронным состояниями и e^2/q^2 — пропагатор виртуального фотона.

Дифференциальное сечение можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta(\kappa + p - k' - p')}{\sqrt{(kp)^2 - m_\mu^2 M^2}} \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} \sum_j |A|^2, \quad (1.10)$$

где проводится усреднение по начальным и суммирование по конечным поляризациям частиц, а индекс j пробегает все состояния адронной системы, допустимые в конечном состоянии.

Дважды дифференциальное сечение принимает вид

$$\frac{d^2\sigma}{dE' d\Omega} = \frac{\alpha_{\text{em}}^2 E'}{Q^2 E} L_{\mu\nu} W_{\mu\nu}. \quad (1.11)$$

Здесь $d\Omega$ — элемент телесного угла рассеянного лептона; $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi$ (в системе $\hbar = 1$, $c = 1$) — электромагнитная константа связи; $L_{\mu\nu}$ — лептонный тензор:

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s, s'} \bar{U}(k', s') \gamma_\mu U(k, s) \bar{U}(k, s) \gamma_\nu U(k', s') = \\ &= 2(k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu) - g_{\mu\nu}(kk' - m_\mu^2), \end{aligned} \quad (1.12)$$

а $W_{\mu\nu}$ — адронный тензор:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \sum_x \langle p | J_\mu^+ | x \rangle \langle x | J_\nu | P \rangle \delta(p + q - p'). \quad (1.13)$$

Поскольку в (1.13) проводится суммирование по поляризациям всех адронов и выполнено интегрирование по импульсам адронов в конечном состоянии, структура тензора $W_{\mu\nu}$ должна определяться только двумя независимыми переменными — четырехимпульсами, в качестве которых можно выбрать q и p . Так как электромагнитное взаимодействие инвариантно относительно пространственных отражений и калибровочных преобразований, тензор $W_{\mu\nu}$ сводится к выражению

$$W_{\mu\nu} = W_1 \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + W_2 \left(p_\mu - \frac{(pq)}{q^2} q_\mu \right) \left(p_\nu - \frac{(pq)}{q^2} q_\nu \right), \quad (1.14)$$

где W_1 и W_2 — две неизвестные функции, называемые структурными функциями (СФ), которые должны зависеть только от инвариантов ν и q^{2*} .

*Заметим, что мы ограничиваемся в настоящем обзоре анализом только заряженных лептонов и, соответственно, двумя структурными функциями в правой части уравнения (1.14).

Сворачивая $L_{\mu\nu}$ и $W_{\mu\nu}$ и используя приближение

$$\frac{m_\mu}{E} \ll 1, \quad \frac{m_\mu}{E'} \ll 1, \quad (1.15)$$

получаем дифференциальное сечение процесса (1.1) в терминах двух СФ W_1 и W_2 :

$$\frac{d^2\sigma}{dE'd\Omega} = \frac{4\alpha_{\text{em}}^2 E'^2}{Q^4} \left[2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (1.16)$$

Присутствие двух независимых СФ W_1 и W_2 в сечении рассеяния связано с тем, что поглощение виртуальных фотонов характеризуется двумя независимыми сечениями: σ_T — для поперечно-поляризованных фотонов (поляризация ± 1) и σ_L — для продольно-поляризованных (скалярных) фотонов.

Фотон с энергией ν и квадратом массы Q^2 , движущийся вдоль оси Z , характеризуется векторами поляризации:

$$\epsilon_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0), \quad \epsilon_L = \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \left(\sqrt{Q^2} + \nu^2, 0, 0, \nu \right), \quad (1.17)$$

которые удовлетворяют условию калибровочной инвариантности $(q\epsilon) = 0$.

Обозначим через K поток падающих виртуальных фотонов. Используя правила Фейнмана [7] для редуцированной диаграммы $\gamma N \rightarrow X$, можно записать:

$$\sigma_{\pm, L} = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{em}}}{K} \epsilon_{\pm, L}^{*, \mu} W_{\mu\nu} \epsilon_{\pm, L}^\nu. \quad (1.18)$$

После соответствующих преобразований (см. [7]) получим связь между СФ и сечением поглощения виртуальных фотонов:

$$\sigma_T = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{em}}}{K} W_1, \quad \sigma_L = \frac{4\pi^2 \alpha_{\text{em}}}{K} \left[W_2 \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) - 1 \right]. \quad (1.19)$$

Если ввести обозначение

$$R = \frac{\sigma_L}{\sigma_T} = \frac{W_2}{W_1} \left(1 + \frac{\nu^2}{Q^2} \right) - 1, \quad (1.20)$$

можно исключить W_1 из выражения (1.14) и записать дифференциальное сечение в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} &= \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{Q^4} \left[1 - y + \frac{y^2}{2(1+R)} + \frac{Mxy}{E} \left(\frac{1}{1+R} + \frac{1}{2} \right) \right] W_2(Q^2, \nu) = \\ &= \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{Q^4} \left[1 - y + \frac{y^2}{2(1+R)} \right] W_2(Q^2, \nu), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где последнее равенство справедливо в пределе $M/E \rightarrow 0$.

СФ W_1 и W_2 имеют размерность (масса) $^{-1}$. Вводя безразмерные СФ $F_1 = MW_1$ и $F_2 = \nu W_2$, дифференциальное сечение можно переписать в виде

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha_{\text{em}}^2}{Q^4} \left[1 - y + \frac{y^2}{2(1 + R(x, Q^2))} \right] F_2(x, Q^2). \quad (1.22)$$

1.2. Радиационные поправки к однофотонному обмену в глубоконеупругом рассеянии мюонов. Общим свойством всех инклюзивных экспериментов является невозможность экспериментально выделить в них (среди множества электрослабых реакций) канал, который соответствует реакции однофотонного обмена. Чтобы вычислить СФ $R(x, Q^2)$ и $F_2(x, Q^2)$ из экспериментально измеряемого сечения σ_{exp} инклюзивного процесса (1.1), нужно выделить сечение σ_0 однофотонного обмена, описываемого диаграммой на рис. 1. Для этой цели необходимо из наблюдаемого сечения σ_{exp} вычесть вклад σ_{RC} высших по константе электромагнитного взаимодействия процессов.

Существует общепринятый подход, позволяющий связать измеряемое сечение σ_{exp} с сечением реакции однофотонного обмена σ_0 . Этот метод называется процедурой «радиационных поправок» (РП) [9].

Так как целью современных экспериментов по ГНР лептонов на нуклонах является измерение СФ нуклонов с точностью на уровне нескольких процентов, то теоретические расчеты РП должны включать рассмотрение процессов, которые дают вклад в сечение более 1 % в кинематической области, измеряемой в эксперименте. Впервые расчеты РП были сделаны Дж. Швингером (см. обзор [10]).

Для ряда экспериментов по ГНР лептонов использовались расчеты РП, полученные в работе [11]. В этой работе сечения электрослабых процессов были вычислены по формулам, учитывающим члены разложения порядка α_{em}^3 ряда теории возмущений (ТВ). На современном уровне для извлечения СФ используются результаты расчетов РП, полученных в работах [12–15], где был достигнут значительный прогресс: рассмотрены все процессы до порядка α_{em}^4 ряда теории возмущений; процессы электрослабого взаимодействия и радиационные процессы, связанные с адронной вершиной. Авторы в расчетах РП использовали 40 диаграмм (рис. 3).

Диаграмма 1 описывает реакцию ГНР лептонов в однофотонном приближении и является членом ряда теории возмущений порядка α_{em}^2 . Процессы, соответствующие членам разложения в ряд порядка α_{em}^3 , представлены диаграммами 2–9, а порядка α_{em}^4 — диаграммами 11–30. Электрослабые процессы описаны диаграммами 10, 31–40.

Сечения всех процессов вычислены в рамках стандартной модели. Для описания адронной вершины (диаграммы 7–9) использовалась кварк-партоновая модель. Поскольку РП невозможно получить без привлечения информации о СФ нуклона, результаты расчетов РП можно рассматривать как

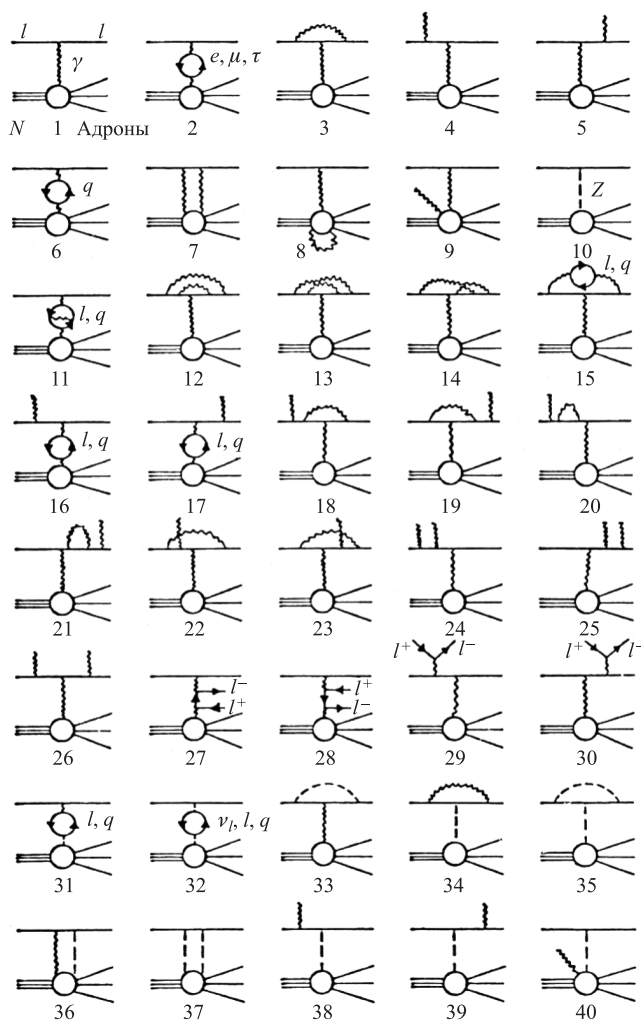


Рис. 3. Диаграммы, используемые при расчете радиационных поправок. Обозначения даны на первой диаграмме

оценку величины искомой поправки. Для получения более точного приближения при вычислении СФ на последней стадии выполняется итерационная процедура.

Согласно оценке авторов [15], теоретические неопределенности вычисления РП в большей части кинематической области составляют от 0,3 до 0,5 % и на уровне 1 % на ее границе.

Обычно учет РП осуществлялся при моделировании методом коррекции веса каждого сгенерированного события. Для сокращения времени моделирования используется алгоритм, разработанный авторами [14, 15]: РП рассчитываются для нескольких значений первичной энергии; полученная таблица поправок аппроксимируется полиномом с 40 параметрами, а в качестве аргументов — логарифмы кинематических переменных E , $1 - y$, x и W^2 . Параметры полинома используются в процессе моделирования в программе вычисления РП для каждого события. Потери точности за счет применения этой процедуры обычно не превышают 0,5 % (при $y \leq 0,95$) во всей исследуемой области.

Практически расчеты РП (в частности, в эксперименте с мюонами) выполнялись с помощью программы TERAD. Радиационные поправки при этом вводятся с помощью функции $\delta(E_0, x, Q^2)$, определенной как отношение инклюзивного сечения процесса (1.1) и сечения однофотонного обмена:

$$\delta(E_0, x, Q^2) = \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sigma_0} = \frac{\sigma_0 + \sigma_{\text{RC}}}{\sigma_0} = 1 + \frac{\sigma_{\text{RC}}}{\sigma_0}, \quad (1.23)$$

где σ_0 — дифференциальное сечение однофотонного обмена (1.22); σ_{RC} — вклад высших по электромагнитной константе процессов, рассчитанных для определенного ядра мишени. Функция δ вычисляется для каждого вещества, которое используется в эксперименте, с точностью лучше 1 %.

1.3. Теоретическое описание ГНР лептонов. Как уже было сказано в п. 1.1, динамика взаимодействия в лептонной вершине ГНР описывается квантовой электродинамикой.

Взаимодействие в адронной вершине в однофотонном приближении определяется введенными СФ W_1 и W_2 , которые зависят в общем случае от двух инвариантных переменных.

Пионерские эксперименты по ГНР электронов показали [3, 4], что при $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$ функции $W_1(\nu, Q^2)$ и $W_2(\nu, Q^2)$ зависят только от безразмерного отношения инвариантных переменных $\omega = 2M\nu/Q^2 = 1/x$. Такое поведение структурных функций было предсказано ранее Бьеркеном [5] в пределе $\nu \rightarrow \infty$ и $Q^2 \rightarrow \infty$ при условии $\omega = \text{const}$:

$$MW_1(\omega, Q^2) \rightarrow F_1(\omega), \quad \nu W_2(\omega, Q^2) \rightarrow F_2(\omega). \quad (1.24)$$

Независимость безразмерных функций $F_1(\omega)$ и $F_2(\omega)$ от Q^2 означает их независимость от масс (масштабная инвариантность). Эти особенности поведения СФ послужили основой для развития ряда теоретических представлений для описания процесса ГНР лептонов, которые являлись ключом в изучении структуры нуклонов.

Партонная модель, впервые предложенная Фейнманом [7], предполагает, что ГНР лептонов происходит как некогерентное упругое рассеяние

на не взаимодействующих между собой точечных объектах, составляющих нуклон (рис. 4), так как для таких процессов не существует никакого масштаба масс.

Рассмотрим кратко выводы партонной модели. Так как партон считается точечным и не возбуждается, из сохранения четырехимпульса получим

$$(q + \xi p)^2 = \mu^2, \tag{1.25}$$

где ξp и $q + \xi p$ — импульсы партона до и после рассеяния, а μ — его масса (поперечным импульсом пренебрегаем). Так как $(\xi p)^2 = \mu^2$, то из (1.25) следует

$$\xi = -q^2/2(pq) = \frac{Q^2}{2M\nu} \equiv x. \tag{1.26}$$

Таким образом, при заданных значениях Q^2 и ν виртуальный фотон, испущенный лептоном, взаимодействует только с партоном, несущим долю x импульса начального нуклона.

В предположении, что все партоны имеют спин 1/2, с применением аппарата квантовой электродинамики для описания элементарного акта рассеяния лептона на точечном партоне было получено выражение (1.12) для тензора $W_{\mu\nu}$, ответственного за взаимодействие виртуального фотона с одним из партонов нуклона (см., например, [16]). Усреднение по всем партонам с учетом их функции распределения по импульсам в бьеркеновском пределе $\nu Q^2 \rightarrow \infty$,

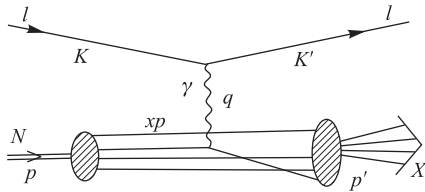


Рис. 4. Картина ГНР заряженных лептонов в партонной модели

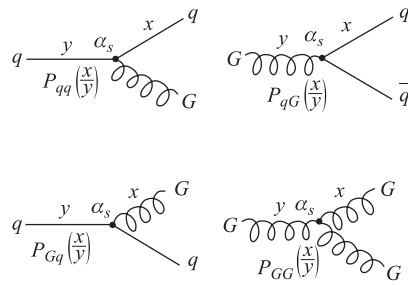


Рис. 5. КХД-вершины взаимодействия, определяющие Q^2 -эволюцию структурных функций

$x = \text{const}$, дает выражение для СФ:

$$MW_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F_1(x),$$

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \sum_i e_i^2 f_i(x) \equiv F_2(x),$$
(1.27)

где e_i^2 — квадрат заряда, а $f_i(x)$ — импульсное распределение i -го партона. Из соотношений (1.27) автоматически получается соотношение Каллана–Гросса:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) \quad (1.28)$$

и, следовательно, $R = 0$.

Бьеркен и Пешос [6] сделали важный шаг, отождествив заряженные партоны, участвующие в ГНР лептонов, с кварками Гелл-Манна и Цвейга [17, 18]. Они также предложили считать, что кроме трех «валентных» кварков нуклон содержит и море кварк-антикварковых пар.

Отождествление заряженных партонов с кварками приводит к плодотворной модели, называемой кварк-партонной. По аналогии с партонами (см. (1.27)) для описания распределения кварков и антикварков в нуклоне вводят их функции распределения $f_q(x) \equiv q(x)$, $f_{\bar{q}}(x) \equiv \bar{q}(x)$, где q и \bar{q} — тип кварка и антикварка. В этих обозначениях выражение (1.27) для СФ $F_2(x)$ принимает вид

$$F_2(x) = x \sum_q e_q^2 (q(x) + \bar{q}(x)). \quad (1.29)$$

Таким образом, измерив СФ $F_2(x)$, можно определить кварк-антикварковые распределения в нуклоне.

Более прецизионные измерения структурных функций в ГНР лептонов показали, что СФ зависят и от величины переданного четырехимпульса Q^2 [19–22], т. е. бьеркеновский скейлинг соблюдается лишь приблизительно.

Современной и последовательной теорией, описывающей взаимодействие адронов на малых расстояниях, является КХД, которая базируется на «цветной» кварковой модели, в которой к обычным квантовым числам в простой кварковой модели добавляется новое квантовое число, названное «цветом» [23, 24].

В КХД предполагается, что кварки взаимодействуют между собой, обмениваясь безмассовыми векторными частицами, называемыми «глюонами» (рис. 5). Силу взаимодействия определяет эффективная константа связи α_s , которая зависит от квадрата переданного четырехимпульса Q^2 и приводит к нарушению бьеркеновского скейлинга. Физически наблюдаемые адронные состояния являются бесцветными, т. е. синглетами по цветовой группе $SU(3)_c$.

Вследствие требования калибровочной инвариантности в КХД возникает прямое самодействие глюонов. Это приводит к специфическому свойству КХД, называемому асимптотической свободой, т. е. с возрастанием переданных значений Q^2 эффективная константа сильного взаимодействия α_s убывает, например, логарифмически в лидирующем порядке:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2f) \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (1.30)$$

где f — число типов (ароматов) кварков; Λ — единственный свободный параметр КХД.

Константу α_s также называют бегущей константой связи сильного взаимодействия. Здесь и далее мы будем использовать константу $a_s(Q^2)$, связанную с $\alpha_s(Q^2)$ соотношением

$$\alpha_s(Q^2) = 4\pi a_s(Q^2). \quad (1.31)$$

При $Q^2 \rightarrow \infty$, т. е. при $\alpha_s \rightarrow 0$, взаимодействие кварков исчезает и КХД переходит в теорию свободных частиц, т. е. предсказания кварк-партоновой модели справедливы в асимптотическом пределе.

Когда же Q^2 убывает, α_s растет и в пределе становится бесконечной. Это явление получило название «конфайнмента», что означает невозможность нахождения кварков в свободном состоянии вне адронов, что косвенно подтверждается опытами по поиску кварков в свободном состоянии, которые не удалось обнаружить до настоящего времени.

Убывание $\alpha_s(Q^2)$ с возрастанием Q^2 позволяет при достаточно больших Q^2 (например, при $Q^2 \geq 2 \text{ ГэВ}^2$, где константа α_s уже достаточно мала) использовать теорию возмущений по аналогии с квантовой электродинамикой. Выполняя разложения по этому параметру соотношений, описывающих эволюцию различных функций с изменением Q^2 , можно провести сравнение предсказаний этой эволюции с экспериментальными данными, в частности, с СФ, измеряемыми на опыте, и извлечь КХД-параметр Λ и/или, соответственно, константу сильного взаимодействия $\alpha_s(Q_0^2)$ при некотором значении Q_0^2 , которые не предсказываются этой теорией, а также распределения кварков и глюонов в адронах (как функции от переменной Бьеркена x), которые, в частности, необходимы для анализа данных по адрон-адронному взаимодействию на современных коллайдерах во FNAL и ЦЕРН. Интегрирование различных кварковых распределений позволяет выполнить проверку правил сумм для СФ, предсказываемых теорией.

1.4. Экспериментальные данные по ГНР заряженных лептонов. Исследование структуры нуклонов можно разделить на три временных этапа. Первый этап был связан с открытием сложной структуры протона в экспериментах Ховстадера [1]. В этих экспериментах по рассеянию электронов с

энергией 180 МэВ на протонах было показано, что электрический и магнитный заряды нуклона распределены и характеризуются так называемыми электрическим $G_E(Q^2)$ и магнитным $G_M(Q^2)$ формфакторами. Область этого распределения имеет размер $r \sim 10^{-13}$ см.

Второй этап исследований структуры нуклона связан с выполнением экспериментов на линейном ускорителе электронов SLAC (США) [4], где электроны были ускорены до высоких энергий 18 ГэВ. В этих экспериментах был изучен процесс ГНР с большой передачей энергии и импульса от первичной частицы (электрона) нуклону мишени, что позволило исследовать структуру нуклона на расстояниях $\sim 3 \cdot 10^{-15}$ см, т. е. «залезть» вовнутрь нуклона.

Выполненные исследования показали существенное различие в Q^2 -зависимостях сечений упругого и неупругого рассеяния электронов на нуклонах. Сечение ГНР с ростом передаваемого четырехимпульса падало по закону $1/Q^4$, вместо зависимости $1/Q^8$, характерной для пространственного распределения заряда нуклона в сфере радиуса r [3, 4].

Результаты этих экспериментов указывали на наличие внутри нуклона точечноподобных объектов, получивших название партонов. Явление бьеркеновского скейлинга [5, 6], обнаруженное в экспериментах в SLAC (Q^2 до 8 ГэВ²), стало мощным стимулом для становления кварк-партоновой модели [7]. Однако дальнейшие исследования в более широком диапазоне до $Q^2 \sim 20$ ГэВ² показали, что скейлинг нарушается и существует другой механизм взаимодействия лептона с нуклоном. Кандидатом для объяснения этого механизма нарушения скейлинга стала КХД как теория сильных взаимодействий.

Третий этап исследований структуры нуклона, который начался в 1970-е гг., ознаменовался выполнением прецизионных экспериментов на пучках мюонов, нейтрино и электронов в ЦЕРН, FNAL и SLAC с целью изучения предсказаний КХД. В этих экспериментах с высокой точностью ($\sim 1,5 - 2\%$) были измерены распределения партонов внутри нуклона и ядер в широкой области кинематических переменных ($0,05 < x < 0,85$, $0,5 < Q^2 < 300$ ГэВ²). Анализ полученных данных позволил сделать ряд фундаментальных открытий, в частности:

- 1) имеются три валентных кварка (u, d) и море кварков и антикварков;
- 2) кварки — точечные частицы, имеющие дробные электрический заряд и спин $1/2$;
- 3) кварки в нуклоне «склеены» с помощью нейтральных безмассовых частиц — глюонов, ответственных за сильные взаимодействия;
- 4) свойства свободных нуклонов и нуклонов, связанных в ядрах, различны;
- 5) нарушение скейлинга проистекает в соответствии с предсказаниями КХД.

Выполненные эксперименты внесли основополагающий вклад в становление КХД как теории сильных взаимодействий.

