

КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ  
ЭФФЕКТЫ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ,  
ДЕЛЕНИИ И ОТКРЫТЫХ  
КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

*В. В. Саргсян<sup>а</sup>, З. Каноков<sup>а,б</sup>, Г. Г. Адамян<sup>а,б,\*</sup>, Н. В. Антоненко<sup>а</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Национальный университет, Ташкент, Узбекистан

<sup>\*</sup> Институт ядерной физики, Ташкент, Узбекистан

ВВЕДЕНИЕ	330
КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА	337
Обобщенные немарковские уравнения Ланжевена (случай бозонной внутренней подсистемы).	337
Линейная связь по импульсу	348
Линейная связь по координате	356
Обобщенные немарковские уравнения Ланжевена (случай фермионной внутренней подсистемы)	361
Чистые состояния, соотношение неопределенности и декогерентность	368
ДИФФУЗИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО И ПЕРЕВЕРНУТОГО ОСЦИЛЛЯТОРОВ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ ПО КООРДИНАТЕ	370
Диффузионный процесс по коллективной координате от-носительного расстояния между центрами масс взаимодействующих ядер	370
Диффузионный процесс по коллективной координате массовой асимметрии	382
РАСПАД МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ	388
Формализм	388
Диффузионные коэффициенты, зависящие от координаты	390

---

\*E-mail: adamian@theor.jinr.ru

Скорость распада из потенциальной ямы	391
КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕЛЕНИЯ И ЗАХВАТА	402
Процесс деления	402
Процессы захвата и слияния ядер	410
ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	424
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	427

## КВАНТОВЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ В ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЯХ, ДЕЛЕНИИ И ОТКРЫТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ

*В. В. Саргсян<sup>а</sup>, З. Канокон<sup>а,б</sup>, Г. Г. Адамян<sup>а,б,\*</sup>, Н. В. Антоненко<sup>а</sup>*

<sup>а</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>б</sup> Национальный университет, Ташкент, Узбекистан

<sup>с</sup> Институт ядерной физики, Ташкент, Узбекистан

Из обобщенных немарковских уравнений Ланжевена выведены квантовые диффузионные уравнения с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени. Получены обобщенные флуктуационно-диссипативные соотношения и аналитические формулы для вычисления коэффициентов трения и диффузии в ядерных процессах. Исследованы асимптотики транспортных коэффициентов и корреляционных функций. Изучена проблема ослабления корреляций в квантовых диссипативных системах. Проведен сравнительный анализ диффузионных коэффициентов гармонического и перевернутого осцилляторов. Изучена роль квантовых статистических эффектов при прохождении через параболический барьер. В случае немарковской динамики найдены наборы диффузионных коэффициентов, обеспечивающих чистоту состояния в любой момент времени. С использованием мастер-уравнения для приведенной матрицы плотности для открытых квантовых систем изучено влияние разных наборов транспортных коэффициентов на скорость распада из метастабильного состояния. Развитый подход применен для изучения процессов деления и захвата налетающего ядра ядром-мишенью при энергиях бомбардировки около кулоновского барьера. Самосогласованным образом учитываются влияния диссипации и флуктуаций на эти процессы. С использованием расчетных вероятностей захвата, усредненных по всем ориентациям деформированных ядра-снаряда или ядра-мишени, вычислены сечения испарительных остатков в асимметричных реакциях слияния.

The quantum diffusion equations with time-dependent transport coefficients are derived from the generalized non-Markovian Langevin equations. Generalized fluctuation-dissipation relations and analytical formulas for the friction and diffusion coefficients are obtained. The long-time tails of the correlation functions are investigated. The regression of correlations is discussed for quantum dissipative systems. Comparative analysis of the diffusion coefficients for the harmonic and inverted oscillators is performed. The role of quantum statistical effects in the transmission process through the parabolic barrier is studied. The sets of diffusion coefficients supplying the purity of states are derived for non-Markovian dynamics. Using a master equation for the reduced density matrix of open quantum system, the influence of different sets of transport coefficients on the decay rate from a metastable state is treated. The developed approach is suggested to describe the fission process and capture inside of the Coulomb barrier of two heavy nuclei at bombarding energies near the

---

\*E-mail: adamian@theor.jinr.ru

barrier. The influence of dissipation and fluctuations is taken self-consistently into account in these processes. Using the calculated probabilities of the capture, averaged in all mutual orientations of the deformed colliding nuclei, the evaporation residue cross-sections are calculated for the asymmetric fusion reactions.

PACS: 25.70.Jj; 24.10.-i; 24.60.-k

## ВВЕДЕНИЕ

Развитию формализма для описания статистического и динамического поведения открытых систем посвящено большое число работ [1–14]. Данный формализм применяется для описания реакций слияния, квазиделения, многонуклонных передач с тяжелыми ионами и деления ядер [15–33]. Интерес к стохастическим методам в ядерной физике чрезвычайно возрос после открытия реакций глубоконеупругих столкновений тяжелых ионов [20, 33] и существенного увеличения экспериментальной информации по делению [34, 35]. В таких процессах наиболее существенными считаются лишь некоторые коллективные (макроскопические) степени свободы, которые выбираются *a priori*, для интерпретации экспериментальных данных. Оценкой качества преобразования от исходных нуклонных переменных к коллективным может служить, кроме макроскопической аналогии, слабость связи коллективных степеней свободы с остальными (внутренними) степенями свободы. Лишь при этом условии имеет смысл выделение коллективного движения [36]. Наиболее часто используемыми коллективными координатами при описании деления и ядерных реакций с тяжелыми ионами при низких энергиях около кулоновского барьера ( $\leq 10$  МэВ/нуклон) являются межцентровое расстояние или относительное удлинение системы, параметр шейки, массовая (зарядовая) асимметрия и деформации ядер. Число явно учитываемых коллективных координат можно уменьшить, учитывая экспериментально установленное различие их характерных времен релаксации.

Вышеуказанные ядерные процессы описываются с помощью небольшого числа медленных коллективных степеней свободы, которые взаимодействуют с термостатом, образованным всеми остальными быстрыми одночастичными степенями свободы. Тогда динамика коллективных переменных становится похожей на динамику классической броуновской частицы, так как в одном акте взаимодействия с одночастичной подсистемой энергия коллективной подсистемы изменяется на относительно малую величину. Динамическим уравнением в такой физической модели является стохастическое уравнение Ланжевена или физически эквивалентное ему диффузионное уравнение Фоккера–Планка для функции распределения коллективных координат и сопряженных им импульсов. Для решения этих уравнений необходимо знание транспортных коэффициентов: потенциальной энергии, массовых пара-

метров, коэффициентов трения и диффузии. При рассмотрении конкретных ядерных процессов стохастические уравнения и транспортные коэффициенты определяются микроскопически или феноменологически.

Предложенный в [37, 38] диффузионный подход был обобщен на случай нескольких коллективных степеней свободы в работах [39, 40] и применен для описания наблюдаемых дисперсий массового [41], энергетического и зарядового распределений осколков деления возбужденных ядер. Для расчета потенциальной энергии делящегося ядра использовалась жидкокапельная модель. Тензоры инерции и трения в уравнении Фоккера–Планка рассчитывались в гидродинамическом приближении Вернера–Уиллера. Гидродинамическое приближение для коэффициентов трения соответствует предположению, что ядерная вязкость имеет двухтельный механизм, свойственный обычным жидкостям. Для сравнения в расчетах использовались также коэффициенты «поверхностной» однотельной диссипации. Компоненты диффузионного тензора вычислялись по классической формуле Эйнштейна. В рамках стохастического подхода [32], основанного на многомерном классическом уравнении Ланжевена для коллективных координат удлинения системы, параметра шейки и массовой асимметрии, были изучены множественности предельных нейтронов, массово-энергетические, зарядовые, угловые распределения фрагментов деления возбужденных ядер в широком диапазоне параметров делимости и энергий возбуждения ядер.

Имеющиеся на данный момент теоретические модели предсказывают величину коэффициента затухания от  $10^2$ – $10^4$  [42] до 2–6 [43, 44] в единицах  $10^{21} \text{ с}^{-1}$ . Зависимость ядерной вязкости от температуры также варьируется весьма широко: от приблизительно прямо пропорциональной (с возрастанием от  $0,4 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$  при  $T = 0,5 \text{ МэВ}$  до  $7,6 \cdot 10^{21} \text{ с}^{-1}$  при  $T = 4 \text{ МэВ}$ ) [45] до обратно пропорциональной квадрату температуры (прямо пропорциональной времени релаксации нуклонного движения), как это должно быть для фермижидкости [46]. Ситуация осложняется тем, что ядерное трение не является экспериментально измеряемой величиной и должно извлекаться из данных с привлечением модельных предположений. В работах [34, 47–50] было проанализировано влияние диссипации на распределение кинетической энергии осколков деления. Многолетние теоретические исследования [26, 47, 51–55] показали, однако, что сильная зависимость расчетных кинетических энергий от критерия разрыва ядра на два осколка деления не позволяет извлечь из сравнения с экспериментальными данными тип и величину ядерного трения. На основе расчетов потенциальной энергии и экспериментальных данных по полным кинетическим энергиям осколков деления в работе [56] было показано, что только слабая диссипация совместима с существующими экспериментальными данными по вынужденному делению тепловыми нейтронами. Данный полуэмпирический метод не использует предположений о динамике ядерного движения или механизме диссипации в делении.

В работах [57, 58] было изучено влияние трения на скорость деления и показано, что диссипативные эффекты могут приводить к эмиссии большего числа нейтронов из делящегося ядра, чем это предсказывается равновесной статистической моделью. Одно из возможных объяснений появления избыточных нейтронов, заряженных частиц и гамма-квантов в том, что ток через барьер деления сильно зависит от ядерной вязкости и существует время задержки (переходное время) между началом процесса диффузионного деления и установлением квазистационарного тока вероятности через седловую точку [57–62]. Если время задержки порядка или больше, чем характерное время эмиссии частицы, то можно ожидать сильное уменьшение вероятности деления на первых шагах каскада девозбуждения. Таким образом, знание значений времен деления и задержки, которые зависят от ядерной вязкости, является критическим для интерпретации экспериментальных данных. Экспериментальные данные [63–65] качественно подтвердили выводы теоретических работ [58].

С помощью комбинированной динамическо-статистической модели [27] (статистическая модель испарения частиц объединена с классической ланжевеновской динамикой) были проанализированы экспериментальные данные (множественности предразрывных нейтронов и заряженных частиц и вероятности (сечения) деления), несущие информацию о диссипативных свойствах делительной моды. Аномально резкое возрастание диссипации для сильно деформированных конфигураций, близких к разрыву, которое было введено в работе [27] для описания многочисленных экспериментальных данных, не получило впоследствии должного теоретического объяснения.

Сравнение теоретических результатов в рамках классического ланжевеновского подхода [32, 66] и экспериментальных данных показывает, что одновременное описание массово-энергетического распределения осколков и средних множественностей предразрывных нейтронов в делении сильно возбужденных ядер достигается в предположении однопольного механизма вязкости с редуцированным на фактор 0,25–0,5 коэффициентом трения, полученным с помощью формулы «стенки». Был сделан однозначный выбор относительно того, какой механизм ядерной вязкости, двухпольный или однопольный, реализуется при делении ядра. Однако недостаточно изучена зависимость ядерного трения от температуры и формы ядра. Вопрос, как быстро сильно возбужденное ядро меняет свою форму, важен для понимания механизмов ядерных реакций и деления. Для более обоснованных выводов, касающихся зависимости ядерной вязкости от температуры и коллективных координат, необходимо использовать в динамических расчетах более реалистичные варианты статистического описания эмиссии частиц. Следует отметить работы [67, 68], в которых в рамках теории линейного отклика было установлено соответствие между классической и квантовой формулировками однопольной диссипации, выведены выражения для функции отклика

и транспортных коэффициентов в приближениях среднего поля и Хартри–Фока–Боголюбова, продемонстрировано влияние оболочечных эффектов на величину коэффициента трения вдоль долины деления  $^{224}\text{Th}$ .

Транспортные (стохастические) модели [24, 69–79] наиболее широко используются для описания глубоконеупругих столкновений тяжелых ионов. Обмен массой и зарядом, передачу энергии и углового момента относительного движения во внутренние степени свободы можно успешно интерпретировать как неравновесный диффузионный процесс. Учитывая явно или неявно статистические гипотезы для гамильтониана взаимодействия коллективных и внутренних степеней свободы, можно вывести кинетические уравнения из динамического уравнения движения Лиувилля. Такой вывод позволяет получить микроскопические транспортные коэффициенты [80]. В макроскопических диффузионных моделях транспортные коэффициенты считают пропорциональными отношению фазовых объемов состояний возбужденной системы. Например, направление передачи нуклонов определяется балансом между полными энергиями различных конфигураций двойной ядерной системы, которая формируется на начальной стадии столкновения ядер.

В рамках микроскопического подхода были предложены такие транспортные модели, как приближение случайных матриц [24, 69–71], модели одностепенной диссипации [78–85] и линейного отклика [74–76], которые стимулировали развитие теории коллективного ядерного движения большой амплитуды. В этих моделях отсутствует микроскопическое самосогласование плотности и ядерного потенциала. Основным кинетическим уравнением является мастер-уравнение или уравнение Фоккера–Планка. Решение уравнения Фоккера–Планка содержит информацию о средних значениях и флуктуациях динамических переменных. Средние значения удовлетворяют уравнению Ньютона с силами трения. В рамках одночастичных моделей [77–79] вычислялись транспортные коэффициенты для уравнения Фоккера–Планка или мастер-уравнения, описывающего перенос массы и заряда, энергии и углового момента. Поскольку подход [77] не использует теорию возмущения в противоположность моделям [79–85], где связь между коллективными и внутренними движениями описывается не самосогласованно, а только в среднем и в первом порядке теории возмущения (предел слабой связи), транспортные коэффициенты в этих подходах сильно различаются. Во всех этих моделях внутренняя система описывается как сумма независимых внутренних подсистем каждого из ядер, т. е. предполагается, что партнеры реакции сохраняют свою индивидуальность. Влияние структуры взаимодействующих ядер проявляется в зависимости транспортных коэффициентов от плотности одночастичных уровней. В работах [72, 77, 80–85], часть из которых выполнена в ОИЯИ, учитываются некогерентные частично-дырочные возбуждения и обмен нуклонами между ядрами, вызванные недиагональными матричными элементами

одночастичного потенциала. Модель [79] рассматривает только обмен нуклонами и является микроскопическим аналогом классической картины обмена частицами через окно в ходе столкновения ядер (модель «близости» [86]). Статистическая гипотеза входит в эти модели вместе с предположением о быстрой хаотизации движений нуклонов в каждом из ядер. Интригует простота моделей [79,80,82–85] и успех в описании потерь кинетической энергии (формула «окна») и ширины массовых (зарядовых) распределений продуктов реакций многонуклонных передач.

В теории линейного отклика [74,87] используют предположение о том, что в каждой точке классической траектории внутренняя система близка к термодинамическому равновесию. Тогда можно вычислить отклонение матрицы плотности внутренней системы от равновесной по теории возмущения. Теория линейного отклика сформулирована в квазиadiaбатическом представлении (предел слабой связи), т.е. модель верна только для малых коллективных скоростей. Возбуждение внутренней системы (некогерентные частично-дырочные возбуждения в двухцентровом потенциале) вызывается за каждый бесконечно малый промежуток времени изменением среднего поля двойной ядерной системы. В качестве коллективных степеней свободы в данной модели учитываются относительное движение ядер, массовая (зарядовая) асимметрия, форма ядер. Связь макроскопических и микроскопических степеней свободы осуществляется посредством тензора трения. Причем трение и коэффициент диффузии связаны соотношением Эйнштейна. Диссипация в теории линейного отклика является квантово-механической версией классического одностепенного трения (формула «стенки»). Необратимость движения возникает в результате перехода к макроскопическому пределу в системе независимых частиц.

Обычно предполагают, что образовавшаяся двойная ядерная система сильно возбуждается и локальное равновесие реализуется в течение очень короткого интервала времени. Это хорошее приближение для конечной стадии реакции, но оно может быть некорректно при описании относительно быстрой начальной стадии. Расчеты показывают, что на начальной стадии глубоконепругих столкновений с тяжелыми ионами доминируют сильные когерентные возбуждения, которые распадаются на некогерентные сложные состояния в течение времени установления локального равновесия. Для учета нестатистической начальной фазы столкновения в работе [88] было получено модифицированное уравнение Фоккера–Планка.

В модели «диссипативной диабатической динамики» [89] также учитывались когерентные возбуждения и эффекты памяти на начальной стадии реакции. В работе [25], наоборот, предполагалось, что на стадии подлета ядер друг к другу существенны некогерентные одночастичные возбуждения, и для расчета транспортных коэффициентов использовались динамические числа заполнения одночастичных состояний взаимодействующих ядер.



В модели, предложенной на основе концепции двойной ядерной системы, разработанной в ОИЯИ В. В. Волковым, процессы полного слияния и квазиделения (распад двойной ядерной системы) рассматриваются как диффузионные процессы по коллективным координатам массовой (зарядовой) асимметрии  $\eta = (A_1 - A_2)/(A_1 + A_2)$  ( $\eta_z = (Z_1 - Z_2)/(Z_1 + Z_2)$ ), где  $A_i$  ( $Z_i$ ) — массовое (зарядовое) число  $i$ -го кластера, и относительного расстояния  $R$  между центрами масс ядер соответственно [28, 90–97]. Составное ядро образуется посредством диффузии нуклонов из легкого ядра в тяжелое ядро. В силу статистического характера эволюции в массивных двойных ядерных системах возникает конкуренция между каналами полного слияния и квазиделения. Эта конкуренция может сильно уменьшить сечение слияния с уменьшением асимметрии во входном канале, что прекрасно согласуется с экспериментом. Для расчета сечения слияния было использовано квазистационарное решение двумерного (по координатам  $\eta$  и  $R$ ) диффузионного уравнения Фоккера–Планка [98]. Диссипативное коллективное ядерное движение большой амплитуды, которое происходит при слиянии и квазиделении, было также проанализировано в рамках транспортной теории при решении двумерного (по координатам  $\eta$  и  $\eta_z$ ) мастер-уравнения для приведенной матрицы плотности с учетом процесса распада двойной ядерной системы [29]. В этой модели удалось впервые описать и предсказать сечения образования трансактинидных и сверхтяжелых элементов, массовые и энергетические распределения продуктов квазиделения. Следует отметить и другие модели слияния [99], в которых использованы стохастические уравнения и где основной коллективной переменной, ответственной за полное слияние, является межцентровое расстояние или удлинение системы.

Хотя стохастический подход, основанный на диффузионном уравнении Фоккера–Планка, успешно применялся для решения многих задач коллективной ядерной динамики [26, 57, 78, 100–104], предпочтение, тем не менее, отдается использованию уравнений Ланжевена, поскольку точное решение уравнения Фоккера–Планка ограничено малой размерностью фазового пространства [57, 100] и часто требует использования различных приближений: метода глобального моментного приближения или редуцированного пропагатора [26]. В то же время уравнения Ланжевена могут быть решены численно без привлечения дополнительных упрощений, в том числе и для многомерного случая. В кинетической теории метод Ланжевена значительно упрощает вычисление неравновесных квантовых и тепловых флуктуаций и обеспечивает ясную картину как марковской, так и немарковской динамики процесса [4–11].

Хотя многие свойства деления и ядерных реакций имеют квантовую природу, во многих исследованиях на основе транспортных моделей квантовые статистические эффекты игнорируются и используется классическое описание, в котором коэффициенты трения и диффузии связаны через классиче-

ское флуктуационно-диссипационное соотношение. Например, влияние релаксационных эффектов на временную зависимость ширины деления изучено лишь на основе классических уравнений Фоккера–Планка и Ланжевена [26, 27, 32]. Рассмотрение затухания и флуктуаций в коллективной квантовой системе в основном ограничивалось марковским пределом (мгновенная диссипация, гауссовские дельта-коррелированные флуктуации) и пределом слабой связи или высоких температур. Нелокальность диссипации обычно не принималась во внимание при описании реакций с тяжелыми ионами и деления.

До недавнего времени считалось, что процесс деления является марковским: время релаксации одночастичной подсистемы заметно меньше характерного времени коллективного движения. В этом случае коллективное движение подвержено броуновскому шуму, связанному с диффузией по энергетическим поверхностям, отвечающим различным частично-дырочным конфигурациям. Но в работе [36] отмечалось, что «собственно броуновское движение является строго говоря, немарковским: частица возбуждает в среде слабо затухающие упругие волны, которые действуют на ее последующее движение (вязкое последствие)». Решая уравнение Ланжевена с запаздывающим трением, в работе [105] авторы показали, что из-за эффектов памяти время спуска с седла до разрыва возрастает приблизительно в три раза и полная кинетическая энергия осколков заметно уменьшается при делении  $^{236}\text{U}$ . Поэтому количественные оценки вязкости, в частности относительной, в рамках немарковской модели могут существенно отличаться от тех, которые получены в предположении марковского характера динамики деления.

До сих пор нет модели, которая учитывала бы все квантовые эффекты и эффекты немарковости при прохождении потенциального барьера. Подбарьерные процессы играют важную роль, например, в захвате налетающего ядра ядром-мишенью при энергиях около кулоновского барьера или в спонтанном делении. Изучение поведения диссипативной квантовой немарковской системы вне предела слабой связи или высоких температур вызвало большой интерес к точно решаемым моделям [11, 13, 106–108]. В этих моделях внутренняя подсистема представляется набором гармонических осцилляторов, взаимодействие которых с коллективной подсистемой гармонического осциллятора осуществляется через линейную связь между координатами. Плотность осцилляторов и константы связи между внутренней и коллективной подсистемами выбираются такими, чтобы уравнения движения для средних принимали классический вид.

Теория открытых квантовых систем хорошо подходит для рассмотрения диссипации и диффузии в делении и слиянии. Среди квантовых транспортных уравнений можно отметить феноменологическое уравнение Линдблада [109–111]. С использованием уравнения Линдблада в работах [112], выполненных в ОИЯИ, был рассмотрен процесс прохождения потенциального

барьера в зависимости от величин диффузионных коэффициентов. Результаты показали, что вероятность туннелирования в открытых квантовых системах сильно зависит от величины связи с термостатом. Диссипация иногда способствует туннелированию, но препятствует прохождению при надбарьерных энергиях. С ростом коэффициента диффузии по координате проницаемость барьера увеличивается, а декогерентность состояний уменьшается.