Особую роль сыграли эксперименты, выполненные на пучках мюонов. Это связано с тем, что по мере перехода к высоким энергиям использование электронных пучков становится сложным из-за больших потерь энергии электронов при ускорении и прохождении их через вещество. Эффективная радиационная длина мюона на фактор $m_\mu^2/m_e^2 \sim 43\,000$ больше, чем у электрона, поэтому в экспериментах с мюонами возможно использование длинных мишеней, что существенно увеличивает светимость экспериментов и расширяет доступную область кинематических переменных (x, Q^2) .

Лучшей демонстрацией таких экспериментов являются опыты по исследованию ГНР, выполненные коллаборацией BCDMS [25–29]. Экспериментальная установка представляла собой тороидальный магнитный спектрометр, включающий железный магнит с тороидальной формой магнитного поля, протяженную мишень (углерод, водород, дейтерий, азот, железо) длиной 40 м и детекторы частиц [30]. Эксперимент обладал рекордной светимостью до 10^{38} и позволял выполнить измерение СФ F_2 на углероде, водороде и дейтерии до $Q^2 \sim 280$ ГэВ² со статистической точностью на уровне 1,5%. Данные, полученные в этом эксперименте, дали возможность не только качественно описать нарушение скейлинга в ГНР, но и впервые измерить это нарушение с высоким уровнем достоверности. Тщательный анализ полученных данных по F_2 как отдельно, так и совместно с другими экспериментальными данными NMC [31] и SLAC [32] позволил извлечь константу α_s с экспериментальной ошибкой $\sim 2,5\%$.

Ниже в данной работе приведены результаты этого анализа.

2. КХД В ПРИЛОЖЕНИИ К ПРОЦЕССУ ГНР

2.1. Феноменология КХД и ее приложение к ГНР заряженных лептонов. Подробное описание положений КХД и вычисления моментов СФ (см. определение ниже в (2.6)), необходимых для этого формул коэффициентных функций аномальных размерностей можно найти в литературе [33–36]. Вывод интегродифференциальных уравнений Докшицера–Грибова–Липатова–Альтарели–Паризи (ДГЛАП) [37] и доказательства эквивалентности связи Q^2 -зависимости моментов СФ с уравнениями ДГЛАП содержатся в работах [38, 39].

Здесь только кратко приведены основные формулы КХД, необходимые и используемые ниже в анализе (см., например, [40]).

Как было показано выше, адронная часть сечения ГНР может быть представлена в виде

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\nu q_\mu}{q^2}\right) F_1(x, Q^2) - \left(p_\mu - \frac{(pq)q_\mu}{q^2}\right) \left(p_\nu - \frac{(pq)q_\nu}{q^2}\right) \frac{2x}{q^2} F_2(x, Q^2). \quad (2.1)$$

Тензор $W_{\mu\nu}$ связан по оптической теореме

$$W_{\mu\nu}(q, p) = \text{Im} T_{\mu\nu}(q, p) \quad (2.2)$$

с амплитудой упругого рассеяния вперед фотона на адроне:

$$T_{\mu\nu}(q, p) = i \int d^4 z e^{iqz} \langle p | T(J_\mu(z) J_\nu^+(0)) | p \rangle = e_{\mu\nu} T_L(x, Q^2) + d_{\mu\nu} T_2(x, Q^2), \quad (2.3)$$

где

$$e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \quad d_{\mu\nu} = - \left[g_{\mu\nu} + 2x \frac{p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu}{q^2} + p_\mu p_\nu \frac{4x^2}{q^2} \right]. \quad (2.4)$$

Инварианты T_L и T_2 разлагаются в ряд по обратным степеням x (здесь и далее индекс k пробегает значения 2 и L):

$$T_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n T_{k,n}, \quad (2.5)$$

где коэффициенты $T_{k,n}$ совпадают (для четных n) с моментами структурных функций F_k :

$$T_{k,n} = M_{k,n} = \int_0^1 dx x^{n-2} F_k(x, Q^2) \quad (n = 2m). \quad (2.6)$$

Далее везде в этом разделе n будут принимать четные значения.

С другой стороны, произведение токов в уравнении (2.3) можно представить через набор локальных операторов Вильсона $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^j$ с коэффициентными функциями $C_n^j(z)$ *:

$$T(J(z) J^+(0)) = \sum_{n,j} C_n^j O_{\mu_1 \dots \mu_n}^j. \quad (2.7)$$

*Здесь и далее индекс j пробегает значения NS, ψ и G , которыми обозначены несинглетная и синглетная кварковые, а также глюонная компоненты соответственно.

Подстановка (2.7) с учетом (2.5) и (2.6) позволяет представить моменты $M_{k,n}$ структурных функций в виде суммы произведений коэффициентных функций $C_{k,n}^j(Q^2/\mu^2)$ и матричных элементов $\langle p | O_{\mu_1 \dots \mu_n}^j | p \rangle = p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n} A_n^j(\mu^2)$, которые осуществляют операцию факторизации:

$$M_{k,n}(Q^2) = \sum_j C_{k,n}^j \left(\frac{Q^2}{\mu^2} \right) A_n^j(\mu^2). \quad (2.8)$$

Коэффициентные функции удовлетворяют ренормгрупповым уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_{\text{NS}}^n \right) C_{k,n}^{\text{NS}} \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g \right) &= 0, \\ \sum_j \left(\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \bar{\beta} \frac{\partial}{\partial g} \right] \delta_{ji} - \gamma_{ji}^n \right) C_{k,n}^j \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, g \right) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где $\bar{\beta}$ — функция Гелл-Манна–Лоу; γ_{NS}^n — аномальная размерность несинглетного оператора $O_{\mu_1 \dots \mu_n}^{\text{NS}}$, а γ_{ji}^n — элементы матрицы аномальных размерностей операторного вектора $\mathbf{O}_{\mu_1 \dots \mu_n} = (O_{\mu \dots \mu_2}^\psi, O_{\mu_1 \dots \mu_n}^G)$ в кварковых и глюонных обкладках.

Решение уравнений (2.9) дает для коэффициентных функций следующие выражения:

$$\begin{aligned} C_{k,n}^{\text{NS}}(Q^2/\mu_2, a_s) &= C_{k,n}^{\text{NS}} \left(1, a_s(Q^2) \right) \exp \left(- \int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(Q^2)} da' \frac{\gamma_{\text{NS}}^n(a')}{2\bar{\beta}(a')} \right), \\ \mathbf{C}_{k,n}(Q^2/\mu^2, a_s) &= \left[T_\alpha \exp \left(\int_{a_s(Q^2)}^{a_s(\mu^2)} da' \frac{\gamma^n(a')}{2\bar{\beta}(a')} \right) \right] \mathbf{C}_{k,n} \left(1, a_s(Q^2) \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где a_s определена ранее в (2.2), а T_α -экспонента определена как

$$\begin{aligned} T_\alpha \exp \int_{a_s(Q^2)}^{a_s(\mu^2)} da' \frac{\gamma^n(a')}{2\bar{\beta}(a')} &= 1 + \int_{a_s(Q^2)}^{a_s(\mu^2)} da' \frac{\gamma^n(a')}{2\bar{\beta}(a')} + \int_{a_s(Q^2)}^{a_s(\mu^2)} da' \int_{a_s(\mu^2)}^{a'} da'' \frac{\gamma^n(a')\gamma^n(a'')}{4\bar{\beta}(a')\bar{\beta}(a'')} + \dots, \\ \mathbf{C}_{k,n} &\equiv \begin{pmatrix} C_{k,n}^\psi \\ C_{k,n}^G \end{pmatrix}, \quad \gamma^n \equiv \begin{pmatrix} \gamma_{\psi\psi}^n & \gamma_{G\psi}^n \\ \gamma_{\psi G}^n & \gamma_{GG}^n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Соотношения (2.10) и (2.11) справедливы для любого порядка теории возмущений.

В предположении достаточной малости константы связи a_s можно их разложить в ряды по этому параметру:

$$C_{2,n}^j(1, a_s(Q^2)) = 1 - \delta_G^j + B_{2,n}^{(1)j} a_s(Q^2) + \dots, \quad (2.12)$$

$$C_{L,n}^j(1, a_s(Q^2)) = B_{L,n}^{(1)j} a_s(Q^2) \left(1 + R_{L,n}^{(2)j} a_s(Q^2) + \dots \right), \quad (2.13)$$

$$\bar{\beta}(a_s) = - \sum_{m=0} \beta_m a_s^{m+2}, \quad (2.14)$$

$$\gamma_{\text{NS}}^n(a_s) = \sum_{m=0} \gamma_{\text{NS}}^{(m)n} a_s^{m+1}, \quad \hat{\gamma}^n(a_s) = \sum_{m=0} \hat{\gamma}^{(m)n} a_s^{m+1}, \quad (2.15)$$

где δ_G^j — символ Кронекера.

Подставляя (2.12)–(2.15) в выражения (2.10) и диагонализуя синглетный вклад, получаем во втором порядке по $a_s(Q^2)$ (здесь и далее, кроме специально отмеченных мест, $i = \text{NS}, +, -$):

$$M_{2,n}(Q^2) = \sum_i A_n^i [a_s(Q^2)]^{d_i^n} \left(1 + a_s(Q^2) \left[B_{2,n}^{(1)i} + \bar{Z}_i^n \right] + O(a_s^2(Q^2)) \right), \quad (2.16)$$

$$M_{L,n}(Q^2) = \sum_i A_n^i B_{L,n}^{(1)i} [a_s(Q^2)]^{d_i^n + 1} \left(1 + a_s(Q^2) \left[R_{L,n}^{(2)i} + \bar{Z}_i^n \right] + O(a_s^2(Q^2)) \right), \quad (2.17)$$

где

$$\begin{aligned} d_{\text{NS}}^n &= \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(0)n}}{2\beta_0}, \quad d_{\pm}^n = \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n}}{2\beta_0}, \\ B_{k,n}^{(1)\pm} &= B_{k,n}^{(1)S} + \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{SS}^{(0)n}}{\gamma_{SG}^{(0)n}} B_{k,n}^{(1)G}, \\ R_{k,n}^{(2)\pm} &= R_{k,n}^{(2)S} + \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{SS}^{(0)n}}{\gamma_{SG}^{(0)n}} R_{k,n}^{(2)G}, \\ \bar{Z}_{\text{NS}}^n &= \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(1)n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(0)n} \beta_1}{2\beta_0^2}, \\ \bar{Z}_{\pm}^n &= \frac{\gamma_{\pm\pm}^{(1)n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{\pm}^{(0)n} \beta_1}{2\beta_0^2} - \frac{\gamma_{\pm\mp}^{(1)n}}{2\beta_0 + \gamma_{\pm}^{(0)n} - \gamma_{\mp}^{(0)n}}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

а A_n^i — нормировочные параметры.

Коэффициенты $B_{k,n}^{(1)j}$ имеют вид в $\overline{\text{MS}}$ -схеме:

$$\begin{aligned} B_{2,n}^{(1)\text{NS}} &= \frac{4}{3} \left\{ 2S_1^2(n) - 2S_2(n) + \left(3 - \frac{2}{n(n+1)} \right) S_1(n) + \frac{3}{4} + \frac{4}{(n+1)} + \frac{2}{n^2} - 9 \right\}, \\ B_{L,n}^{(1)\text{NS}} &= \frac{16}{3(n+1)}, \quad B_{k,n}^\psi = B_{k,n}^{\text{NS}}, \quad B_{L,n}^{(1)G} = \frac{8f}{(n+1)(n+2)}, \\ B_{2,n}^{(1)G} &= 2f \left\{ \frac{4}{n+1} - \frac{4}{n+2} + \frac{1}{n^2} - \frac{n^2+n+2}{n(n+1)(n+2)} (1 + S_1(j)) \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$S_a(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}. \quad (2.21)$$

2.2. Партоновые распределения и их Q^2 -эволюция. Для упрощения анализа уравнений (2.16) и (2.17) удобно ввести партоновые распределения (ПР), через которые можно выразить одновременно и поперечную, и продольную СФ.

Введем несинглетную $x\Delta(x, Q^2)$ и синглетную $x\Sigma(x, Q^2)$ функции распределения кварков, а также $xG(x, Q^2)$ — функцию распределения глюонов, определив их моменты в виде

$$\begin{aligned} \Delta_n(Q^2) &= \Delta_n(\mu^2) \exp \left(- \int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(Q^2)} da' \frac{\gamma_{\text{NS}}^n(a')}{2\beta(a')} \right), \\ \begin{pmatrix} \Sigma_n(Q^2) \\ G_n(Q^2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Sigma_n(\mu^2) \\ G_n(\mu^2) \end{pmatrix} \left[T_\alpha \exp \left(- \int_{a_s(\mu^2)}^{a_s(Q^2)} da' \frac{\gamma^n(a')}{2\beta(a')} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сравнивая выражения (2.9)–(2.11) и (2.22) первых двух порядков по a_s , получим в LO*

$$\begin{aligned} M_{2,n}(Q^2) &= \delta_{\text{NS}}^2 \Delta_n(Q^2) + \delta_\psi^2 \Sigma_n(Q^2), \\ M_{L,n}(Q^2) &= B_{L,n}^{(1)\psi} a_s(Q^2) M_{2,n}(Q^2) + B_{L,n}^{(1)G} a_s(Q^2) \delta_\psi^2 G_n(Q^2), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где коэффициенты $\delta_{\text{NS}}^2 = 1/6$ и $\delta_\psi^2 = 5/18$ при учете зарядов кварков (u, d, s, c).

*Следуя общепринятым обозначениям, введем символы LO (leading order) для ведущего порядка теории возмущений (ТВ), NLO (next-to-leading order) и NNLO (next-to-next-to-leading order) для следующих двух.

В NLO

$$\begin{aligned}
M_{2,n}(Q^2) &= \delta_{\text{NS}}^2 \Delta_n(Q^2) \left(1 + a_s(Q^2) B_{2,n}^{(1)\text{NS}} \right) + \\
&\quad + \delta_\psi^2 \left[\Sigma_n(Q^2) \left(1 + a_s(Q^2) B_{2,n}^{(1)\psi} \right) + a_s(Q^2) B_{2,n}^{(1)G} G_n(Q^2) \right], \\
M_{L,n}(Q^2) &= B_{L,n}^{(1)\psi} a_s(Q^2) \left[\delta_{\text{NS}}^2 \Delta_n(Q^2) \left(1 + a_s(Q^2) R_{L,n}^{(2)\text{NS}} \right) + \right. \\
&\quad + \delta_\psi^2 \Sigma_n(Q^2) \left(1 + a_s(Q^2) R_{L,n}^{(2)\psi} \right) \left. + \right. \\
&\quad \left. + B_{L,n}^{(1)G} a_s(Q^2) \delta_\psi^2 G_n(Q^2) \left(1 + a_s(Q^2) R_{L,n}^{(2)G} \right) \right],
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где коэффициенты $B_{k,n}^{(1)j}$ даны ранее в (2.20), $R_{L,n}^{(2)j}$ могут быть найдены в [41, 42], а уравнения

$$\begin{aligned}
\Delta_n(Q^2) &= \Delta_n(Q_0^2) \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_{\text{NS}}^n} H_{\text{NS}}^n(Q^2, Q_0^2), \\
\Sigma_n(Q^2) &= \left[(1 - a_n) \Sigma_n(Q_0^2) - \tilde{a}_n G_n(Q_0^2) \right] \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_+^n} H_{+\psi}^n(Q^2, Q_0^2) + \\
&\quad + \left[a_n \Sigma_n(Q_0^2) + \tilde{a}_n G_n(Q_0^2) \right] \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_-^n} H_{-\psi}^n(Q^2, Q_0^2), \tag{2.25} \\
G_n(Q^2) &= \left[a_n G_n(Q_0^2) - \varepsilon_n \Sigma_n(Q_0^2) \right] \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_+^n} H_{+G}^n(Q^2, Q_0^2) + \\
&\quad + \left[(1 - a_n) G_n(Q_0^2) + \varepsilon_n \Sigma_n(Q_0^2) \right] \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_-^n} H_{-G}^n(Q^2, Q_0^2) \tag{2.26}
\end{aligned}$$

определяют Q^2 -эволюцию несинглетной и синглетной комбинации кварков и глюонов от исходного значения Q_0^2 .

Величины H_{NS}^n и $H_{\pm i}^n$ равны нулю в ведущем порядке теории возмущений, а в следующем приближении определяются формулами (здесь $i = \psi, G$):

$$\begin{aligned}
H_n^{\text{NS}}(Q^2, Q_0^2) &= 1 + (a_s(Q^2) - a_s(Q_0^2)) Z_{\text{NS}}^n, \\
H_{\pm i}^n(Q^2, Q_0^2) &= 1 + (a_s(Q^2) - a_s(Q_0^2)) Z_{\pm i}^n + \\
&\quad + \left\{ a_s(Q^2) \left[\frac{a_s(Q^2)}{a_s(Q_0^2)} \right]^{d_{\mp}^n - d_{\pm}^n} - a_s(Q_0^2) \right\} K_{\pm \mp}^i,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

а коэффициенты $K_{\pm\mp}^i$, Z_{\pm}^n , Z_{NS}^n , a_n , \tilde{a}_n , ε_n , d_{NS}^n , d_{\pm}^n , λ_{\pm}^n выражаются через аномальные размерности:

$$\begin{aligned}
K_{\pm\mp}^i &= \begin{cases} \frac{\gamma^{(1),n}}{2\beta_0 + \lambda_{\pm}^n - \lambda_{\mp}^n}, & i = \psi, \\ \frac{\gamma_{\pm\mp}^{(1),n}}{2\beta_0 + \lambda_{\pm}^n - \lambda_{\mp}^n} \frac{\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_{\pm}^n}{\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_{\pm}^n}, & i = G. \end{cases} \\
Z_{\pm}^n &= \frac{\gamma_{\pm\pm}^{(1),n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{\pm}^n}{2\beta_0^2} \beta_1, \quad Z_{\text{NS}}^n = \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(1),n}}{2\beta_0} - \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(0),n}}{2\beta_0^2} \beta_1, \\
a_n &= \frac{\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n}{\lambda_-^n - \lambda_+^n}, \quad \tilde{a}_n = \frac{\gamma_{\psi,G}^{(0),n}}{(\lambda_-^n - \lambda_+^n)}, \quad \varepsilon_n = \frac{\gamma_{G\psi}^{(0),n}}{\lambda_-^n - \lambda_+^n}, \\
d_{\text{NS}}^n &= \frac{\gamma_{\text{NS}}^{(0),n}}{2\beta_0}, \quad d_{\pm}^n = \frac{\gamma_{\pm}^n}{2\beta_0}, \\
\lambda_{\pm}^n &= \frac{1}{2} \left[\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} + \gamma_{GG}^{(0),n} \pm [(\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \gamma_{GG}^{(0),n})^2 + 4\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{G\psi}^{(0),n}]^{1/2} \right], \\
\gamma_{--}^{(1),n} &= \frac{1}{(\lambda_-^n - \lambda_+^n)} \frac{1}{\gamma_{\psi G}^{(0),n}} [D_1^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) + D_2^n \gamma_{\psi,G}^{(0),n}], \\
\gamma_{-+}^{(1),n} &= \frac{1}{(\lambda_-^n - \lambda_+^n)} \frac{1}{\gamma_{\psi G}^{(0),n}} [D_1^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_-^n) + D_2^n \gamma_{\psi G}^{(0),n}], \\
\gamma_{+-}^{(1),n} &= \frac{1}{(\lambda_-^n - \lambda_+^n)} \frac{1}{\gamma_{\psi G}^{(0),n}} [D_3^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) + D_4^n \gamma_{\psi G}^{(0),n}], \\
\gamma_{++}^{(1),n} &= \frac{1}{(\lambda_-^n - \lambda_+^n)} \frac{1}{\gamma_{\psi G}^{(0),n}} [D_3^n (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_-^n) + D_4^n \gamma_{\psi G}^{(0),n}], \tag{2.28}
\end{aligned}$$

где функции D есть

$$\begin{aligned}
D_1^n &= \gamma_{\psi G}^{(0),n} \psi_{\psi\psi}^{(0),n} + (\lambda_-^n - \gamma_{\psi\psi}^{(0),n}) \gamma_{\psi G}^{(1),n}, \\
D_2^n &= \gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{G\psi}^{(1),n} + (\lambda_-^n - \gamma_{\psi\psi}^{(0),n}) \gamma_{GG}^{(1),n}, \\
D_3^n &= -\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{\psi\psi}^{(1),n} + (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) \gamma_{\psi G}^{(1),n}, \\
D_4^n &= -\gamma_{\psi G}^{(0),n} \gamma_{G\psi}^{(1),n} + (\gamma_{\psi\psi}^{(0),n} - \lambda_+^n) \gamma_{GG}^{(1),n}. \tag{2.29}
\end{aligned}$$

Нормировки $\Delta_n(Q_0^2)$, $\Sigma_n(Q_0^2)$ и $G_n(Q_0^2)$, входящие в (2.25) и (2.26), являются моментами неизвестных несинглетного, синглетного и глюонного распреде-

лений в точках отсчета Q_0^2 :

$$f_n(Q_0^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} x f(x, Q_0^2) \quad (f = \Delta, \Sigma, G). \quad (2.30)$$

Эти величины $x f(x, Q_0^2)$ могут рассматриваться как свободные параметры при выполнении анализа данных (см., например, (3.17)–(3.21)).

Аномальные размерности $\gamma_{\text{NS}}^{(0),n}$ и $\gamma_{\text{NS}}^{(1),n}$, а также $\gamma_{i,j}^{(0),n}$ и $\gamma_{i,j}^{(1),n}$ ($i, j = \psi, G$) в LO и NLO вычислены в работах [33–36]. Здесь приведем аномальные размерности только в лидирующем порядке, которые имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{NS}}^{(0),n} &= \frac{8}{3} \left[4S_1(n) - 3 - \frac{2}{n(n+1)} \right], \quad \gamma_{\psi\psi}^{(0),n} = \gamma_{\text{NS}}^{(0),n}, \\ \gamma_{\psi G}^{(0),n} &= -4f \frac{n^2 + n + 2}{n(n+1)(n+2)}, \quad \gamma_{G,\psi}^{(0),n} = -\frac{16}{3} \frac{(n^2 + n + 2)}{n(n^2 - 1)}, \\ \gamma_{GG}^{(0),n} &= 6 \left[4S_1(n) - \frac{11}{3} - \frac{4}{n(n-1)} - \frac{4}{(n+1)(n+2)} \right] + \frac{4}{3}f. \end{aligned} \quad (2.31)$$

2.3. КХД-методы анализа структурных функций. Проведение серии экспериментов по исследованию ГНР лептонов в ЦЕРН и FNAL стимулировало разработку методов и создание практических программ КХД-анализа данных по СФ.

К моменту получения первых данных в экспериментах коллабораций SLAC, EMC и BCDMS существенным прогрессом теории явилось завершение основных расчетов в рамках теории возмущений (т.е. в так называемой пертурбативной КХД (пКХД)) теоретических выражений для моментов СФ вплоть до второго порядка по бегущей константе связи КХД $\alpha_s(Q^2)$. Эти расчеты были выполнены двумя группами теоретиков [35, 36] и недавно подтверждены при вычислении моментов до третьего порядка по $\alpha_s(Q^2)$ [43–45].