Данная работа имеет целью для описания коллективной ядерной динамики большой амплитуды в реакциях слияния, квазиделения, деления и многонуклонных передач найти подходящий микроскопический гамильтониан системы и получить обобщенные немарковские квантовые уравнения Ланжевена для релевантных коллективных координат. Эти уравнения должны удовлетворять квантовым флуктуационно-диссипационным соотношениям. На основе уравнений Ланжевена необходимо найти эквивалентное квантовое диффузионное уравнение для редуцированной матрицы плотности или функции Вигнера с зависящими от времени и коллективных координат транспортными коэффициентами. Полученные уравнения могут быть использованы для изучения квантовых, немарковских и диссипативных эффектов в процессах слияния, деления и захвата бомбардирующего ядра ядром-мишенью. Представленный формализм будет применен для перевернутого и гармонического осцилляторов и более сложных потенциалов. В качестве приложений рассмотрим распад метастабильного состояния, деление и процессы захвата и слияния ядер. Будет исследована роль квантовых и немарковских эффектов и координатной зависимости диффузионных коэффициентов при прохождении потенциального барьера (при распаде метастабильного состояния). Необходимо понять, как эти эффекты изменяют характерные временные масштабы этих процессов. Следует отметить возможное применение предложенного формализма для описания процесса ядерной мультифрагментации, релятивистских ядерных столкновений и предравновесной эмиссии частиц.

## 1. КВАНТОВАЯ НЕМАРКОВСКАЯ ДИНАМИКА

**1.1. Обобщенные немарковские уравнения Ланжевена (случай бозонной внутренней подсистемы).** Определим микроскопический гамильтониан  $H$  полной системы (внутренняя подсистема плюс коллективная подсистема), с помощью которого будем получать квантовые немарковские стохастические уравнения Ланжевена и зависящие от времени транспортные коэффициенты для коллективной подсистемы. Для ядерных систем в работах [113, 114] был построен квантовый гамильтониан, зависящий явно от коллективной координаты  $q$ , канонически сопряженного коллективного импульса  $p$  и внутренних

степеней свободы:

$$H = H_c + H_b + H_{cb}, \quad H_c = p \frac{1}{2\mu(q)} p + U(q), \quad H_b = \sum_{\nu} \hbar\omega_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} b_{\nu},$$

$$H_{cb} = \sum_{\nu} V_{\nu}(q)(b_{\nu}^{\dagger} + b_{\nu}) + i \sum_{\nu} G_{\nu}(q, p)(b_{\nu}^{\dagger} - b_{\nu}). \quad (1)$$

Здесь  $b_{\nu}^{\dagger}$  и  $b_{\nu}$  — фоновые операторы рождения и уничтожения соответственно, описывающие внутренние возбуждения системы с энергией  $\hbar\omega_{\nu}$ . Для простоты обозначений мы опустили знаки операторов.  $H_c$  и  $H_b$  являются гамильтонианом коллективной и внутренней подсистем соответственно.  $H_{cb}$  в (1) описывает связь коллективного движения с внутренними возбуждениями и является источником появления диссипативных членов в уравнениях для операторов коллективных переменных. Например, при описании взаимодействия ядер при низких энергиях первый член  $H_{cb}$  отвечает воздействию среднего поля каждого из ядер на одночастичное движение в другом ядре, а второй описывает связь тока внутреннего движения с коллективным током. При условии  $G_{\nu}(q, p) = \{\tilde{G}_{\nu}(q), p\}_+ = \tilde{G}_{\nu}(q)p + p\tilde{G}_{\nu}(q)$  гамильтониан  $H$  является обратимым по времени. Наша цель — вывести и аналитически решить уравнения Ланжевена для операторов  $p$  и  $q$ .

Используя гамильтониан (1), получаем систему квантовых гейзенберговских уравнений для операторов, относящихся к коллективному и внутреннему движениям:

$$\dot{q} = \frac{i}{\hbar}[H, q] = \frac{1}{2}\{\mu^{-1}(q), p\}_+ + i \sum_{\nu} G'_{\nu, p}(b_{\nu}^{\dagger} - b_{\nu}), \quad (2)$$

$$\dot{p} = \frac{i}{\hbar}[H, p] = -H'_{c, q}(q, p) - \sum_{\nu} V'_{\nu, q}(b_{\nu}^{\dagger} + b_{\nu}) - i \sum_{\nu} G'_{\nu, q}(b_{\nu}^{\dagger} - b_{\nu}),$$

$$\dot{b}_{\nu}^{\dagger} = \frac{i}{\hbar}[H, b_{\nu}^{\dagger}] = i\omega_{\nu} b_{\nu}^{\dagger} + \frac{1}{\hbar}(iV_{\nu}(q) + G_{\nu}(q, p)), \quad (3)$$

$$\dot{b}_{\nu} = \frac{i}{\hbar}[H, b_{\nu}] = -i\omega_{\nu} b_{\nu} + \frac{1}{\hbar}(-iV_{\nu}(q) + G_{\nu}(q, p)).$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $H'_{c, q}(q, p) = \frac{\partial H_c(q, p)}{\partial q}$ ,  $V'_{\nu, q} = \frac{\partial V_{\nu}(q(t))}{\partial q}$ ,  $G'_{\nu, p} = \frac{\partial G_{\nu}(q(t), p(t))}{\partial p}$  и  $G'_{\nu, q} = \frac{\partial G_{\nu}(q(t), p(t))}{\partial q}$ . Подставляя

следующие решения (3)

$$\begin{aligned}
 b_{\nu}^{+}(t) + b_{\nu}(t) &= f_{\nu}^{+}(t) + f_{\nu}(t) - \frac{2V_{\nu}(q)}{\hbar\omega_{\nu}} - \\
 &\quad - \frac{i}{\omega_{\nu}} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^{+}(\tau) e^{i\omega_{\nu}(t-\tau)} - \dot{\Phi}(\tau) e^{-i\omega_{\nu}(t-\tau)}], \\
 b_{\nu}^{+}(t) - b_{\nu}(t) &= f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t) + \frac{2iG_{\nu}(q, p)}{\hbar\omega_{\nu}} - \\
 &\quad - \frac{i}{\omega_{\nu}} \int_0^t d\tau [\dot{\Phi}^{+}(\tau) e^{i\omega_{\nu}(t-\tau)} + \dot{\Phi}(\tau) e^{-i\omega_{\nu}(t-\tau)}],
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{\nu}(t) &= \left[ b_{\nu}(0) + \frac{i}{\omega_{\nu}} \Phi(0) \right] e^{-i\omega_{\nu}t}, \\
 \Phi(t) &= \frac{1}{\hbar} [-iV_{\nu}(q(t)) + G_{\nu}(q(t), p(t))],
 \end{aligned}$$

в уравнения (2), получаем систему нелинейных интегродифференциальных стохастических уравнений

$$\begin{aligned}
 \dot{q} &= \frac{1}{2} \{ \tilde{\mu}^{-1}(q), p \}_{+} - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{GV}(t, \tau), \dot{q}(\tau) \}_{++} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{GG}(t, \tau), \dot{p}(\tau) \}_{+} + F_q(t), \\
 \dot{p} &= -\tilde{H}'_{c,q}(q, p) - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{VV}(t, \tau), \dot{q}(\tau) \}_{++} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \{ K_{VG}(t, \tau), \dot{p}(\tau) \}_{+} + F_p(t).
 \end{aligned} \tag{5}$$

При получении (5) мы пренебрегли членами второго порядка по  $\hbar$ :  $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')]$ ,  $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], V'_{\nu,q}(t')]$ ,  $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')]$ ,  $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{q}(t')], G'_{\nu,q}(t')]$ ,  $[[G'_{\nu,p}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')]$  и  $[[G'_{\nu,q}(t), \dot{p}(t')], G'_{\nu,p}(t')]$ . В случае линейной связи по координате и импульсу ( $V_{\nu}$  и  $G_{\nu}$  — линейные функции  $q$  и  $p$  соответственно) уравнения движения (5) являются точными.

В (5) коллективный гамильтониан

$$\tilde{H}_c(q, p) = p \frac{1}{2\tilde{\mu}(q)} p + \tilde{U}(q)$$

содержит перенормированные массу

$$\tilde{\mu}^{-1}(q(t)) = \mu^{-1}(q(t)) - 2 \sum_{\nu} \frac{[G'_{\nu,p}(t)]^2}{\hbar\omega_{\nu}}$$

и потенциальную энергию

$$\tilde{U}(q(t)) = U(q(t)) - \sum_{\nu} \frac{[V_{\nu}(q(t))]^2}{\hbar\omega_{\nu}}.$$

В уравнениях движения (5) диссипативные ядра выделены в членах, пропорциональных  $\dot{q}$  и  $\dot{p}$  [11, 115, 116]:

$$\begin{aligned} K_{GV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [\{G'_{\nu,p}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau]) - \\ &\quad - \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau])], \\ K_{VG}(t, \tau) &= - \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [\{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + \\ &\quad + \{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \sin(\omega_{\nu}[t - \tau])], \quad (6) \\ K_{VV}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} [(\{V'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+ + \{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+) \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]) + \\ &\quad + (\{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(\tau)\}_+ - \{G'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(\tau)\}_+) \sin(\omega_{\nu}[t - \tau])], \\ K_{GG}(t, \tau) &= \sum_{\nu} \frac{1}{\hbar\omega_{\nu}} \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,p}(\tau)\}_+ \cos(\omega_{\nu}[t - \tau]). \end{aligned}$$

Поскольку эти ядра не зависят от числа фононов, они также не зависят от температуры  $T$  термостата. Температура и флуктуации входят в рассмотрение через определение распределения начальных условий для внутренней системы. В (5) операторы  $F_q$  и  $F_p$

$$\begin{aligned} F_q(t) &= \sum_{\nu} F_q^{\nu}(t) = i \sum_{\nu} G'_{\nu,p}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)], \\ F_p(t) &= \sum_{\nu} F_p^{\nu}(t) = - \sum_{\nu} V'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) + f_{\nu}(t)] - i \sum_{\nu} G'_{\nu,q}(t) [f_{\nu}^{+}(t) - f_{\nu}(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

играют роль случайных сил по координате и импульсу и зависят от  $q(t)$ ,  $p(t)$  и начальных условий внутренней подсистемы. Как обычно, в статистической физике операторы  $F_q^{\nu}(t)$  и  $F_p^{\nu}(t)$  отождествляются с флуктуациями из-за неопределенности начальных условий для операторов термостата. Для определения статистических свойств этих флуктуаций рассмотрим ансамбль

начальных состояний, в котором заданы  $q(0)$  и  $p(0)$ , а начальные операторы термостата выбираются из канонического ансамбля [11, 115, 116]. В этом ансамбле флуктуации  $F_q^\nu(t)$  и  $F_p^\nu(t)$  распределены по Гауссу, имеют нулевые средние значения

$$\langle\langle F_q^\nu(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_p^\nu(t) \rangle\rangle = 0 \quad (8)$$

и ненулевые вторые моменты. Символ  $\langle\langle \dots \rangle\rangle$  обозначает среднее по переменным термостата. Гауссово распределение случайных сил соответствует случаю, когда термостат представляется набором гармонических осцилляторов [4, 5, 9]. Для расчета корреляционных функций флуктуаций будем использовать термостат со статистикой Бозе–Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \langle\langle f_\nu^+(t)f_{\nu'}^+(t') \rangle\rangle &= \langle\langle f_\nu(t)f_{\nu'}(t') \rangle\rangle = 0, \\ \langle\langle f_\nu^+(t)f_{\nu'}(t') \rangle\rangle &= \delta_{\nu,\nu'} n_\nu e^{i\omega_\nu(t-t')}, \\ \langle\langle f_\nu(t)f_{\nu'}^+(t') \rangle\rangle &= \delta_{\nu,\nu'} (n_\nu + 1) e^{-i\omega_\nu(t-t')}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $n_\nu = [\exp(\hbar\omega_\nu/T) - 1]^{-1}$  — температурные числа заполнения для фононов.

Таким образом, получена система обобщенных нелинейных уравнений Ланжевена (5). Присутствие интегральных членов в уравнениях движения означает, что немарковская система обладает памятью о движении по траектории, предшествующей моменту времени  $t$ . Второе из уравнений (5) содержит также случайную силу, что приводит к ряду математических трудностей при решении [4]. Аналитическое решение возможно, если заменить в уравнениях (5) функционалы  $\tilde{\mu}$ ,  $V'_{\nu,q}$ ,  $G'_{\nu,q}$  и  $G'_{\nu,p}$  их средними значениями, считая их слабо меняющимися за интервал времени  $t$ , и аппроксимировать перенормированный потенциал гармоническим (или перевернутым) осциллятором  $\tilde{U} = \tilde{\delta}q^2/2$ . В этом случае получаем систему обобщенных уравнений Ланжевена с диссипативными ядрами, обладающими памятью. Для их решения применим преобразование Лапласа  $\mathcal{L}$ , чтобы получить линейные уравнения для образов. Зная выражения для образов, получаем явные выражения для оригиналов:

$$\begin{aligned} q(t) &= A_t q(0) + B_t p(0) + \int_0^t d\tau [C_\tau F_q(t-\tau) + \tilde{C}_\tau F_p(t-\tau)], \\ p(t) &= M_t q(0) + N_t p(0) + \int_0^t d\tau [L_\tau F_p(t-\tau) + \tilde{L}_\tau F_q(t-\tau)], \end{aligned} \quad (10)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
 A_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + (1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s))K_{VV}(s)}{d(s)} \right], \\
 N_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s(1 - K_{VG}(s))(1 + K_{GV}(s)) + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s))K_{GG}(s)}{d(s)} \right], \\
 B_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\mu}^{-1}(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], & M_t &= -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\delta}(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\
 C_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s(1 - K_{VG}(s))}{d(s)} \right], & L_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s(1 + K_{GV}(s))}{d(s)} \right], \\
 \tilde{C}_t &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s)}{d(s)} \right], & \tilde{L}_t &= -\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)}{d(s)} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь  $\mathcal{L}^{-1}$  обозначает обратное преобразование Лапласа и  $K_{VV}(s)$ ,  $K_{GG}(s)$ ,  $K_{GV}(s)$ ,  $K_{VG}(s)$  — изображения Лапласа диссипативных ядер. Символы  $t$  и  $\tau$  указывают на временную зависимость. Используя теорему о вычетах для нахождения перечисленных выше оригиналов, решения  $q(t)$  и  $p(t)$  можем выразить через корни  $s_i$  уравнения

$$\begin{aligned}
 d(s) \equiv s^2(1 + K_{GV}(s))(1 - K_{VG}(s)) + \\
 + (\tilde{\delta} + sK_{VV}(s))(1/\tilde{\mu} + sK_{GG}(s)) = 0. \quad (11)
 \end{aligned}$$

**1.1.1. Флуктуационно-диссипационные соотношения.** Флуктуационно-диссипационное соотношение связывает макроскопическую величину, описывающую диссипацию энергии коллективной подсистемы, с микроскопической характеристикой внутренней подсистемы, выражающей флуктуации случайных сил. Таким образом, данное соотношение связывает неравновесное поведение системы с равновесной или квазиравновесной характеристикой. Используя статистические свойства (8) и (9) случайных сил (7) и пренебрегая членами порядка  $O(\hbar)$  (это соответствует пренебрежению двойными коммутаторами в (5)), получаем следующие соотношения для симметризованных корреляционных функций ( $k, k' = q, p$ ) случайных сил  $\phi_{kk'}^\nu(t, t') = \langle \langle F_k^\nu(t)F_{k'}^\nu(t') + F_{k'}^\nu(t')F_k^\nu(t) \rangle \rangle$ :

$$\begin{aligned}
 \phi_{qp}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1](-\{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']) + \\
 &\quad + \{G'_{\nu,p}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_+ \sin(\omega_\nu[t - t'])), \\
 \phi_{pq}^\nu(t, t') &= -[2n_\nu + 1](\{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']) + \\
 &\quad + \{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \sin(\omega_\nu[t - t'])), \quad (12)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\phi_{pp}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1] (\{V'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_{++} + \\ &\quad + \{G'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']) + \\ &\quad + (\{V'_{\nu,q}(t), G'_{\nu,q}(t')\}_+ - \{G'_{\nu,q}(t), V'_{\nu,q}(t')\}_+) \sin(\omega_\nu[t - t'])), \\ \phi_{qq}^\nu(t, t') &= [2n_\nu + 1] \{G'_{\nu,p}(t), G'_{\nu,p}(t')\}_+ \cos(\omega_\nu[t - t']).\end{aligned}$$

Сохранение отброшенных членов привело бы к дополнительным соотношениям. Используя уравнения (6) и (12) и учитывая, что  $2n_\nu + 1 = \text{cth}[\hbar\omega_\nu/(2T)]$ , получаем квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения:

$$\sum_\nu \phi_{qp}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{GV}(t, t'), \quad (13)$$

$$\sum_\nu \phi_{pq}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{VG}(t, t'), \quad (14)$$

$$\sum_\nu \phi_{pp}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{VV}(t, t'), \quad (15)$$

$$\sum_\nu \phi_{qq}^\nu(t, t') \frac{\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)]}{\hbar\omega_\nu} = K_{GG}(t, t'). \quad (16)$$

Выполнение флуктуационно-диссипационных соотношений означает, что мы правильно определили диссипативные ядра в немарковских динамических уравнениях движения. Квантовое флуктуационно-диссипационное соотношение подобной формы было получено в [11] и в цитированных там работах для простых случаев FC- и RWA-осцилляторов. В нашей работе квантовая флуктуационно-диссипационная теорема обобщена на случай произвольной формы  $H_{cb}$ . Квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения отличаются от классических и сводятся к ним в пределе большой температуры  $T$  (или  $\hbar \rightarrow 0$ ), когда в (13)–(16)  $\text{th}[\hbar\omega_\nu/(2T)] \rightarrow \hbar\omega_\nu/(2T)$ . Классические соотношения содержат лишь температурные флуктуации. В (13)–(16) дополнительно учитываются еще и квантовые флуктуации. Поскольку уравнения движения (5) для коллективных координат и импульсов соответствуют флуктуационно-диссипационным соотношениям, наш формализм обеспечивает основу для описания квантовых статистических эффектов коллективного движения.

**1.1.2. Транспортные коэффициенты.** Используя явные зависимости  $p$  и  $q$  от времени, получаем их основные характеристики, т. е. средние значения  $\langle q(t) \rangle$  и  $\langle p(t) \rangle$  (первые моменты):

$$\begin{aligned}\langle q(t) \rangle &= A_t \langle q(0) \rangle + B_t \langle p(0) \rangle, \\ \langle p(t) \rangle &= M_t \langle q(0) \rangle + N_t \langle p(0) \rangle\end{aligned} \quad (17)$$

и корреляционные функции  $\sigma_{q_t q_{t'}} = \langle q(t)q(t') \rangle$ ,  $\sigma_{p_t p_{t'}} = \langle p(t)p(t') \rangle$ ,  $\sigma_{q_t p_{t'}} = \langle q(t)p(t') \rangle$ ,  $\sigma_{p_t q_{t'}} = \langle p(t)q(t') \rangle$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{q_t q_{t'}} &= A_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t B_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t A_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t q_{t'}}, \\ \sigma_{p_t p_{t'}} &= M_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + M_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + N_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{p_t p_{t'}}, \\ \sigma_{q_t p_{t'}} &= A_t M_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + B_t N_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + A_t N_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + B_t M_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + J_{q_t p_{t'}}, \\ \sigma_{p_t q_{t'}} &= M_t A_{t'} \sigma_{q_0 q_0} + N_t B_{t'} \sigma_{p_0 p_0} + N_t A_{t'} \sigma_{p_0 q_0} + M_t B_{t'} \sigma_{q_0 p_0} + J_{p_t q_{t'}},\end{aligned}\quad (18)$$

где

$$\begin{aligned}J_{q_t q_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [C_\tau C_{\tau'} I_{qq}(t-\tau, t'-\tau') + C_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t-\tau, t'-\tau') + \\ &\quad + \tilde{C}_\tau C_{\tau'} I_{pq}(t-\tau, t'-\tau') + \tilde{C}_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t-\tau, t'-\tau')], \\ J_{p_t p_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [L_\tau L_{\tau'} I_{pp}(t-\tau, t'-\tau') + L_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{pq}(t-\tau, t'-\tau') + \\ &\quad + \tilde{L}_\tau L_{\tau'} I_{qp}(t-\tau, t'-\tau') + \tilde{L}_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{qq}(t-\tau, t'-\tau')], \\ J_{q_t p_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [C_\tau L_{\tau'} I_{qp}(t-\tau, t'-\tau') + \tilde{C}_\tau L_{\tau'} I_{pp}(t-\tau, t'-\tau') + \\ &\quad + \tilde{C}_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{pq}(t-\tau, t'-\tau') + C_\tau \tilde{L}_{\tau'} I_{qq}(t-\tau, t'-\tau')], \\ J_{p_t q_{t'}} &= \int_0^t \int_0^{t'} d\tau d\tau' [L_\tau C_{\tau'} I_{pq}(t-\tau, t'-\tau') + \tilde{L}_\tau C_{\tau'} I_{qq}(t-\tau, t'-\tau') + \\ &\quad + \tilde{L}_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{qp}(t-\tau, t'-\tau') + L_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t-\tau, t'-\tau')].\end{aligned}\quad (19)$$

Символ  $\langle \dots \rangle$  в  $I_{qq}(t, \tau) = \langle F_q(t)F_q(\tau) \rangle$ ,  $I_{pp}(t, \tau) = \langle F_p(t)F_p(\tau) \rangle$ ,  $I_{pq}(t, \tau) = \langle F_p(t)F_q(\tau) \rangle$ ,  $I_{qp}(t, \tau) = \langle F_q(t)F_p(\tau) \rangle$  указывает на усреднение по всей системе.