Следует отметить, что в это время в практических процедурах (программах) анализа данных по СФ в рамках КХД использовали лишь формулы, учитывающие лидирующий порядок по $\alpha_s(Q^2)$.

На рис. 6 представлены результаты КХД-анализа с целью извлечения масштабного параметра Λ в лидирующем порядке существующих в это время данных разными авторами [46–50].

Из рисунка видны большие неопределенности и разброс в полученных значениях параметра Λ . Такие результаты можно объяснить различными причинами, в частности:

- область применения пКХД еще хорошо не известна;
- данные не имеют достаточной точности для сравнения с КХД;

Существуют три основных подхода для сравнения данных по ГНР лептонов с теоретическими предсказаниями КХД с целью извлечения параметра теории Λ (или бегущей константы связи α_s), нормировок кварковых и глюонных распределений.

- Первый подход основан на анализе моментов СФ, определяемых соотношением

$$M_i^{\text{exp}}(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} F_i^{\text{exp}}(x, Q^2), \quad (2.32)$$

где $i = 1, 2, 3$, $n = 2, 3, \dots$, т.е. прямое сравнение $M_i^{\text{exp}}(n, Q^2)$ с теоретическими моментами $M^{\text{QCD}}(n, Q^2)$, вычисляемыми в аналитической форме в КХД. Такой подход использовался на ранней стадии изучения предсказаний КХД [53].

Трудности использования этого метода заключаются в отсутствии экспериментальных данных для СФ F_i во всей области переменной x (т.е. в интервале от 0 до 1). Поэтому уже на этапе вычисления M_i^{exp} необходимо экстраполировать структурную функцию в неизмеряемую область по переменной x .

Вклад неопределенностей неизмеряемой области в M_i^{exp} при такой экстраполяции оказывался существенным (особенно при малых x), что значительно ухудшало точность извлекаемых из анализа результатов.

- Другой метод анализа основан на прямом численном решении интегродифференциальных эволюционных уравнений ДГЛАП [37]. Решение этих уравнений для КХД-анализа СФ требовало использования суперкомпьютеров для обеспечения необходимой точности и сходимости. С появлением таких компьютеров этот метод стал стандартным, хотя и недостаточно изученным с точки зрения точности и устойчивости получаемых результатов.

- Третий подход, основанный на разложении СФ в ряд по ортогональным полиномам [54], был предложен вследствие отсутствия суперкомпьютеров в 1970–1980 гг. и невозможности решений уравнений ДГЛАП с необходимой точностью.

Ортогональные полиномы Берштейна для КХД-анализа СФ впервые использовались в работе [55]. В дальнейшем методика применения полиномов Берштейна была усовершенствована в работах [56], создана практическая процедура для КХД-анализа, которая использовалась при обработке экспериментальных данных коллаборации EMC [55] в LO по α_s для синглетных функций и в NLO для несинглетных СФ.

Несколько позднее в работе [57] было предложено использовать для анализа разложение СФ по полиномам Лагера. С помощью этих полиномов, зависящих от переменной $y = \ln(1/x)$, удастся превратить интегродифференциальные уравнения ДГЛАП в систему алгебраических уравнений, доступных

для решения на средних ЭВМ. Практическая процедура (программа), основанная на применении полиномов Лагера, использовалась для анализа данных коллаборации CHARM [58] в лидирующем порядке.

Полиномы Якоби были предложены в работе [59] для разложения СФ по переменной x (при фиксированных значениях Q^2) и их изучения, а затем были использованы для КХД-анализа данных коллаборации CDHS [60] в несинглетном приближении.

Все предложенные для использования ортогональные полиномы равноправны с точки зрения математики, однако для практического приложения наиболее полезными оказываются полиномы Якоби.

В работах [61–63] был развит метод КХД-анализа СФ с использованием ортогональных полиномов Якоби как в несинглетном, так и в синглетном случаях. Метод был изучен с точки зрения точности и устойчивости результатов. Созданная практическая процедура (программа) использовалась для КХД-анализа СФ, полученных коллаборацией VCDMS на углеродной, водородной и дейтериевой мишенях, а также данных других экспериментов (SLAC, EMC, NMC, BFP).

2.4. Использование полиномов Якоби для КХД-анализа СФ. *2.4.1. Разложение СФ по ортогональным полиномам Якоби.* Разложение функций $F(x, Q^2)$ по ортогональным полиномам Якоби может быть представлено в виде [64]:

$$F(x, Q^2) = x^\alpha (1-x)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(Q^2) \Theta_k^{\alpha\beta}(x), \quad (2.33)$$

где $x^\alpha (1-x)^\beta = \omega^{\alpha\beta}$ — весовая функция и полиномы Якоби $\Theta_k^{\alpha\beta}(x)$ удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_0^1 dx \omega^{\alpha\beta}(x) \Theta_k^{\alpha\beta}(x) \Theta_{k'}^{\alpha\beta}(x) = \delta_{kk'}. \quad (2.34)$$

С помощью соотношения ортогональности коэффициенты $\alpha_k(Q^2)$ можно представить в виде

$$\alpha_k(Q^2) = \int_0^1 dx F(x, Q^2) \Theta_k^{\alpha\beta}(x). \quad (2.35)$$

Подстановка в (2.35) разложения полиномов по степеням x^j

$$\Theta_k^{\alpha\beta}(x) = \sum_{j=0}^k C_{kj}(\alpha, \beta) x^j \quad (2.36)$$

дает формулу для коэффициентов $\alpha_k(Q^2)$:

$$\alpha_k(Q^2) = \sum_{j=0}^k C_{kj}(\alpha, \beta) M(j+2, Q^2), \quad (2.37)$$

где $M(j+2, Q^2)$ — моменты, определенные соотношением

$$M(n, Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-2} F(x, Q^2). \quad (2.38)$$

Объединяя формулы (2.35) и (2.38), получим разложение $F(x, Q^2)$ по ортогональным полиномам Якоби:

$$F(x, Q^2) = x^\alpha (1-x)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \Theta_k^{\alpha, \beta}(x) \sum_{j=0}^k C_{kj}(\alpha, \beta) M(j+2, Q^2), \quad (2.39)$$

где матрицы $C_{kj}(\alpha, \beta)$ вычисляются с использованием разложения (2.36).

Формула (2.39) представит практическую ценность в случае, когда ряд будет достаточно быстро сходиться (или количество членов полинома уже не будет влиять на получаемые результаты) и можно будет ограничиться разумным конечным числом его членов N_{\max} , т. е.

$$F_{N_{\max}}^{\text{th}}(Q^2, x) = x^\alpha (1-x)^\beta \sum_{k=0}^{N_{\max}} \Theta_k^{\alpha, \beta}(x) \sum_{j=0}^k C_{kj}(\alpha, \beta) M(j+2, Q^2). \quad (2.40)$$

Таким образом, метод состоит в том, что используется конечный ряд (2.40) в качестве теоретических значений $F_{N_{\max}}^{\text{th}}$ для СФ, и он сравнивается с экспериментальными значениями F^{exp} в измеренных точках кинематических переменных x, Q^2 . Теоретические моменты $M(j+2, Q^2)$ вычисляются из КХД с помощью уравнений (2.16) и (2.17).

Все искомые неизвестные параметры находятся в выражениях для моментов (масштабный параметр Λ или α_s , параметры кварковых и глюонных распределений) и могут быть извлечены при минимизации функционала:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{F_{N_{\max}}^{\text{th}} - F_i^{\text{exp}}}{\Delta F_i^{\text{exp}}} \right)^2, \quad (2.41)$$

где ΔF_i^{exp} — экспериментальные ошибки измеренных СФ в N точках кинематических переменных x и Q^2 . Минимизация функционала осуществляется с помощью программы MINUIT [65].

2.4.2. *Исследование метода. Оценка точности метода.* Основной целью КХД-анализа СФ, измеренных в экспериментах по ГНР лептонов, является определение масштабного параметра теории Λ и/или константы связи α_s .

Масштабный параметр Λ определяет эффект нарушения скейлинга в СФ, т. е. определяет их Q^2 -зависимость. Одно из основных предсказаний КХД — нарушение скейлинга в СФ происходит по логарифмической зависимости. Поэтому довольно значительное изменение параметра Λ приводит к незначительным изменениям в величине СФ. Отсюда следует, что, если ставится задача извлечения масштабного параметра Λ , весьма важно выяснить, с какой точностью необходимо выполнять восстановление СФ (и/или их моментов), чтобы извлекать масштабный параметр Λ без значительного влияния неточности метода на получаемые результаты. В рассматриваемом случае необходимо изучить, какое количество членов разложения ряда N_{\max} (2.40) необходимо для обеспечения корректного извлечения параметра Λ .

Для получения таких оценок в работе [61] были найдены изменения значений СФ и/или их моментов при вариации Λ . Следуя этому анализу, рассмотрим величину (в %), характеризующую изменение моментов вследствие вариации Λ на величину $\Delta\Lambda$:

$$\Delta M[\%] = \frac{|M(n, Q^2, \Lambda) - M(n, Q^2, \Lambda + \Delta\Lambda)|}{M(n, Q^2, \Lambda)} \cdot 100. \quad (2.42)$$

При проведении расчетов моментов были использованы стандартные распределения кварков и глюонов, полученные в экспериментах [55]. Подробные результаты расчетов $\Delta M[\%]$ представлены в работах [62, 63], из которых следует, что изменение Λ на 25 % приводит к небольшим изменениям значений моментов (от 0,1 до 2 %) в зависимости от значений кинематических переменных.

Для изучения чувствительности СФ к изменению параметра Λ была рассмотрена величина

$$\Delta F[\%] = \frac{|F(x, Q^2, \Lambda) - F(x, Q^2, \Lambda - \Delta\Lambda)|}{F(x, Q^2, \Lambda)} \cdot 100, \quad (2.43)$$

в расчетах которой использовалась параметризация СФ в виде [66]

$$F(x, Q^2, \Lambda) = F_{\text{BG}}(x, Q^2) = x^{\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \tilde{s}} (1-x)^{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 \tilde{s}}, \quad (2.44)$$

где

$$\tilde{s} = \ln \left[\frac{\ln(Q^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)} \right]$$

со значениями $Q_0^2 = 27,5 \text{ ГэВ}^2$ и $\Lambda = 200 \text{ МэВ}$ (при четырех активных кварках), а значения $\tilde{\alpha}_i$ и $\tilde{\beta}_i$ были взяты из параметризации данных коллаборации EMC.

Значения $\Delta F(x, Q^2, \Lambda)$ в зависимости от переменных x и Q^2 представлены в работе [61]. Из полученных оценок следует, что изменение значения Λ на 25% приводит к изменению в СФ при $x = 0,65$ на 1–4%. При меньших значениях переменной x изменение в СФ еще меньше. Таким образом, для извлечения параметра Λ на уровне точности 5% (имеется в виду точность метода) требуется восстанавливать СФ или их моменты на уровне 0,2%. Методы, претендующие на извлечение параметра Λ на уровне точности 1%, должны обеспечивать точность восстановления СФ не хуже $4 \cdot 10^{-4}$. Это замечание можно отнести не только к методам, которые используют ортогональные полиномы, но к любым другим методам, с помощью которых извлекают параметр КХД Λ .

Для изучения точности метода в случае использования ортогональных полиномов Якоби исследована разность [62]:

$$\Delta_{N_{\max}}^{\alpha\beta} = \int_0^1 |f(x) - f_{N_{\max}}(x)| dx, \quad (2.45)$$

где функция $f(x) = x\Sigma(x, Q_0^2) = 2,67x^{0,25}(1-x)^{3,0} + 0,48(1-x)^8$ — типичное распределение для синглетной части СФ, а $f_{N_{\max}}(x)$ — конечная сумма ряда (2.40). Анализ поведения этого интеграла в зависимости от параметров весовой функции α и β показал, что существует два минимума интеграла (2.45) в зависимости от N_{\max} , показанных на рис. 7.

В первой области ($\beta \simeq 2, \alpha \simeq 0,25$) интеграл (2.45) имеет величину $10^{-4} - 10^{-3}$, а во второй области ($\beta = -0,9 - 3,0$ и $\alpha = -0,9 - 0,8$) — $10^{-7} - 10^{-5}$. Зависимость значений интеграла (2.45) от параметра α при фиксированной величине $\beta = 3$ для различных значений N_{\max} показана на рис. 8. Видно, что при $N_{\max} \sim 13$ наступает сходимость.

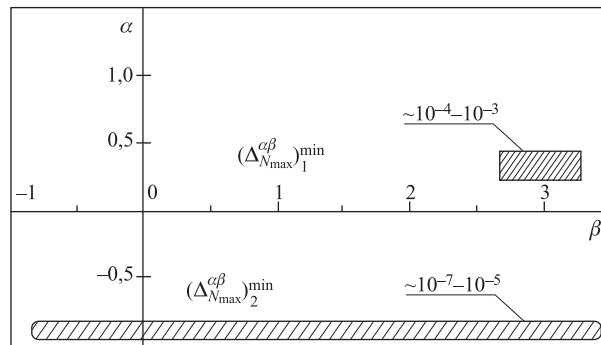


Рис. 7. Зависимость интеграла $\Delta_{N_{\max}}^{\alpha\beta}$ от параметров весовой функции

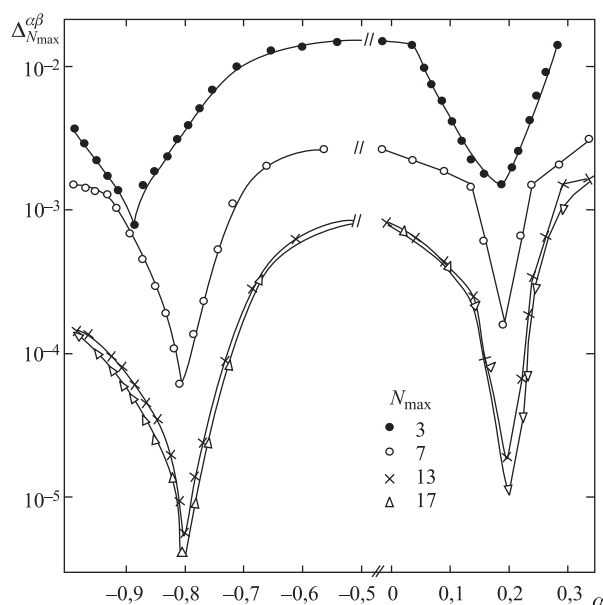


Рис. 8. Зависимость интеграла $\Delta_{N_{\max}}^{\alpha\beta}$ от параметра весовой функции α для различных значений N_{\max}

Таким же образом были изучены другие параметризации $x\Sigma(x, Q_0^2)$, описывающие данные коллабораций EMC и CDHS, и получены аналогичные результаты.

Изучение точности реконструкции СФ с помощью конечного числа членов разложения по полиномам Якоби показало, что она слабо зависит от параметров весовой функции α, β и числа членов разложения N_{\max} , начиная с $N_{\max} = 6$. Для синглетного вида СФ при $\alpha = -0,85$ и $\beta = 3$ можно получить точность $\sim 10^{-4}$ с числом членов ряда $N_{\max} \geq 8$ [62].

Анализ для несинглетной части в виде (3.14) показал [62], что уже при числе членов разложения $N_{\max} \sim 5$ можно получить точность реконструкции $\sim 10^{-4}$.

Следует отметить, что изучение свойств полиномов Якоби показало быструю сходимость решения при небольшом количестве используемых членов разложения, и можно, в частности, восстанавливать функции вида $f(x) = (1-x)^{\tilde{n}}$ с числом членов разложения, равным $\tilde{n} + 1$, с точностью не хуже $\sim 10^{-5}$.

В работе [63] также показано, что при восстановлении функции более сложного вида и данных с малыми значениями переменной x точность восстановления ухудшается (при $x < 0,01$) примерно в пять раз. Поэтому при

КХД-анализе в синглетном случае и при использовании данных с малыми значениями переменной x необходимо увеличивать число полиномов в разложении ряда (2.45) (необходимо более семи членов), что обеспечит точность восстановления СФ на уровне $\sim 10^{-4}$.

2.5. Иллюстрация работы метода. Для иллюстрации работы метода созданная процедура (программа) была использована в КХД-анализе экспериментальных данных коллаборации EMC (в то время эти данные были наиболее современными), измеренных в эксперименте по ГНР мюонов на железной мишени [55, 67] в несинглетном и синглетном случаях.

Для несинглетного анализа были использованы экспериментальные точки СФ F_2 , удовлетворяющие критериям следующего отбора: $x \geq 0,3$, $Q^2 \geq 5 \text{ ГэВ}^2$, $W^2 > 11 \text{ ГэВ}^2$, которые важны для устранения вклада глюонов и высших твистов. Распределение кварков было представлено в виде $F_2(x, Q_0^2) = (x/6)\Delta(x, Q_0^2)$ с $\Delta(x, Q_0^2)$, данной (3.14) при $Q_0^2 = 27,5 \text{ ГэВ}^2$. В качестве свободных параметров были использованы $\alpha_s, \beta_v, \gamma_v, C_v$ и масштабный параметр КХД Λ . Теоретические моменты вычислялись по формулам КХД (2.23) и (2.24).

Анализ был выполнен для лидирующего и следующего к лидирующему порядков по бегущей константе связи $\alpha_s(Q^2)$. Значения параметра Λ и соответствующие значения χ^2 в зависимости от N_{\max} показаны на рис. 9. Как следует из рисунка, стабильность параметра Λ достигается уже при $N_{\max} = 5$.

Был выполнен также синглетный анализ в лидирующем порядке по $\alpha_s(Q^2)$ с использованием следующих условий для отбора экспериментальных точек: $Q^2 \geq 5 \text{ ГэВ}^2$, $x \geq 0,05$. Распределения кварков и глюонов при $Q_0^2 = 27,5 \text{ ГэВ}^2$ были представлены в виде (3.15) и (3.16) и с дополнительными

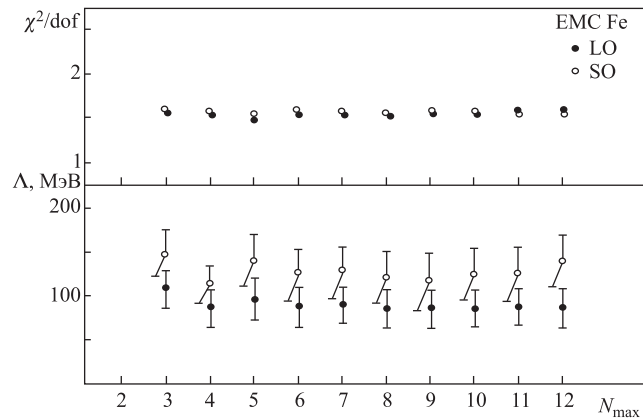


Рис. 9. Результаты несинглетного анализа EMC-данных в зависимости от N_{\max}

условиями, полученными из правила суммы для импульса нуклона:

$$\int_0^1 dx x [\Sigma(x, Q_0^2) + G(x, Q_0^2)] = 1. \quad (2.46)$$

При этом изучены:

- влияние параметров весовой функции α и β , а также N_{\max} на стабильность результатов;
- зависимость значений Λ от величины Q_0^2 .

На рис. 10 представлена зависимость значений Λ и χ^2/dof от параметров весовой функции α и значений $N_{\max} = 3-13$. Видно, что стабильность значений параметра Λ достигается уже при $N_{\max} = 8$ и при этом они слабо зависят от значений параметров весовой функции $\omega^{\alpha\beta}(x)$.

Зависимость параметра Λ и значений кварковых распределений от N_{\max} показана на рис. 11. Для $N_{\max} = 7-14$ среднее значение параметра $\Lambda = 114,7$ МэВ имеет погрешность $\pm 1,3$ МэВ. При этом статистическая ошибка, определяемая точностью экспериментальных точек F_2 , равна ± 20 МэВ.

2.5.1. Сравнение с другими методами. Разработанный и исследованный метод КХД-анализа СФ, использующий разложение СФ по ортогональным полиномам Якоби, позволяет выполнять анализ экспериментальных данных по ГНР для несинглетных и синглетных структурных функций в любом порядке теории возмущений на уровне точности лучше 1%.

Изучение точности и стабильности получаемых этим методом результатов показало, что при $N_{\max} \geq 5$ (несинглетный случай) и $N_{\max} \geq 7$ (синглетный

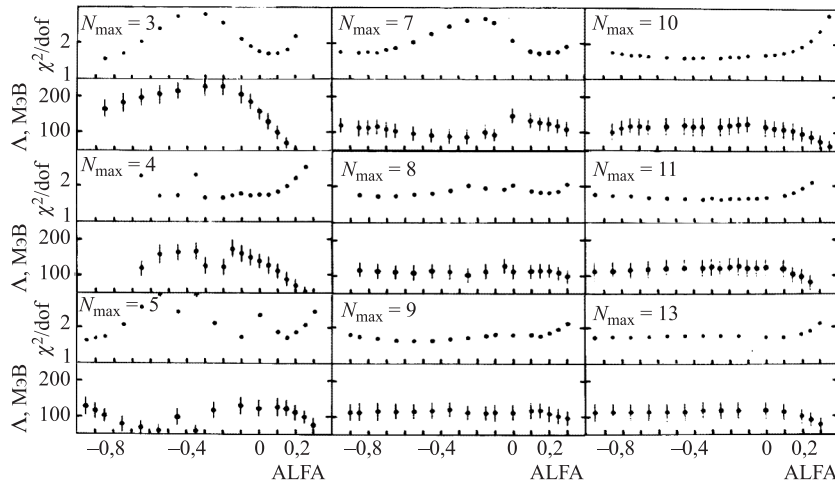


Рис. 10. Результаты синглетного анализа ЕМС-данных в зависимости от параметра весовой функции α и значений N_{\max}

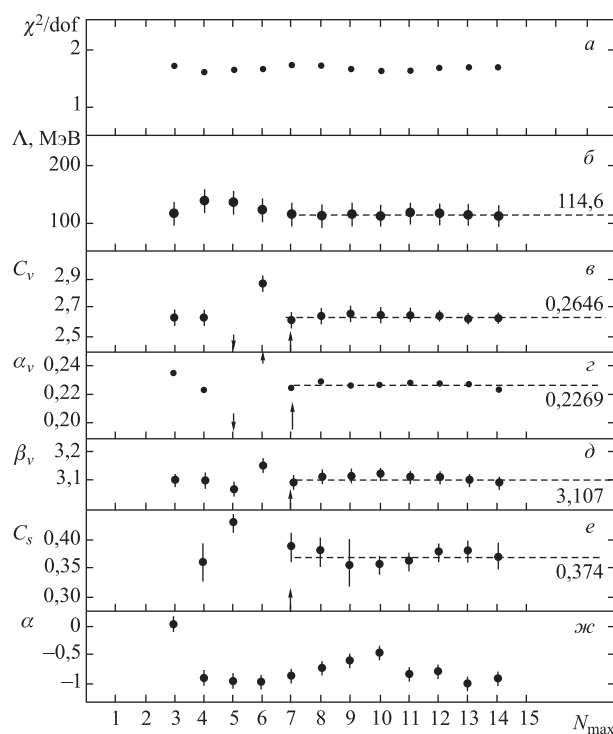


Рис. 11. Результаты синглетного анализа данных ЕМС. Зависимость Λ и параметров кварковых распределений от значений N_{\max}

случай) достигается точность восстановления на уровне 10^{-4} , что и гарантирует высокую чувствительность ($\sim 1\%$) к извлечению масштабного параметра Λ . Результаты анализа экспериментальных данных также показали, что стабильность значений параметра Λ достигается и в синглетном случае уже при $N_{\max} \geq 7$ и не зависит практически от параметров весовой функции α и β , взятых в области сходимости.