Чтобы определить коэффициенты трения и диффузии, рассмотрим уравнения для средних и дисперсий по координате  $\sigma_{qq}(t) = \langle q^2(t) \rangle - \langle q(t) \rangle^2 = \sigma_{q_t q_t} - \langle q(t) \rangle^2$ , по импульсу  $\sigma_{pp}(t) = \langle p^2(t) \rangle - \langle p(t) \rangle^2 = \sigma_{p_t p_t} - \langle p(t) \rangle^2$  и по координате-импульсу  $\sigma_{pq}(t) = \frac{1}{2} \langle p(t)q(t) + q(t)p(t) \rangle - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle = \frac{1}{2} (\sigma_{q_t p_t} + \sigma_{p_t q_t}) - \langle p(t) \rangle \langle q(t) \rangle$ . Дифференцируя по времени уравнения (17) и

(18) при  $t = t'$ , получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle q(t) \rangle &= -\lambda_q(t)\langle q(t) \rangle + \frac{1}{m(t)}\langle p(t) \rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle p(t) \rangle &= -\xi(t)\langle q(t) \rangle - \lambda_p(t)\langle p(t) \rangle\end{aligned}\quad (20)$$

и

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{qq}(t) &= -2\lambda_q(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{2}{m(t)}\sigma_{pq}(t) + 2D_{qq}(t), \\ \dot{\sigma}_{pp}(t) &= -2\lambda_p(t)\sigma_{pp}(t) - 2\xi(t)\sigma_{pq}(t) + 2D_{pp}(t), \\ \dot{\sigma}_{pq}(t) &= -[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{pq}(t) - \xi(t)\sigma_{qq}(t) + \frac{1}{m(t)}\sigma_{pp}(t) + 2D_{pq}(t).\end{aligned}\quad (21)$$

Эти уравнения содержат коэффициенты трения по координате

$$\lambda_q(t) = \frac{\dot{A}_t N_t - \dot{B}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t}\quad (22)$$

и по импульсу

$$\lambda_p(t) = \frac{A_t \dot{N}_t - B_t \dot{M}_t}{B_t M_t - A_t N_t},\quad (23)$$

перенормированную обратную массу

$$1/m(t) = \frac{\dot{A}_t B_t - \dot{B}_t A_t}{B_t M_t - A_t N_t},\quad (24)$$

перенормированный коэффициент жесткости

$$\xi(t) = \frac{\dot{M}_t N_t - \dot{N}_t M_t}{B_t M_t - A_t N_t}\quad (25)$$

и коэффициенты диффузии по координате

$$D_{qq}(t) = \lambda_q(t)J_{q_t q_t} - \frac{1}{2m(t)}(J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \frac{1}{2}\dot{J}_{q_t q_t},\quad (26)$$

по импульсу

$$D_{pp}(t) = \lambda_p(t)J_{p_t p_t} + \frac{\xi(t)}{2}(J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \frac{1}{2}\dot{J}_{p_t p_t}\quad (27)$$

и по координате-импульсу

$$D_{pq}(t) = \frac{1}{2} \times \left[ \frac{\lambda_p(t) + \lambda_p(t)}{2} (J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) + \xi(t) J_{q_t q_t} - \frac{1}{m(t)} J_{p_t p_t} + \frac{1}{2} (\dot{J}_{q_t p_t} + \dot{J}_{p_t q_t}) \right]. \quad (28)$$

Таким образом, мы получили уравнения на первые и вторые моменты с транспортными коэффициентами, зависящими явно от времени, коллективной координаты и импульса. Именно временная зависимость этих коэффициентов является следствием немарковости в системе. При  $t \rightarrow \infty$  равновесные коэффициенты диффузии имеют следующий вид ( $\dot{\sigma}_{pp} = \dot{\sigma}_{qq} = \dot{\sigma}_{pq} = 0$  в (21)):

$$\begin{aligned} D_{qq}(\infty) &= \lambda_q(\infty) \sigma_{qq}(\infty) - \frac{1}{m(\infty)} \sigma_{pq}(\infty), \\ D_{pp}(\infty) &= \lambda_p(\infty) \sigma_{pp}(\infty) + \xi(\infty) \sigma_{pq}(\infty), \\ D_{pq}(\infty) &= \frac{1}{2} \left[ (\lambda_p(\infty) + \lambda_q(\infty)) \sigma_{pq}(\infty) + \xi(\infty) \sigma_{qq}(\infty) - \frac{1}{m(\infty)} \sigma_{pp}(\infty) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Сравнивая (26)–(28) и (29), мы имеем  $\sigma_{qq}(\infty) = J_{q_\infty q_\infty}$ ,  $\sigma_{pp}(\infty) = J_{p_\infty p_\infty}$  и  $\sigma_{pq}(\infty) = \frac{1}{2} (J_{q_\infty p_\infty} + J_{p_\infty q_\infty})$ . Если  $\sigma_{pq}(\infty) = 0$  в (29), то асимптотические коэффициенты диффузии и трения связаны флуктуационно-диссипационными соотношениями

$$D_{qq}(\infty) = \lambda_q(\infty) \sigma_{qq}(\infty), \quad D_{pp}(\infty) = \lambda_p(\infty) \sigma_{pp}(\infty).$$

**1.1.3. Связь с диффузионными уравнениями.** Уравнения (17) и (21) для средних значений и дисперсий коллективной координаты и импульса могут быть получены из следующего мастер-уравнения для матрицы плотности  $\rho(t)$  коллективной подсистемы

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}_c, \rho] + \frac{i\lambda_q(t)}{2\hbar} [p, \{q, \rho\}_+] - \frac{i\lambda_p(t)}{2\hbar} [q, \{p, \rho\}_+] - \\ &\quad - \frac{D_{qq}(t)}{\hbar^2} [p, [p, \rho]] - \frac{D_{pp}(t)}{\hbar^2} [q, [q, \rho]] + \frac{D_{pq}(t)}{\hbar^2} ([p, [q, \rho]] + [q, [p, \rho]]) \end{aligned} \quad (30)$$

или из уравнения типа Фоккера–Планка для соответствующей функции Вигнера  $W(q, p, t)$

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\frac{p}{m(t)} \frac{\partial W}{\partial q} + \xi(t) q \frac{\partial W}{\partial p} + \lambda_p(t) \frac{\partial(pW)}{\partial p} + \lambda_q(t) \frac{\partial(qW)}{\partial q} + \\ &\quad + D_{qq}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q^2} + D_{pp}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial p^2} + 2D_{pq}(t) \frac{\partial^2 W}{\partial q \partial p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь для случая связи общего вида мы предположили, что трение и диффузия зависят от  $t$ , но не от  $p$  и  $q$ . В случае линейной связи этого предположения не требуется, поскольку зависимость лишь от  $t$  получается явно. Несмотря на немарковскую природу уравнений (5), эволюции  $\rho$  и  $W$  описываются дифференциальными уравнениями, локальными по времени. Эффекты памяти приводят к временной зависимости транспортных коэффициентов. В общем случае мы имеем коэффициенты трения и диффузии по координате и по импульсу, что является следствием присутствия случайных сил по  $q$  и  $p$ . Заметим, что уравнения (30) и (31) имеют ту же структуру, что и соответствующие феноменологические уравнения Линдблада с постоянными транспортными коэффициентами [12, 14, 109–111].

**1.1.4. Предел сильного затухания.** В случае большого трения наступает быстро равновесие по импульсу,  $\dot{p} \approx 0$ , и второе уравнение в (5) принимает вид

$$0 = -\tilde{\delta}q(t) - \int_0^t d\tau K_{VV}(t, \tau)\dot{q}(\tau) + F_p(t). \quad (32)$$

Решением этого уравнения является

$$q(t) = A_t q(0) + \int_0^t d\tau \tilde{C}_\tau F_p(t - \tau), \quad (33)$$

где

$$A_t = \int_0^t d\tau K_{VV}(t, \tau)\tilde{C}_\tau, \quad \tilde{C}_t = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{\delta} + sK_{VV}(s)]^{-1}.$$

Используя (33), получаем зависимости среднего и дисперсии от времени:

$$\langle q(t) \rangle = A_t \langle q(0) \rangle, \quad \sigma_{qq}(t) = A_t^2 \sigma_{qq}(0) + J_{q_t q_t}, \quad (34)$$

где

$$J_{q_t q_t} = \int_0^t \int_0^t d\tau d\tau' \tilde{C}_\tau \tilde{C}_{\tau'} I_{pp}(t - \tau, t - \tau').$$

Дифференциальные уравнения для  $\langle q(t) \rangle$  и  $\sigma_{qq}(t)$  получаются из (34):

$$\langle \dot{q}(t) \rangle = v(t)\langle q(t) \rangle, \quad \dot{\sigma}_{qq}(t) = 2v(t)\sigma_{qq}(t) + D_{qq}^{ov}(t), \quad (35)$$

где дрейфовый  $v(t)$  и диффузионный  $D_{qq}^{ov}(t)$  коэффициенты имеют вид

$$v(t) = \frac{\dot{A}_t}{A_t}, \quad D_{qq}^{ov}(t) = -2\frac{\dot{A}_t}{A_t} J_{q_t q_t} + \dot{J}_{q_t q_t}. \quad (36)$$

В асимптотике получаем флуктуационно-диссипационное соотношение

$$D_{qq}^{ov}(\infty) = -2v(\infty)\sigma_{qq}(\infty).$$

Уравнения (35) могут быть получены из следующего дифференциального уравнения для функции распределения  $W(q, t)$  по координате

$$\dot{W} = -v(t)\frac{\partial}{\partial q}(qW) + \frac{1}{2}D_{qq}^{ov}(t)\frac{\partial^2}{\partial q^2}W. \quad (37)$$

Это уравнение представляет собой квантовый аналог классического уравнения Смолуховского для общего вида связи подсистемы с термостатом. В работе [117] оно было получено другим способом лишь для FC-осциллятора. Если переходные времена для  $D_{qq}^{ov}(t)$  и  $v(t)$  равны или меньше характерного времени  $1/\lambda_p(\infty)$  установления равновесия по  $p$ , то с хорошей точностью в расчетах можно использовать асимптотики  $D_{qq}^{ov}(\infty)$  и  $v(\infty)$ , т. е. пренебрегать зависимостью транспортных коэффициентов от  $t$ .

**1.2. Линейная связь по импульсу.** В частном случае рассмотрим микроскопический гамильтониан  $H$  квадратичной формы для полной системы:

$$H_c = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{\mu\omega^2 q^2}{2} + \frac{\xi_0}{2}(pq + qp), \quad (38)$$

$$H_b = \sum_{\nu} \left( \frac{p_{\nu}^2}{2m_{\nu}} + \frac{m_{\nu}\omega_{\nu}^2 q_{\nu}^2}{2} \right), \quad (39)$$

$$H_{cb} = p \sum_{\nu} g_{\nu} p_{\nu}. \quad (40)$$

Здесь  $H_{cb}$  описывает линейное по импульсам  $p$  и  $p_{\nu}$  взаимодействие между внутренней и коллективной подсистемами с константами связи  $g_{\nu}$ . В (38) и (39)  $\mu(m_{\nu})$  и  $\omega(\omega_{\nu})$  — масса и частота коллективного (внутреннего) осциллятора соответственно. С помощью параметра  $\xi_0$  можно обеспечить трансляционную инвариантность коллективной подсистемы.

По аналогии с (5) получаем систему квантовых интегродифференциальных стохастических уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\tilde{\mu}}p + \xi_0 q + \int_0^t \dot{p}(t')K_{GG}(t-t')dt' + F_q(t), \\ \frac{dp}{dt} &= -\mu\omega^2 q - \xi_0 p \end{aligned} \quad (41)$$

с перенормированной коллективной массой

$$\frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\mu} - \sum_{\nu} m_{\nu} g_{\nu}^2, \quad (42)$$

диссипативным ядром уравнения движения по  $q$

$$K_{GG}(t-t') = \sum_{\nu} m_{\nu} g_{\nu}^2 \cos[\omega_{\nu}(t-t')] \quad (43)$$

и оператором случайной силы по координате  $q$

$$F_q(t) = \sum_{\nu} g_{\nu} [(p_{\nu}(0) + m_{\nu} g_{\nu} p(0)) \cos \omega_{\nu} t - q_{\nu}(0) m_{\nu} \omega_{\nu} \sin \omega_{\nu} t]. \quad (44)$$

После канонического преобразования координат  $p'_{\nu} = p_{\nu} + g_{\nu} m_{\nu} p$  и  $q'_{\nu} = q_{\nu}$

$$F_q(t) = \sum_{\nu} F_q^{\nu}(t) = \sum_{\nu} g_{\nu} [p'_{\nu}(0) \cos \omega_{\nu} t - q'_{\nu}(0) m_{\nu} \omega_{\nu} \sin \omega_{\nu} t]. \quad (45)$$

Заметим, что данное преобразование приводит к новому полному гамильтониану, где отсутствует связь между коллективной и внутренней подсистемами, а частоты и массы оказываются перенормированными. Усреднения по внутренним степеням свободы проводим с этим гамильтонианом. Тогда оператор случайной силы  $F_q$  имеет нулевой первый момент и ненулевой второй момент. Для симметризованной корреляционной функции  $\phi_{qq}^{\nu}(t, t') = \hbar \omega_{\nu} m_{\nu} g_{\nu}^2 \cos[\omega_{\nu}(t-t')](2n_{\nu} + 1)$  получаем квантовое флуктуационно-диссипационное соотношение

$$\sum_{\nu} \phi_{qq}^{\nu}(t, t') \frac{1}{\hbar \omega_{\nu}} \text{th} \left( \frac{\hbar \omega_{\nu}}{2T} \right) = K_{GG}(t-t'). \quad (46)$$

Для упрощения дальнейших расчетов сумму  $\sum_{\nu} m_{\nu} g_{\nu}^2 \dots$  в формулах заменим интегралом по частоте с плотностью состояний  $\rho(\omega_0)$  термостата [11, 115, 116]:

$$\int_0^{\infty} d\omega_0 \rho(\omega_0) m(\omega_0) (g(\omega_0))^2 \dots = \frac{g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega_0 \frac{1}{\gamma^2 + \omega_0^2} \dots$$

Окончательно получаем

$$K_{GG}(t-t') = g_0 \gamma \exp(-\gamma|t-t'|), \quad (47)$$

$$K_{GG}(s) = \frac{g_0 \gamma}{s + \gamma}, \quad (48)$$

где  $\gamma^{-1}$  характеризует время памяти в диссипативном ядре и  $\Gamma = \hbar \gamma$  является шириной возбуждений внутренней подсистемы из-за связей с коллективной подсистемой. При мгновенной диссипации ( $\gamma \rightarrow \infty$ )  $K_{GG}(t-t') = 2g_0 \delta(t-t')$ .

Этот вид диссипативного ядра часто используется для марковских процессов, но может приводить в некоторых случаях к несохранению соотношения неопределенности [12, 14] в начальный момент времени.

Решение уравнений (41) аналогично решению (10) уравнений (5), где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_t &= L_t = 0, \quad \tilde{L}_t = N_t, \quad C_t = A_t, \\ A_t &= \sum_{i=1}^3 A_t^i = \sum_{i=1}^3 \beta_i (s_i + \gamma) (s_i + \xi_0) e^{s_i t}, \\ M_t &= \sum_{i=1}^3 M_t^i = -\mu \omega_0^2 \sum_{i=1}^3 \beta_i (s_i + \gamma) e^{s_i t}, \\ B_t &= \frac{1}{\tilde{\mu}} \sum_{i=1}^3 \beta_i (s_i + \gamma + (1 - \tilde{\mu}/\mu) \xi_0) e^{s_i t}, \\ N_t &= \sum_{i=1}^3 \beta_i ((s_i - \xi_0)(s_i + \gamma) + (1 - \mu/\tilde{\mu}) \omega^2) e^{s_i t}. \end{aligned} \quad (49)$$

Здесь  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями кубического уравнения

$$s^3 + \gamma s^2 + (\omega^2 - \xi_0^2) s + \gamma \left( \frac{\mu}{\tilde{\mu}} \omega^2 - \xi_0^2 \right) = 0, \quad (50)$$

а  $\beta_1 = (s_1 - s_2)^{-1} (s_1 - s_3)^{-1}$ ,  $\beta_2 = (s_2 - s_1)^{-1} (s_2 - s_3)^{-1}$ ,  $\beta_3 = (s_3 - s_1)^{-1} (s_3 - s_2)^{-1}$  и  $1/\tilde{\mu} = 1/\mu - g_0 \gamma$ . Для затухающего осциллятора выражения для транспортных коэффициентов следуют из общих формул (22)–(28):

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \mu \omega^2, \quad \lambda_p(t) = \xi_0, \\ \lambda_q(t) &= -\xi_0 - \frac{\sum_{i,j=1}^3 \beta_i \beta_j (s_i + \gamma)(s_j + \gamma)(s_i + s_j)(s_i - s_j)^2 e^{(s_i + s_j)t} / (s_i s_j)}{\sum_{i,j=1}^3 \beta_i \beta_j (s_i + \gamma)(s_j + \gamma)(s_i - s_j)^2 e^{(s_i + s_j)t} / (s_i s_j)}, \\ \frac{1}{m(t)} &= \frac{1}{\tilde{\mu}} \left( \sum_{i,j=1}^3 \beta_i \beta_j (s_i - s_j)^2 \times \right. \\ &\quad \times \left[ (s_i + \gamma)(s_j + \gamma) + \xi_0 \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \right) (s_i + s_j + \gamma + \xi_0) \right] e^{(s_i + s_j)t} \times \\ &\quad \times \left. \left[ \left( \frac{\mu}{\tilde{\mu}} \omega^2 - \xi_0^2 \right) \sum_{i,j=1}^3 \beta_i \beta_j (s_i + \gamma)(s_j + \gamma)(s_i - s_j)^2 e^{(s_i + s_j)t} / (s_i s_j) \right]^{-1} \right), \end{aligned} \quad (51)$$



$$D_{pp}(t) = 0, \quad D_{qq}(t) = \left( \lambda_q(t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \right) J_{q_t q_t} + \frac{1}{m(t)\mu\omega^2} \left( \xi_0 + \frac{d}{dt} \right) J_{p_t p_t},$$

$$D_{pq}(t) = \frac{1}{2} \left[ \mu\omega^2 J_{q_t q_t} - \frac{1}{m(t)\mu\omega^2} \left( \mu\omega^2 + m(t)(\xi_0 + \lambda_q(t))\xi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \left[ (3\xi_0 + \lambda_q(t)) \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right] \right) J_{p_t p_t} \right],$$

где

$$J_{q_t q_t} = \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 \operatorname{cth}(\hbar\omega_0/(2T))}{\gamma^2 + \omega_0^2} \sum_{ik} A_t^i A_t^k \varphi_{ik}(\omega_0, t), \quad (52)$$

$$J_{p_t p_t} = \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 \operatorname{cth}(\hbar\omega_0/(2T))}{\gamma^2 + \omega_0^2} \sum_{ik} M_t^i M_t^k \varphi_{ik}(\omega_0, t), \quad (53)$$

$$\frac{1}{2} (J_{p_t q_t} + J_{q_t p_t}) = \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 \operatorname{cth}(\hbar\omega_0/(2T))}{\gamma^2 + \omega_0^2} \sum_{ik} A_t^i M_t^k \varphi_{ik}(\omega_0, t), \quad (54)$$

$$\varphi_{ik} = \int_0^t dt' e^{s_i t'} \int_0^t dt'' e^{s_k t''} \cos[\omega_0(t'' - t')]. \quad (55)$$

Поскольку  $\varphi_{ik}(\omega_0, t = 0) = 0$  и  $\frac{d}{dt} \varphi_{ik}(\omega_0, t = 0) = 0$ , то в начальный момент времени,  $t = 0$ , все коэффициенты диффузии равны нулю  $D_{qq}(t = 0) = D_{pp}(t = 0) = D_{pq}(t = 0) = 0$ . Можно показать, что в любой момент времени  $D_{pp}(t) = 0$ , поскольку в уравнениях движения (41) нет случайной силы по импульсу.

**1.2.1. Асимптотики коэффициентов диффузии, трения и корреляционных функций.** Корни кубического уравнения  $s_1, s_2, s_3$  имеют отрицательные реальные части, и, кроме того, два корня  $s_1$  и  $s_2$  являются комплексно-сопряженными. При больших временах в функциях  $A_t, M_t, B_t$  и  $N_t$  можно пренебречь членами, пропорциональными  $e^{s_3 t}$ , так как они быстро затухают. Тогда после несложных, но длинных выкладок для коэффициентов трения и диффузии получаются следующие выражения в пределе  $t \rightarrow \infty$ :

$$\frac{1}{m(\infty)} = \frac{|s_1|^2}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2} \left[ 1 + \xi_0 \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \right) \frac{s_1 + s_1^* + \gamma + \xi_0}{|s_1 + \gamma|^2} \right], \\ \lambda_q(\infty) = -\xi_0 - (s_1 + s_1^*), \quad (56)$$

$$D_{qq}(\infty) = \lambda_q(\infty)\sigma_{qq}(\infty) + \frac{\xi_0}{m(\infty)\mu\omega^2}\sigma_{pp}(\infty),$$

$$D_{pq}(\infty) = \frac{1}{2} \left[ \mu\omega^2\sigma_{qq}(\infty) - \left( \frac{1}{m(\infty)} + \frac{\xi_0(\xi_0 + \lambda_q(\infty))}{\mu\omega^2} \right) \sigma_{pp}(\infty) \right].$$

В случае  $\xi_0 = 0$  для перенормированной обратной массы получаем простое выражение

$$\frac{1}{m(\infty)} = \frac{|s_1|^2}{\mu\omega^2}. \quad (57)$$

Из (50), (51) и (56) видно, что потери коллективной энергии ( $\lambda_p(\infty)(t) + \lambda_q(\infty)(t) = 0$ ) и значения коэффициентов диффузии равны нулю при добавлении в гамильтониан  $H_c$  члена  $0,5p^2 \sum_{\nu} m_{\nu}g_{\nu}^2$ , который компенсирует перенормировку коллективной массы ( $m(t) = \mu = \tilde{\mu}$ ).

Используя (18) и (52)–(54), асимптотики дисперсий  $\sigma_{pp}(\infty)$ ,  $\sigma_{qq}(\infty)$  и  $\sigma_{pq}(\infty)$ , которые входят в (56), можно выразить через интегралы ( $x_n = 2\pi Tn/\hbar$ )

$$I = \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{cth}(\hbar\omega_0/2T)\omega_0 d\omega_0}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)} =$$

$$= \frac{T}{\mu\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0})(x_n - \gamma)}{x_n^3 - \gamma x_n^2 + (\omega^2 - \xi_0^2)x_n + \gamma \left( \xi_0^2 - \frac{\mu}{\tilde{\mu}}\omega^2 \right)} \quad (58)$$

и

$$\tilde{I} = \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{cth}(\hbar\omega_0/2T)\omega_0^3 d\omega_0}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)} =$$

$$= \frac{T}{\mu\omega^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2 - \delta_{n,0}) \left( x_n(\omega^2 - \xi_0^2) + \gamma \left( \xi_0^2 - \frac{\mu}{\tilde{\mu}}\omega^2 \right) \right)}{x_n^3 - \gamma x_n^2 + (\omega^2 - \xi_0^2)x_n + \gamma \left( \xi_0^2 - \frac{\mu}{\tilde{\mu}}\omega^2 \right)} \quad (59)$$

следующим образом:

$$\sigma_{pp}(\infty) = (\mu\omega^2)^2 I, \quad \sigma_{qq}(\infty) = \xi_0^2 I + \tilde{I}, \quad \sigma_{pq}(\infty) = -\xi_0 \mu \omega^2 I. \quad (60)$$

Предел слабой связи. Пренебрегая взаимодействием  $H_{cb}$ , для коллективного гамильтониана (38) получаем асимптотики дисперсий:

$$\begin{aligned}\sigma_{pp}(\infty) &= \frac{\hbar}{2} \frac{\mu\omega^2}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}{2T} \right], \\ \sigma_{qq}(\infty) &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\mu(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}{2T} \right], \\ \sigma_{pq}(\infty) &= -\frac{\hbar}{2} \frac{\xi_0}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}{2T} \right], \\ \sigma_{qq}(\infty)\sigma_{pp}(\infty) - \sigma_{pq}^2(\infty) &= \frac{\hbar^2}{4} \operatorname{cth}^2 \left[ \frac{\hbar(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}{2T} \right] \geq \frac{\hbar^2}{4}.\end{aligned}\quad (61)$$

Предполагая в пределе слабой связи между коллективной системой и термостатом малое отличие асимптотик дисперсий от (61), из (56) можно получить асимптотики диффузионных коэффициентов. При  $\xi_0 = 0$  из этих асимптотик следует, что  $\lambda_q(\infty) = -(s_1 + s_1^*)$ ,  $D_{qq}(\infty) = \frac{\hbar}{2} \lambda_q(\infty) \mu\omega \operatorname{cth}(\hbar\omega/(2T))$  и  $D_{pq}(\infty) = 0$ .

Предел высоких температур. В пределе  $T \rightarrow \infty$  выражения для интегралов  $I$  и  $\tilde{I}$  упрощаются:

$$I(T \rightarrow \infty) = \frac{T\tilde{\mu}}{(\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2)\mu\omega^2}, \quad (62)$$

$$\tilde{I}(T \rightarrow \infty) = \frac{T}{\mu\omega^2}. \quad (63)$$

Здесь были учтены соотношения между корнями кубического уравнения (50). Надо отметить, что выражения (62) и (63) не зависят от параметров  $g_0$  и  $\gamma$ . Используя (56), (60), (62) и (63), получаем, что

$$\begin{aligned}D_{qq}(\infty) &= \frac{T}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2} \left( \xi_0 \left( \frac{\tilde{\mu}}{m(\infty)} - 1 \right) - (s_1 + s_1^*) \right), \\ D_{pq}(\infty) &= \frac{1}{2} \frac{T}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2} \left( \mu\omega^2 \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}}{m(\infty)} \right) + \xi_0 \tilde{\mu} (s_1 + s_1^*) \right)\end{aligned}\quad (64)$$

и

$$\sigma_{pp}(\infty) = \frac{T\tilde{\mu}\mu\omega^2}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2}, \quad \sigma_{qq}(\infty) = \frac{T}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2}, \quad \sigma_{pq}(\infty) = -\frac{T\tilde{\mu}\xi_0}{\mu\omega^2 - \tilde{\mu}\xi_0^2}. \quad (65)$$

В случае  $\xi_0 = 0$  из (64) следует:

$$\begin{aligned} D_{qq}(\infty) &= -(s_1 + s_1^*) \frac{1}{\mu\omega^2} T, \\ D_{pq}(\infty) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\mu}|s_1|^2}{\mu\omega^2} \right) T. \end{aligned} \quad (66)$$

В пределе слабой связи и при больших  $T$  выражения (61) и (65) совпадают, поскольку  $\tilde{\mu} \approx \mu$  в этом случае.

*Предел низких температур.* Теперь рассмотрим интегралы  $I$  и  $\tilde{I}$  в пределе, когда  $T \rightarrow 0$ :

$$I(T \rightarrow 0) = \frac{\hbar}{\pi\mu\omega^2} \frac{(s_2^2 - s_3^2) \ln s_1 + (s_3^2 - s_1^2) \ln s_2 + (s_1^2 - s_2^2) \ln s_3}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}, \quad (67)$$

$$\tilde{I}(T \rightarrow 0) = \frac{\hbar}{\pi\mu\omega^2} \frac{s_1^2(s_3^2 - s_2^2) \ln s_1 + s_2^2(s_1^2 - s_3^2) \ln s_2 + s_3^2(s_2^2 - s_1^2) \ln s_3}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)}. \quad (68)$$

В пределе слабой связи эти выражения упрощаются:

$$I(T \rightarrow 0) = \frac{\hbar}{2\mu\omega^2} \frac{1}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}, \quad (69)$$

$$\tilde{I}(T \rightarrow 0) = \frac{\hbar}{2\mu\omega^2} (\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}. \quad (70)$$

Подставляя (69) и (70) в (60) и используя (56), получаем

$$D_{qq}(\infty) = \frac{-\hbar}{2\mu\omega^2} (s_1 + s_1^*) (\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}, \quad D_{pq}(\infty) = 0 \quad (71)$$

и

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(\infty) &= \frac{\hbar\mu\omega^2}{2} \frac{1}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}, \\ \sigma_{qq}(\infty) &= \frac{\hbar}{2\mu} \frac{1}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}, \\ \sigma_{pq}(\infty) &= -\frac{\hbar}{2} \frac{\xi_0}{(\omega^2 - \xi_0^2)^{1/2}}, \\ \sigma_{qq}(\infty)\sigma_{pp}(\infty) - \sigma_{pq}^2(\infty) &= \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned} \quad (72)$$

Видно, что в пределе малых  $T$  выражения (61) совпадают с выражениями (72).

**1.2.2. Корреляционные функции.** Асимптотики ( $t \gg t' > 0$ ) симметризованных корреляционных функций

$$\begin{aligned}\sigma_{q_t q_{t'}}^{as} &= \frac{\hbar g_0 \gamma^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{cth}(\hbar \omega_0 / (2T)) \omega_0 (\xi_0^2 + \omega_0^2) \cos[\omega_0(t-t')] d\omega_0}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}, \\ \sigma_{p_t p_{t'}}^{as} &= \frac{\hbar g_0 \gamma^2 \mu^2 \omega^4}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{cth}(\hbar \omega_0 / (2T)) \omega_0 \cos[\omega_0(t-t')] d\omega_0}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}\end{aligned}\quad (73)$$

ведут себя по-разному в пределах высоких и малых температур:

$$\begin{aligned}\sigma_{p_t p_{t'}}^{as}(T \rightarrow 0) &\rightarrow \frac{-\hbar g_0 \gamma^2 \mu^2 \omega^4}{\pi s_1^2 s_2^2 s_3^2} \frac{1}{(t-t')^2} = \frac{-\hbar g_0 \tilde{\mu}^2 \mu^2 \omega^4}{(\mu \omega^2 - \tilde{\mu} \xi_0^2)^2} \frac{1}{(t-t')^2}, \\ \sigma_{p_t p_{t'}}^{as}(T \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{-T \tilde{\mu} \mu \omega^2}{\gamma(\mu \omega^2 - \tilde{\mu} \xi_0^2)} \left[ \frac{s_2 s_3 (s_2 + s_3) e^{s_1(t-t')}}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1 s_3 (s_1 + s_3) e^{s_2(t-t')}}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)} + \frac{s_1 s_2 (s_1 + s_2) e^{s_3(t-t')}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} \right], \\ \sigma_{q_t q_{t'}}^{as}(T \rightarrow 0) &\rightarrow \frac{-\hbar g_0 \tilde{\mu}^2 \xi_0^2}{(\mu \omega^2 - \tilde{\mu} \xi_0^2)^2} \frac{1}{(t-t')^2} - \frac{i\hbar}{2\mu \omega^2} \left[ \frac{s_1^2 (s_2 + s_3) e^{s_1(t-t')}}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_2^2 (s_1 + s_3) e^{s_2(t-t')}}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)} + \frac{s_3^2 (s_1 + s_2) e^{s_3(t-t')}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} \right], \\ \sigma_{q_t q_{t'}}^{as}(T \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{-T \tilde{\mu} \xi_0^2}{\gamma \mu \omega^2 (\mu \omega^2 - \tilde{\mu} \xi_0^2)} \left[ \frac{s_2 s_3 (s_2 + s_3) e^{s_1(t-t')}}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_1 s_3 (s_1 + s_3) e^{s_2(t-t')}}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)} + \frac{s_1 s_2 (s_1 + s_2) e^{s_3(t-t')}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} \right] - \\ &\quad - \frac{T}{2\mu \omega^2} \left[ \frac{s_1 (s_2 + s_3) e^{s_1(t-t')}}{(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)} + \frac{s_2 (s_1 + s_3) e^{s_2(t-t')}}{(s_1 - s_2)(s_3 - s_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s_3 (s_1 + s_2) e^{s_3(t-t')}}{(s_1 - s_3)(s_2 - s_3)} \right].\end{aligned}\quad (74)$$

При низких температурах осциллятор имеет степенной закон распада корреляционных функций в пределе больших времен. Такое поведение не наблюдается в классическом пределе высоких температур, где имеет место экспоненциальный распад.

**1.3. Линейная связь по координате.** Предполагая, что связь коллективной подсистемы  $\left(H_c = \frac{p^2}{2\mu} \pm \frac{\mu\omega^2 q^2}{2}\right)$  с термостатом осуществляется через коллективную координату  $q$  и внутренние координаты  $q_\nu$ , гамильтониан взаимодействия коллективной и внутренней подсистем можно записать в следующем виде:

$$H_{cb} = \frac{\kappa}{\hbar} \lambda^{1/2} q \sum_{\nu} \Gamma_{\nu} (b_{\nu}^+ + b_{\nu}) + \frac{\kappa^2}{\hbar^2} \lambda q^2 \sum_{\nu} \frac{|\Gamma_{\nu}|^2}{\hbar \omega_{\nu}}. \quad (75)$$

Здесь  $\Gamma_{\nu}$  — константы связи коллективной подсистемы с внутренними координатами  $q_{\nu}$ ;  $\lambda$  — параметр, который определяет среднюю силу взаимодействия с термостатом, а  $\kappa = (2\mu\omega\hbar)^{1/2}$ . Дополнительный член в  $H_{cb}$  компенсирует перенормировку потенциала, возникающую из-за связи коллективной и внутренней подсистем [3, 116, 118, 119]. Квадратичный гамильтониан допускает точное решение уравнений движения для коллективных координат.

С данным типом связи между коллективной и внутренней подсистемами, используя (1) и (75), получаем систему уравнений Гейзенберга для операторов, относящихся к коллективному и внутреннему движениям, в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{i}{\hbar} [H, q] = \frac{1}{\mu} p, \\ \dot{p} &= \frac{i}{\hbar} [H, p] = \mp \mu \omega^2 q - \frac{\kappa}{\hbar} \lambda^{1/2} \sum_{\nu} \Gamma_{\nu} (b_{\nu}^+ + b_{\nu}) - \frac{2\kappa^2}{\hbar^2} \lambda q \sum_{\nu} \frac{|\Gamma_{\nu}|^2}{\hbar \omega_{\nu}} \end{aligned} \quad (76)$$

и

$$\begin{aligned} \dot{b}_{\nu}^+ &= \frac{i}{\hbar} [H, b_{\nu}^+] = i\omega_{\nu} b_{\nu}^+ + i \frac{\kappa}{\hbar^2} \lambda^{1/2} q \Gamma_{\nu}, \\ \dot{b}_{\nu} &= \frac{i}{\hbar} [H, b_{\nu}] = -i\omega_{\nu} b_{\nu} - i \frac{\kappa}{\hbar^2} \lambda^{1/2} q \Gamma_{\nu}. \end{aligned} \quad (77)$$

Здесь  $\tilde{\delta} = \pm \mu \omega^2$  — коэффициент жесткости потенциала коллективной подсистемы. Знак «+» соответствует случаю, когда коллективная система является гармоническим осциллятором, а знак «-» — случаю перевернутого осциллятора. При  $t > 0$  степени свободы термостата эволюционируют согласно уравнениям (77), и термостат отклоняется от начального состояния теплового равновесия при  $t = 0$ . Когда влияние коллективной подсистемы на термостат игнорируется, диссипативное ядро равно нулю и термостат постоянно находится в состоянии теплового равновесия.

Подставляя решения (77) в уравнения (76), получаем систему интегро-дифференциальных стохастических уравнений [115, 116]

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= \frac{p(t)}{\mu}, \\ \dot{p}(t) &= -\tilde{\delta}q(t) - \kappa^2 \int_0^t d\tau K(t-\tau)\dot{q}(\tau) + \kappa F(t).\end{aligned}\quad (78)$$

Как видно из уравнения для  $p(t)$ , наличие связи по координате приводит к появлению случайной силы по импульсу

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{F_p(t)}{\kappa} = \sum_{\nu} F^{\nu}(t) = -\frac{\lambda^{1/2}}{\hbar} \sum_{\nu} \Gamma_{\nu} [f_{\nu}^{+}(t) + f_{\nu}(t)], \\ f_{\nu}^{+}(t) &= \left[ b_{\nu}^{+}(0) + \frac{1}{\hbar^2 \omega_{\nu}} \kappa \lambda^{1/2} \Gamma_{\nu} q(0) \right] e^{i\omega_{\nu} t}\end{aligned}\quad (79)$$

и диссипативного ядра

$$K(t-\tau) = \frac{2\lambda}{\hbar^2} \sum_{\nu} \frac{\Gamma_{\nu}^2}{\hbar \omega_{\nu}} \cos(\omega_{\nu}[t-\tau]).\quad (80)$$

Используя соотношения (8) и (9), для симметризованной корреляционной функции случайной силы получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\phi^{\nu}(t-t') &= \langle \langle F^{\nu}(t)F^{\nu}(t') + F^{\nu}(t')F^{\nu}(t) \rangle \rangle = [2n_{\nu} + 1] \frac{2\lambda}{\hbar^2} \frac{\Gamma_{\nu}}{\hbar \omega_{\nu}} \cos(\omega_{\nu}[t-t']), \\ \sum_{\nu} \phi^{\nu}(t-t') \frac{\text{th}[\hbar \omega_{\nu}/(2T)]}{\hbar \omega_{\nu}} &= K(t-t').\end{aligned}\quad (81)$$

В рассмотренном случае связи между коллективной и внутренней подсистемами корреляционная функция случайной силы и диссипативное ядро не зависят от динамических координат и импульсов полной системы. По этой причине флуктуационно-диссипационное соотношение (81) не зависит от динамических чисел заполнения для фононов. Числа заполнения в квантовом флуктуационно-диссипационном соотношении относятся к начальному моменту времени, когда термостат находится в состоянии теплового равновесия. Как и в общем случае, уравнения движения для коллективных координат удовлетворяют квантовому флуктуационно-диссипационному соотношению, которое отличается от классического и сводится к нему в пределе большой температуры  $T$  (или  $\hbar \rightarrow 0$ ).

**1.3.1. Транспортные коэффициенты.** В случае общей связи по импульсу и координате были получены уравнения (20) и (21) для средних значений и дисперсий коллективной координаты и сопряженного ей импульса.

В случае отсутствия связи по импульсу между коллективной и внутренней подсистемами уравнения на первые и вторые моменты упрощаются. Эти уравнения не содержат коэффициентов трения и диффузии по координате ( $\lambda_q(t) = D_{qq}(t) = 0$ ). Аналогично выражениям (27) и (28) получаем следующие выражения для диффузионных коэффициентов по импульсу

$$D_{pp}(t) = \lambda_p(t)J_{p_t p_t} + \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dt} J_{p_t p_t} + \mu \xi(t) \frac{d}{dt} J_{q_t q_t} \right), \quad (82)$$

и по координате-импульсу

$$D_{pq}(t) = \frac{1}{2} \left[ \xi(t) J_{q_t q_t} - \frac{1}{\mu} J_{p_t p_t} + \frac{\mu}{2} \left( \lambda_p(t) \frac{d}{dt} + \frac{d^2}{dt^2} \right) J_{q_t q_t} \right], \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} J_{q_t q_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' B_{\tau'} \times \\ &\quad \times \int_0^t d\tau'' B_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \\ J_{p_t p_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' N_{\tau'} \times \\ &\quad \times \int_0^t d\tau'' N_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \\ J_{q_t p_t} &= \frac{2\omega\mu\lambda\hbar\gamma^2}{\pi} \int d\omega_0 \frac{\omega_0}{\gamma^2 + \omega_0^2} \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar\omega_0}{2T} \right] \int_0^t d\tau' N_{\tau'} \times \\ &\quad \times \int_0^t d\tau'' B_{\tau''} \cos[\omega_0(\tau' - \tau'')], \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} M_t &= -\mu\tilde{\delta}B_t, \quad N_t = \mu B'_t, \quad \tilde{C}_t = B_t, \quad C_t = \tilde{L}_t = 0, \\ B_t &= \sum_{i=1}^3 B_t^i = \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^3 \beta_i(s_i + \gamma) e^{s_i t}, \\ A_t &= \sum_{i=1}^3 \beta_i[s_i(s_i + \gamma) + 2\omega\lambda\gamma] e^{s_i t} \end{aligned}$$

и

$$d(s) \equiv \frac{(s + \gamma)(s^2 + \tilde{\delta}/\mu) + 2\omega\lambda\gamma s}{s + \gamma} = 0. \quad (85)$$



Здесь,  $\beta_1 = 1/[(s_1 - s_2)(s_1 - s_3)]$ ,  $\beta_2 = 1/[(s_2 - s_1)(s_2 - s_3)]$  и  $\beta_3 = 1/[(s_3 - s_1)(s_3 - s_2)]$ , где  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — корни уравнения (85). Для определения явного вида выражений (84) и диссипативного ядра  $K(t) = \lambda\gamma/\hbar e^{-\gamma|t|}$  ( $K(s) = \frac{\lambda\gamma}{\hbar(s+\gamma)}$ ) суммы  $\sum_{\nu} \dots$  заменены интегралами  $\int_0^{\infty} d\omega_0 \rho(\omega_0) \dots$  по частоте с плотностью состояний  $\rho(\omega_0)$  термостата [11, 115, 116, 118, 119], где  $\frac{\rho(\omega_0)|\Gamma(\omega_0)|^2}{\hbar^2\omega_0} = \frac{\gamma^2}{\pi(\gamma^2 + \omega_0^2)}$ . За появление в стохастических уравнениях коэффициентов трения  $\lambda_p(t)$  (см. (23)) и диффузии  $D_{pp}(t)$ ,  $D_{pq}(t)$  ответственна линейная связь по координате  $q$ . Для перенормированного коэффициента жесткости  $\xi(t)$  (см. (25)) в марковском пределе получаем  $\xi(t) = \tilde{\delta}$ .

Для асимптотических значений коэффициентов трения, жесткости и диффузии получаем следующие выражения:

$$\lambda_p(\infty) = -(s_2 + s_1), \quad (86)$$

$$\xi(\infty) = \tilde{\delta} \frac{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma)}{(s_1 + \gamma)(s_2 + \gamma) - 2\lambda\gamma\omega}, \quad (87)$$

$$D_{pp}(\infty) = \lambda_p(\infty)J_{p\infty p\infty} + \xi(\infty)J_{q\infty p\infty}, \quad (88)$$

$$D_{pq}(\infty) = \frac{1}{2} \left[ \lambda_p(\infty)J_{q\infty p\infty} + \xi(\infty)J_{q\infty q\infty} - \frac{1}{\mu}J_{p\infty p\infty} \right], \quad (89)$$

где

$$\begin{aligned} J_{q\infty q\infty} &= \frac{2\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi\mu} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j(s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \\ J_{p\infty p\infty} &= \frac{2\hbar\omega\mu\lambda\gamma^2}{\pi} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j s_i s_j (s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \\ J_{q\infty p\infty} &= \frac{\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi} \sum_{i,j} \beta_i\beta_j(s_i + s_j)(s_i + \gamma)(s_j + \gamma)\phi^a(s_i, s_j), \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} \phi^a(s_i, s_j) &= \frac{s_j\psi(-\hbar s_j/(2\pi T))}{(s_i + s_j)(s_j^2 - \gamma^2)} + \frac{s_i\psi(-\hbar s_i/(2\pi T))}{(s_i + s_j)(s_i^2 - \gamma^2)} + \\ &+ \frac{(\gamma^2 - s_i s_j)\psi(\hbar\gamma/(2\pi T))}{(\gamma^2 - s_i^2)(\gamma^2 - s_j^2)} - \frac{\pi T(s_i + s_j - 2\gamma)}{\hbar\gamma(s_i + s_j)(\gamma - s_i)(\gamma - s_j)}. \end{aligned}$$

В (86)–(90)  $s_1$  и  $s_2$  — сопряженные корни уравнения (85). В случае трех действительных корней берутся два корня, для которых сумма  $(s_i + s_j)$  максимальна. В выражениях (90)  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  является логарифмической производной гамма-функции. В случае гармонического осциллятора выраже-

ния для  $J_{i\infty j\infty}$  можно упростить:

$$\begin{aligned} J_{q\infty q\infty} &= \frac{2\hbar\omega\lambda\gamma^2}{\pi\mu} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0 \operatorname{cth} [\hbar\omega_0/(2T)]}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}, \\ J_{p\infty p\infty} &= \frac{2\hbar\omega\mu\lambda\gamma^2}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\omega_0^3 \operatorname{cth} [\hbar\omega_0/(2T)]}{(s_1^2 + \omega_0^2)(s_2^2 + \omega_0^2)(s_3^2 + \omega_0^2)}, \\ J_{q\infty p\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (91)$$

**1.3.2. Приближенный подход в случае линейной связи по координате.**  
Используя в (1.3) следующее приближение:

$$\kappa^2 \int_0^t d\tau K(t-\tau)\dot{q}(\tau) \approx \lambda_p p(t),$$

получаем систему дифференциальных стохастических уравнений:

$$\dot{q}(t) = \frac{p(t)}{\mu}, \quad \dot{p}(t) = -\tilde{\delta}q(t) - \lambda_p p(t) + F_p(t). \quad (92)$$

Исходя из уравнений (92), можно получить уравнения на вторые моменты с диффузионными коэффициентами

$$\begin{aligned} D_{pp}(t) &= \frac{1}{2} \langle p(t)F_p(t) + F_p(t)p(t) \rangle, \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{4} \langle q(t)F_p(t) + F_p(t)q(t) \rangle. \end{aligned} \quad (93)$$

Подставив решения уравнений (92) в (93) и взяв предел  $t \rightarrow \infty$ , получаем явный вид для асимптотических значений коэффициентов диффузии:

$$\begin{aligned} D_{pp}(\infty) &= -\frac{\mu T \gamma^2 \lambda_p}{\pm\omega^2 + \gamma(\gamma + \lambda_p)} + \frac{\mu \gamma^4 \lambda_p^2 \psi\left(\frac{\gamma}{2\pi T}\right)}{\pi[(\pm\omega^2 + \gamma^2)^2 - \gamma^2 \lambda_p^2]} - \\ &\quad - \frac{2\mu \omega^4 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_2}{4\pi T}\right)}{\pi[\omega^4(s_1 - s_2) - \gamma^2 \lambda_p^2 s_1 \pm 2\omega^2 \gamma^2(\lambda + s_1)]} - \\ &\quad - \frac{2\mu \omega^4 \gamma^2 \lambda_p \psi\left(\frac{s_1}{4\pi T}\right)}{\pi[\omega^4(s_2 - s_1) - \gamma^2 \lambda_p^2 s_2 \pm 2\omega^2 \gamma^2(\lambda + s_2)]}, \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned}
 D_{pq}(\infty) = & -\frac{T\gamma\lambda_p}{2[\pm\omega^2 + \gamma(\gamma + \lambda_p)]} - \frac{\gamma^2(\pm\omega^2 + \gamma^2)\lambda_p\psi\left(\frac{\gamma}{2\pi T}\right)}{2\pi[(\pm\omega^2 + \gamma^2)^2 - \gamma^2\lambda_p^2]} + \\
 & + \frac{\pm\omega^2\gamma^2\lambda_p\psi\left(\frac{s_2}{4\pi T}\right)}{\pi[4\omega^4 - \gamma^2\lambda_p s_1 \pm \omega^2(4\gamma^2 - \lambda_p s_2)]} + \\
 & + \frac{\pm\omega^2\gamma^2\lambda_p\psi\left(\frac{s_1}{4\pi T}\right)}{\pi[4\omega^4 - \gamma^2\lambda_p s_2 \pm \omega^2(4\gamma^2 - \lambda_p s_1)]}, \quad (95)
 \end{aligned}$$

где  $s_1 = \lambda_p + \sqrt{\mp 4\omega^2 + \lambda_p^2}$ ,  $s_2 = \lambda_p - \sqrt{\mp 4\omega^2 + \lambda_p^2}$ . В выражениях (94) и (95) верхний (нижний) знак «+» или «-» относится к случаю, когда коллективным потенциалом является гармонический (перевернутый) осциллятор.