При сравнении с другими методами, использующими ортогональные полиномы, отметим, что для достижения точности восстановления СФ на уровне $0,5\%$ с помощью разложения по полиномам Берштейна и Лаггера необходимо использовать более 20 членов ряда. Авторы работ [55] и [58] при анализе использовали только 4 и 5 членов разложения соответственно полиномов Берштейна и Лаггера и при отбрасывании остальных не сделали оценки погрешности и ее влияния на точность извлечения масштабного параметра Λ .

Если сравнивать метод, использующий полиномы Якоби, со стандартным в настоящее время, основанным на численном решении интегродифферен-

циальных уравнений ДГЛАП, а также с другими методами, то следует отметить следующее.

- Трудности, связанные с очень большим машинным временем для решения уравнений, преодолены с появлением высокопроизводительных станций и персональных компьютеров, однако точность восстановления СФ при решении уравнений авторами, использующими этот метод, не демонстрируется.

- Во время выполнения представляемых работ были известны только четные моменты СФ (коэффициентные функции и аномальные размерности) для несинглетного случая до $n = 10$ и синглетного $n = 8$ в NNLO, т. е. до разложения $\alpha_s^3(Q^2)$. Поэтому как-то использовать метод численного решения уравнений ДГЛАП не представлялось возможным, так как это требует знания моментов СФ при любых значениях n . Метод разложения по полиномам Якоби требует знания только первых $n \leq N_{\max}$ моментов. Таким образом, с использованием вышеописанных теоретических результатов [43] этим методом в [68] был выполнен КХД-анализ в NNLO в несинглетном случае.

- Замечательное свойство полиномов Якоби — быстрая сходимость и высокая точность восстановления СФ при небольшом количестве членов разложения — связано с видом веса полиномов $\omega^{\alpha\beta} = x^\alpha(1-x)^\beta$, который совпадает по форме с главной x -зависимостью СФ для ГНР лептонов, на что было обращено внимание уже в пионерской работе Паризи и Сурласа [59].

- Как было отмечено выше, при анализе данных с малыми значениями переменной x для сохранения точности на уровне 10^{-4} требуется увеличение членов разложения до не менее 7. Причина этого может быть связана с усложнением параметризации СФ, которая в этом случае уже может существенно отличаться от весовой функции полиномов Якоби (см., например, [69, 70]) и происходит некоторое нарушение ортогональности.

- При использовании полиномов Берштейна и Лаггера необходимая точность восстановления СФ достигается при использовании не менее 20 членов ряда. При этом уже существенно влияют точности вычисления компьютеров.

- В настоящее время в литературе появилось достаточно много ссылок на использование полиномов Якоби для реконструкции СФ в различных приложениях [71–74]. При этом авторы также указывают на свойства быстрой сходимости и хорошей точности восстановления СФ [60, 75].

Разработанный метод позволяет быстро определять параметры, невычисляемые по теории возмущений, при выполнении КХД-анализа экспериментальных данных и требует относительно небольшого времени счета на современных ЭВМ.

2.6. Специфическое предсказание КХД для СФ. Основным критерием согласия при сравнении данных по СФ ГНР с предсказаниями теории служит гипотеза «глобального» χ^2 (т. е. соотношение (2.41)). Следует отметить, что чувствительность «глобального» χ^2 как критерия оценки при сравнении дан-

ных с теорией невелика. Это связано с тем, что одновременно с извлечением параметра Λ определяются параметры кварковых и глюонного распределений, которые, как и Λ , не предсказываются КХД.

Для СФ существует «специфическое» предсказание КХД. Это предсказание основано на поведении логарифмических производных как функций переменной x .

В каждом интервале по переменной x структурную функцию можно описать зависимостью*

$$F_2 = a_i(Q^2)^{b_i}, \quad (2.47)$$

где a_i и b_i — свободные параметры в i -м интервале переменной x . Взяв логарифм от левой и правой частей, получим

$$\ln F_2 = \ln a_i + b_i \ln Q^2. \quad (2.48)$$

Далее, взяв производную (поскольку в i -м интервале $\ln a_i$ — константа), имеем

$$b_i = \frac{d \ln F_2}{d \ln Q^2}. \quad (2.49)$$

Параметр b_i описывает нарушение скейлинга в каждом интервале по переменной x . Используя экспериментальные данные по СФ F_2^{exp} и теоретические значения F_2^{th} , полученные, например, с помощью соотношения (2.40), можно вычислить параметры b_i^{exp} для экспериментальных данных и b_i^{th} для предсказаний КХД для каждого интервала x и сравнить их с помощью гипотезы χ^2 :

$$\chi_{\text{sl}}^2 = \sum_{i=1}^{N_{\text{px}}} \left(\frac{b_i^{\text{th}} - b_i^{\text{exp}}}{\Delta b_i^{\text{exp}}} \right)^2, \quad (2.50)$$

где Δb_i^{exp} — экспериментальная ошибка определения b_i^{exp} . Параметры логарифмических наклонов b_i более чувствительны к сравнению данных по СФ ГНР с предсказаниями пКХД [92]. Мы будем пользоваться оценкой χ_{sl}^2 в нашем КХД-анализе.

*Результат, основанный на представлении экспериментальных данных в виде (2.47), является достаточно неожиданным, поскольку $F_2 \sim [\alpha_s(Q^2)]^{-\tilde{b}_i} \sim [\ln Q^2/\Lambda^2]^{\tilde{b}_i}$, исходя из ренормгруппы (см., например, уравнение (2.16)). Представление (2.47) может как быть объяснено в рамках теории возмущений [70, 76], так и иметь непertурбативную природу (см. [77]). Теоретико-возмущенческий подход апеллирует к кинематической связи между переменными x и Q^2 (см. рис. 2) в экспериментальных данных ГНР, которая заменяет эффективно в численном анализе зависимость $\sim [\ln Q^2/\Lambda^2]^{\tilde{b}_i}$ на $\sim (Q^2)^{b_i}$ (см. [76]).

3. КОНСТАНТА СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Константа сильного взаимодействия α_s выражается через a_s соотношением (1.31).

Связь $a_s(Q^2)$ с масштабным параметром КХД Λ можно получить из уравнения

$$\ln \frac{Q^2}{\Lambda^2} = \int^{a_s(Q^2)} \frac{ds}{\bar{\beta}(s)}, \quad (3.1)$$

где $\bar{\beta}(s)$ — β -функция КХД (см. определение в (2.15)). В лидирующем порядке $\bar{\beta}(s) = -\beta_0 s^2$, и, интегрируя (3.1), получим

$$a_s(Q^2) = \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{LO}^2)} + C_{LO}, \quad (3.2)$$

где $\beta_0 = 11 - 2f/3$, а константа интегрирования C_{LO} принимается за 0, что фиксирует выбор $\Lambda = \Lambda_{LO}$.

В следующем порядке к лидирующему:

$$\bar{\beta}(s) = -\beta_0 s^2(1 + b_1 s) = \frac{-\beta_0 s^2}{1 - b_1 s}, \quad (3.3)$$

где $b_1 = \beta_1/\beta_0$ и $\beta_1 = 102 - 38n_f/3$.

Интегрируя уравнение (3.1) с учетом выражения для $\bar{\beta}$ в (3.3), получим в NLO:

$$\frac{1}{a_s(Q^2)} + b_1 \ln \left(\frac{\beta_0 a_s(Q^2)}{1 + b_1 a_s(Q^2)} \right) = \beta_0 \ln \frac{Q^2}{\Lambda_{NLO}^2} + C_{NLO}, \quad (3.4)$$

где $C_{NLO} = 0$, фиксируя выбор $\Lambda = \Lambda_{NLO}$.

Таким образом, если в LO константа сильного взаимодействия прямо связана с масштабным параметром КХД Λ простым соотношением (3.2), то в NLO эта связь находится посредством трансцендентного уравнения. Можно упростить (3.4), разложив его по обратным степеням $\ln(Q^2/\Lambda_{NLO}^2)$, и получить приближенное соотношение между $a_s(Q^2)$ и Λ_{NLO} в NLO:

$$a_s(Q^2) \approx \frac{1}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{NLO}^2)} \left(1 + \frac{\beta_1 \ln(\ln(Q^2/\Lambda_{NLO}^2))}{\beta_0 \ln(Q^2/\Lambda_{NLO}^2)} \right). \quad (3.5)$$

Из (3.4) можно получить также трансцендентное уравнение, связывающее значения параметра a_s при разных значениях Q^2 :

$$\frac{1}{a_s(Q^2)} - \frac{1}{a_s(Q_0^2)} + \frac{\beta_1}{\beta_0} \ln \frac{a_s(Q^2)(\beta_0 + \beta_1 a_s(Q_0^2))}{a_s(Q_0^2)(\beta_0 + \beta_1 a_s(Q^2))} = \beta_0 \ln \frac{Q^2}{Q_0^2}. \quad (3.6)$$

Таким образом, если известно значение $a_s(Q_0^2)$ при Q_0^2 , то можно определить $a_s(Q^2)$ при значении Q^2 . Уравнение (3.6) исключает параметр Λ_{NLO} , и, используя это уравнение, можно выполнять КХД-анализ, определяя только константу связи a_s (или α_s) при некотором фиксированном значении Q_0 .

Следует отметить, что соотношение (3.5) весьма популярно в настоящее время, однако точность приближения невелика даже при достаточно больших значениях Q^2 . Например, при $Q^2 = M_Z^2$ (M_Z — масса Z -бозона) ошибка составляет 0,001 при центральном значении $\alpha_s = 0,118$.

При выполнении анализа с использованием параметра Λ_{NLO} , например в $\overline{\text{MS}}$ -схеме, где $\Lambda_{\text{NLO}} = \Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f)}$, необходимо ввести зависимость в Λ от числа активных кварков f для сохранения непрерывности константы связи на порогах. При выполнении анализа в широкой области по переменной Q^2 нужно пересчитывать значение $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f\pm 1)}$ к значению $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(f)}$ и обратно.

3.1. Аналитическое продолжение на нечетные значения моментов СФ.

В обработке экспериментальных данных используются моменты $M_{k,n}$ как для четных, так и для нечетных n . В лидирующем порядке в качестве значений величин для моментов при всех целых n используется аналитический результат, полученный для четных n . В следующем порядке такое отождествление неверно из-за наличия в аналитическом результате функций $S_{-a}(n)$ и $S_{-a,b}(n)$, имеющих различное аналитическое продолжение с четных и нечетных значений n . Это является следствием непланарности некоторых из диаграмм [41, 78]. Трудности снимаются переопределением (аналитическим продолжением с четных значений n для СФ F_2 и F_L) функций $S_{-a}(n)$ и $S_{-a,b}(n)$ [41]*

$$\begin{aligned} S_{-2}(n) &\rightarrow (-1)^n S_{-2}(n) - \frac{1 - (-1)^n}{2} \zeta(2), \\ S_{-3}(n) &\rightarrow (-1)^n S_{-3}(n) - \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{3}{2} \zeta(3), \\ S_{-2,1}(n) &\rightarrow (-1)^n S_{-2,1}(n) - \frac{1 - (-1)^n}{2} \frac{5}{4} \zeta(3). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Аналитическое продолжение с нечетных значений n , например, нужное при анализе СФ F_3 , получается заменой $(-1)^n \rightarrow (-1)^{n+1}$.

Эти соотношения являются следствием непрерывности функции

$$\beta^{(i)}(z) = \frac{1}{2^i} \left[\Psi^{(i)} \left(\frac{z+1}{2} \right) - \Psi^{(i)} \left(\frac{z}{2} \right) \right] \quad (3.8)$$

*Мы используем стандартные обозначения, введенные недавно для таких сумм в [79]. Обозначения $K_a(n)$ и $Q(n)$, используемые в [41] и [78], соотносятся с новыми как $K_a(n) = -S_{-a}(n)$ и $Q(n) = K_{-2,1}(n) = -S_{-2,1}(n)$.

и ее обобщений. Здесь $\Psi^{(i)}(z)$ — полигамма-функция Римана. Подробное изложение аналитического продолжения для функций $S_{-a}(n)$ и $S_{-a,b}(n)$, а также для более сложных сумм можно найти в недавней работе [80].

При выполнении КХД-анализа данных VCDMS в NLO для синглетного случая с использованием разложения по полиномам Якоби был получен значительный рост значений χ^2 при числе полиномов более восьми. Изучение этого явления привело к необходимости использования аналитического продолжения (3.7) с четных значений на нечетные значения n . Включение процедуры аналитического продолжения в программу КХД-анализа сняло проблему роста значений χ^2 при больших N_{\max} .

3.2. Теоретические неопределенности в КХД-анализе данных. Основные теоретические неопределенности, возникающие при извлечении параметров КХД, связаны с обрывом ряда теории возмущений. Вследствие этого полученные результаты зависят от значений масштабных шкал факторизации μ_F и перенормировки μ_R : $\mu_F^2 = k_F Q^2$ и $\mu_R^2 = k_R Q^2$.

Изучая моменты СФ, получим их модификации при ненулевых значениях k_F и k_R :

$$a_s(Q^2) \rightarrow a_s(k_F k_R Q^2), \quad (3.9)$$

$$B_{\text{NS}}(n) \rightarrow B_{\text{NS}}(n) + \frac{1}{2} \gamma_{\text{NS}}^{(0)} \ln k_F, \quad (3.10)$$

$$B_i(n) \rightarrow B_i(n) + \frac{1}{2} \gamma_{i\Psi}^{(0)} \ln k_F \quad (i = \Psi, G), \quad (3.11)$$

$$Z_{\text{NS}}(n) \rightarrow Z_{\text{NS}}(n) + \frac{1}{2} \gamma_{\text{NS}}^{(0)} \ln k_R, \quad (3.12)$$

$$Z_{\pm\pm}(n) \rightarrow Z_{\pm\pm}(n) + \frac{1}{2} \gamma_{\pm}^{(0)} \ln k_R. \quad (3.13)$$

Для изучения влияния значений шкал факторизации и перенормировки на результаты анализа коэффициенты k_F и k_R обычно варьируются. Полученные сдвиги в извлекаемом параметре α_s принимаются за теоретические ошибки, возникающие благодаря неопределенности значений этих шкал.

3.3. Нормировки партонных распределений. Для выполнения КХД-анализа необходимо выбрать точку нормировки для моментов СФ — значение Q_0^2 — и задать распределения кварков и глюонов при этом значении. Параметры этих распределений в анализе являются свободными так же, как параметр КХД — константа сильного взаимодействия α_s в этой точке. Задав параметризацию кварков и глюонов в точке Q_0^2 , в дальнейшем эволюцию этих распределений по переменной Q^2 можно будет определять из уравнений (2.25)–(2.28) для их моментов.

В случае выполнения анализа в несинглетном приближении, когда при условии $x > 0,3$ вкладом глюонов и морских кварков в СФ F_2 можно пре-

небрежь, рассматривают обычно следующую параметризацию несинглетного распределения $\Delta(x)$ при $Q^2 = Q_0^2$:

$$x\Delta(x, Q_0^2) = A_{\text{NS}}(Q_0^2)(1-x)^{b_{\text{NS}}(Q_0^2)} (1 + d_{\text{NS}}(Q_0^2)x), \quad (3.14)$$

где $A_{\text{NS}}(Q_0^2)$, $b_{\text{NS}}(Q_0^2)$ и $d_{\text{NS}}(Q_0^2)$ — свободные параметры.

Таким образом, при отсутствии малых значений x член $x^{a_{\text{NS}}(Q_0^2)}$, отвечающий за поведение распределения $\Delta(x)$ при $x \rightarrow 0$, не рассматривается (см., например, работу [81]).

В случае полного анализа (несинглетной и синглетной частей) данных были рассмотрены для нормировки ПР (в точке $Q^2 = Q_0^2$) два случая:

1. В первом случае использовалась параметризация (3.14) для несинглетного распределения кварков; форма

$$x\Sigma(x, Q_0^2) = A_S(Q_0^2)x^{a_{\text{SI}}(Q_0^2)}(1-x)^{b_{\text{SI}}(Q_0^2)} + A_{\text{sea}}(Q_0^2)(1-x)^{b_{\text{sea}}(Q_0^2)} \quad (3.15)$$

для синглетного распределения кварков, а параметризация

$$xG(x, Q_0^2) = A_G(Q_0^2)x^{a_G(Q_0^2)}(1-x)^{b_G(Q_0^2)} \quad (3.16)$$

для распределения глюонов.

В этих распределениях $A_S(Q_0^2)$, $a_{\text{SI}}(Q_0^2)$, $b_{\text{SI}}(Q_0^2)$, $A_{\text{sea}}(Q_0^2)$, $b_{\text{sea}}(Q_0^2)$, $a_G(Q_0^2)$ и $b_G(Q_0^2)$ — свободные параметры, а $A_G(Q_0^2)$ может быть свободным параметром или определяться из правил сумм (3.24) (при $Q^2 = Q_0^2$) для полного импульса протона.

Такой подход использовался при анализе СФ коллаборации BCDMS (см. [25–29]), полученных на разных мишенях (H_2 , D_2 , C^{12}).

2. Во втором случае рассматривалась плотность распределения отдельных кварков ($q = u, d, s, \dots$) и антикварков ($\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \dots$) путем объединения их в две группы: валентные кварки $u_v(x, Q_0^2)$ и $d_v(x, Q_0^2)$, дающие распределение валентных кварков $V(x, Q^2) = u_v(x, Q^2) + d_v(x, Q^2)$, а также морские кварки, которые объединяются в общую часть $S(x, Q_0^2)$.

Параметризация кварков и глюонов в этом случае следующая:

$$u_v(x, Q_0^2) = \frac{2}{B(a_u(Q_0^2), b_u(Q_0^2) + 1)} x^{a_u(Q_0^2)}(1-x)^{b_u(Q_0^2)}, \quad (3.17)$$

$$d_v(x, Q_0^2) = \frac{1}{B(a_d(Q_0^2), b_d(Q_0^2) + 1)} x^{a_d(Q_0^2)}(1-x)^{b_d(Q_0^2)}, \quad (3.18)$$

$$S(x, Q_0^2) = C_s(Q_0^2) x^{a_s(Q_0^2)}(1-x)^{b_s(Q_0^2)}, \quad (3.19)$$

$$G(x, Q_0^2) = C_G(Q_0^2) x^{a_G(Q_0^2)}(1-x)^{b_G(Q_0^2)}, \quad (3.20)$$

где $B(a, b)$ — бета-функция Эйлера и $a_u(Q_0^2)$, $b_u(Q_0^2)$, $a_d(Q_0^2)$, $b_d(Q_0^2)$, $a_s(Q_0^2)$, $b_s(Q_0^2)$, $a_G(Q_0^2)$ и $b_G(Q_0^2)$ — свободные параметры.

Параметризации (3.17)–(3.20) должны удовлетворять (в точке нормировки Q_0^2) известному правилу сумм

$$\int_0^1 V(x, Q^2) = 3. \quad (3.21)$$

Несинглетная и синглетная части распределений в этом случае будут иметь вид

$$\Delta(x, Q^2) = u_v(x, Q^2) - d_v(x, Q^2), \quad (3.22)$$

$$\Sigma(x, Q^2) = V(x, Q^2) + S(x, Q^2). \quad (3.23)$$

Следуя моделям кварковых распределений СТЕQ и MRST [82], можно также учесть члены, пропорциональные \sqrt{x} и x в параметризациях партонов. Заметим, однако, что член \sqrt{x} важен только при достаточно малых значениях x , а учет членов, пропорциональных x , приводит только к изменениям коэффициентов C_i и A_i (см. [83]). Так как мы в обзоре рассматриваем только данные, полученные в экспериментах на фиксированных мишенях, эти члены не используются. По этой же причине в большинстве случаев не используются также члены $x^{a_G(Q_0^2)}$ и $x^{a_s(Q_0^2)}$ в параметризациях глюонов и морских кварков, хотя следует отметить, что, например, в [81] был выполнен анализ и с включением этих членов с целью выяснения роли поправок на «высшие твисты» в области переменной $x < 0,1$.

В большинстве случаев в анализе предполагалось выполнение правила сумм для полного импульса нуклона при всех значениях Q^2 :

$$\Sigma_2(Q^2) + G_2(Q^2) = 1. \quad (3.24)$$

3.4. Пороговые эффекты. Современные оценки, сделанные в работах [84, 85], указывают на значительную роль пороговых эффектов и бегущей константы сильного взаимодействия α_s , когда экспериментальные данные по ГНР лептонов перекрывают пороговые точки по $Q^2 = M_{f+1}^2 \sim m_{f+1}^2$, где f — число активных кварков. При этом соответствующие коррекции в α_s могут достигать процентов, т. е. эти эффекты должны быть под контролем при выполнении нашего анализа.

Удобный подход для исключения влияния пороговых эффектов в рамках безмассовой схемы был предложен более 25 лет назад [86, 87]. Он заключается в переходе из области с числом активных кварков f , описывающих безмассовую константу α_s , к следующей области с числом активных кварков $f + 1$ с использованием соотношения [88]:

$$\frac{a_s^{(f-1)}(M_f^2)}{a_s^{(f)}(M_f^2)} = 1 - \frac{L}{6} a_s^{(f)}(M_f^2) + \frac{2L^2 - 33L + 11}{72} \left(a_s^{(f)}(M_f^2) \right)^2, \quad (3.25)$$

где $L = \ln [M_f^2/m_f^2(M_f)]$.

При выполнении совместного КХД-анализа данных BCDMS, SLAC, NMC и BFP с использованием широкой области по переменной Q^2 осуществлялась проверка зависимости результата от различного выбора значений пороговых точек:

$$M_{f+1} = 2m_{f+1} \quad (3.26)$$

и

$$M_{f+1} = m_{f+1}, \quad (3.27)$$

в пренебрежении «бегучестью» масс тяжелых кварков в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.

Как известно, для эволюции синглетной части моментов СФ нет простого рецепта для выбора значения пороговой точки M_{f+1} . Если для Q^2 -эволюции несинглетной части моментов этот выбор сводится к соотношению $M_{f+1} = m_{f+1}$ [89] (назовем его ренормгрупповым порогом M_{f+1}^{rg}), то при эволюции синглетной части возникают трудности, связанные с генерацией тяжелых кварков (процессы фотон-глюонного слияния), дающих вклад в глюонную часть синглетных коэффициентных функций. Процессы фотон-глюонного слияния требуют близости пороговых точек M_{f+1} к соответствующим «эффективным массам» W (1.6), т. е.

$$M_{f+1}^2 \frac{1-x}{x} + M_{\text{nucl}}^2 = 4m_{f+1}^2, \quad (3.28)$$

где M_{nucl} — масса нуклона.