**1.4. Обобщенные немарковские уравнения Ланжевена (случай фермионной внутренней подсистемы).** **1.4.1. Квантовые уравнения движения.** В этом подпункте, в отличие от предыдущих, рассмотрим внутреннюю подсистему, подчиняющуюся статистике Ферми–Дирака. Это особенно важно при изучении реакций с тяжелыми ионами при энергиях около кулоновского барьера. Для простоты рассмотрим динамику коллективной координаты  $R$  — относительного расстояния между центрами масс взаимодействующих ядер. В этом случае удобно записать гамильтониан  $H$  полной системы в виде [25, 79, 113, 114]

$$H = H_{\text{rel}} + H_{\text{in}} + H_{\text{int}}, \quad (96)$$

где  $H_{\text{rel}}$ ,  $H_{\text{in}}$  и  $H_{\text{int}}$  являются гамильтонианами коллективной подсистемы, внутренних нуклонных степеней свободы и связи между коллективной и внутренней подсистемами соответственно. Коллективный гамильтониан

$$H_{\text{rel}} = \frac{P^2}{2\mu} + U(R) \quad (97)$$

относительного движения представляет сумму кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия  $U(R)$  сталкивающихся ядер. Здесь  $P$  — сопряженный импульс и  $\mu$  — приведенная масса.\* Одночастичный гамильтониан можно записать в виде

$$H_{\text{in}} = \sum_i \varepsilon_i a_i^\dagger a_i, \quad (98)$$

где  $\varepsilon_i$  — энергии невозмущенных одночастичных состояний « $i$ » бомбардирующего ядра и мишени. Внутренние нуклонные степени свободы выражаются

\*В пунктах 1.4, 2.1 и 4.2  $q$  и  $p$  соответствуют  $R$  и  $P$ .

через нуклонные операторы рождения  $a_i^+$  и уничтожения  $a_i$ . Гамильтониан взаимодействия [25, 114, 119]

$$H_{\text{int}} = \sum_{i,k} V_{ik}(R, P) a_i^+ a_k \quad (99)$$

связан с частично-дырочными переходами между одночастичными уровнями в одном из ядер под влиянием среднего поля другого ядра и переходами нуклонов между ядрами из-за влияния среднего поля двойной ядерной системы. Динамику эволюции двойной ядерной системы можно проследить, решая уравнение движения для одночастичных степеней свободы  $n_i(t) = n_{ii}(t) = a_i^+(t) a_i(t)$  и  $n_{ik}(t) = a_i^+(t) a_k(t)$ :

$$i\hbar \frac{dn_i(t)}{dt} = [H, n_i(t)] = \sum_k [V_{ki}(R(t), P(t)) n_{ki}(t) - V_{ik}(R(t), P(t)) n_{ik}(t)], \quad (100)$$

$$i\hbar \frac{dn_{ik}(t)}{dt} = [H, n_{ik}(t)] = \hbar\omega_{ik} n_{ik} + V_{ki}(R(t), P(t)) [n_k(t) - n_i(t)], \quad (101)$$

где  $\omega_{ik} = (\varepsilon_i - \varepsilon_k)/\hbar$ . В выражении (101) мы сделали следующее упрощение (приближение случайных фаз)

$$\sum_{k'} V_{k'i} n_{k'k} - \sum_{i'} V_{ki'} n_{ii'} \approx V_{ki} [n_k - n_i].$$

Подставляя формальное решение

$$\begin{aligned} n_{ik} = e^{i\omega_{ki}(t-t_0)} n_{ik}(t_0) + \\ + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ki}(t-t')} V_{ki}(R(t'), P(t')) \times \\ \times [n_k(t') - n_i(t')] \end{aligned} \quad (102)$$

уравнения (101) в (100), получаем уравнение для динамических чисел заполнения  $n_i(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dn_i}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \sum_k \int_{t_0}^t dt' \text{Re} \times \\ \times \left[ \left\{ V_{ki}(R(t), P(t)), V_{ik}(R(t'), P(t')) (n_k(t') - n_i(t')) \right\}_+ e^{i\omega_{ik}(t-t')} \right]. \end{aligned} \quad (103)$$

Здесь  $\{G_1, G_2\}_+ = G_1G_2 + G_2G_1$  и  $t_0$  — начальное время процесса. Следуя приближению случайных фаз, в уравнении (103) можно пренебречь членом

$$\frac{2}{\hbar} \sum_k \text{Im} [V_{ki}(R(t), P(t)) n_{ki}(t_0) e^{i\omega_{ik}(t-t_0)}].$$

Уравнение (103) по своей структуре напоминает мастер-уравнение, но в отличие от последнего включает эффект памяти благодаря интегралу по  $t'$ . Процесс интенсивного возбуждения нуклонов затрагивает большое количество одночастичных состояний. Поэтому числа заполнения  $n_i(t)$  уровней изменяются достаточно медленно. Отметим, что ядро интегродифференциального уравнения (103) имеет максимум при  $t = t'$ .

Система гейзенберговских уравнений движения для коллективных переменных  $R$  и  $P$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(t) &= \frac{i}{\hbar} [H, R(t)] = \frac{P(t)}{\mu} + \sum_{ik} \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial P(t)} n_{ik}(t), \\ \frac{d}{dt} P(t) &= \frac{i}{\hbar} [H, P(t)] = -\frac{\partial U(R(t))}{\partial R(t)} - \sum_{ik} \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial R(t)} n_{ik}(t). \end{aligned} \quad (104)$$

После подстановки (102) в уравнения (104) получаем систему нелинейных интегродифференциальных стохастических диссипативных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} R(t) &= \frac{P(t)}{\tilde{\mu}} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ K_{PR}(t, t'), \dot{R}(t') \right\}_+ + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ K_{PP}(t, t'), \dot{P}(t') \right\}_+ + F_R(t), \\ \frac{d}{dt} P(t) &= -\frac{\partial \tilde{U}(R(t))}{\partial R(t)} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ K_{RR}(t, t'), \dot{R}(t') \right\}_+ - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt' \left\{ K_{RP}(t, t'), \dot{P}(t') \right\}_+ + F_P(t). \end{aligned} \quad (105)$$

Здесь

$$\frac{P(t)}{\tilde{\mu}} = \frac{P(t)}{\mu} - \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{n_k(t) - n_i(t)}{\hbar\omega_{ik}} \frac{\partial |V_{ik}(R(t), P(t))|^2}{\partial P(t)}$$

и

$$\tilde{U}(R(t)) = U(R(t)) - \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{n_k(t) - n_i(t)}{\hbar\omega_{ik}} |V_{ik}(R(t), P(t))|^2,$$

где  $\tilde{\mu}$  и  $\tilde{U}$  — перенормированные приведенный массовый параметр и потенциальная энергия соответственно. Диссипативные ядра

$$\begin{aligned}
K_{PR}(t, t') &= \sum_{ik} \frac{1}{2\hbar\omega_{ik}} \text{Re} \left[ \left\{ \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial P(t)}, \frac{\partial V_{ki}(R(t'), P(t'))}{\partial R(t')} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times [n_k(t') - n_i(t')] \right]_+ e^{i\omega_{ki}(t-t')}, \\
K_{PP}(t, t') &= \sum_{ik} \frac{1}{2\hbar\omega_{ik}} \text{Re} \left[ \left\{ \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial P(t)}, \frac{\partial V_{ki}(R(t'), P(t'))}{\partial P(t')} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times [n_k(t') - n_i(t')] \right]_+ e^{i\omega_{ki}(t-t')}, \\
K_{RP}(t, t') &= \sum_{ik} \frac{1}{2\hbar\omega_{ik}} \text{Re} \left[ \left\{ \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial R(t)}, \frac{\partial V_{ki}(R(t'), P(t'))}{\partial P(t')} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times [n_k(t') - n_i(t')] \right]_+ e^{i\omega_{ki}(t-t')}, \\
K_{RR}(t, t') &= \sum_{ik} \frac{1}{2\hbar\omega_{ik}} \text{Re} \left[ \left\{ \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial R(t)}, \frac{\partial V_{ki}(R(t'), P(t'))}{\partial R(t')} \right\} \times \right. \\
&\quad \left. \times [n_k(t') - n_i(t')] \right]_+ e^{i\omega_{ki}(t-t')}
\end{aligned} \tag{106}$$

в (105) содержат числа заполнения и поэтому в квазиравновесном состоянии системы зависят от температуры. Уравнения (105) содержат также операторы случайных сил по координате

$$F_R(t) = \sum_{ik} \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial P(t)} n_{ik}(t_0) e^{i\omega_{ki}(t-t_0)} = \sum_{ik} F_R^{ik}(t) \tag{107}$$

и по импульсу

$$F_P(t) = - \sum_{ik} \frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial R(t)} n_{ik}(t_0) e^{i\omega_{ki}(t-t_0)} = \sum_{ik} F_P^{ik}(t). \tag{108}$$

Как и в случае бозонной внутренней подсистемы, будем отождествлять операторы  $F_R^{ik}(t)$  и  $F_P^{ik}(t)$  со случайными флуктуациями из-за неопределенности начальных условий для внутренней подсистемы [4, 5, 8, 9, 11, 112, 115, 116, 118, 119]. Случайные силы удовлетворяют следующим статистическим свойствам:

$$\langle\langle n_{ik}(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_P^{ik}(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_R^{ik}(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_P(t) \rangle\rangle = \langle\langle F_R(t) \rangle\rangle = 0, \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
 \langle\langle F_R(t)F_R(t') \rangle\rangle &\neq 0, & \langle\langle F_R(t)F_P(t') \rangle\rangle &\neq 0, \\
 \langle\langle F_P(t)F_P(t') \rangle\rangle &\neq 0, & \langle\langle F_P(t)F_R(t') \rangle\rangle &\neq 0, \\
 \langle\langle n_{ik}(t_0)n_{k'i'}(t_0) \rangle\rangle &= \delta_{ik'}\delta_{k'i'}\bar{n}_i(t_0)(1 - \bar{n}_k(t_0)),
 \end{aligned} \tag{110}$$

где  $\bar{n}_i = \langle\langle n_i \rangle\rangle$ . Случайные силы также удовлетворяют флуктуационно-диссипационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 \sum_{ik} \varphi_{RR}^{ik}(t, t') \frac{1}{\hbar\omega_{ik}} \frac{\bar{n}_k(t') - \bar{n}_i(t')}{\bar{n}_i(t_0)[1 - \bar{n}_k(t_0)] + \bar{n}_k(t_0)[1 - \bar{n}_i(t_0)]} &= \langle\langle K_{RR}(t, t') \rangle\rangle, \\
 \sum_{ik} \varphi_{PP}^{ik}(t, t') \frac{1}{\hbar\omega_{ik}} \frac{\bar{n}_k(t') - \bar{n}_i(t')}{\bar{n}_i(t_0)[1 - \bar{n}_k(t_0)] + \bar{n}_k(t_0)[1 - \bar{n}_i(t_0)]} &= \langle\langle K_{PP}(t, t') \rangle\rangle, \\
 \sum_{ik} \varphi_{PR}^{ik}(t, t') \frac{1}{\hbar\omega_{ik}} \frac{\bar{n}_k(t') - \bar{n}_i(t')}{\bar{n}_i(t_0)[1 - \bar{n}_k(t_0)] + \bar{n}_k(t_0)[1 - \bar{n}_i(t_0)]} &= \langle\langle K_{PR}(t, t') \rangle\rangle, \\
 \sum_{ik} \varphi_{RP}^{ik}(t, t') \frac{1}{\hbar\omega_{ik}} \frac{\bar{n}_k(t') - \bar{n}_i(t')}{\bar{n}_i(t_0)[1 - \bar{n}_k(t_0)] + \bar{n}_k(t_0)[1 - \bar{n}_i(t_0)]} &= \langle\langle K_{RP}(t, t') \rangle\rangle,
 \end{aligned} \tag{111}$$

где  $\varphi_{nm}^{ik}(t, t') = \frac{1}{2} \langle\langle F_n^{ik}(t)F_m^{ki}(t') + F_m^{ki}(t')F_n^{ik}(t) + F_n^{ik}(t')F_m^{ki}(t) + F_m^{ki}(t) \times F_n^{ik}(t') \rangle\rangle$  ( $n, m = R, P$ ) являются симметризованными корреляторами случайных сил. Выполнение (111) гарантирует правильность определения диссипативных и флуктуационных сил в немарковских уравнениях движения.

Поскольку коллективное движение достаточно медленное, внутренние степени свободы близки к своим локальным квазиравновесным распределениям при любых значениях коллективных координат. Тогда, аппроксимируя числа заполнения температурными фермиевскими числами заполнения  $\bar{n}_i = 1/(\exp[(\varepsilon_i - \varepsilon_F)/T] + 1)$  ( $\varepsilon_F$  — энергия Ферми и  $T$  — термодинамическая температура), получаем флуктуационно-диссипационные соотношения, аналогичные соотношениям (111), но заменой в них

$$\frac{\bar{n}_k(t') - \bar{n}_i(t')}{\bar{n}_i(t_0)[1 - \bar{n}_k(t_0)] + \bar{n}_k(t_0)[1 - \bar{n}_i(t_0)]} \rightarrow \text{th} \left( \frac{\hbar\omega_{ik}}{2T} \right).$$

Эти соотношения, включающие тепловые и квантовые флуктуации, выполняются при любых значениях температуры и формально схожи с соотношениями (13)–(16) для бозонной внутренней подсистемы. Квантовые флуктуационно-диссипационные соотношения отличаются от своих классических аналогов и переходят в них при больших температурах (или при  $\hbar \rightarrow 0$ ). Эффективная температура переходит в термодинамическую температуру, когда тепловая энергия много больше, чем средняя энергия движения внутренней подсистемы при нулевой температуре:  $\hbar\omega_{ik} \ll 2T$ .

**1.4.2. Нестационарные транспортные коэффициенты и их связь с транспортными коэффициентами, полученными для бозонной внутренней подсистемы.** Аппроксимируя перенормированный потенциал перевернутым или нормальным осциллятором,  $\tilde{U} = \tilde{\delta}R^2/2$ , и учитывая, что в (105) функционалы  $\tilde{\mu}$ ,  $\frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial P(t)}$  и  $\frac{\partial V_{ik}(R(t), P(t))}{\partial R(t)}$  слабо зависят от флуктуаций  $P$  и  $R$  в рассматриваемом интервале  $(t - t_0) \rightarrow t$ , и заменяя  $P$  и  $R$  в этих функционалах их средними значениями, получим систему обобщенных немарковских уравнений, которые могут быть решены аналитически [112, 115, 116, 118, 119]. Применяя метод преобразований Лапласа, находим решения уравнений (105):

$$\begin{aligned} R(t) &= A_t R(0) + B_t P(0) + \int_0^t d\tau [C_\tau F_R(t - \tau) + \tilde{C}_\tau F_P(t - \tau)], \\ P(t) &= M_t R(0) + N_t P(0) + \int_0^t d\tau [L_\tau F_P(t - \tau) + \tilde{L}_\tau F_R(t - \tau)], \end{aligned} \quad (112)$$

где коэффициенты  $A_t$ ,  $B_t$ ,  $M_t$ ,  $N_t$ ,  $C_t$ ,  $\tilde{C}_t$ ,  $L_t$  и  $\tilde{L}_t$ , зависящие от времени, аналогичны одноименным коэффициентам в (10) со следующими заменами в них:  $K_{GV} \rightarrow K_{PR}$ ,  $K_{VG} \rightarrow K_{RP}$ ,  $K_{VV} \rightarrow K_{RR}$  и  $K_{GG} \rightarrow K_{PP}$ .

Для определения коэффициентов трения и диффузии запишем уравнения на первые моменты и для дисперсий по координате  $\sigma_{RR}(t) = \langle R^2(t) \rangle - \langle R(t) \rangle^2$ , по импульсу  $\sigma_{PP}(t) = \langle P^2(t) \rangle - \langle P(t) \rangle^2$  и для смешанной дисперсии  $\sigma_{PR}(t) = 1/2 \langle P(t)R(t) + R(t)P(t) \rangle - \langle P(t) \rangle \langle R(t) \rangle$ . Взяв производную по  $t$  в (112), можно получить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \langle \dot{R}(t) \rangle &= -\lambda_R(t) \langle R(t) \rangle + \frac{1}{m(t)} \langle P(t) \rangle, \\ \langle \dot{P}(t) \rangle &= -\xi(t) \langle R(t) \rangle - \lambda_P(t) \langle P(t) \rangle, \\ \dot{\sigma}_{RR}(t) &= -2\lambda_R(t) \sigma_{RR}(t) + \frac{2}{m(t)} \sigma_{PR}(t) + 2D_{RR}(t), \\ \dot{\sigma}_{PP}(t) &= -2\lambda_P(t) \sigma_{PP}(t) - 2\xi(t) \sigma_{PR}(t) + 2D_{PP}(t), \\ \dot{\sigma}_{PR}(t) &= -[\lambda_P(t) + \lambda_R(t)] \sigma_{PR}(t) - \xi(t) \sigma_{RR}(t) + \frac{1}{m(t)} \sigma_{PP}(t) + 2D_{PR}(t). \end{aligned} \quad (113)$$

Из уравнения (113) видно, что динамика системы определяется нестационарными коэффициентами трения по координате  $\lambda_R(t)$  и по импульсу  $\lambda_P(t)$ , массовым параметром  $m(t)$ , коэффициентом жесткости  $\xi(t)$ , коэффициентами диффузии по координате  $D_{RR}(t)$  и по импульсу  $D_{PP}(t)$  и смешанным коэффициентом диффузии  $D_{PR}(t)$ . Аналитический вид данных транспортных



коэффициентов совпадает с видом транспортных коэффициентов (22)–(28) для бозонной внутренней подсистемы. В выражениях (22)–(28) необходимо сделать формальную замену  $q \rightarrow R$  и  $p \rightarrow P$ . Можно показать, что соответствующее равновесное каноническое распределение для гармонического осциллятора устанавливается в пределе больших времен.

Энергия коллективной подсистемы меняется в соответствии с уравнением

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) = & - \left[ 2\lambda_P(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)} \right] \frac{\sigma_{PP}(t) + \langle P(t) \rangle^2}{2m(t)} - \\ & - [2\lambda_R(t)\xi(t) + \dot{\xi}(t)] \frac{\sigma_{RR}(t) + \langle R(t) \rangle^2}{2} + \frac{D_{PP}(t)}{m(t)} + \xi(t)D_{RR}(t). \end{aligned}$$

Из этого уравнения видно, что для гармонического осциллятора скорость диссипации растет с  $\lambda_R(t)$  и  $\lambda_P(t)$  и убывает с ростом  $D_{PP}(t)$  и  $D_{RR}(t)$ . В случае перевернутого осциллятора,  $\xi < 0$ , трение по координате  $\lambda_R(t)$  увеличивает значение  $E$ , но диффузионный коэффициент по координате  $D_{RR}(t)$  уменьшает его. На практике часто пользуются только диффузионным коэффициентом по импульсу  $D_{PP}$ . При этом диффузионные коэффициенты  $D_{RR}$  и  $D_{PR}$  полагаются равными нулю. Как показано в [14, 31, 118, 120, 121], туннелирование через потенциальный барьер и распад из метастабильного состояния сильно зависят от транспортных коэффициентов. В случае  $D_{RR} \neq 0$  проницаемость барьера становится больше благодаря эффекту когерентности между состояниями.

Основной вклад в значения коэффициентов диффузии и трения дают матричные элементы  $V_{ik}$  между одночастичными состояниями в интервале энергии  $|\varepsilon_i - \varepsilon_k| \approx \Delta = 6$  МэВ (энергетический интервал между оболочками в тяжелых ядрах), который гораздо больше значения коллективной энергии  $\hbar\tilde{\omega}$ . Если одночастичный спектр достаточно плотный, значения  $|\partial V_{ik}/\partial R|^2$  и  $|\partial V_{ik}/\partial P|^2$  убывают с увеличением  $|\varepsilon_i - \varepsilon_k|$ , так как уменьшается перекрытие волновых функций. Такое поведение можно описать лоренцианом [25, 112, 122]

$$\left| \frac{\partial V_{ik}}{\partial R} \right|^2, \left| \frac{\partial V_{ik}}{\partial P} \right|^2 \sim \frac{1}{\pi} \frac{\hbar^2 \gamma^2}{\hbar^2 \gamma^2 + (\varepsilon_i - \varepsilon_k)^2},$$

где  $\hbar\gamma = 2\Delta$ . Если заменить разность энергий  $|\varepsilon_i - \varepsilon_k|$  на  $\hbar\omega_0$  и перейти от суммирования по одночастичным состояниям к интегралу по частоте  $\omega_0$

$$\begin{aligned} & \sum_{ik} \frac{|\partial V_{ik}/\partial R|^2 (\bar{n}_k - \bar{n}_i)}{\hbar^2 \omega_{ik}} \dots = \\ & = \int_0^\infty d\omega_0 \sum_{ik} \delta(\omega_0 - \omega_{ik}) \frac{|\partial V_{ik}/\partial R|^2 (\bar{n}_k - \bar{n}_i)}{\hbar^2 \omega_{ik}} \dots \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\pi} \int_0^\infty d\omega_0 \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega_0^2} \dots, \end{aligned}$$

где параметр  $\tilde{\lambda}$  связан с интенсивностью взаимодействия между коллективной и внутренней подсистемами и  $\rho(\omega_0) = \sum_{ik} \delta(\omega_0 - \omega_{ik}) \sim \omega_0$  — плотность уровней [114, 119], и учесть, что для фермиевских чисел заполнения  $\bar{n}_i(1 - \bar{n}_k) + \bar{n}_k(1 - \bar{n}_i) = (\bar{n}_k - \bar{n}_i) \operatorname{cth} \left( \frac{\hbar\omega_{ik}}{2T} \right)$ , то для затухающего квантового осциллятора с линейной связью по координате  $R$  ( $\partial V_{ij}/\partial P = 0$ ,  $\partial V_{ij}/\partial R \neq 0$ ,  $\tilde{\lambda} = 2\mu\omega\lambda/\hbar$ ,  $U(R) = \pm\mu\omega^2 R^2/2$  (знак «плюс» соответствует случаю параболической потенциальной ямы, а знак «минус» — случаю параболического потенциального барьера)) получаем транспортные коэффициенты, аналогичные транспортным коэффициентам (82) и (83) для бозонной внутренней подсистемы. Также в случаях линейной связи по импульсу и линейной связи как по координате, так и по импульсу можно показать, что транспортные коэффициенты одинаковы для фермионной и бозонной внутренних подсистем.

**1.5. Чистые состояния, соотношение неопределенности и декогерентность.** Линейная энтропия

$$S(t) = 1 - \operatorname{Tr}(\rho^2(t)) \quad (114)$$

может рассматриваться как мера чистоты состояния. Действительно, для чистого состояния  $\rho^2(t) = \rho(t)$  и  $S(t) = 0$ . Поскольку в общем случае  $\operatorname{Tr}(\rho^2(t)) \leq 1$ , то  $S(t) \geq 0$  и чистота состояний уменьшается с ростом линейной энтропии. Предполагая, что состояние остается приблизительно чистым,  $\rho^2(t) \approx \rho(t)$ , найдем энтропию из мастер-уравнения (30):

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -2\operatorname{Tr}(\rho(t)\dot{\rho}(t)) \approx \\ &\approx \frac{4}{\hbar^2} \left( D_{qq}(t)\sigma_{pp}(t) + D_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - 2D_{pq}(t)\sigma_{pq}(t) \right) - [\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]. \end{aligned} \quad (115)$$

Если  $\dot{S}(t) = 0$  и  $\operatorname{Tr}(\rho^2(0)) = 1$ , то  $\operatorname{Tr}(\rho^2(t)) = 1$  при  $t > 0$ . Это условие является необходимым и достаточным для выполнения равенства  $\rho^2(t) = \rho(t)$  и сохранения чистоты состояния в любой момент времени при  $t \geq 0$ . При выполнении равенства  $\sigma(t) = \sigma_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) - \sigma_{pq}^2(t) = \hbar^2/4$  диффузионные коэффициенты

$$\begin{aligned} D_{qq}(t) &= \frac{1}{2}[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{qq}(t), \\ D_{pp}(t) &= \frac{1}{2}[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{pp}(t), \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{2}[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma_{pq}(t) \end{aligned} \quad (116)$$

удовлетворяют условию  $\dot{S}(t) = 0$  для чистого состояния. Т.е. за счет специфического выбора диффузионных коэффициентов можно получить сохранение линейной энтропии.

Если предположить постоянные дисперсии для чистого состояния  $\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(0) = \sigma_{ij}(\infty)$  ( $i, j = q, p$ ), которые соответствуют минимуму неопределенности  $\sigma(t) = \hbar^2/4$ , то для гармонического осциллятора с линейной связью по координате и импульсу диффузионные коэффициенты (см. (26)–(28))

$$\begin{aligned} D_{qq}(t) &= \lambda_q(t)\sigma_{qq}(0) - \frac{1}{m(t)}\sigma_{pq}(0), \\ D_{pp}(t) &= \lambda_p(t)\sigma_{pp}(0) + \xi(t)\sigma_{pq}(0), \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{2}\left[(\lambda_p(t) + \lambda_q(t))\sigma_{pq}(0) + \xi(t)\sigma_{qq}(0) - \frac{1}{m(t)}\sigma_{pp}(0)\right] \end{aligned} \quad (117)$$

обеспечивают справедливость равенства  $\dot{S}(t) = 0$  и чистоту состояния. С этими диффузионными коэффициентами  $\dot{\sigma}_{ij}(0) = 0$ . Для чистого состояния в рассматриваемом случае должны выполняться соотношения (см. (18))

$$\begin{aligned} J_{q_t q_t} &= (1 - A_t^2)\sigma_{qq}(0) - B_t^2\sigma_{pp}(0) - 2A_t B_t \sigma_{pq}(0), \\ J_{p_t p_t} &= (1 - N_t^2)\sigma_{pp}(0) - M_t^2\sigma_{qq}(0) - 2N_t M_t \sigma_{pq}(0), \\ \frac{1}{2}(J_{q_t p_t} + J_{p_t q_t}) &= (1 - A_t N_t - B_t M_t)\sigma_{pq}(0) - A_t M_t \sigma_{qq}(0) - B_t N_t \sigma_{pp}(0). \end{aligned} \quad (118)$$

При данном выборе констант связи между внутренней и коллективной подсистемами коррелированные (сжатые) когерентные состояния являются единственными состояниями, остающимися чистыми в ходе эволюции коллективной подсистемы.

Аналогично для гармонического осциллятора с линейной связью по координате или по импульсу получаем для чистых состояний

$$\begin{aligned} D_{pp}(t) &= \lambda_p(t)\sigma_{pp}(0), \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{2}\left[\xi(t)\sigma_{qq}(0) - \frac{1}{\mu}\sigma_{pp}(0)\right] \end{aligned} \quad (119)$$

или

$$\begin{aligned} D_{qq}(t) &= \lambda_q(t)\sigma_{qq}(0), \\ D_{pq}(t) &= \frac{1}{2}\left[\tilde{\delta}\sigma_{qq}(0) - \frac{1}{m(t)}\sigma_{pp}(0)\right] \end{aligned} \quad (120)$$

соответственно. Для гармонического осциллятора из (21) получаем

$$\dot{\sigma}(t) = -2[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]\sigma(t) + 2[D_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) + D_{qq}(t)\sigma_{pp}(t) - 2D_{pq}(t)\sigma_{pq}(t)]. \quad (121)$$

Из (115) и (121) следует линейная связь между  $\dot{\sigma}(t)$  и  $\dot{S}(t)$ . Важным следствием (121) является то, что неравенство  $\sigma(t) \geq \hbar^2/4$  справедливо для любого состояния (чистого или смешанного) при  $t > 0$ , если  $\sigma(0) \geq \hbar^2/4$  и

$$D_{pp}(t)\sigma_{qq}(t) + D_{qq}(t)\sigma_{pp}(t) - 2D_{pq}(t)\sigma_{pq}(t) \geq \frac{\hbar^2}{4}[\lambda_p(t) + \lambda_q(t)]. \quad (122)$$

При  $t \rightarrow \infty$  из (121) следует, что

$$D_{pp}(\infty)\sigma_{qq}(\infty) + D_{qq}(\infty)\sigma_{pp}(\infty) - 2D_{pq}(\infty)\sigma_{pq}(\infty) = \sigma(\infty)[\lambda_p(\infty) + \lambda_q(\infty)]. \quad (123)$$

Неравенство (122) обобщает соответствующее неравенство для марковской динамики [110, 111, 116] на случай немарковского поведения системы.

## 2. ДИФФУЗИОННЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО И ПЕРЕВЕРНУТОГО ОСЦИЛЛЯТОРОВ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗИ ПО КООРДИНАТЕ

**2.1. Диффузионный процесс по коллективной координате относительного расстояния между центрами масс взаимодействующих ядер.** Для иллюстрации влияния квантовых эффектов на динамику начальной стадии реакции при энергиях, близких к кулоновскому барьеру, рассмотрим эволюцию системы  $^{100}\text{Mo} + ^{100}\text{Mo}$  по коллективной координате относительного расстояния  $R$ . Заметим, что полученные результаты можно обобщать и для других реакций с тяжелыми ионами.

В начальной стадии столкновения система преодолевает кулоновский барьер, и основная часть начальной кинетической энергии диссипирует во внутренние возбуждения, и формулируется двойная ядерная система, где ядра находятся в контакте. Зависимость потенциальной энергии такой системы от координаты относительного расстояния аппроксимируется осциллятором  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ. Приведенный массовый параметр  $\mu = 50m_0$ , где  $m_0$  — масса нуклона. Коэффициенты диффузии и трения зависят от параметров  $\omega$ ,  $\lambda$  и  $\gamma$ . В расчетах мы будем использовать  $\hbar\gamma = 12$  МэВ. Значение  $\gamma$  удовлетворяет условию  $\gamma \gg \tilde{\omega}$  [11, 112, 115, 116, 118–121]. Зависимость диффузионных коэффициентов от  $\gamma$  достаточно слабая. Значения  $\omega$  и  $\lambda$  фиксируются заданием асимптотических значений  $\xi(\infty)$  и  $\lambda_P(\infty)$ :

$$\xi(\infty) = \xi = \pm\mu\tilde{\omega}^2, \quad \lambda_P(\infty) = \lambda_P.$$

Используемые значения  $\hbar\lambda_P = 1-3$  МэВ соответствуют коэффициентам трения, извлеченным из экспериментальных данных.

На рис. 1 и 2 показаны зависимости от времени микроскопических коэффициентов трения (23) и диффузии (82) и (83) для гармонического и перевернутого осцилляторов, имеющих одинаковые частоты и массы. Значения  $D_{PP}$ ,  $D_{PR}$  и  $\lambda_P$  равны нулю в начальный момент времени. Через короткое переходное время  $\sim \gamma^{-1}$  коэффициенты достигают своих асимптотических значений. Переходное время слабо растет с ростом  $\lambda_P$ . На коротком начальном интервале времени  $D_{PR}$  имеет положительное значение, но затем становится отрицательным. Смешанный коэффициент диффузии возникает из-за немарковости динамики. В марковском пределе ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) он исчезает. При высоких температурах ( $T = 1$  МэВ) асимптотические значения диффузионных коэффициентов  $D_{PP}$  ( $D_{PR}$ ) для гармонического и перевернутого осцилляторов почти совпадают с точностью до 6–11 % (5 %). Различие увеличивается с по-

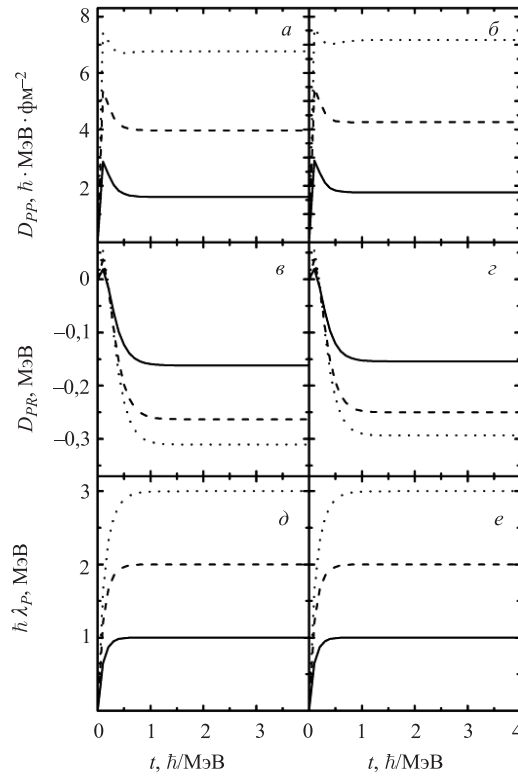
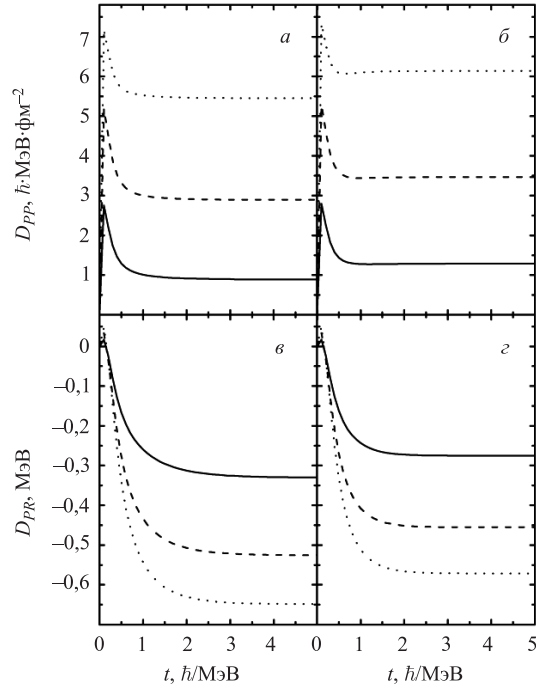


Рис. 1. Рассчитанные зависимости от времени микроскопических коэффициентов диффузии (82)–(84) и трения (23) для перевернутого (левая часть) и гармонического (правая часть) осцилляторов ( $\mu = 50m_0$  и  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ) при  $T = 1$  МэВ и  $(q, p) \equiv (R, P)$ . Расчеты для асимптотических значений коэффициента трения  $\hbar\lambda_P = 1,0, 2,0$  и  $3,0$  МэВ показаны сплошной, штриховой и пунктирной линиями соответственно

Рис. 2. То же, что и на рис. 1, но для температуры  $T = 0,3$  МэВ

нижением температуры. При низких температурах ( $T = 0,3$  МэВ) значение  $D_{PP}(\infty)$  ( $D_{PR}(\infty)$ ) для гармонического осциллятора ( $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ) больше на 45% (17%), 20% (13%) и 13% (12%), чем для перевернутого осциллятора ( $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ) при  $\hbar\lambda_P(\infty) = 1, 2$  и 3 МэВ соответственно.

Для сравнения с асимптотическими значениями микроскопических диффузионных коэффициентов  $D_{PP}(\infty)$ , полученных для перевернутого и гармонического осцилляторов, на рис. 3 показана зависимость феноменологического диффузионного коэффициента по импульсу

$$D_{PP}^c = \lambda_P \frac{\hbar\tilde{\omega}}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\tilde{\omega}}{2T}\right) \quad (124)$$

от  $\lambda_P(\infty)$  ( $D_{PR}^c = 0$ ). Значения  $D_{PP}^c$  меньше, чем значения микроскопически рассчитанных  $D_{PP}$ . Это различие растет с  $\lambda_P$  и уменьшается с ростом  $T$ . Таким образом, квантовые эффекты особенно важны при низких температурах и больших трениях. На рис. 4 показаны зависимости асимптотических значений  $D_{PP}(\infty)$  и  $D_{PR}(\infty)$  от  $T$  при  $\hbar\lambda_P = 1$  и 3 МэВ. При  $T \geq \hbar\tilde{\omega}/2$  величина  $D_{PP}$  почти линейно зависит от  $T$ . На рис. 4 видно, что для ма-

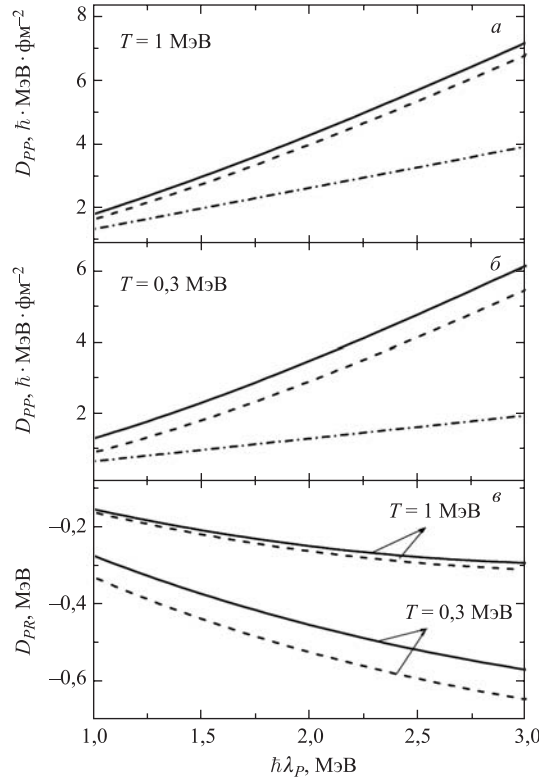


Рис. 3. Рассчитанные зависимости  $D_{PP}(\infty)$  (а, б) и  $D_{PR}(\infty)$  (в) от асимптотического значения коэффициента трения при указанных температурах. Показаны результаты расчетов микроскопических коэффициентов диффузии (82)–(84) для гармонического (сплошная линия) и перевернутого (штриховая) осцилляторов и феноменологического коэффициента диффузии по импульсу (124) (штрихпунктирная линия)

ных  $T$  зависимость  $D_{PP}$  от  $T$  достаточно слабая из-за квантовых эффектов. С ростом температуры абсолютное значение  $D_{PR}$  уменьшается и стремится к нулю в пределе  $T \rightarrow \infty$ .

На рис. 5 демонстрируется поведение микроскопических диффузионных коэффициентов  $D_{PP}(\infty)$  (88) и  $D_{PR}(\infty)$  (89) при переходе от гармонического осциллятора к перевернутому. Такой переход соответствует изменению знака коэффициента жесткости  $\xi$ . Асимптотические значения  $D_{PP}(\infty)$  и  $D_{PR}(\infty)$  гладко меняются при переходе точки  $\tilde{\omega} = 0$ . В рассмотренном интервале частот абсолютные значения  $D_{PP}(\infty)$  и  $D_{PR}(\infty)$  для перевернутого и гармонического осцилляторов достаточно близки. Различие значений диффузионных коэффициентов уменьшается с ростом температуры.

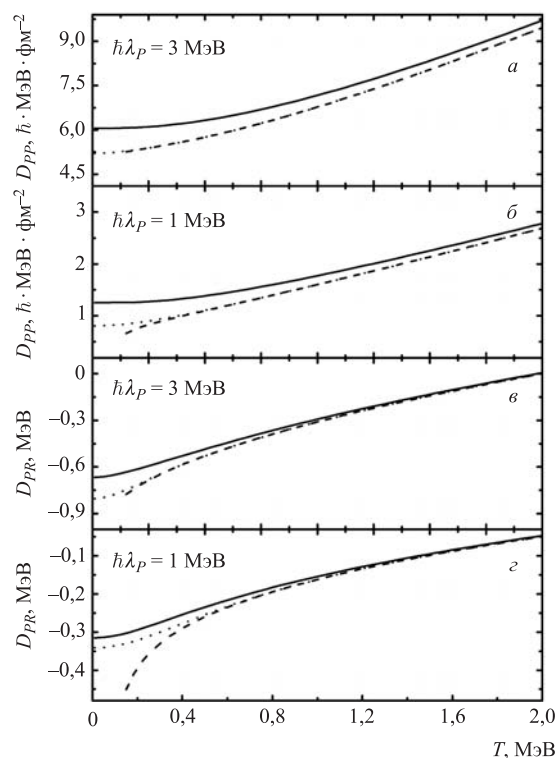


Рис. 4. Рассчитанные зависимости  $D_{PP}(\infty)$  (а, б) и  $D_{PR}(\infty)$  (в, г) от температуры для указанных асимптотических значений коэффициента трения. Показаны результаты расчетов микроскопических коэффициентов диффузии (82)–(84) для гармонического (сплошная линия) и перевернутого (штриховая) осцилляторов и модифицированных микроскопических коэффициентов диффузии  $D_{PP}(t = 1/s_+)$  и  $D_{PR}(t = 1/s_+)$  для перевернутого осциллятора (пунктирная линия)

Существует предел применения микроскопических диффузионных коэффициентов для перевернутого осциллятора при низких температурах  $T \leq T_{cr} = \hbar s_+ / (2\pi)$ , где  $T_{cr}$  — температура перехода от термического режима к квантовому туннельному режиму и  $s_3 = s_+$  — положительный корень уравнения (85). При  $T \leq T_{cr}$  значения  $D_{PP}(t)$  и  $D_{PR}(t)$  не имеют асимптотик и расходятся как функции времени. Диагональный элемент  $D_{PP}(t)$  может принимать нулевое значение или даже стать отрицательным. На рис. 4 видно, что отклонение значений  $D_{PP}(t)$  и  $D_{PR}(t)$  от гармонического осциллятора растет, когда  $T$  стремится к  $T_{cr}$ . Для перевернутого осциллятора с  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ получаем  $T_{cr} = 0,1$  и  $0,05$  МэВ для  $\hbar\lambda_P = 1$  и  $3$  МэВ соот-



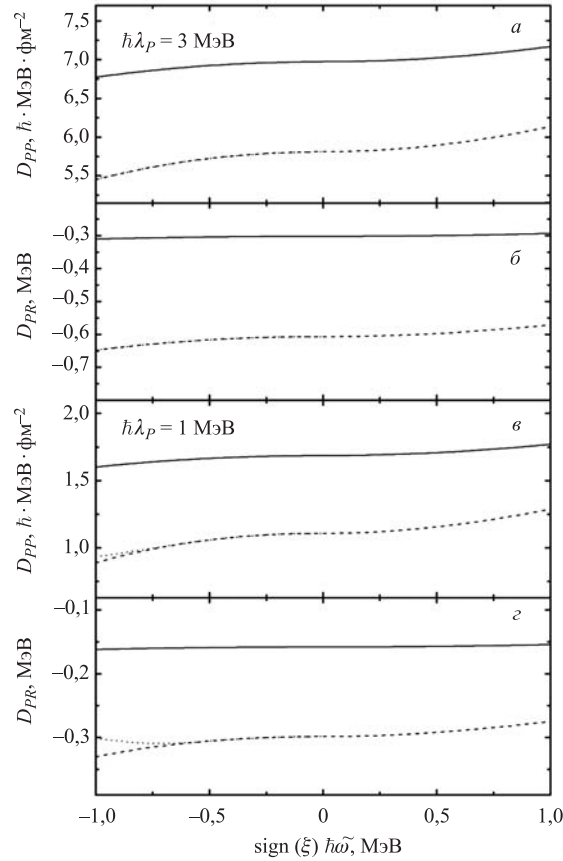


Рис. 5. Рассчитанные зависимости асимптотических значений микроскопических диффузионных коэффициентов от  $\text{sign}(\xi)\hbar\tilde{\omega}$  для указанных асимптотических значений коэффициента трения и температуры  $T = 1$  МэВ (сплошная линия) и  $T = 0,3$  МэВ (штриховая). Результаты расчетов модифицированных диффузионных коэффициентов  $D_{PP}(t = 1/s_+)$  и  $D_{PR}(t = 1/s_+)$  для перевернутого осциллятора представлены пунктирной линией при  $T = 0,3$  МэВ. При  $T = 1$  МэВ значения  $D_{PP}(t = 1/s_+)$  и  $D_{PR}(t = 1/s_+)$  совпадают с асимптотическими значениями соответствующих микроскопических диффузионных коэффициентов для перевернутого осциллятора

ответственно. Такие маленькие значения  $T$  не реализуются в ядерных реакциях при энергиях, близких к кулоновскому барьеру. Значение  $T_{\text{cr}}$  уменьшается с ростом  $\lambda_P$  или с уменьшением  $\tilde{\omega}$ . Ниже температуры  $T_{\text{cr}}$  диффузионные коэффициенты теряют свой физический смысл. Это происходит, поскольку при низких температурах корреляционное время флуктуаций случайной силы  $\tau_{\text{cor}} = \hbar/T$  [11, 118, 119] сравнимо или даже может быть больше характер-

ного времени  $\tau_{\text{coll}} = 2\pi/s_+$  коллективной подсистемы. В марковском пределе  $\tau_{\text{coll}} = 2\pi/[\sqrt{\tilde{\omega}^2 + (\lambda_P/2)^2} - \lambda_P/2]$ . Поведение  $D_{PP}$  или  $D_{PR}$  при  $T \leq T_{\text{cr}}$  можно уточнить, ограничивая верхние пределы интегрирования по  $\tau'$  и  $\tau''$  в формуле (84). Мы делаем замену  $t \rightarrow 1/s_+$  в уравнении (84), где  $1/s_+$  — время, за которое коллективная подсистема находится на барьере с малым импульсом. После такой замены значения  $D_{PP}$  ( $D_{PR}$ ), полученные для гармонического и перевернутого осцилляторов, становятся близкими при низких температурах (рис. 4). Надо заметить, что такое изменение диффузионных коэффициентов не влияет на значения  $D_{PP}$  и  $D_{PR}$  при больших температурах ( $T > T_{\text{cr}}$ ), так как переходное время  $1/\gamma$  выхода на асимптотику меньше, чем время  $t = 1/s_+$ .