Следует заметить, что условие (3.28) существенно перекрывает значение ренормгруппового порога $M_{f+1} = m_{f+1}$. Так, при $x = 0,2$, $M_{f+1}^2 = m_{f+1}^2 - M_{\text{nucl}}^2/4$, что близко к ренормгрупповому порогу. В области больших значений переменной x величина порога M_{f+1} значительно больше чем M_{f+1}^{rg} . Например, при $x = 0,6$, $M_{f+1}^2 = 6m_{f+1}^2 - M_{\text{nucl}}^2$.

Однако, отмечая, что вклад глюонов в СФ мал при $x > 0,3$, а различие между несинглетной и синглетной частями определяется в основном вкладом глюонной части, можно использовать ренормгрупповой порог $M_{f+1} = m_{f+1}$ [90,91] для несинглетного анализа.

3.5. Коррекции на массу мишени. В КХД-анализе для учета поправок на массу мишени [92,93] модификация СФ осуществляется следующим образом:

$$F_2^{p\text{QCD}}(x, Q^2) = \frac{x^2}{r^3 \xi^2} F_2^{\text{tw}2}(\xi, Q^2) + 6 \frac{M_{\text{nucl}}^2 x^3}{Q^2 r^6} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{(\xi')^2} F_2^{\text{tw}2}(\xi', Q^2) + \\ + 12 \frac{M_{\text{nucl}}^4 x^4}{Q^4 r^5} \int_{\xi}^1 \frac{d\xi'}{(\xi')^2} \int_{\xi'}^1 \frac{d\xi''}{(\xi'')^2} F_2^{\text{tw}2}(\xi'', Q^2), \quad (3.29)$$

где $r = \sqrt{1 + x^2 M_{\text{nucl}}^2}/Q^2$ и $\xi = 2x/(1+r)$ — переменная Нахтмана.

3.6. Ядерные эффекты. Начиная с открытия ЕМС-эффекта [94] хорошо известно, что существует разница в кварковых распределениях свободных нуклонов и связанных нуклонов, находящихся в ядрах. Следует учитывать эту разницу в анализе.

В случае совместного анализа данных на разных мишенях в несинглетном приближении используется параметризация в начальной точке эволюции Q_0^2 в виде

$$\Delta_n(Q_0^2) = \int_0^1 dx A_{\text{NS}}^A(Q_0^2) (1-x)^{b_{\text{NS}}^A(Q_0^2)} (1 + d_{\text{NS}}^A(Q_0^2)), \quad (3.30)$$

где $A_{\text{NS}}^A(Q_0^2)$, $b_{\text{NS}}^A(Q_0^2)$, $d_{\text{NS}}^A(Q_0^2)$ — свободные параметры и $A = \text{H, D, C}$ и ^{56}Fe в случае водородной (H_2), дейтериевой (D_2), углеродной (^{12}C) и железной (^{56}Fe) мишеней соответственно.

В случае полного анализа сложно использовать подобную параметризацию практически, так как это приводит к очень большому количеству свободных параметров. Поэтому в этом случае в [81] использовались параметризации (3.17)–(3.20), (3.24) и (3.23) для несинглетного и синглетного распределений для данных на водороде и дейтерии (для дейтерия ядерные эффекты пренебрежимо малы), а для тяжелых мишеней СФ предполагалась в виде

$$F_2^A(x, Q^2) = K_1^A (1 - K_2^A x + K_3^A x^2) F_2^D(x, Q^2), \quad (3.31)$$

где $A = ^{12}\text{C}, ^{56}\text{Fe}$ и K_1^A, K_2^A, K_3^A — свободные параметры, учитывающие ядерные эффекты. Возможность такого представления следует из приближенной Q^2 -независимости ЕМС-эффекта.

3.7. Поправки на пертурбативные эффекты. «Высшие твисты». В [81] изучались также поправки от процессов, которые не описываются пертурбативной КХД и обычно называются коррекцией на «высшие твисты».

Для полного момента $M_n^{\text{full}}(Q^2)$ справедливо выражение

$$M_n^{\text{full}}(Q^2) = M_n^{p\text{QCD}}(Q^2) + \frac{h_4(n)}{Q^2}, \quad (3.32)$$

где $M_n^{p\text{QCD}}$ — момент в пертурбативной КХД (называемый «лидирующим твистом» или «твистом-2»), а $h_4(n)$ — моменты от функции $\tilde{h}_4(x)$:

$$h_4(n) = \int_0^1 dx x^{n-2} \tilde{h}_4(x) F_2^{p\text{QCD}}(x). \quad (3.33)$$

Функция $\tilde{h}_4(x)$ является поправкой к СФ «лидирующего твиста» от членов «твиста-4», которые рассматриваются достаточно подробно в нашем анализе. Функция $\tilde{h}_4(x)$ в зависимости от моделей может иметь различный вид:

1. В соответствии с моделью «ренормалонов» (IRR). Такая форма может быть найдена в работах [95, 96].

$$2. \quad \tilde{h}_4(x) \sim \frac{d}{dx} \ln F_2^{\text{NS}}(x) \sim (1-x). \quad (3.34)$$

Такой вид поправок «твиста-4» указывает на существенный вклад их в СФ при больших значениях x [97].

$$3. \quad \tilde{h}_4(x) = \sum_{i=1}^I \tilde{h}_4(x_i), \quad (3.35)$$

где I есть число интервалов по переменной x в рассматриваемых данных, и в этом случае $\tilde{h}_4(x)$ рассматривается как набор свободных параметров для каждого интервала в процессе анализа.

Первые два случая были рассмотрены в работе [98]. В данном обзоре мы ограничились только последней возможностью.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТЫ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗ ДАННЫХ ПО ГЛУБОКОНЕУПРУГОМУ РАССЕЙЯНИЮ ЗАРЯЖЕННЫХ ЛЕПТОНОВ

В этом разделе представлены результаты совместного КХД-анализа данных BCDMS и SLAC, NMC, BFP по структурным функциям нуклонов и извлечения константы сильного взаимодействия α_s [81]. Выполнение такого анализа требует наличия мощных компьютеров, которые стали доступны для использования в последнее время.

При выполнении этого анализа извлекалась сразу константа связи $\alpha_s(Q_0^2)$ в соответствии с уравнением (3.6) и полученное значение пересчитывалось к ее величине при $Q^2 = M_z^2$, где M_z — масса Z -бозона. Это связано с тем, что в настоящее время стандартным представлением константы сильного взаимодействия стало ее значение при $Q^2 = M_z^2$. Для иллюстрации результатов полученные значения α_s будут пересчитываться в значения масштабного параметра КХД — $\Lambda^{(f)}$, где f — число ароматов кварков, с использованием трансцендентного уравнения (3.6).

В процессе КХД-анализа использовалось «динамическое» включение числа ароматов кварков в процессе Q^2 -эволюции структурных функций. Это означает, что в процессе аппроксимации будут использоваться значения:

$$\begin{aligned} f &= 3 \text{ в области } Q^2 < 9 \text{ ГэВ}^2; \\ f &= 4 \text{ в области } 9 < Q^2 < 80 \text{ ГэВ}^2; \\ f &= 5 \text{ в области } Q^2 < 80 \text{ ГэВ}^2. \end{aligned}$$

Для этих значений f в процессе аппроксимации будут пересчитываться величины аномальных размерностей и α_s .

4.1. Совместный анализ данных VCDMS. Здесь представлены результаты совместного анализа данных VCDMS на углероде, дейтерии и водороде [25–27], в котором извлекается константа сильного взаимодействия α_s . Современные быстродействующие компьютеры позволяют выполнить совместный и более тщательный КХД-анализ, более подробно изучить влияние экспериментальной систематики на результаты анализа, исключить область данных, вносящую существенные искажения в результаты анализа и тем самым уменьшить вклад систематической ошибки эксперимента в полную ошибку на извлекаемый параметр.

При выполнении этого анализа будут использоваться данные, измеренные для каждой энергии первичного пучка:

- для углерода три набора данных: 120, 200 и 280 ГэВ;
- для дейтерии три набора данных: 120, 200 и 280 ГэВ;
- для водорода четыре набора данных: 100, 120, 200 и 280 ГэВ.

Для каждого набора данных был введен нормировочный параметр, который в процессе аппроксимации может быть свободным или фиксированным. Неопределенности, связанные с нормировкой, были учтены в систематической ошибке. В большинстве случаев анализа нормировка для данных на дейтерии при энергии 200 ГэВ принималась за единицу.

Самый значительный вклад в систематическую ошибку при вычислении СФ вносят неопределенности, связанные с конечным разрешением спектрометра, нормировкой первичной энергии пучка и недостаточно хорошим знанием величины магнитного поля в железном магните. Самой чувствительной к этим неопределенностям переменной является переменная y ($y = (E_0 - E)/E_0$, где E_0, E — энергии первичного и рассеянного мюона соответственно).

Вначале представлены результаты КХД-анализа в несинглетном приближении (т. е. при условии $x \geq 0,25$), где имеются 607 экспериментальных точек. Такой анализ исключает влияние глюонов на значения извлекаемого параметра КХД. В несинглетном приближении для нормировки моментов СФ была использована параметризация (3.14), где параметры $A_{NS}(Q_0^2)$, $b_{NS}(Q_0^2)$, $d_{NS}(Q_0^2)$ были свободными и определялись для каждого вещества мишени.

В этом случае данные находятся в области больших значений переменной Q^2 , что позволяет выбрать значение точки нормировки $Q_0^2 = 90$ ГэВ². Было изучено влияние экспериментальных неопределенностей на результаты анализа в зависимости от условий по переменной y ($Y_{\min 3}$, $Y_{\min 4}$ и $Y_{\min 5}$):

$$\begin{aligned}
 y \geq 0,14, & \quad \text{когда} \quad 0,3 < x \leq 0,4, \\
 y \geq 0,16, & \quad \text{когда} \quad 0,4 < x \leq 0,5, \\
 y \geq Y_{\min 3}, & \quad \text{когда} \quad 0,5 < x \leq 0,6, \\
 y \geq Y_{\min 4}, & \quad \text{когда} \quad 0,6 < x \leq 0,7, \\
 y \geq Y_{\min 5}, & \quad \text{когда} \quad 0,7 < x \leq 0,8,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

значения которых указаны в табл. 1.

Таблица 1. Значения $Y_{\min 3}$, $Y_{\min 4}$ и $Y_{\min 5}$

N_{cut}	0	1	2	3	4	5	6
$Y_{\min 3}$	0	0,14	0,16	0,16	0,18	0,22	0,23
$Y_{\min 4}$	0	0,16	0,18	0,20	0,20	0,23	0,24
$Y_{\min 5}$	0	0,20	0,20	0,22	0,22	0,24	0,25

Результаты анализа представлены в табл. 2 и рис. 12, из которых видно, что полученные значения параметра α_s при $N_{\text{cut}} = 1-6$ для $Y_{\min 3}$, $Y_{\min 4}$ и $Y_{\min 5}$ стабильные и в пределах статистических ошибок согласуются между собой. В случае $N_{\text{cut}} = 6$ систематическая ошибка уменьшается в 1,8 раза, в то время как статистическая ошибка увеличивается только на 30% по сравнению со случаем $N_{\text{cut}} = 0$.

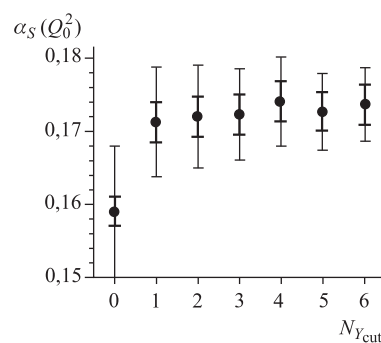
Таким образом, исключив из анализа данные с существенными систематическими неопределенностями, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} \alpha_s(Q^2 = 90 \text{ ГэВ}^2) = \\ = 0,1737 \pm 0,0029(\text{стат.}) \pm 0,0050(\text{сист.}) \pm 0,0025(\text{неопр. норм.}) \end{aligned}$$

Таблица 2. Значения параметра α_s для разных обрезаний

N_{cut}	Число точек	$\chi^2(F_2)/\text{dof}$	$\alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) \pm \text{стат. ошибка}$	Сист. ошибка
0	607	1,03	$0,1590 \pm 0,0020$	0,0090
1	511	0,97	$0,1711 \pm 0,0027$	0,0075
2	502	0,97	$0,1720 \pm 0,0027$	0,0071
3	495	0,97	$0,1723 \pm 0,0027$	0,0063
4	489	0,94	$0,1741 \pm 0,0027$	0,0061
5	458	0,95	$0,1730 \pm 0,0028$	0,0052
6	452	0,95	$0,1737 \pm 0,0029$	0,0050

Рис. 12. Изучение систематических ошибок при извлечении параметра $\alpha_s(Q_0^2)$ в зависимости от условий обрезания по Y_{\min} в совместном анализе данных VCDMS. Внутренние (внешние) ограничители указывают статистические (систематические) ошибки



или

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1153 \pm 0,0013(\text{стат.}) \pm 0,0022(\text{сист.}) \pm 0,0012(\text{неопр. норм.}).$$

Считая все ошибки независимыми и беря их в квадратуре, получим

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1153 \pm 0,0028(\text{полная эксп. ошибка}).$$

Это значение константы сильного взаимодействия соответствует следующему значению масштабного параметра КХД:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = 181 \pm 32(\text{полная. эксп. ошибка}),$$

или после пересчета

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} = 257 \pm 40(\text{полная. эксп. ошибка}).$$

Далее была изучена зависимость результатов анализа от значений N_{max} — количества членов разложения по полиномам Якоби. Результаты представлены в табл. 3.

Начиная с $N_{\text{max}} = 5$ получено в пределах статистических ошибок стабильное значение α_s со средним значением $\alpha_s(M_Z^2) = 0,1152$ и средним отклонением 0,0002 (0,18 %), которое может быть принято в качестве систематической неопределенности метода полиномов Якоби в этом анализе.

Затем был выполнен полный анализ с использованием несинглетной и синглетной частей Q^2 -эволюции моментов, описывающих СФ.

Таблица 3. Значения α_s в зависимости от числа используемых членов полинома Якоби N_{max} . Здесь χ^2/dof — χ^2 на число степеней свободы и $\chi_{\text{sl}}^2/\text{dof}$ — χ^2 по логарифмическим наклонам

N_{max}	χ^2/dof	$\chi_{\text{sl}}^2/6$ точек	$\alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) \pm 0,0013(\text{стат.})$	$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2)$
3	1,08	7,3	0,1720	0,1155
4	0,97	11,3	0,1715	0,1143
5	1,11	6,9	0,1729	0,1144
6	0,95	3,6	0,1747	0,1157
7	0,94	5,4	0,1740	0,1154
8	0,94	6,8	0,1738	0,1153
9	0,94	7,6	0,1735	0,1152
10	1,07	7,7	0,1735	0,1152
11	1,08	7,2	0,1726	0,1149
12	1,04	7,1	0,1731	0,1152
13	1,11	7,1	0,1725	0,1149

В этом анализе использовались данные, содержащие всего 762 точки, не объединенные по энергиям, как и в случае анализа в несинглетном приближении. В качестве точки для нормировки моментов было выбрано значение $Q_0^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$.

Так же как в случае анализа в несинглетном приближении, было изучено влияние экспериментальной систематики, в основном связанной с неопределенностями в знании магнитного поля в железе и конечным разрешением спектрометра на результаты КХД-анализа при определении константы сильного взаимодействия.

В табл. 4 представлены значения Y_{\min_i} , которые использовались для переменной y согласно (4.1).

Таблица 4. Значения $Y_{\min 3}$, $Y_{\min 4}$, $Y_{\min 5}$, используемые в полном анализе

Y_{\min_i}	N_{cut}					
	0	1	2	3	4	5
$Y_{\min 3}$	0	0,14	0,16	0,18	0,22	0,23
$Y_{\min 4}$	0	0,16	0,18	0,20	0,23	0,24
$Y_{\min 5}$	0	0,20	0,20	0,23	0,24	0,25

Табл. 5 и рис. 13 содержат результаты полного анализа, откуда видно, что значение параметра α_s , полученное для значений $N_{\text{cut}} = 2-5$, стабильно в пределах статистических ошибок. Для значения $N_{\text{cut}} = 5$ систематическая ошибка уменьшается на фактор 1,8 по сравнению с ее значением при $N_{\text{cut}} = 0$, когда нет условий по переменной Y_{\min} , в то же время статистическая ошибка при этом увеличивается на 27 %.

Важность условия по переменной Y_{\min} , которое устраняет точки с существенной систематикой, показана на рис. 14 и 15, где сравниваются логарифмические наклоны $d(\ln F_2)/d(\ln Q^2)$, полученные из экспериментальных данных и предсказаний КХД при значении переменной $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$.

С использованием 590 точек (оставшихся после применения условий по переменной Y_{\min}) при $N_{\text{cut}} = 5$ был выполнен полный (несинглетная и синглетная эволюция) совместный КХД-анализ структурных функций F_2 , полу-

Таблица 5. Значения параметра α_s для различных случаев анализа

N_{cut}	Число точек	χ^2/dof	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) \pm \text{стат. ошибка}$	Сист. ошибка
0	762	1,22	$0,1992 \pm 0,0034$	0,0122
1	649	1,06	$0,2116 \pm 0,0042$	0,0096
2	640	1,07	$0,2126 \pm 0,0044$	0,0088
3	627	1,05	$0,2152 \pm 0,0045$	0,0080
4	596	1,04	$0,2172 \pm 0,0047$	0,0076
5	590	1,04	$0,2160 \pm 0,0047$	0,0068

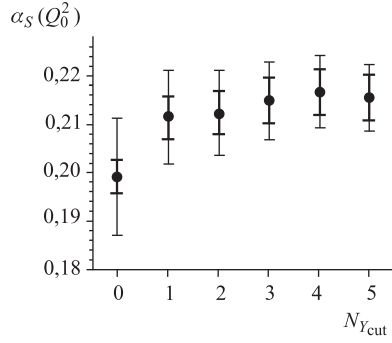


Рис. 13. Изучение систематических ошибок при извлечении параметра $\alpha_s(Q_0^2)$ в зависимости от условий обрезания по Y_{\min} в совместном анализе данных BCDMS. Внутренние (внешние) ограничители указывают статистические (систематические) ошибки

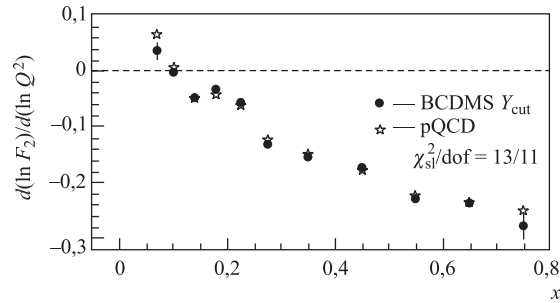


Рис. 14. Значения логарифмических наклонов. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям пКХД для полной (синглетной и несинглетной) эволюции структурных функций. Темными точками показаны логарифмические наклоны, полученные из данных BCDMS с мишеней ^{12}C , H_2 , D_2 с использованием условий по переменной Y_{\min}

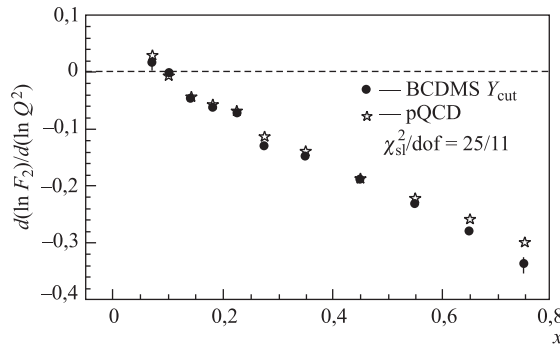


Рис. 15. Значения логарифмических наклонов. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям пКХД для полной (синглетной и несинглетной) эволюции структурных функций. Темными точками показаны логарифмические наклоны, полученные из данных BCDMS с мишеней ^{12}C , H_2 , D_2 без условий по переменной Y_{\min}

ченных в данных экспериментах на водороде, дейтерии и углероде. Получено значение константы сильного взаимодействия:

$$\alpha_s(Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2160 \pm 0,0047(\text{стат.}) \pm 0,0068(\text{сист.}) \pm 0,0031(\text{норм.}),$$

что соответствует следующему значению этой константы при $Q^2 = M_Z^2$:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1175 \pm 0,0014(\text{стат.}) \pm 0,0020(\text{сист.}) \pm 0,0011(\text{норм.}).$$

Или, взяв все экспериментальные ошибки в квадратуре, получим

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1175 \pm 0,0026(\text{полная эксп. ошибка}).$$

В определении α_s в последней ошибке «норм.» учитывался сдвиг, связанный со свободной и фиксированной нормировкой данных разных энергий.

С использованием найденных значений константы α_s и соотношений получены следующие значения масштабной константы КХД:

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} = (290 \pm 20(\text{стат.}) \pm 29(\text{сист.})) \text{ МэВ},$$

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} = (206 \pm 17(\text{стат.}) \pm 24(\text{сист.})) \text{ МэВ}.$$

Здесь в систематическую ошибку включены неопределенности нормировки между данными при разных энергиях.

4.2. КХД-анализ данных экспериментов SLAC, NMC, BFP. Выполнен анализ наиболее статистически обеспеченных данных [31,32,99], полученных коллаборациями SLAC, NMC, BFP на фиксированных мишенях и в заряженных лептонных пучках.

После опубликования данных BCDMS [25,26], полученных на водороде и дейтерии, обнаружилось явное противоречие между этими данными и результатами, полученными коллаборацией EMC несколько ранее. В кругах научной общественности развернулась оживленная дискуссия, в которой группа из SLAC пожелала выступить в качестве «третьего судьи». Она переработала свои старые данные с использованием более современных процедур расчета радиационных поправок, которые весьма важны в случае процесса глубоконеупругого рассеяния электронов на нуклонах, и опубликовала эти новые результаты [32]. Следует отметить, что прямое сравнение данных SLAC и данных BCDMS (просто вычислить их отношение в общих точках) не представляется возможным, так как они находятся в разных областях по Q^2 : данные BCDMS лежат, в основном, в области $Q^2 = 20\text{--}280 \text{ ГэВ}^2$, а данные SLAC имеют $Q^2 = 0,5\text{--}20 \text{ ГэВ}^2$.

Сравнение данных, полученных коллаборациями BCDMS и SLAC, возможно только при совместной аппроксимации общей зависимостью. Такая работа была проделана [100] и было показано, что данные BCDMS и SLAC

согласуются в пределах 1,5 %, а данные EMC не согласуются с BCDMS и с SLAC в основном при малых значениях x и различие составляет в среднем 9 %, что больше чем в три раза средних систематических погрешностей этих экспериментов. Окончательный вывод о том, что данные EMC не верны, был сделан после публикации данных коллаборации NMC [31].

Характерной особенностью данных NMC является наличие области малых значений x , что привело к существенному изменению представления о поведении партонных распределений в этой области x и хорошему их согласию с последующими данными HERA для СФ на протоне. Следует также отметить, что коллаборация NMC измерила СФ только практически до значения $x = 0,35$.

Были использованы в анализе данные BFP-коллаборации [99], которые в пределах экспериментальных ошибок согласуются с данными NMC и BCDMS. Вначале был выполнен анализ данных SLAC, NMC, BFP в несинглетном приближении при условии $x > 0,25$, а также $Q^2 > 1$ ГэВ². При этих условиях полное число точек равно 345, в том числе вклад экспериментов SLAC — 238, NMC — 66 и BFP — 41.

Анализ выполнен с учетом и без поправок на массу мишени (ТМС), коррекций на «высшие твисты» (НТС) и экспериментальных ошибок. Результаты представлены в табл. 6*.

Таблица 6. Значения параметра α и χ^2 при различных условиях анализа

N_{app}	ТМС	НТС	Экс. сист.	χ^2/dof	$\chi_{\text{sl}}^2/6$ точек	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) \pm$ стат. ошибка	$\alpha_s(M_Z^2)$
1	Нет	Нет	Да	6,0	1050	$0,2131 \pm 0,0012$	0,1167
2	Да	Нет	Да	2,3	224	$0,2017 \pm 0,0013$	0,1133
3	Да	Да	Нет	1,8	12,0	$0,2230 \pm 0,0030$	0,1195
4	Да	Да	Да	0,8	6,1	$0,2231 \pm 0,0060$	0,1195

Из табл. 6 хорошо видна важная роль этих поправок для согласования КХД с данными, полученными этими коллаборациями. Следует особо отметить, что без включения систематических ошибок в квадратуре со статистическими значение χ^2 получается из анализа в два раза хуже. Основной вклад в этот набор данных дают данные SLAC, они же и дают основной вклад в ухудшение χ^2 . Дополнительное изучение такого поведения показывает, что главной причиной может быть недооценка статистических ошибок или недостаточно корректное суммирование данных, измеренных при разных углах установки спектрометра. Были получены следующие значения параме-

*Здесь и далее величина N_{app} нумерует различные аппроксимации, используемые в анализе.

тров партонных распределений при $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$:

$$\begin{aligned} A_{\text{NS}}^P &= 1,44, & A_{\text{NS}}^D &= 2,06, & A_{\text{NS}}^F &= 1,87, \\ b_{\text{NS}}^P &= 3,88, & b_{\text{NS}}^D &= 3,84, & b_{\text{NS}}^F &= 4,23, \\ d_{\text{NS}}^P &= 10,9, & d_{\text{NS}}^D &= 4,04, & d_{\text{NS}}^F &= 5,03, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где индексы P , D , F означают параметры в параметризации протонов, дейтронов и железа соответственно.

Значения параметров степенного вклада от «высших твистов» представлены в табл. 7.

Таблица 7. Значения параметров степенных поправок $\tilde{h}_4(x_i)$ для данных на водороде ($\tilde{h}_4|_{\text{H}_2}(x_i)$) и дейтерии ($\tilde{h}_4|_{\text{D}_2}(x_i)$)

x_i	$\tilde{h}_4 _{\text{H}_2}(x_i) \pm \text{стат.}$	$\tilde{h}_4 _{\text{D}_2}(x_i) \pm \text{стат.}$
0,25	$-0,149 \pm 0,015$	$-0,176 \pm 0,014$
0,35	$-0,151 \pm 0,013$	$-0,178 \pm 0,012$
0,45	$-0,214 \pm 0,012$	$-0,147 \pm 0,022$
0,55	$-0,228 \pm 0,022$	$-0,065 \pm 0,037$
0,65	$0,024 \pm 0,070$	$0,053 \pm 0,080$
0,75	$0,227 \pm 0,154$	$0,130 \pm 0,131$

В пределах экспериментальных ошибок разница в значениях степенных поправок для водорода и дейтерия не наблюдается, что хорошо согласуется с наблюдениями авторов работы [100].

Таким образом, в результате анализа в несинглетном приближении данных SLAC, NMC, BFP мы получили следующие результаты:

$$\alpha_s(Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2231 \pm 0,0060(\text{стат.}) \pm 0,0075(\text{сист.}) \pm 0,0030(\text{норм.}),$$

что соответствует значению константы α_s при $Q^2 = M_Z^2$:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1195 \pm 0,0017(\text{стат.}) \pm 0,0022(\text{сист.}) \pm 0,0010(\text{норм.})$$

при значении $\chi^2/\text{dof}(\text{полного}) = 0,8$ и $\chi_{\text{sl}}^2 = 6,1$ на шесть точек.

Последняя ошибка (норм.) происходит в результате учета нормировки между разными данными в случае рассмотрения нормировочных параметров свободными или зафиксированными.

Это значение константы α_s соответствует следующим величинам масштабного параметра КХД:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{MS}}^{(4)} &= (321 \pm 44(\text{полная эксп. ошибка})) \text{ МэВ}, \\ \Lambda_{\text{MS}}^{(5)} &= (231 \pm 38(\text{полная эксп. ошибка})) \text{ МэВ}, \end{aligned}$$

где полная экспериментальная ошибка представляет статистическую, систематическую ошибки и неопределенность нормировки, сложенные в квадратуре.

Затем был выполнен полный (несинглетный и синглетный) анализ экспериментальных данных SLAC, NMC, BFP. Для анализа был использован полный набор данных при условии $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$, содержащий всего 719 точек, в том числе: SLAC — 364 точки; NMC — 300 и BFP — 55 точек.

Значение точки нормировки моментов было выбрано $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$. Как в анализе в несинглетном приближении, в этом анализе мы демонстрируем важность использования степенных поправок. Результаты анализа показаны в табл. 8.

Для иллюстрации роли поправок при теоретическом описании в рамках КХД данные SLAC, NMC, BFP на рис. 16–18 представлены значениями логарифмических наклонов, которые очень чувствительны к результатам сравнения предсказаний КХД с данными в разных условиях анализа, полученными из экспериментальных данных и теоретических предсказаний КХД.

Из рисунков ясно видно, что для данных SLAC, NMC, BFP поправки на массу мишени и степенные коррекции имеют большое значение.

Таблица 8. Результаты полного анализа данных SLAC, NMC, BFP

N_{app}	ТМС	НТС	Сист. ошибка	$\chi^2(F_2)/\text{dof}$	χ_{sl}^2 для 23 точек	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) \pm \text{стат. ошибка}$	$\alpha_s(M_Z^2)$
1	Нет	Нет	Да	5,5	800	$0,2400 \pm 0,0017$	0,1241
2	Да	Нет	Да	2,2	179	$0,2153 \pm 0,0018$	0,1174
3	Да	Да	Да	0,85	21	$0,2138 \pm 0,0058$	0,1170

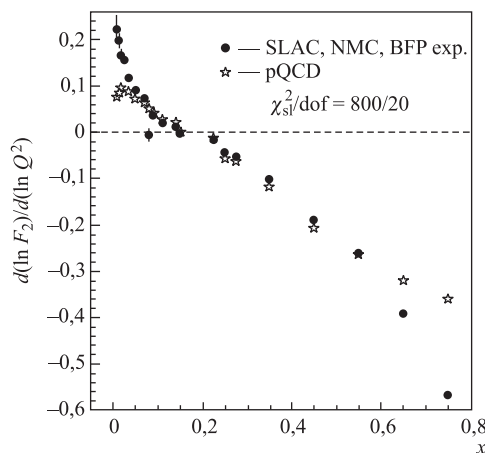


Рис. 16. Значения логарифмических наклонов. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям пКХД без использования поправок ($N_{\text{app}} = 1$) в табл. 8. Темные точки — эти же наклоны из экспериментальных данных

Ввиду того, что большой популярностью пользуются результаты анализа с условиями, налагаемыми на данные по кинематической переменной W^2 , был сделан и такой анализ. Результаты показаны в табл. 9: аппроксимация хорошо описывает данные при условии $W^2 > 4-6$ ГэВ².

Таким образом, при наилучшем описании данных, когда включены поправка на массу мишени и коррекции на «высшие твисты», найдены следующие результаты для константы α_s :

$$\alpha_s(Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2138 \pm 0,0058(\text{стат.}) \pm 0,0075(\text{сист.}) \pm 0,0030(\text{норм.}),$$

что соответствует ее значению при $Q^2 = M_Z^2$:

$$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) = 0,1170 \pm 0,0016(\text{стат.}) \pm 0,0021(\text{сист.}) \pm 0,0011(\text{норм.}),$$

или

$$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) = 0,1170 \pm 0,0029(\text{полная эксп. ошибка}).$$

Таблица 9. Результаты полного анализа данных SLAC, NMC, BFP с использованием условия по переменной W^2 ($W^2 = M_p^2 + Q^2(1-x)/x$)

$N_{\text{апп}}$	W^2 усл.	$\chi^2(F_2)/\text{dof}$	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2)$ \pm стат.	$\Lambda_{\text{MS}}^{(4)}$ \pm стат., МэВ	$\Lambda_{\text{MS}}^{(5)}$ \pm стат., МэВ	$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2)$ \pm стат.
1	2,0	1,30	0,2407 \pm 0,0013	400 \pm 6	296 \pm 4	0,1243 \pm 0,0004
2	4,0	1,00	0,2135 \pm 0,0018	280 \pm 7	194 \pm 5	0,1169 \pm 0,0004
3	6,0	1,00	0,2070 \pm 0,0023	253 \pm 9	178 \pm 7	0,1150 \pm 0,0007
4	8,0	0,91	0,2128 \pm 0,0043	277 \pm 18	197 \pm 14	0,1167 \pm 0,0012
5	10	0,91	0,2107 \pm 0,0053	268 \pm 22	190 \pm 18	0,1162 \pm 0,0015

Таблица 10. Результаты КХД-анализа в несинглетном приближении по определению константы α_s экспериментальных данных BCDMS и SLAC, NMC, BFP

Данные	$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) \pm$ полная эксп. ошибка
BCDMS (¹² C, H ₂ , D ₂)	0,1153 \pm 0,0028
SLAC, NMC (H ₂ , D ₂); BFP (⁵⁶ Fe)	0,1195 \pm 0,0029

Таблица 11. Результаты КХД полного анализа по определению константы α_s экспериментальных данных BCDMS и SLAC, NMC, BFP

Данные	$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) \pm$ полная эксп. ошибка
BCDMS (¹² C, H ₂ , D ₂)	0,1175 \pm 0,0026
SLAC, NMC (H ₂ , D ₂); BFP (⁵⁶ Fe)	0,1170 \pm 0,0028

В табл. 10 и 11 представлены результаты КХД-анализа экспериментальных данных BCDMS и SLAC, NMC, BFP. Из таблиц видно, что полученные результаты анализа данных SLAC, NMC, BFP по константе α_s хорошо согласуются с результатами совместного анализа данных BCDMS, полученных на

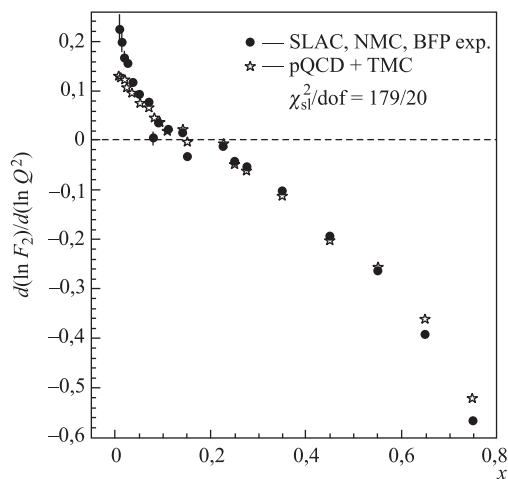


Рис. 17. Значения логарифмических наклонов. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям пКХД с поправками на массу мишени (ТМС). Темные точки — эти же наклоны из экспериментальных данных

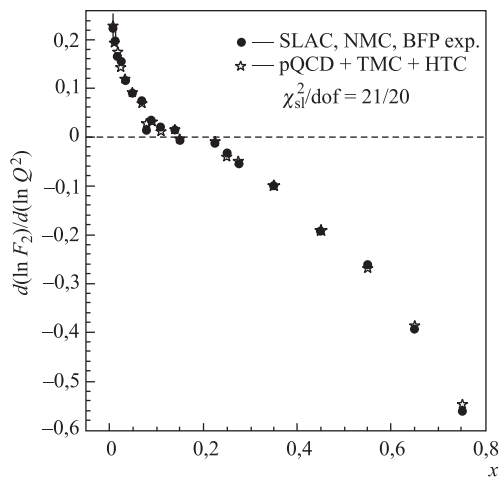


Рис. 18. Значения логарифмических наклонов. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям пКХД с поправками на массу мишени (ТМС) и «высшие твисты» (НТС), что соответствует $N_{\text{app}} = 3$ в табл. 8. Темные точки — эти же наклоны из экспериментальных данных

углероде, водороде и дейтерии, что дает естественное основание выполнить совместный анализ всех этих данных. Следует также отметить, что экспериментальные данные только коллаборации BCDMS дают точность определения параметра α_s не хуже, чем все три эксперимента: SLAC, NMC и BFP.

4.3. КХД-анализ данных экспериментов BCDMS, SLAC, NMC, BFP.

Выше были представлены результаты КХД-анализа СФ BCDMS и SLAC, NMC, BFP, выполненные отдельно, и показано, что извлеченные параметры константы α_s хорошо согласуются между собой. Следует отметить, что данные BCDMS и SLAC хорошо дополняют друг друга, перекрывая область по переменной Q^2 от 1 до 280 ГэВ², а данные NMC добавляют экспериментальные точки с малыми значениями переменной $x \geq 0,008$, и, наконец, BFP-данные, измеренные на железе, позволяют прояснить влияние ядерных эффектов на Q^2 -поведение СФ.

4.3.1. КХД-анализ данных экспериментов BCDMS, SLAC, NMC, BFP в несинглетном приближении. Выполнен совместный анализ данных BCDMS, SLAC, NMC, BFP в предположении несинглетного приближения, когда вкладом глюонов и морских кварков можно пренебречь. Для этого используется условие по переменной $x > 0,25$. Так же, исходя из правомерности применения пКХД, используется условие на переменную $Q^2 > 1$ ГэВ², когда константа связи α_s уже достаточно мала и применение теории возмущения корректно. Для данных BCDMS в этом анализе используется условие на Y_{\min} с $N_{\text{cut}} = 6$, минимизирующее вклад экспериментальной систематики в результаты анализа. Для нормировки моментов СФ в этом анализе выбрано значение $Q_0^2 = 90$ ГэВ².

После выполнения этих условий для КХД-анализа в несинглетном приближении остается всего 797 точек.

Достаточно интересным вопросом является значение границы применимости пКХД по переменной Q^2 . Поэтому сначала была выполнена серия аппроксимаций без коррекций на степенные поправки (НТС), но с использованием данных с $Q^2 > Q_{\min}^2$ и изменением Q_{\min}^2 от 1 до 12 ГэВ² с шагом 1 ГэВ². Затем был выполнен анализ с использованием степенных поправок.

Результаты анализа представлены в табл. 12 и на рис. 19.

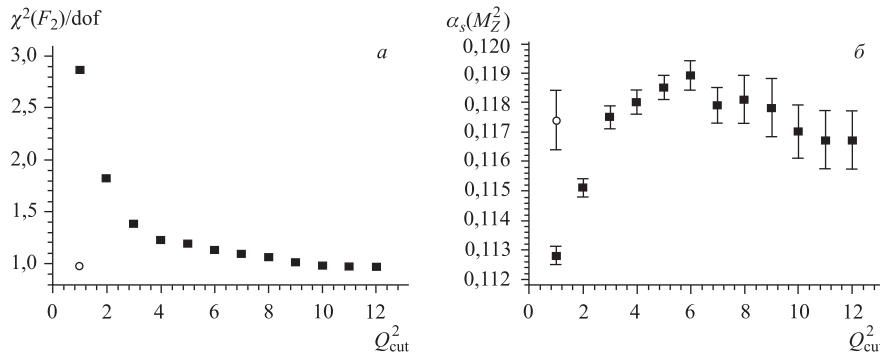
При этом были получены следующие значения параметров в использованной параметризации (3.14) в точке нормировки моментов при значении $Q_0^2 = 90$ ГэВ²:

$$\begin{aligned} A_{\text{NS}}^P &= 2,40, & A_{\text{NS}}^D &= 2,46, & A_{\text{NS}}^C &= 2,46, & A_{\text{NS}}^F &= 1,65, \\ b_{\text{NS}}^P &= 3,98, & b_{\text{NS}}^D &= 3,94, & b_{\text{NS}}^C &= 4,08, & b_{\text{NS}}^F &= 4,72, \\ d_{\text{NS}}^P &= 4,85, & d_{\text{NS}}^D &= 2,38, & d_{\text{NS}}^C &= 1,55, & d_{\text{NS}}^F &= 7,97. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для случая аппроксимации с применением коррекций на «высшие твисты» при $N_{\text{app}} = 13$ были получены поправки, представленные в табл. 13.

Таблица 12. Результаты КХД-анализа в несинглетном приближении данных BCDMS, SLAC, NMC и BFP

N_{app}	Q^2_{min}	Число точек	НТС	χ^2/dof	$\alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) \pm \text{стат.}$	$\alpha_s(M_Z^2)$
1	1,0	797	Нет	2,87	$0,1679 \pm 0,0007$	0,1128
2	2,0	772	Нет	1,82	$0,1733 \pm 0,0007$	0,1151
3	3,0	745	Нет	1,38	$0,1789 \pm 0,0009$	0,1175
4	4,0	723	Нет	1,23	$0,1802 \pm 0,0009$	0,1180
5	5,0	703	Нет	1,19	$0,1813 \pm 0,0011$	0,1185
6	6,0	677	Нет	1,13	$0,1803 \pm 0,0013$	0,1189
7	7,0	650	Нет	1,09	$0,1799 \pm 0,0016$	0,1179
8	8,0	632	Нет	1,06	$0,1803 \pm 0,0019$	0,1181
9	9,0	613	Нет	1,01	$0,1797 \pm 0,0023$	0,1178
10	10,0	602	Нет	0,98	$0,1776 \pm 0,0022$	0,1170
11	11,0	688	Нет	0,97	$0,1770 \pm 0,0024$	0,1167
12	12,0	574	Нет	0,97	$0,1768 \pm 0,0025$	0,1167
13	1,0	797	Да	0,97	$0,1785 \pm 0,0025$	0,1174

Рис. 19. Результаты анализа в несинглетном приближении в зависимости от условий по Q^2_{min} . Темные точки — отсутствие коррекции на «высшие твисты», светлая точка — коррекции применяются. Показаны только статистические ошибки

Таким образом, в совместном КХД-анализе данных BCDMS, SLAC, NMC, BFP получены следующие результаты:

Без использования поправок на «высшие твисты», при условии $Q^2 > Q^2_{\text{min}}$, где $Q^2_{\text{min}} = 10 \text{ ГэВ}^2$

$$\chi^2/\text{dof} = 0,98, \quad \alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) = 0,1776 \pm 0,0022(\text{стат.}), \quad (4.4)$$

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1170 \pm 0,0009(\text{стат.}).$$

Таблица 13. Значения параметров поправок на «твист-4»

x_i	$\tilde{h}_4 _{\text{H}_2}(x_i)$ ± стат.	$\tilde{h}_4 _{\text{D}_2}(x_i)$ ± стат.	x_i	$\tilde{h}_4 _{\text{C}}(x_i)$ и $\tilde{h}_4 _{\text{Fe}}(x_i)$ ± стат.
0,275	-0,221±0,010	-0,226±0,010	0,250	-0,118±0,187
0,350	-0,252±0,010	-0,214±0,010	0,350	-0,415±0,233
0,450	-0,232±0,019	-0,159±0,020	0,450	-0,656±0,494
0,550	-0,122±0,360	-0,058±0,300		
0,650	-0,159±0,031	-0,057±0,031		
0,750	0,040±0,050	0,020±0,049		

При использовании поправок и $Q^2 > Q_{\text{min}}^2$ с $Q_{\text{min}}^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$

$$\chi^2/\text{dof} = 0,97, \quad \alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) = 0,1785 \pm 0,0025(\text{стат.}), \quad (4.5)$$

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1174 \pm 0,0010(\text{стат.}).$$

Полученные результаты демонстрируют хорошее согласие между двумя случаями аппроксимации. Поэтому при условии $Q^2 \geq 8 \text{ ГэВ}^2$ пКХД уже хорошо описывает экспериментальные данные, и выполненный анализ данных BCDMS без поправок вполне правомерен.

4.3.2. *Влияние пороговых эффектов (несинглетное приближение).* Как было отмечено выше, наличие широкой области по Q^2 , перекрываемой данными, позволяет изучить, в частности, влияние пороговых эффектов на эволюцию СФ. Заметим, что в случае анализа в несинглетном приближении коэффициентные функции и аномальные размерности в выражениях моментов СФ (см. [92] и уравнение (2.31)) в первых двух порядках разложения по константе связи не зависят от числа активных кварков f . Поэтому в этом случае изучение сводится к выяснению роли пороговых эффектов непосредственно для КХД-константы α_s .

При изучении пороговых эффектов рассмотрены два типа значений порогов тяжелых кварков: $Q_f^2 = 4m_f^2$ и $Q_f^2 = m_f^2$. Первый из них указывает на возможность рождения тяжелого кварка с массой m_f , а второй связан с явлением так называемого «Euclidean-reflected» — порогового эффекта тяжелых кварков. Этот эффект должен играть значительную роль (см. [89]) в эволюции $\alpha_s(Q^2)$.

1. Рассмотрим первый тип порога $Q_f^2 = 4m_f^2$. В этом случае выполним анализ в трех областях по переменной Q^2 , учитывая массы кварков (u, d, s, c, b):

— значение Q^2 находится в интервале от 1 до 10 ГэВ^2 , где число активных кварков $f = 3$;

— значение Q^2 находится в интервале от 10 до 80 ГэВ^2 , где число активных кварков $f = 4$;

— значение Q^2 находится выше чем 80 ГэВ^2 , где число активных кварков $f = 5$.

При выполнении аппроксимации в каждой области был извлечен масштабный параметр Λ^f с фиксированным значением f . С использованием (3.25) полученное значение было пересчитано к величине $\Lambda^{(f=5)}$ и затем из решения трансцендентных уравнений (3.4) и (3.6) получено значение $\alpha_s(M_Z^2)$. Результаты представлены в табл. 14.

В пределах статистических ошибок полученные значения параметра $\alpha_s(M_Z^2)$ находятся в хорошем согласии друг с другом, и, таким образом, можно вычислить среднее взвешенное значение, которое оказывается равным

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1178 \pm 0,0010(\text{стат.}). \quad (4.6)$$

2. Рассмотрим второй тип порога $Q_f^2 = m_f^2$. В этом случае выполним анализ в двух областях по переменной Q^2 :

— значение Q^2 находится в интервале от 2,5 до 20,5 ГэВ^2 , где число активных кварков $f = 4$;

— значение Q^2 находится выше чем 20,5 ГэВ^2 , где число активных кварков $f = 5$.

В полной аналогии с первым случаем были получены результаты для второго типа порогов, которые представлены в табл. 15.