*Проницаемость потенциального барьера.* Исследуем прохождение через кулоновский барьер при  $R = R_b = 0$  гауссовского пакета, движущегося с некоторой кинетической энергией в сторону барьера с левой стороны. В квадратичном потенциале начальное гауссовское распределение остается гауссовским в любой момент времени [112, 115, 116, 118–120]. Вычисляя  $\langle R(t) \rangle$  и  $\sigma_{RR}(t)$  с коэффициентами диффузии и трения, приведенными выше, и используя зависящую от времени матрицу плотности

$$\rho(t, R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{RR}(t)}} \exp \left[ -\frac{(R - \langle R(t) \rangle)^2}{2\sigma_{RR}(t)} \right]$$

в координатном представлении, можно найти вероятность прохождения пакета через барьер:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= \int_0^\infty dR [\rho(t, R) - \rho(t=0, R)] / \int_{-\infty}^0 dR \rho(t=0, R) = \\ &= \frac{\text{Erf} [\langle R(t) \rangle / \sqrt{2\sigma_{RR}(t)}] - \text{Erf} [\langle R(0) \rangle / \sqrt{2\sigma_{RR}(0)}]}{1 - \text{Erf} [\langle R(0) \rangle / \sqrt{2\sigma_{RR}(0)}]}. \end{aligned} \quad (125)$$

Значение  $P_0(t)$  определяется отношением вероятности найти частицу справа от барьера в момент времени  $t$  к вероятности найти частицу слева от барьера в момент времени  $t = 0$ . Факторы  $\int_{-\infty}^0 dR \rho(t=0, R)$  и  $\int_0^\infty dR \rho(t=0, R) = 1 - \int_{-\infty}^0 dR \rho(t=0, R)$  введены в выражение (125), так как небольшая часть начального гауссовского пакета уже находится справа от барьера. Начальные дисперсии выбираются в соответствии с соотношением неопределенности  $\sigma_{RR}(0)\sigma_{PP}(0) = \hbar^2/4$  и  $\sigma_{PR}(0) = 0$ . Когда пакет доходит до барьера, значение  $P_0(t)$  достигает квазистационарного значения, определяющего ту часть пакета, которая проникает через барьер. Значение  $P_0(t)$

зависит от среднего значения  $\langle R(t) \rangle$  и дисперсии  $\sigma_{RR}(t)$ . Кроме трения, значение  $P_0$  зависит от начального положения пакета  $\langle R(0) \rangle$  и от начальной кинетической энергии  $E_{\text{kin}}(0) = [\langle P(0) \rangle^2 + \sigma_{PP}(0)]/(2\mu)$ .

Соотношение  $\langle R(\infty) \rangle / \sqrt{2\sigma_{RR}(\infty)}$  имеет конечное значение, так как при  $t \rightarrow \infty$

$$\langle R(t) \rangle \rightarrow \frac{e^{s_+ t}}{\mu(s_+ - s_-)} \Delta_R = \frac{e^{s_+ t}}{\mu(s_+ - s_-)} [\langle P(0) \rangle - \mu s_- \langle R(0) \rangle], \quad (126)$$

и

$$\sigma_{RR}(t) \rightarrow \frac{e^{2s_+ t}}{\mu^2(s_+ - s_-)^2} \Delta_{RR}, \quad (127)$$

где

$$\Delta_{RR} = \mu^2 s_-^2 \sigma_{RR}(0) - 2\mu s_- \sigma_{PR}(0) + \sigma_{PP}(0) + \frac{2\mu s_-^2 D_{PR}(\infty)}{\tilde{\omega}} - \frac{s_- D_{PP}(\infty)}{\tilde{\omega}^2}$$

и  $s_- = -\tilde{\omega}^2/s_+$  — отрицательный корень уравнения (85). В марковском пределе  $s_- = -(\sqrt{\tilde{\omega}^2 + (\lambda_P/2)^2} + \lambda_P/2)$ . При  $\Delta_R = 0$  происходит остановка на вершине потенциального барьера. Траектория с  $\langle R(0) \rangle < 0$  и положительным  $\langle P(0) \rangle$  всегда остается с левой стороны от барьера при  $\Delta_R < 0$  ( $\langle P(0) \rangle < -\mu s_- \langle R(0) \rangle$ ), но пересекает барьер для  $\Delta_R > 0$  ( $\langle P(0) \rangle > -\mu s_- \langle R(0) \rangle$ ). Асимптотическое значение  $P_0$  достигает 1 и стремится к нулю при очень больших положительных и отрицательных значениях соотношения  $\langle R(\infty) \rangle / \sqrt{2\sigma_{RR}(\infty)}$  соответственно. Проницаемость зависит от  $D_{PP}(\infty)$  и  $D_{PR}(\infty)$ , т. е. от динамических флуктуаций. Отрицательное значение  $D_{PR}(\infty)$  уменьшает проницаемость. Для того чтобы в случае  $D_{PR} = 0$  получить то же самое значение проницаемости, как и при ненулевом  $D_{PR}(\infty)$ , мы должны эффективно уменьшить значение  $D_{PP}$ , т. е. использовать редуцированный коэффициент диффузии  $\kappa_{\text{cl}} D_{PP}(\infty)$  ( $\kappa_{\text{cl}} < 1$ ). Используя равенство  $P_0(D_{PR}(\infty), D_{PP}(\infty)) = P_0(D_{PR} = 0, \kappa_{\text{cl}} D_{PP}(\infty))$  или  $\sigma_{RR}(D_{PR}(\infty), D_{PP}(\infty)) = \sigma_{RR}(D_{PR} = 0, \kappa_{\text{cl}} D_{PP}(\infty))$  и точное аналитическое выражение для  $\sigma_{RR}(t)$ , можно найти фактор

$$\kappa_{\text{cl}} = 1 - \frac{2\mu s_- D_{PR}(\infty)}{D_{PP}(\infty)}. \quad (128)$$

Когда  $\kappa_{\text{cl}} \approx 1$ , роль  $D_{PR}$  мала. Результаты расчетов показывают, что роль  $D_{PR}$  увеличивается с уменьшением  $T$  и  $\lambda_P$  ( $s_- D_{PR}(\infty) > 0$ ).

На расстояниях, близких к вершине барьера, энергия коллективной подсистемы  $E(t)$  при  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ больше, чем при  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ (рис. 6). Поэтому можно ожидать увеличения проницаемости с уменьшением  $\lambda_P$ . Однако, если начальная кинетическая энергия мала, например  $E(0) = -2,4$  МэВ ( $\langle P(0) \rangle = 0$ ), проницаемость может расти с трением. Это объясняется тем фактом, что  $\dot{E}(t)$  при  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ меньше, чем при  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ на

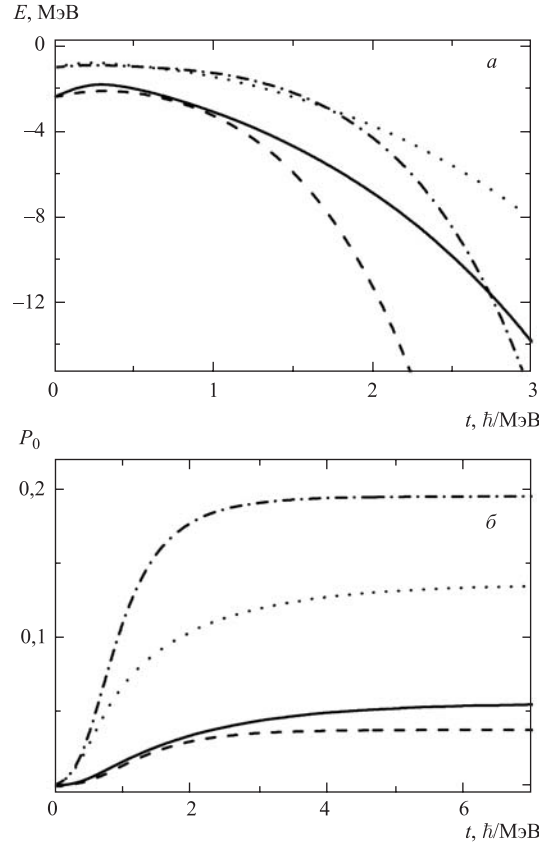


Рис. 6. Рассчитанные  $E(t)$  (а) и  $P_0(t)$  (б) как функции времени в потенциале перевернутого осциллятора с  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ ( $\langle R(0) \rangle = -2$  фм,  $\sigma_{RR}(0) = 0,42$  фм<sup>2</sup>,  $\sigma_{PP}(0) = 0,6$  фм<sup>2</sup>,  $\sigma_{PR}(0) = 0$ ) при  $T = 1$  МэВ. Результаты получены с микроскопическими транспортными коэффициентами при  $E(0) = -1$  МэВ ( $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ (штрихпунктирная линия) и  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ (пунктирная)) и при  $E(0) = -2,4$  МэВ ( $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ (штриховая линия) и  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ (сплошная))

расстояниях, близких к вершине барьера. При больших трениях диссипация энергии коллективной подсистемы

$$\dot{E}(t) = -2\lambda_P(\infty)E_{\text{kin}}(t) + \frac{D_{PP}(\infty)}{\mu} \quad (129)$$

может быть меньше из-за малости кинетической энергии и достаточно большого значения коэффициента диффузии по импульсу. Из-за наличия  $D_{PP}$  в уравнении (129) за короткий начальный интервал времени  $E(t)$  может не-

сколько увеличиться (рис. 6). В работе [14, 116] был также показан рост проницаемости с ростом коэффициента трения в случае другого типа взаимодействия между внутренней и коллективной подсистемами, когда  $D_{RR} \neq 0$ . Связь между движением по  $R$  и внутренними возбуждениями может усилиться из-за слабой связи нейтронов в мишени и/или бомбардирующем ядре. Этим можно объяснить экспериментально наблюдаемое увеличение подбарьерного слияния в реакциях с нейтроноизбыточной мишенью или нейтроноизбыточным бомбардирующим ядром. В нашем подходе эта связь моделируется при помощи значений  $\lambda_P$  и  $D_{PP}$ .

На рис. 6 и 7 величины  $P_0$  достигают своих асимптотических значений за относительно короткое время порядка  $2 \hbar \text{ МэВ}^{-1}$ . Из рис. 7 видно, что проницаемость, рассчитанная с микроскопическими диффузионными коэффициентами

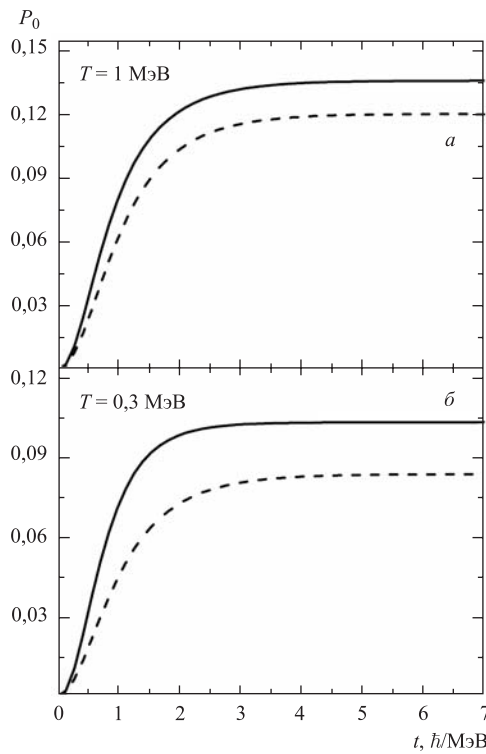


Рис. 7. Рассчитанная вероятность прохождения гауссовского пакета через барьер (перевернутый осциллятор с  $\hbar\tilde{\omega} = 1 \text{ МэВ}$ ) как функция времени для указанных температур,  $\langle R(0) \rangle = -1 \text{ фм}$ ,  $\langle P(0) \rangle = 0$ ,  $\sigma_{RR}(0) = 0,42 \text{ фм}^2$ ,  $\sigma_{PP}(0) = 0,6 \hbar^2 \cdot \text{фм}^{-2}$ ,  $\sigma_{PR}(0) = 0$ ,  $E(0) = -0,6 \text{ МэВ}$  и  $\hbar\lambda_P = 1 \text{ МэВ}$ . Результаты получены с микроскопическими коэффициентами диффузии (82)–(84) (сплошная линия) и феноменологическим диффузионным коэффициентом по импульсу (124) (штриховая линия)

ентами  $\{D_{PP}(t), D_{PR}(t)\}$  (82) и (83), больше, чем проницаемость, рассчитанная с феноменологическими коэффициентами  $\{D_{PP}^c, D_{PR}^c = 0\}$  (124). Квантовые статистические эффекты способствуют образованию двойной ядерной конфигурации за счет увеличения диффузии. Хотя  $D_{PP}(\infty) > D_{PP}^c$ , различие между  $\sigma_{RR}(\infty)$  и  $\sigma_{RR}^c(\infty)$ , рассчитанными с микроскопическими и феноменологическими диффузионными коэффициентами соответственно, достаточно мало, несмотря на отрицательное значение  $D_{PR}$ . Надо заметить, что

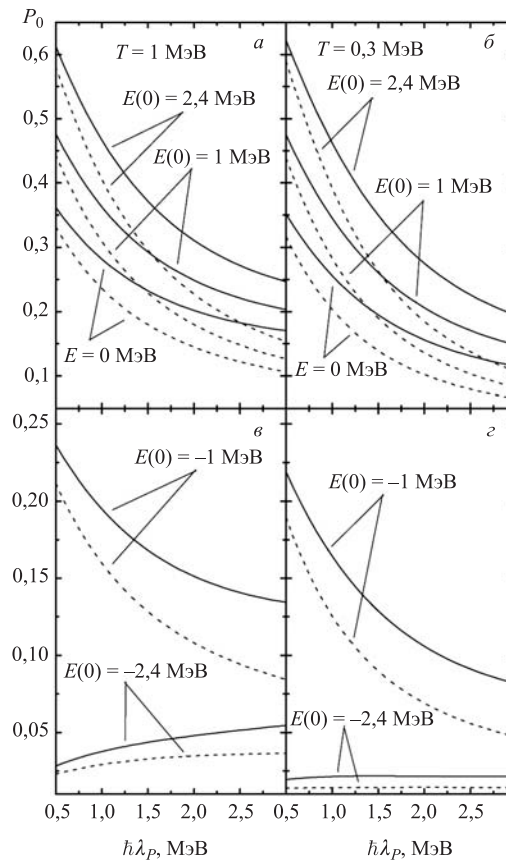


Рис. 8. Рассчитанное асимптотическое значение вероятности прохождения гауссовского пакета через барьер (перевернутый осциллятор с  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ) как функция коэффициента трения для указанных температур и начальных энергий ( $\langle R(0) \rangle = -2$  фм,  $\sigma_{RR}(0) = 0,42$  фм<sup>2</sup>,  $\sigma_{PP}(0) = 0,6$   $\hbar^2 \cdot$  фм<sup>-2</sup>,  $\sigma_{PR}(0) = 0$ ). Результаты получены с микроскопическими коэффициентами диффузии (82)–(84) (сплошная линия) и с феноменологическим диффузионным коэффициентом по импульсу (124) (штриховая линия)

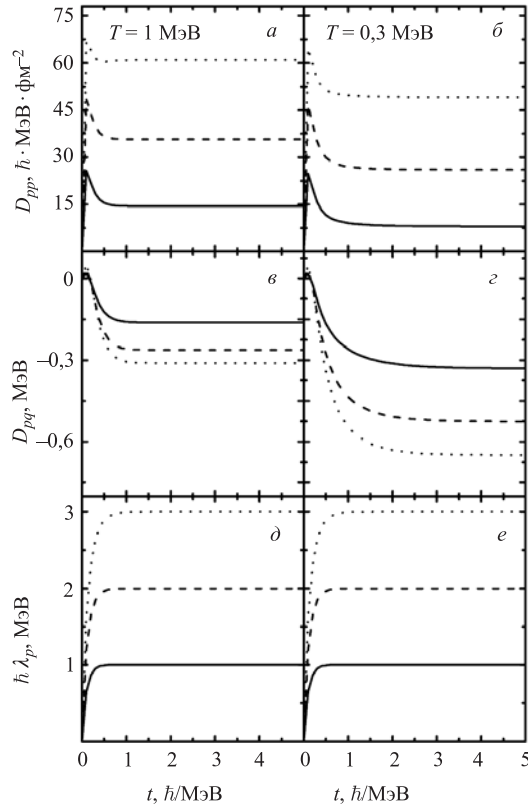


Рис. 9. Рассчитанные зависимости от времени коэффициентов диффузии (82)–(84) и трения (23) для перевернутого осциллятора ( $\mu = 448m_0$  и  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ) при  $T = 1$  МэВ (левая часть) и  $T = 0,3$  МэВ (правая часть). Расчеты для асимптотических значений коэффициента трения  $\hbar\lambda_p = 1, 2, 0$  и  $3, 0$  МэВ показаны сплошной, штриховой и пунктирной линиями соответственно

значение  $\Delta_{RR}^{\sigma nm} = \mu^2 s_-^2 \sigma_{RR}(0) - 2\mu s_- \sigma_{PR}(0) + \sigma_{PP}(0)$  в выражении для  $\Delta_{RR}$  сравнимо или даже больше, чем  $\Delta_{RR}^{D nm} = 2\mu s_-^2 D_{PR}(\infty)/\tilde{\omega} - s_- D_{PP}(\infty)/\tilde{\omega}^2$ . При условии  $\Delta_{RR}^{\sigma nm} \gg \Delta_{RR}^{D nm}$  значения  $P_0(t)$  слабо зависят от набора диффузионных коэффициентов.

На рис. 7 и 8 видно, что нет большого различия между микроскопически рассчитанной асимптотической проницаемостью  $P_0(\infty)$  и  $P_0^c(\infty)$ , рассчитанной с феноменологическими  $D_{PP}^c$  ( $D_{PR}^c = 0$ ). Поэтому оправдано использование феноменологических диффузионных коэффициентов для данного потенциала. В квантовом режиме,  $\hbar\tilde{\omega} \gg T$ , значение  $P_0^c$  меньше, чем

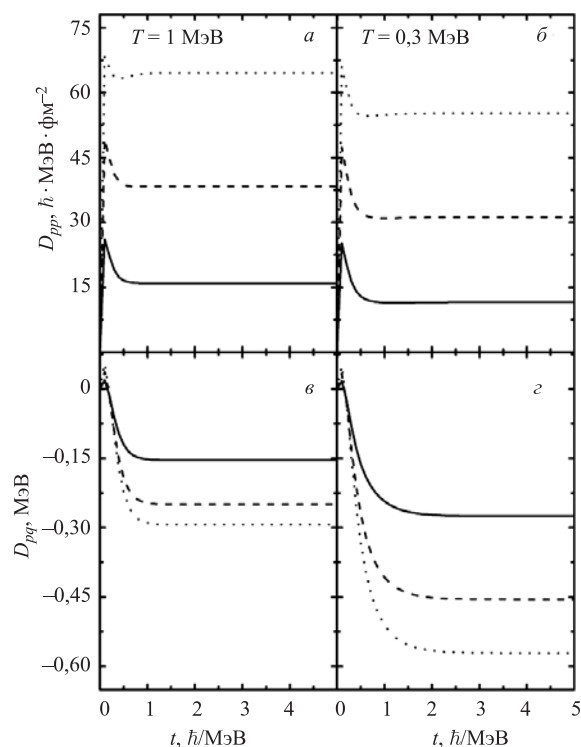


Рис. 10. То же, что и на рис. 9, но для гармонического осциллятора ( $\mu = 448m_0$  и  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ). Зависимости  $\lambda_P(t)$  совпадают с соответствующими зависимостями на рис. 9 и не приводятся

значение  $P_0$ . С ростом  $T$  величина  $P_0^c$  остается меньше  $P_0$ . Это различие растет с  $\lambda_P$ , но не превышает 100% при  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ. Различие между  $P_0^c$  и  $P_0$  растет с увеличением массового параметра.

На рис. 8 показаны асимптотические значения  $P_0(\infty)$  как функции  $\lambda_P$ . Значение  $P_0$  уменьшается с ростом  $\lambda_P$  при начальных энергиях  $E(0) = 2,4, 1, 0$  и  $-1$  МэВ. Если начальная энергия маленькая, т. е.  $E(0) = -2,4$  МэВ, вероятность прохождения растет с трением. Это объясняется так же, как и зависимость  $P_0$  от  $\lambda_P$  на рис. 6.