С учетом фактора согласия среднее взвешенное значение параметра α_s следующее:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1176 \pm 0,0008(\text{стат.}). \quad (4.7)$$

Таблица 14. Значения параметра α_s . Изучение пороговых эффектов

N_{app}	Область Q^2	n_f	Q_0^2	Число точек	χ^2	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\alpha_s(M_Z^2) \pm \text{стат.}$
1	1–10	3	5	195	124	400±30	308±26	220±23	0,1187±0,0020
2	10–80	4	20	455	471		291±17	208±13	0,1177±0,0012
3	80–300	5	90	190	143			199±54	0,1169±0,0040

Таблица 15. Результаты изучения влияния пороговых эффектов во втором случае

N_{app}	Область Q^2	n_f	Q_0^2	Число точек	χ^2	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\alpha_s(M_Z^2) \pm \text{стат.}$
1	2,5–20,5	4	10	241	197	298±10	213±8	0,1181±0,0007
2	20,5–300	5	90	558	533		187±16	0,1159±0,0014

Из результатов анализа не наблюдается сильного влияния пороговых эффектов тяжелых кварков на величину параметра α_s . Теоретическую неопределенность, связанную с влиянием пороговых эффектов, можно оценить для $\alpha_s(M_Z^2)$ на уровне 0,0002.

Таким образом, в результате анализа в несинглетном приближении и в следующем к лидирующему (NLO) порядку получены следующие результаты:

1. При выключенных поправках на «высшие твисты» и при условии $Q^2 > 10 \text{ ГэВ}^2$ получены значения константы α_s (при $\chi^2/\text{dof} = 0,98$):

$$\begin{aligned}\alpha_s(M_Z^2) &= 0,1170 \pm 0,0009(\text{стат.}) \pm 0,0019(\text{сист.}) \pm 0,0010(\text{норм.}), \\ \alpha_s(M_Z^2) &= 0,1170 \pm 0,0023(\text{полная эксп. ошибка}).\end{aligned}\quad (4.8)$$

2. При включенных коррекциях на «высшие твисты» и при условии $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$ константа α_s равна (при $\chi^2/\text{dof} = 0,97$):

$$\begin{aligned}\alpha_s(M_Z^2) &= 0,1174 \pm 0,0007(\text{стат.}) \pm 0,0021(\text{сист.}) \pm 0,0005(\text{норм.}), \\ \alpha_s(M_Z^2) &= 0,1174 \pm 0,0022(\text{полная эксп. ошибка}).\end{aligned}\quad (4.9)$$

4.3.3. Оценки теоретических неопределенностей (несинглетное приближение). Для оценки теоретических неопределенностей в случае несинглетного приближения был выполнен анализ при $Q^2 > 10,5 \text{ ГэВ}^2$ и, соответственно, без привлечения поправок на вклад от «твист-4». Для анализа использовалось 596 экспериментальных точек данных коллабораций BCDMS, SLAC, NMC. Изменение константы определялось из соотношения

$$\Delta\alpha_s(M_Z^2) = \alpha_s^{FR}(M_Z^2) - \alpha_s^0(M_Z^2), \quad (4.10)$$

где $\alpha_s^{FR}(M_Z^2)$ — значение константы при некоторых значениях k_F и k_R , а $\alpha_s^0(M_Z^2)$ — при $k_F = k_R = 1$.

Таблица 16. Значения $\alpha_s(M_Z^2)$ для различных значений коэффициентов k_F и k_R

k_R	k_F	$\chi^2(F_2)$	$\alpha_s(90 \text{ ГэВ}^2) \pm \text{стат.}$	$\alpha_s(M_Z^2)$	$\Delta\alpha_s(M_Z^2)$
1	1	556	$0,1789 \pm 0,0023$	0,1175	0
1/2	1	558	$0,1769 \pm 0,0022$	0,1167	-0,0008
1	1/2	545	$0,1730 \pm 0,0021$	0,1150	-0,0025
1	2	568	$0,1876 \pm 0,0025$	0,1211	+0,0036
2	1	555	$0,1826 \pm 0,0025$	0,1191	+0,0016
1/2	2	570	$0,1856 \pm 0,0026$	0,1203	+0,0028
2	1/2	554	$0,1770 \pm 0,0022$	0,1167	-0,0008
1/2	1/2	556	$0,1789 \pm 0,0023$	0,1141	-0,0034
2	2	567	$0,1912 \pm 0,0028$	0,1225	+0,0050

Результаты анализа представлены в табл. 16, откуда можно видеть, что полученные сдвиги в константе не отличаются существенно от результатов, полученных в работах [74, 91].

Приняв максимальную и минимальную величины сдвига константы взаимодействия (для значений $k_R = k_F = 1/2$ и 2), мы получили следующие величины теоретической неопределенности: $+0,0050$ и $-0,0034$.

4.3.4. КХД-анализ данных экспериментов BCDMS, SLAC, NMC и BFP (полный анализ). В этом подпункте представлены результаты КХД-анализа полного набора экспериментальных данных коллабораций BCDMS, SLAC, NMC, BFP в следующем порядке к лидирующему, в котором для описания данных будет использоваться эволюция несинглетной и синглетной частей моментов СФ. В этом анализе используются экспериментальные точки для всех значений переменной x . Остальные условия по отбору данных те же, что и в случае анализа в несинглетном приближении. В этом анализе мы используем одно общее условие $Q^2 > 1 \text{ ГэВ}^2$, после применения которого для анализа остается 1309 экспериментальных точек.

Так как примерно третья часть точек при малых значениях x находится в области невысоких значений переменной Q^2 , для нормировки моментов используется значение $Q_0^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$.

Как и в случае анализа в несинглетном приближении, мы начинаем с демонстрации влияния поправок на «высшие твисты» и возможного нахождения границы применимости пКХД для описания данных по СФ.

Результаты анализа представлены в табл. 17 и на рис. 20, из которых видно, что при условии $Q^2 \geq 10 \text{ ГэВ}^2$ наблюдается стабильность в значениях извлекаемых параметров α_s , которые хорошо согласуются со значением, полученным с использованием поправок на «высшие твисты», т. е. граница при-

Таблица 17. Результаты полного анализа СФ для извлечения параметра α_s

N_{app}	Q^2 min	Число точек	НТС	χ^2/dof	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2)$ \pm стат.	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)}$, МэВ	$\alpha_s(M_Z^2)$ \pm стат.
1	1,0	1309	Нет	1,55	$0,2258 \pm 0,0011$	333	$0,1203 \pm 0,0004$
2	4,0	1051	Нет	1,27	$0,2364 \pm 0,0017$	380	$0,1232 \pm 0,0005$
3	6,0	942	Нет	1,30	$0,2385 \pm 0,0022$	390	$0,1237 \pm 0,0005$
4	8,0	870	Нет	1,32	$0,2232 \pm 0,0035$	321	$0,1196 \pm 0,0010$
5	10,0	817	Нет	1,27	$0,2226 \pm 0,0035$	318	$0,1194 \pm 0,0011$
6	11,0	793	Нет	1,21	$0,2187 \pm 0,0038$	301	$0,1183 \pm 0,0011$
7	12,0	758	Нет	1,18	$0,2192 \pm 0,0039$	304	$0,1185 \pm 0,0011$
8	13,0	754	Нет	1,17	$0,2180 \pm 0,0039$	297	$0,1181 \pm 0,0012$
9	14,0	740	Нет	1,17	$0,2169 \pm 0,0041$	294	$0,1178 \pm 0,0013$
10	15,0	714	Нет	1,14	$0,2177 \pm 0,0042$	297	$0,1180 \pm 0,0013$
11	1,0	1309	Да	1,11	$0,2167 \pm 0,0024$	293	$0,1177 \pm 0,0007$

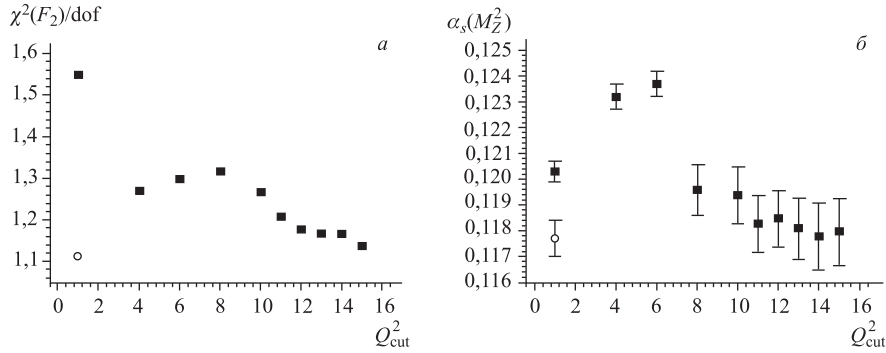


Рис. 20. Результаты полного анализа в зависимости от условий по Q_{\min}^2 . Темные точки — отсутствие коррекций на «высшие твисты», светлая точка — коррекции применяются. Показаны только статистические ошибки

менности пКХД в полном анализе (т. е. при несинглетной и синглетной эволюции моментов СФ) находится при $Q^2 \approx 10\text{--}12 \text{ ГэВ}^2$ и определяет понятие «жесткого процесса».

Как было указано выше, сравнение теоретических и экспериментальных значений логарифмических наклонов обладает более существенной чувствительностью к результатам анализа, чем оценка по общему значению χ^2 . На рис. 21, 22 и 23 представлено такое сравнение для логарифмических наклонов при различных условиях анализа.

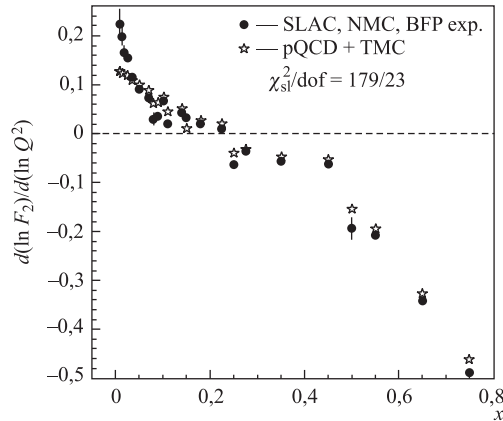


Рис. 21. Результаты полного анализа без условий по Q_{\min}^2 . Показаны значения логарифмических наклонов $d(\ln F_2)/d(\ln Q^2)$ при $Q^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$. Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям, основанным на КХД с использованием поправок только на массу мишени. Темные точки показывают логарифмические наклоны из экспериментальных данных SLAC, BCDMS, NMC и BFP. Показаны только статистические ошибки

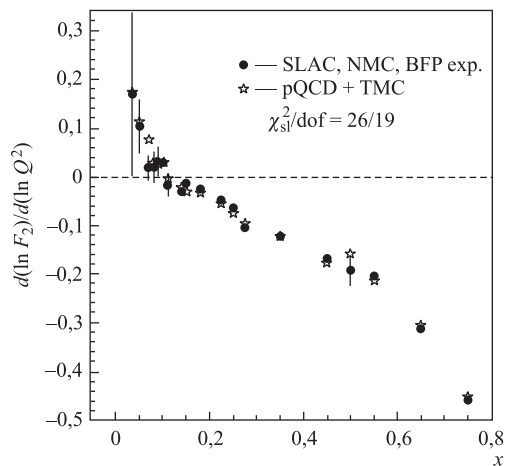


Рис. 22. Результаты полного анализа. Показаны значения логарифмических наклонов $d(\ln F_2)/d(\ln Q^2)$ при $Q^2 = 20$ ГэВ². Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям, основанным на КХД с использованием поправок на массу мишени и условия по $Q_{\min}^2 = 13$. Темные точки показывают логарифмические наклоны из экспериментальных данных SLAC, BCDMS, NMC, BFP. Показаны только статистические ошибки

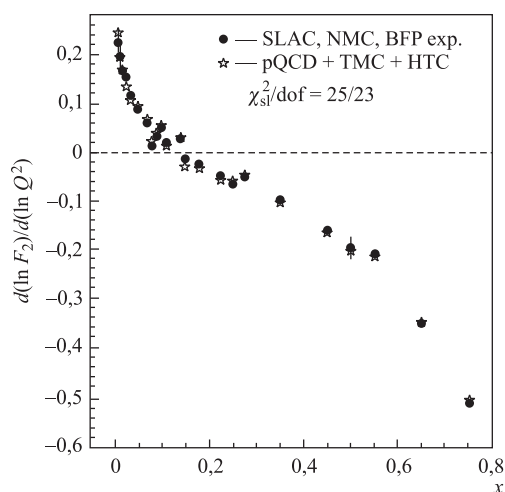


Рис. 23. Результаты полного анализа без условий по Q_{\min}^2 . Показаны значения логарифмических наклонов $d(\ln F_2)/d(\ln Q^2)$ при $Q^2 = 20$ ГэВ². Светлые точки соответствуют теоретическим предсказаниям, основанным на КХД с использованием поправок на массу мишени (ТМС) и «высшие твисты» (НТС). Темные точки показывают логарифмические наклоны из экспериментальных данных SLAC, BCDMS, NMC, и BFP. Показаны только статистические ошибки

Таким образом, в результате полного КХД-анализа в следующем по отношению к лидирующему порядку получены результаты:

1. Без использования поправок на «высшие твисты» и условия $Q_{\min}^2 = 15 \text{ ГэВ}^2$

$$\chi^2/\text{dof} = 1,14, \quad \alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2177 \pm 0,0042(\text{стат.}), \quad (4.11)$$

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1180 \pm 0,0013(\text{стат.}). \quad (4.12)$$

2. С использованием поправок на «высшие твисты» и без условия по Q_{\min}^2

$$\chi^2/\text{dof} = 1,1, \quad \alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2167 \pm 0,0024(\text{стат.}), \quad (4.13)$$

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1177 \pm 0,0007(\text{стат.}). \quad (4.14)$$

В результате полного анализа получены следующие значения параметров в параметризации партонных распределений (3.17)–(3.20) в выбранной точке нормировки моментов $Q_0^2 = 20 \text{ ГэВ}^2$:

$$\begin{aligned} a_u(20) &= 0,72, & b_u(20) &= 3,72, & a_d(20) &= 0,69, & b_d(20) &= 5,81, \\ C_S(20) &= 0,375, & b_S(20) &= 13,8, & P_G(20) &= 0,519, & b_G(20) &= 11,4, \\ K_1^C(20) &= 1,222, & K_2^C(20) &= 0,554, & K_3^C(20) &= 0,253, & & (4.15) \\ K_1^F(20) &= 1,10, & K_2^F(20) &= -0,081, & K_3^F(20) &= -0,58. \end{aligned}$$

В результате анализа были получены значения параметров — поправок на «высшие твисты» («твист-4»), которые представлены в табл. 18 и рис. 24, из которых видно возрастание коррекции на «твист-4» с уменьшением значений переменной x .

Такой рост поправок хорошо согласуется с теоретическими предсказаниями [101] и результатами недавнего анализа данных H1 и ZEUS при низких значениях переменных x и Q^2 [102].

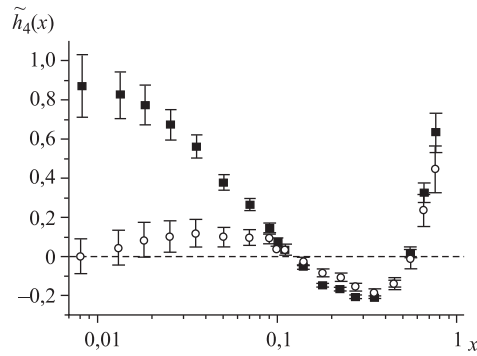
Фит с ненулевым значением $a_S = a_G = -\omega$ (см. [103]) дал следующие результаты:

$$\begin{aligned} a_u(20) &= 0,72, & b_u(20) &= 3,69, & a_d(20) &= 0,68, & b_d(20) &= 5,44, \\ a_S(20) &= -0,18, & a_G(20) &= -0,18, & C_s(20) &= 0,185, & b_S(20) &= 10,4, \\ P_G(20) &= 0,524, & b_G(20) &= 7,31, & & & & (4.16) \\ K_1^C(20) &= 1,160, & K_2^C(20) &= 0,472, & K_3^C(20) &= 0,141, \\ K_1^F(20) &= 1,03, & K_2^F(20) &= 0,131, & K_3^F(20) &= -0,28. \end{aligned}$$

Из приведенной табл. 16 также видно, что параметры валентных кварков заметно не изменились. Значения параметров — показателей степени $(1-x)$ в распределениях глюонов и морских кварков $b_G(20)$ и $b_S(20)$ — уменьшились

Таблица 18. Значения поправок на «высшие твисты» из полного анализа данных

x_i	$\tilde{h}(x_i)$ ± стат.	x_i	$\tilde{h}_4(x_i)$ ± стат.	x_i	$\tilde{h}_4(x_i)$ ± стат.
0,008	0,87±0,16	0,090	0,16±0,03	0,275	-0,19±0,01
0,013	0,83±0,12	0,100	0,09±0,02	0,350	-0,19±0,01
0,018	0,78±0,10	0,110	0,05±0,03	0,450	-0,12±0,02
0,025	0,68±0,08	0,140	-0,04±0,01	0,500	0,45±0,23
0,035	0,57±0,06	0,150	0,43±0,11	0,550	0,04±0,03
0,050	0,39±0,04	0,180	-0,13±0,01	0,650	0,35±0,05
0,070	0,28±0,03	0,225	-0,15±0,01	0,750	0,66±0,10
0,080	0,30±0,15	0,250	-0,27±0,13		

Рис. 24. Результаты полного анализа. Темные и светлые точки показывают значения поправок на вклад «твист-4» $\tilde{h}_4(x_i)$ для двух значений члена $x^{-\omega}$ в распределении морских кварков и глюонов с $\omega = 0$ и $\omega = 0,18$ соответственно. Показаны только статистические ошибки

и уже находятся в пределах предсказаний правил кваркового счета [104]. Значение показателя ω равно 0,18, что хорошо согласуется с результатами, основанными на динамике NLO BFKL [105] (см., например, работу [106] и обзор [107]).

Кроме того, этот результат находится в хорошем согласии и с результатами недавнего феноменологического изучения величины интерсепта померона [108] и анализа данных H1 и L3 [109, 110].

В табл. 19 и на рис. 24 приведены значения «твист-4» поправок для этого случая, где мы не видим роста этих поправок с уменьшением значений переменной x . Таким образом, необходимый рост СФ при уменьшении x заменяется ростом распределений глюонов и морских кварков. Такое уменьшение «твист-4» коррекций как при учете нового порядка теории возмущений, так и при пересуммировании высших порядков наблюдалось и ранее (см. [68, 73, 74] и [71, 111] соответственно).

Таблица 19. Значения поправок на «твист-4» в случае роста распределений глюонов и морских кварков $\omega = 0,18$

x_i	$\tilde{h}_4(x_i)$	x_i ± стат.	$\tilde{h}_4(x_i)$ ± стат.	x_i	$\tilde{h}_4(x_i)$ ± стат.
0,008	0,004±0,090	0,090	0,11±0,03	0,275	-0,14±0,02
0,013	0,05±0,09	0,100	0,05±0,02	0,350	-0,17±0,02
0,018	0,09±0,09	0,110	0,05±0,03	0,450	-0,12±0,03
0,025	0,11±0,08	0,140	-0,01±0,02	0,500	0,43±0,23
0,035	0,13±0,07	0,150	0,062±0,12	0,550	0,01±0,05
0,050	0,11±0,05	0,180	-0,07±0,02	0,650	0,26±0,08
0,070	0,11±0,04	0,225	-0,09±0,02	0,750	0,47±0,12
0,080	0,31±0,16	0,250	-0,16±0,14		

При этом получено следующее значение $\alpha_s(M_Z^2)$ (с числом экспериментальных точек $N = 1309$ и $\chi^2/\text{dof} = 1,1$):

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1187 \pm 0,0015(\text{стат.}), \quad (4.17)$$

которое находится в хорошем согласии с результатами предшествующего анализа в пределах статистических ошибок.

Таким образом, в результате полного анализа BCDMS, SLAC, NMC и BFP получен следующий результат для константы сильного взаимодействия:

$$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2) = 0,2167 \pm 0,0024(\text{стат.}) \pm 0,0080(\text{сист.}) \pm 0,0012(\text{норм.}) \quad (4.18)$$

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1177 \pm 0,0007(\text{стат.}) \pm 0,0021(\text{сист.}) \pm 0,0005(\text{норм.})$$

или

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1177 \pm 0,0023(\text{полн. эксп. ошибка}). \quad (4.19)$$

4.3.5. Влияние пороговых эффектов (полный анализ). Как и в случае анализа, в несинглетном приближении было изучено влияние пороговых эффектов в Q^2 на эволюцию СФ. Следует отметить, что синглетная часть моментов, т. е. и коэффициентные функции, и аномальные размерности, зависят от числа активных кварков f (см., например, обзор [92]). Мы рассмотрели в случае полного анализа те же два типа порогов рождения тяжелых кварков, что и в несинглетном приближении: $Q_f^2 = 4m_f^2$ и $Q_f^2 = m_f^2$, и для каждого типа порогов такие же области по переменной Q^2 .

Результаты анализа для первого типа порогов представлены в табл. 20: средневзвешенное значение параметра α_s равно

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1158 \pm 0,0010(\text{стат.}). \quad (4.20)$$

Таблица 20. Результаты изучения влияния порогов на параметр α_s

$N_{\text{апп}}$	Область Q^2	n_f	Q_0^2	Число точек	χ^2	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\alpha_s(M_Z^2) \pm \text{стат.}$
1	1–10	3	3,0	467	290	331±24	250±20	176±16	0,1148±0,0015
2	10–80	4	20	627	595		274±21	194±17	0,1165±0,0014
3	80–300	5	90	190	156			220±70	0,1187±0,0050

Для второго типа порогов результаты анализа представлены в табл. 21: средневзвешенное значение параметра α_s с учетом фактора согласия оказалось равным

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0,1157 \pm 0,0020(\text{стат.}). \quad (4.21)$$

Таблица 21. Результаты изучения влияния на параметр α_s второго типа порогов

$N_{\text{апп}}$	Область Q^2	n_f	Q_0^2	Число точек	χ^2	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)} \pm \text{стат.}, \text{ МэВ}$	$\alpha_s(M_Z^2) \pm \text{стат.}$
1	2,5–20,5	4	10	519	396	230±21	160±16	0,1132±0,0016
2	20,5–300	5	90	631	670		205±15	0,1174±0,0013

Как видно из выполненного анализа, результат оказался несколько неожиданным: хотя коэффициентные функции и аномальные размерности в синглетной части эволюции моментов зависят от числа активных кварков f , мы не наблюдаем существенной зависимости от их выбора в нормировке константы связи α_s . С другой стороны, само значение параметра $\alpha_s(M_Z)$ получено несколько ниже, чем в других случаях нашего анализа.

Таким образом, теоретические неопределенности для параметра α_s , связанные с пороговыми эффектами, не превышают значения 0,0002.

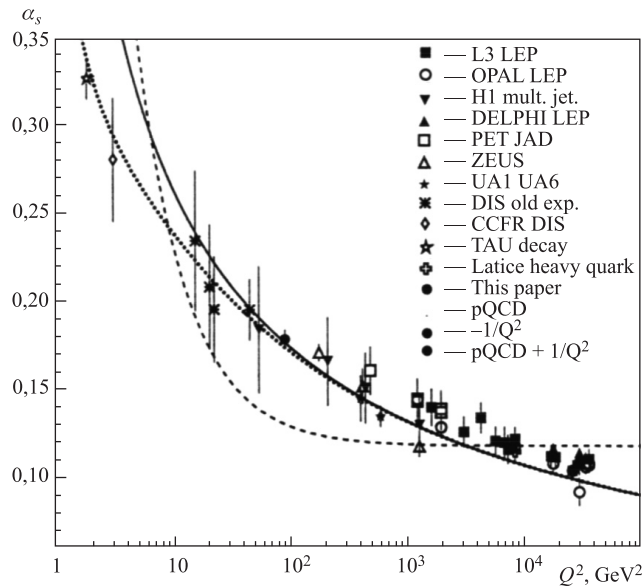
4.3.б. Оценка теоретических неопределенностей (полный анализ). Здесь мы представляем влияние результатов изучения теоретических неопределенностей на извлекаемую константу α_s .

Анализируя полученные результаты в табл. 22, можно отметить, что теоретические неопределенности в случае полного анализа также достаточно велики и составляют (при $k_R = 1/2, 2$ и $k_F = 1/2, 2$) $-0,0058$ и $+0,0047$.

4.4. Q^2 -эволюция константы сильного взаимодействия. На рис. 25 представлены мировые данные по измерению константы сильного взаимодействия α_s в зависимости от переменной Q^2 . Все точки $N_p = 52$ на рисунке нанесены при значениях, при которых они были измерены в соответствующих экспериментах и анализах [74] и [112–122].

Таблица 22. Значения константы $\alpha_s(M_Z^2)$ для различных значений k_F и k_R (полный анализ)

k_R	k_F	$\chi^2(F_2)$	$\alpha_s(20 \text{ ГэВ}^2)$ $\pm \text{стат.}$	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(4)}$, МэВ	$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(5)}$, МэВ	$\alpha_s(M_Z^2)$	$\Delta\alpha_s(M_Z^2)$
1	1	1410	$0,2167 \pm 0,0024$	293	209	0,1178	0
1/2	1	1410	$0,2112 \pm 0,0019$	270	191	0,1162	-0,0016
1	1/2	1423	$0,2040 \pm 0,0020$	241	168	0,1140	-0,0038
1	2	1447	$0,2300 \pm 0,0031$	351	256	0,1215	+0,0037
2	1	1413	$0,2204 \pm 0,0024$	309	222	0,1189	+0,0011
1/2	2	1422	$0,2190 \pm 0,0029$	303	217	0,1185	+0,0007
2	1/2	1460	$0,2021 \pm 0,0022$	233	162	0,1134	-0,0044
1/2	1/2	1436	$0,1975 \pm 0,0012$	216	149	0,1120	-0,0058
2	2	1447	$0,2340 \pm 0,0033$	369	271	0,1225	+0,0047


 Рис. 25. Мировые данные по константе α_s : сплошная кривая — предсказания пКХД; пунктирная — предположение, что α_s меняется по степенному закону ($\sim 1/Q^2$); точки — к пКХД прибавляется степенная поправка при малых значениях переменной Q^2

Результаты для константы α_s получены в различных физических процессах — в ГНР, e^+e^- -аннигиляции, $p\bar{p}$ -взаимодействиях, в дифракционных процессах и др.

Используя эти данные, мы выполнили анализ в следующих предположениях:

- константа α_s постоянная, т. е. не зависит от Q^2 ($N_{\text{app}} = 1$);
- α_s — бегущая константа, удовлетворяет уравнению пКХД ($N_{\text{app}} = 2$);
- бегущая константа меняется от Q^2 по степенному закону ($A(3) + A(1)/Q^2$), где $A(1)$ и $A(3)$ — свободные параметры ($N_{\text{app}} = 3$);
- бегущая константа зависит от Q^2 согласно уравнению пКХД со степенной поправкой QCD + $A(1)/Q^2$ ($N_{\text{app}} = 4$).

Поскольку во всех измерениях α_s доминирующими ошибками были систематические экспериментальные ошибки, то они были учтены со статистическими в квадратуре. В этом анализе не учитывались теоретические неопределенности.

Результаты анализа представлены в табл. 23, из них можно сделать следующие выводы:

- В пределах экспериментальных ошибок все данные по α_s хорошо удовлетворяют Q^2 -эволюции, предсказываемой пКХД ($N_{\text{app}} = 2$). Действительно, константа α_s универсальная для всех измеренных процессов.
- Поведение α_s не удовлетворяет гипотезе постоянства и степенной зависимости от Q^2 (см. случаи $N_{\text{app}} = 1$ и $N_{\text{app}} = 3$).
- Возможна степенная поправка при низких значениях Q^2 : параметр $A(2)$ ненулевой и отрицательный в случае $N_{\text{app}} = 4$.

Итак, результаты анализа для случая пКХД (т. е. $N_{\text{app}} = 2$) хорошо согласуются с величиной α_s , полученной только из данных по ГНР (см. уравнение (4.19) в п. 4.3). В табл. 23 указана ошибка, полученная в результате аппроксимации всех использованных данных. Эта ошибка (0,0006) близка к среднестатистической ошибке величины α_s . Полную экспериментальную ошибку оценить сложно. Если аддитивно складывать статистическую и систематическую ошибки в каждом измерении и аппроксимировать данные, то суммарная ошибка на α_s будет 0,0024.

Таким образом, полученная мировая константа связи сильного взаимодействия

$$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) = 0,1176 \pm 0,0024 (\text{эксп. ошибка})$$

Таблица 23. Результаты анализа мировых данных по константе α_s

N_{app}	α_s	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	x^2/N_p
1	Константа		$0,1201 \pm 0,0008$		909/52
2	пКХД		$0,1176 \pm 0,0006$		35/52
3	$A(3) + A(1)/Q^2$	$0,75 \pm 0,03$		$0,1182 \pm 0,0008$	322/52
4	пКХД + $A(1)/Q^2$	$-0,081 \pm 0,041$	$0,1185 \pm 0,0007$		31/52

хорошо согласуется со средней величиной [122]

$$\alpha_s(Q^2 = M_Z^2) = 0,1181 \pm 0,002.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем обзоре представлены характеристики процесса глубоконеупругого рассеяния при высоких энергиях и результаты аппроксимации экспериментальных данных по структурным функциям, полученных коллаборациями VCDMS, SLAC, NMC и BFP в экспериментах на фиксированных мишенях.

Приведены основные формулы Q^2 -эволюции партонных распределений и структурных функций ГНР. Получены значения для константы связи сильного взаимодействия $\alpha_s(M_Z^2)$ в следующем за ведущим порядке теории возмущений, а также параметры партонных распределений и степенных поправок к структурной функции $F_2(x, Q^2)$.

Работа над данным обзором поддержана РФФИ в рамках проекта № 07-02-01046-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McAllister R. W., Hofstadter R. W. // Phys. Rev. 1956. V. 102. P. 851.
2. Yearian M. R., Hofstadter R. W. // Phys. Rev. 1958. V. 110. P. 552.
3. Bloon E. D. et al. // Phys. Rev. Lett. 1969. V. 23. P. 930.
4. Breidenbach H. et al. // Ibid. P. 935.
5. Bjorken J. D. // Phys. Rev. 1969. V. 179. P. 1547.
6. Bjorken J. D., Paschos E. A. // Phys. Rev. 1969. V. 185. P. 1975.
7. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. М.: Мир, 1975.
8. Ахиезер А. И., Рекало М. П. Электродинамика адронов. Киев: Наук. думка, 1977.
9. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 2, гл. 7. М.: Наука, 1970.
10. Maximov L. C. // Rev. Mod. Phys. 1963. V. 35. P. 231.
11. Mo L. W., Tsai Y. S. // Rev. Mod. Phys. 1969. V. 41. P. 205.
12. Ахундов А. А., Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М. // ЯФ. 1977. Т. 26. С. 1251; 1980. Т. 32. С. 452;
Шумейко Н. М. // ЯФ. 1979. Т. 29. С. 1571;
Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М. // Там же. С. 969.
13. Ахундов А. А., Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М. // ЯФ. 1980. Т. 32. С. 452.

14. Ахундов А. А., Бардин Д. Ю., Шумейко Н. М. // ЯФ. 1986. Т. 44. С. 1517;
Bardin D. Yu., Shumeiko N. M. // Nucl. Phys. B. 1977. V. 127. P. 242.
15. *Akhundov A. A., Bardin D. Yu., Shumeiko N. M. JINR Preprint E2-86-104. Dubna, 1986;*
Akhundov A. A., Lohmann W. Preprint PHE 90-32. Zeuthen, 1990.
16. *Биленький С. М. Лекции по физике нейтринных и лептон-нуклонных процессов. М.: Энергоатомиздат, 1981.*
17. *Gell-Mann M. // Phys. Lett. 1964. V. 8. P. 214.*
18. *Zweig G. CERN Preprint 8182/TH.401.1964; CERN Preprint 8419/TH.412.1964.*
19. *Watennab Y. et al. // Phys. Lett. 1975. V. 35. P. 898.*
20. *Chang C. et al. // Ibid. P. 901.*
21. *Taylor R. E. // Proc. of the Intern. Symp. on Lepton and Photon Inter. at High Energies, Stanford. SLAC, 1975. P. 679.*
22. *Anderson H. L. et al. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 1450.*
23. *Han M. Y., Nambu Y. // Phys. Rev. B. 1965. V. 139. P. 1006.*
24. *Greenberg G. // Phys. Rev. Lett. 1964. V. 13. P. 598.*
25. *Benvenuti A. C. et al. // Phys. Lett. B. 1990. V. 237. P. 592; Preprint CERN EP-89-170.*
26. *Benvenuti A. C. et al. // Phys. Lett. B. 1989. V. 223. P. 485; Preprint CERN EP-89-06.*
27. *Benvenuti A. C. et al. // Phys. Lett. B. 1987. V. 195. P. 91; Preprint CERN-EP/87-100.*
28. *Argento A. et al. // Phys. Lett. B. 1983. V. 120. P. 245.*
29. *Bollini D. et al. // Proc. of the Intern. Symp. on Lepton and Photon Inter. at High Energies, Batavia, Aug. 23–29, 1979. P. 149.*
30. *Bollini D. et al. // Nucl. Instr. Meth. 1983. V. 204. P. 333.*
31. *Arneodo M. et al. (NM Collab.) // Nucl. Phys. B. 1997. V. 483. P. 3.*
32. *Whitlow L. W. et al. (SLAC Collab.) // Phys. Lett. B. 1992. V. 282. P. 475.*
33. *Politzer H. D. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. P. 1346.*
34. *Gross D. I., Wilczek F. // Ibid. P. 1343; Phys. Rev. D. 1973. V. 8. P. 3633; 1974. V. 9. P. 980.*
35. *Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T. // Nucl. Phys. B. 1977. V. 129. P. 66; V. 139. P. 545; 1979. V. 152. P. 493; Phys. Lett. B. V. 80. P. 269; V. 87. P. 403;*
Bardieen W. A. et al. // Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 3998.
36. *Furmanski W., Petronzio R. // Phys. Lett. B. 1980. V. 97. P. 437;*
Curci G., Furmanski W., Petronzio R. // Nucl. Phys. B. 1980. V. 175. P. 27;
Floratos E. G., Lacaze R., Kounnas C. // Phys. Lett. B. 1981. V. 98. P. 89.
37. *Gribov V. N., Lipatov L. N. // Sov. J. Nucl. Phys. 1972. V. 15. P. 438; 781;*
Lipatov L. N. // Sov. J. Nucl. Phys. 1975. V. 20. P. 94;
Altarelli G., Parisi G. // Nucl. Phys. B. 1977. V. 126. P. 298;
Dokshitzer Yu. L. // JETP. 1977. V. 46. P. 641.

38. *Lipatov L. N.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1975. V. 20. P. 94;
Kogut J., Susskind L. // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 697; 706; 3391.
39. *Dokshitzer Yu. L.* // Phys. Rep. C. 1980. V. 58. P. 269;
Dokshitzer Yu. L., Diakonov D. I., Troyan S. I. // Phys. Lett. B. V. 79. P. 269.
40. *Kotikov A. V.* // Part. Nucl. 2007. V. 38. P. 5.
41. *Kazakov D. I., Kotikov A. V.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 721; 1990. V. 345. P. 299.
42. *Kazakov D. I., Kotikov A. V.* // Phys. Lett. B. 1992. V. 291. P. 171.
43. *Larin S. A., van Ritbergen T., Vermaseren J. A. M.* // Nucl. Phys. B. 1994. V. 427. P. 41;
Larin S. A., Vermaseren J. A. M. // Z. Phys. C. 1993. V. 57. P. 93;
Van Neerven W. L., Zijlstra E. // Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 127; 476; Nucl. Phys. B. 1992. V. 383. P. 525.
44. *Moch S., Vermaseren J. A. M.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 573. P. 853.
45. *Moch S., Vermaseren J. A. M., Vogt A.* // Nucl. Phys. B. 2004. V. 688. P. 101; V. 691. P. 129.
46. *Devoto A. et al.* // Phys. Rev. D. 1983. V. 27. P. 508.
47. *Herrod R. T.* // Z. Phys. C. 1983. V. 13. P. 313.
48. *Barnett R. M., Schlatter A.* // Phys. Lett. B. 1982. V. 112. P. 475.
49. *Иванов Ю. П., Исаев П. С.* // ЯФ. 1983. Т. 38. С. 744.
50. *Gonzalez-Arroyo A., Lopez C., Yndurain F. L.* // Nucl. Phys. B. 1979. V. 153. P. 161; V. 159. P. 512; 1980. V. 174. P. 474.
51. *Buras A. J.* // Proc. of the Intern. Symp. on Lepton-Photon Inter. Bonn, 1981. P. 674.
52. *Abbott L. F., Barnett R. M.* // Ann. Phys. 1980. V. 125. P. 276.
53. *Fadeev N. G. et al.* // Phys. Lett. B. 1982. V. 117. P. 379.
54. *Yndurain F. L.* // Phys. Lett. B. 1978. V. 74. P. 68.
55. *Auber J. J. et al.* // Phys. Lett. B. 1982. V. 114. P. 291.
56. *Gonzalez-Arroyo A., Lopez C.* // Nucl. Phys. B. 1980. V. 166. P. 429.
57. *Furmanski W., Petronzio R.* // Nucl. Phys. B. 1982. V. 195. P. 237.
58. *Bergsma F. et al.* // Phys. Lett. B. 1983. V. 123. P. 269.
59. *Parisi G., Surlas N.* // Nucl. Phys. B. 1979. V. 171. P. 421.
60. *Barker I. S., Langensiegen C. S., Shaw G.* // Nucl. Phys. B. 1981. V. 186. P. 61;
Barker I. S., Martin B. R., Shaw G. // Z. Phys. C. 1983. V. 19. P. 147;
Barker I. S., Martin B. R. // Z. Phys. C. 1984. V. 24. P. 255.
61. *Krivokhizhin V. G. et al.* JINR Preprint E2-86-564. Dubna, 1986.
62. *Krivokhizhin V. G. et al.* // Z. Phys. C. 1987. V. 36. P. 51.
63. *Krivokhizhin V. G. et al.* // Z. Phys. C. 1990. V. 48. P. 347.

64. *Cežė G.* Ортогональные многочлены. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1962.
65. *James F., Ross M.* MINUIT. CERN Computer Center Library, D 505. Geneve, 1987.
66. *Buras A. J., Gaemers K. J. F.* // Nucl. Phys. B. 1978. V. 132. P. 249.
67. *Aubert J. J. et al.* // Nucl. Phys. B. 1986. V. 272. P. 158.
68. *Parente G., Kotikov A. V., Krivokhizhin V. G.* // Phys. Lett. B. 1994. V. 333. P. 190.
69. *Kotikov A. V., Parente G.* // Nucl. Phys. B. 1999. V. 549. P. 242.
70. *Illarionov A. Yu., Kotikov A. V., Parente G.* // Part. Nucl. 2008. V. 39. P. 807.
71. *Vovk V. I.* // Z. Phys. C. 1990. V. 47. P. 57;
Kotikov A. V., Parente G., Sanchez Guillen J. // Z. Phys. C. 1993. V. 58. P. 465.
72. *Belitsky A. V. et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 437. P. 160; Nucl. Phys. B. 1999. V. 546. P. 279;
Belitsky A. V. et al. // Phys. Lett. B. 1998. V. 421. P. 312;
Bourrely C. et al. // Prog. Theor. Phys. 1998. V. 99. P. 1017;
Buccella F., Pisanti O., Rosa L. Preprint DSF-42/99. hep-ph/0001159.
73. *Kataev A. L. et al.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 388. P. 179; 1998. V. 417. P. 374.
74. *Kataev A. L., Parente G., Sidorov A. V.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 573. P. 405; Part. Nucl. 2003. V. 34. P. 20.
75. *Shaw G.* // Nucl. Phys. A. 2000. V. 675. P. 84C; hep-ph/9901253.
76. *Kotikov A. V., Parente G.* // JETP. 2003. V. 97. P. 859.
77. *Schrempp F.* Preprint DESY-05-125.2005. hep-ph/0507160.
78. *Kotikov A. V.* // Yad. Fiz. 1994. V. 57. P. 142.
79. *Vermaseren J. A. M.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1999. V. 14. P. 2037.
80. *Kotikov A. V., Velizhanin V. N.* hep-ph/0501274.
81. *Krivokhizhin V. G., Kotikov A. V.* // Phys. At. Nucl. 2005. V. 68. P. 1873; Acta Phys. Slov. 2002. V. 52. P. 227; Acta Phys. Polon. B. 2002. V. 33. P. 2947.
82. *Martin A. D. et al.* // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 14. P. 155;
Glueck M., Reya E., Vogt A. // Eur. Phys. J. C. 1998. V. 5. P. 4611;
Lai H. et al. (STEQ Collab.) // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 12. P. 375.
83. *Vovk V. I., Kotikov A. V., Maximov S. I.* // Theor. Math. Phys. 1990. V. 84. P. 744.
84. *Dokshitzer Yu. L., Shirkov D. V.* // Z. Phys. C. 1995. V. 67. P. 449;
Shirkov D. V., Mikhailov S. V. // Z. Phys. C. 1994. V. 63. P. 463.
85. *Edwards B. J., Gottschalk T. D.* // Nucl. Phys. B. 1982. V. 196. P. 328;
Shirkov D. V. // Theor. Math. Phys. 1981. V. 49. P. 1039; Nucl. Phys. B. 1992. V. 371. P. 267.
86. *Bernreuther W., Wetzel W.* // Nucl. Phys. B. 1982. V. 197. P. 228;
Wetzel W. // Ibid. V. 196. P. 259;
Bernreuther W. // Ann. Phys. B. 1983. V. 151. P. 127.
87. *Marciano W.* // Phys. Rev. D. 1984. V. 29. P. 580.

88. *Chetyrkin K. G., Kniehl B. A., Steinhauser M.* // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 2184; Nucl. Phys. B. 1998. V. 510. P. 61.
89. *Shirkov D. V., Sidorov A. V., Mikhailov S. V.* JINR Preprint E2-96-285. Dubna, 1996; hep-ph/9607472; hep-ph/9707514.
90. *Blumlein J., van Neerven W. L.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 450. P. 417.
91. *van Neerven W. L., Vogt A.* // Nucl. Phys. B. 2000. V. 588. P. 345.
92. *Buras A.* // Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 199.
93. *Georgi H., Politzer H. D.* // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 1829;
Barbieri R. et al. // Phys. Lett. B. 1990. V. 64. P. 171; Nucl. Phys. B. 1976. V. 117. P. 50;
Nachtmann O. // Nucl. Phys. B. 1973. V. 63. P. 237;
Wandzura S. // Nucl. Phys. B. 1977. V. 122. P. 412.
94. *Aubert J. J. et al.* // Phys. Lett. B. 1983. V. 123. P. 275.
95. *Dasgupta M., Webber B. R.* // Phys. Lett. B. 1996. V. 382. P. 273.
96. *Stein E. et al.* // Nucl. Phys. B. 1998. V. 536. P. 318.
97. *Yndurain F. J.* Quantum Chromodynamics (An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons). Berlin: Springer-Verlag, 1983.
98. *Kotikov A. V., Krivokhijine V. G.* // Proc. of Intern. Workshop on Deep Inelastic Scattering and Related Phenomena. Brussels, 1998; hep-ph/9805353.
99. *Mayers R. D. et al.* // Phys. Rev. D. 1986. V. 34. P. 1265.
100. *Virchaux M., Milsztajn A.* // Phys. Lett. B. 1992. V. 274. P. 221.
101. *Bartels J.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 298. P. 204; Z. Phys. C. 1993. V. 60. P. 471;
Levin E. M., Ryskin M. G., Shuvaev A. G. // Nucl. Phys. B. 1992. V. 387. P. 589;
Bartels J., Bontus C. // Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 034009;
Bartels J., Bontus C., Spiesberger H. Preprint DESY-99-118, MZ-TH/99-33.
102. *Kotikov A. V., Parente G.* // Proc. of Intern. Seminar on Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics, Dubna, 2000; hep-ph/0012299.
103. *Kotikov A. V.* // Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 103; Phys. At. Nucl. 1996. V. 59. P. 2137.
104. *Matveev V. A., Muradian R. M., Tavkhelidze A. N.* // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 7. P. 719;
Brodsky S. J., Farrar G. R. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 31. P. 1153;
Brodsky S. J. et al. // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 6980.
105. *Fadin V. N., Lipatov L. N.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 429. P. 127;
Ciafaloni M., Camici G. // Ibid. V. 430. P. 349.
106. *Brodsky S. J. et al.* // JETP Lett. 1999. V. 70. P. 155.
107. *Andersson Bo et al.* // Eur. Phys. J. C. 2002. V. 25. P. 77.
108. *Kaidalov A. B.* hep-ph/0103011.

109. *Aid S. et al. (H1 Collab.) // Nucl. Phys. B. 1999. V. 470. P. 3.*
110. *Acciarri M. et al. (L3 Collab.) // Phys. Lett. B. 1999. V. 453. P. 333;*
Kienzle M. Talk Given at the Intern. Symp. on Evolution Equations and Large Order Estimates in QCD, Gatchina, Russia, May, 2000.
111. *Bartels J., Golec-Biernat K., Peters K. // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 17. P. 121.*
112. *Adloff C. et al. // Eur. Phys. J. C. 1999. V. 6. P. 575.*
113. *Abreu P. et al. // Phys. Lett. B. 1999. V. 456. P. 322.*
114. *Biebel O. et al. // Ibid. V. 459. P. 326.*
115. *Fernandez P. A. M. // Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.). 1998. V. 64. P. 7.*
116. *Derriek M. et al. // Phys. Lett. B. 1995. V. 363. P. 201.*
117. *Buskulis D. et al. // Ibid. V. 349. P. 238.*
118. *Arneodo M. et al. // Phys. Lett. B. 1993. V. 309. P. 222.*
119. *Werlen M. et al. // Phys. Lett. B. 1999. V. 452. P. 201.*
120. *Kim J. H. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 3595.*
121. *Barate R. et al. // Eur. Phys. J. C. 1998. V. 4. P. 409.*
122. *Bethke S. // J. Phys. G. 2000. V. 26. P. R27.*