**2.2. Диффузионный процесс по коллективной координате массовой асимметрии.** Для данной коллективной координаты двойной ядерной системы с числом нуклонов  $A = 200$  использовано следующее значение массового параметра:  $\mu = 448m_0$ . Параметры  $\omega$  и  $\lambda$  выбираются так, чтобы асимптотические коэффициенты жесткости и трения имели определенные фиксированные



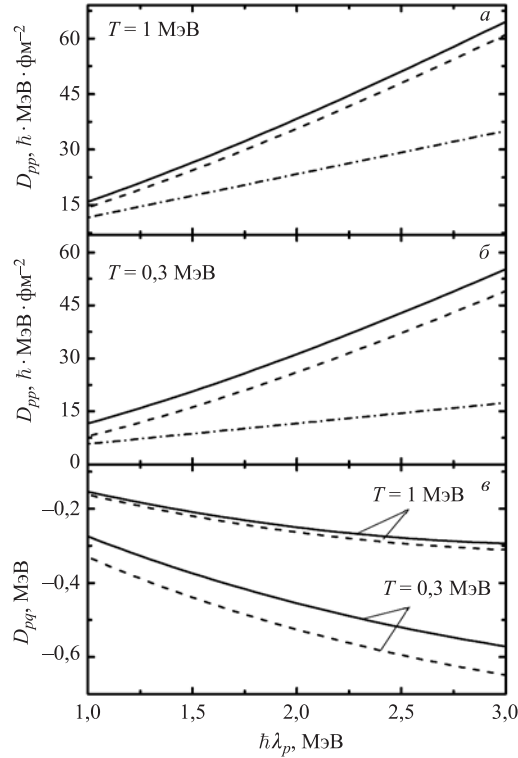


Рис. 11. Зависимости  $D_{pp}(\infty)$  (а, б) и  $D_{pq}(\infty)$  (в) от асимптотического значения коэффициента трения при  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ,  $\mu = 448m_0$ . Для  $D_{pp}(\infty)$  показаны расчеты по микроскопическим формулам (88) и (90) для гармонического осциллятора (сплошная линия) и перевернутого осциллятора (штриховая), и по феноменологической формуле (124) (штрихпунктирная линия). Для  $D_{pq}(\infty)$  показаны расчеты по микроскопическим формулам (89) и (90) для гармонического осциллятора (сплошная линия) и перевернутого осциллятора (штриховая)

значения  $\xi(\infty) = \xi = \pm\mu\tilde{\omega}^2$  и  $\lambda_p(\infty) = \lambda_p$ . Для гармонического осциллятора и перевернутого осциллятора параметры  $\hbar\gamma = 12$  МэВ,  $\mu$  и  $|\xi(\infty)|$  брались одинаковыми. В расчетах проницаемости использованы следующие начальные значения параметров гауссовского пакета:  $\sigma_{qq}(0) = 0,046$  фм<sup>2</sup>,  $\sigma_{pp}(0) = \hbar^2/(4\sigma_{qq}(0))$  фм<sup>-2</sup>,  $\sigma_{pq}(0) = 0$ ,  $\langle q(0) \rangle = -1$  фм и  $\langle p(0) \rangle = 7,2 \hbar \cdot \text{фм}^{-1}$ .

При  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ зависимости микроскопических коэффициентов  $\lambda_p(t)$ ,  $D_{pp}(t)$  и  $D_{pq}(t)$  от времени приведены на рис.9 для перевернутого осциллятора, и на рис.10 для гармонического осциллятора. Как видно из этих

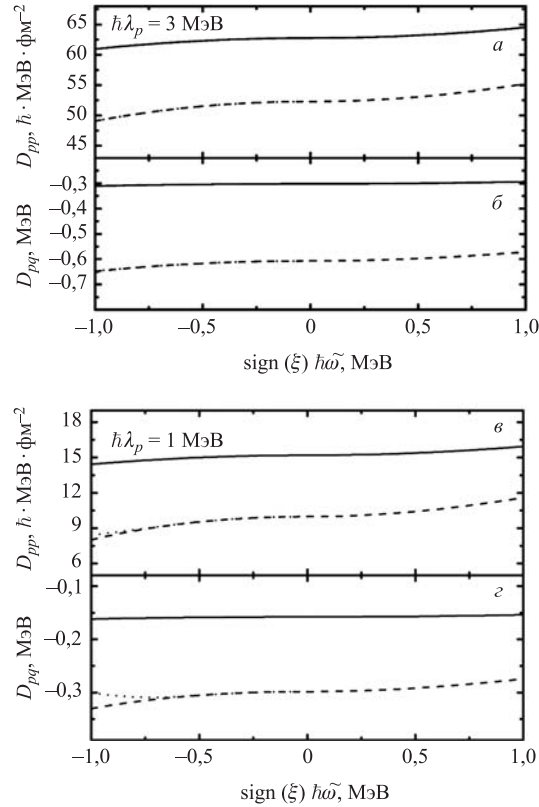


Рис. 12. Зависимость асимптотических коэффициентов диффузии от асимптотической частоты гармонического и перевернутого осциллятора при  $\mu = 448m_0$ ,  $T = 1$  МэВ (сплошная линия) и  $T = 0,3$  МэВ (штриховая). Результаты, полученные с модифицированными диффузионными коэффициентами  $D_{pp}(t = 1/s_+)$ ,  $D_{pq}(t = 1/s_+)$  при  $T = 0,3$  МэВ, показаны пунктирной линией. Расчеты при асимптотических значениях коэффициента трения  $\hbar\lambda_p = 3$  и  $1$  МэВ показаны на рис. а, б и в, г соответственно

рисунков, транспортные коэффициенты равны нулю при  $t = 0$  и через короткое время порядка  $\sim 1/\gamma$  они достигают своих асимптотических значений. Из рис. 9 и 10 видно, что при сравнительно высоких температурах ( $T = 1$  МэВ) асимптотические значения  $D_{pp}(\infty)$  и  $D_{pq}(\infty)$  для перевернутого осциллятора приблизительно на 5% меньше, чем для гармонического осциллятора. При температуре  $T = 0,3$  МэВ  $D_{pp}(\infty)$  ( $D_{pq}(\infty)$ ) для гармонического осциллятора больше на 40% (20%), 16% (15%) и 11% (13%), чем для перевернутого осциллятора при значениях  $\hbar\lambda_p(\infty) = 1, 2$  и  $3$  МэВ соответственно. Этот диапазон значений коэффициента трения охватывает режимы слабого, среднего и сильного затуханий.

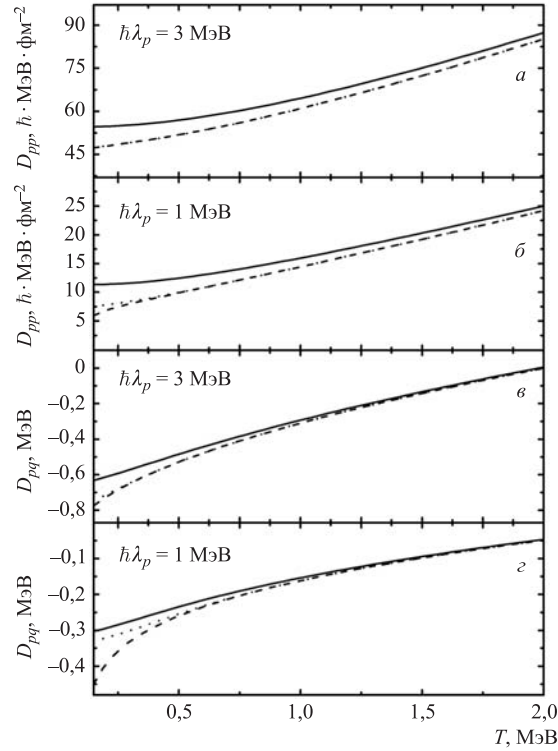


Рис. 13. Зависимости асимптотических коэффициентов диффузии от температуры при  $\hbar\omega = 1$  МэВ,  $\mu = 448m_0$  и указанных асимптотических коэффициентах трения  $\hbar\lambda_p = 1,0$  (б, з) и 3,0 МэВ (а, в). Показаны расчеты по микроскопическим формулам (82)–(84) для гармонического осциллятора (сплошная линия ( $t = \infty$ )) и перевернутого осциллятора (штриховая линия при  $t = \infty$  в (84) и пунктирная при  $t = 1/s_+$  в (84))

При относительно малых трениях  $\hbar\lambda_p \leq 1$  МэВ асимптотики микроскопических коэффициентов диффузии  $D_{pp}(\infty)$  для гармонического и перевернутого осцилляторов близки к значению «классического» (феноменологического) коэффициента диффузии по импульсу  $D_{pp}^c$  (124). С увеличением величины коэффициента трения от  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ до  $\hbar\lambda_p = 3$  МэВ различие достигает фактора 2 для высоких температур ( $T = 1$  МэВ), и 3 для низких температур ( $T = 0,3$  МэВ), причем всегда  $D_{pp}(\infty) > D_{pp}^c$ . В отличие от  $D_{pp}$  коэффициент  $D_{pq}$  не имеет своего классического аналога. Зависимости  $D_{pq}$  от  $\lambda_p$  приведены на рис. 11. При переходе от гармонического осциллятора к перевернутому осциллятору асимптотические значения  $D_{pp}(\infty)$  и  $D_{pq}(\infty)$  меняются непрерывно (рис. 12). В рассмотренном диапазоне частот абсолютные

значения  $D_{pp}(\infty)$  и  $D_{pq}(\infty)$  для перевернутого и гармонического осцилляторов относительно близки при фиксированных частоте и температуре.

Различие значений коэффициентов диффузии для разного типа осцилляторов уменьшается с увеличением температуры и уменьшением частоты. При  $T = 2$  МэВ и  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ диффузионные коэффициенты для гармонического и перевернутого осцилляторов практически совпадают (рис. 13).

*Проницаемость параболического барьера.* Для расчета проницаемости параболического барьера слева направо использована формула (125). В расче-

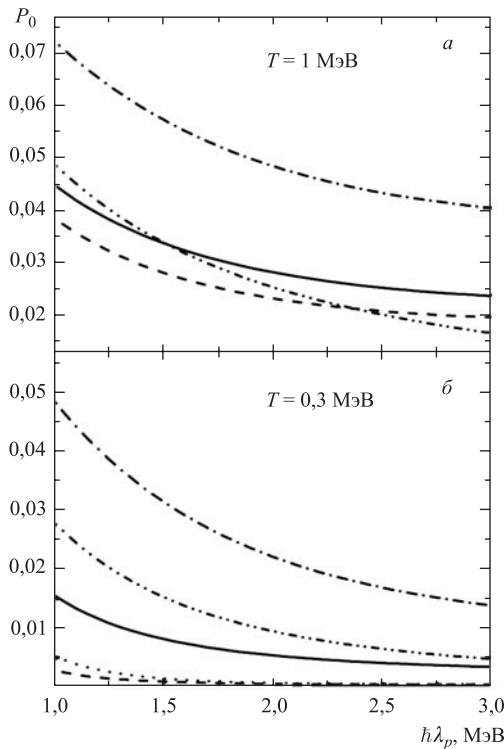


Рис. 14. Зависимость проницаемости  $P_0(\infty)$  параболического барьера от значения асимптотического коэффициента трения  $\lambda_p = \lambda_p(\infty)$  при  $\mu = 448m_0$ ,  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ,  $T = 1$  МэВ (а) и  $T = 0,3$  МэВ (б). В расчетах использованы зависящие от времени микроскопические коэффициенты диффузии  $D_{pp}(t)$ ,  $D_{pq}(t)$  (82)–(84) (штрихпунктирная линия), асимптотические коэффициенты диффузии  $D_{pp}(\infty)$ ,  $D_{pq}(\infty)$  (88)–(90) (штриховая), модифицированные диффузионные коэффициенты  $D_{pp}(t = 1/s_+)$ ,  $D_{pq}(t = 1/s_+)$  (пунктирная) для перевернутого осциллятора. Результаты, полученные с феноменологическим коэффициентом диффузии  $D_{pp}^{cl}$  (124) при  $D_{pq} = 0$ , показаны штрихпунктирной линией с двумя точками. Сплошной линией показан расчет проницаемости с  $D_{pp}(\infty)$  и  $D_{pq}(\infty)$  (88)–(90) для гармонического осциллятора

тах  $P_0(t)$  использованы  $\sigma_{qq}(t)$ , рассчитанные с различными наборами диффузионных коэффициентов. Как видно из рис. 14 и 15, при  $\hbar\lambda_p \geq 1$  МэВ трение мешает прохождению волнового пакета. При относительно высоких температурах ( $T = 1$  МэВ) проницаемости  $P_0 = P_0(\infty)$ , рассчитанные с помощью зависящих от времени микроскопических коэффициентов диффузии для перевернутого осциллятора, оказываются приблизительно в 1,5 и 3–4 раза большими при  $\hbar\lambda_p = 1$  и 3 МэВ соответственно, чем проницаемости, рассчитанные с помощью феноменологического коэффициента (124) и  $D_{pq} = 0$ . Такая тенденция сохраняется и при низких температурах ( $T = 0,3$  МэВ). Это объясняется тем, что в рассматриваемом диапазоне температур значение

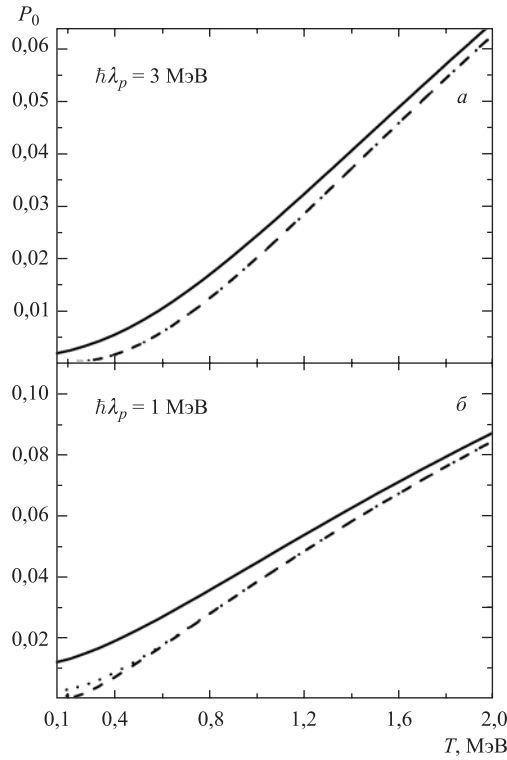


Рис. 15. Зависимость проницаемости  $P_0(\infty)$  параболического барьера от температуры  $T$  при  $\mu = 448m_0$ ,  $\hbar\tilde{\omega} = 1$  МэВ,  $\hbar\lambda_p = 3$  МэВ (а) и  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ (б). В расчетах использованы асимптотические микроскопические коэффициенты диффузии  $D_{pp}(t)$ ,  $D_{pq}(t)$  (82)–(84) (штриховая линия), модифицированные диффузионные коэффициенты  $D_{pp}(t = 1/s_+)$ ,  $D_{pq}(t = 1/s_+)$  (пунктирная линия) для перевернутого осциллятора и асимптотические микроскопические коэффициенты диффузии  $D_{pp}(\infty)$ ,  $D_{pq}(\infty)$  (88)–(90) для гармонического осциллятора (сплошная линия)

асимптотического микроскопического коэффициента диффузии по импульсу больше, чем значение его феноменологического аналога. На рис. 9 видно, что асимптотическое значение для коэффициента диффузии по импульсу устанавливается после начального всплеска, и поскольку проницаемость является интегральной характеристикой, ее значение оказывается большим при использовании зависящих от времени микроскопических коэффициентов диффузии, чем при использовании асимптотических коэффициентов диффузии. Расчеты с микроскопическими асимптотическими коэффициентами диффузии для гармонического осциллятора и модифицированными коэффициентами диффузии для перевернутого осциллятора дают практически одинаковые значения проницаемостей во всем рассматриваемом диапазоне трений при относительно высоких температурах ( $T = 1$  МэВ). Для низких температур ( $T = 0,3$  МэВ) они отличаются от 5 (при  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ) до 8 раз (при  $\hbar\lambda_p = 3$  МэВ). На рис. 15 видно сильное падение  $P_0$  при  $T < 0,3$  МэВ и  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ в расчетах с зависящими от времени микроскопическими коэффициентами диффузии для перевернутого осциллятора.

### 3. РАСПАД МЕТАСТАБИЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ

**3.1. Формализм.** Проблема описания распада квантовой системы из квазистационарного состояния вызывает большой интерес в разных областях физики: в химической кинетике, теории диффузии в твердых телах и теории ядерных реакций [4–9, 120, 121, 123]. Распад является диффузионным и диссипативным процессом вдоль коллективной координаты  $q$ . Коллективная подсистема связана с термостатом, образованным остальными степенями свободы полной системы. Процесс распада может быть описан квантовым мастер-уравнением (30) для приведенной матрицы плотности с  $\lambda_q = 0$  и  $D_{qq} = 0$ . Если потенциал  $\tilde{U}(q)$  является осциллятором и коллективная подсистема связана с термостатом линейно по  $q$  [3], то диффузионные коэффициенты уравнения (30) не зависят от  $q$  [13, 107, 112, 116, 118, 119]. В этом случае  $D_{pp}$  и  $D_{pq}$  — функции частоты осциллятора [4–9, 12, 13, 107, 110–112, 116, 118, 119, 123]. Разлагая в ряд Тейлора до второго порядка более сложный потенциал,  $\tilde{U}(q)$  можно аппроксимировать в каждой точке  $q$  локальным гармоническим или перевернутым осциллятором [124]. Вследствие того, что частота локального осциллятора зависит от координаты, диффузионные коэффициенты становятся зависящими от  $q$ . Для ангармонического потенциала  $\tilde{U}(q)$  использование постоянных диффузионных коэффициентов является хорошим приближением при слабой диссипации и высокой температуре [12, 110, 111, 124]. Однако во многих приложениях, например, при рассмотрении распада из неглубокой потенциальной ямы, необходимо учитывать флуктуации более высокого порядка [4–9, 120, 121, 123, 124]. Отметим,

что потенциал  $\tilde{U}(q)$  включает перенормировки из-за связи и немарковости.

Мастер-уравнение для приведенной матрицы плотности  $\rho$  в координатном представлении ( $\rho(t, x, y) = \langle x|\rho|y\rangle$ ) может быть записано как

$$\frac{d}{dt}\rho(t, x, y) = L(x, y)\rho(t, x, y),$$

$$L(x, y) = -i \left[ \frac{\hbar}{2\mu}(\partial_{x,x} - \partial_{y,y}) + \tilde{U}(x) - \tilde{U}(y) \right] - \frac{1}{2}\lambda_p(x-y)(\partial_x - \partial_y) - \\ - \frac{D_{pp}}{\hbar^2}(x-y)^2 - \frac{i}{\hbar}[D_{pq}(\partial_x + \partial_y)(x-y) + (x-y)(\partial_x + \partial_y)D_{pq}]. \quad (130)$$

Здесь использованы обозначения:  $\partial_k = \partial/\partial k$ ,  $\partial_{k,k} = \partial^2/\partial^2 k$ . Делая следующее преобразование координат

$$x = q + \frac{z}{2}, \quad y = q - \frac{z}{2}, \quad (131) \\ \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial}{\partial z}$$

и разлагая потенциал по  $z$

$$\tilde{U}\left(q + \frac{z}{2}\right) - \tilde{U}\left(q - \frac{z}{2}\right) \approx z\tilde{U}'(q) + \frac{1}{24}z^3\tilde{U}'''(q), \quad (132)$$

получаем уравнение для матрицы плотности  $\rho(t, q, z)$ :

$$\frac{d}{dt}\rho(t, q, z) = L(q, z)\rho(t, q, z), \\ L(q, z) = i\frac{\hbar}{\mu}\partial_{q,z} - iz\tilde{U}'(q) - i\frac{1}{24}z^3\tilde{U}'''(q) - \lambda_p z \partial_z - \frac{D_{pp}}{\hbar^2}z^2 - \\ - \frac{i}{\hbar}(D_{pq}z\partial_q + \partial_q z D_{pq}). \quad (133)$$

Для решения (133) используется осцилляторный базис:

$$\rho(t, q, z) = \sum_{k=0}^n f_k(t, q) B_k(\sigma, z) \quad (134) \\ B_k(\sigma, z) = \frac{i^k}{k!} \left(\frac{k}{2}\right)! \exp\left(-\frac{z^2}{8\sigma^2}\right) H_k\left(\frac{z}{2\sigma}\right).$$

Здесь  $B_k(\sigma, 0) = 1$  и 0 для четных и нечетных  $k$  соответственно. Из численных расчетов мы получаем, что диффузионный коэффициент  $D_{pp}(q = q_L)$  в

минимуме потенциальной ямы (где находится начальный пакет) и оптимальный базисный параметр  $\sigma$  должны быть связаны следующим соотношением:  $4\sigma^2 D_{pp} = \hbar^2 \lambda_p$ . Значение  $\sigma$  меняется в интервале 0,14–0,30 фм при рассмотренных  $T$  и  $\lambda_p$ . Предлагаемый метод позволяет нам получить  $\rho$  для потенциала любой сложности и для любого набора коэффициентов трения и диффузии. Используемые микроскопические коэффициенты диффузии обеспечивают положительность матрицы плотности в любой момент времени и

$$\text{Tr } \rho = \sum_{k=0,2,4,\dots,\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_k(t, q) dq = 1. \quad (135)$$

**3.2. Диффузионные коэффициенты, зависящие от координаты.** В каждом малом интервале по  $q$  потенциал  $\tilde{U}(q)$  может быть аппроксимирован локальным гармоническим или перевернутым осциллятором с частотой  $\tilde{\omega}(q)$ . В случае линейной связи по  $q$  между коллективной и внутренней подсистемами выражения для микроскопических коэффициентов диффузии для гармонического осциллятора (знак «+») или перевернутого (знак «-») имеют следующий вид ( $\nu_k = 2\pi T k / \hbar$ ):

$$D_{pp}(q) = \frac{T\mu\gamma^2\lambda_p}{\gamma(\gamma + \lambda_p) \pm \tilde{\omega}^2} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k \gamma \lambda_p \pm \tilde{\omega}^2 (\gamma + \nu_k)}{(\gamma + \nu_k)(\nu_k (\nu_k + \lambda_p) \pm \tilde{\omega}^2)} \right), \quad (136)$$

$$D_{pq}(q) = \frac{T\gamma\lambda_p}{2(\gamma(\gamma + \lambda_p) \pm \tilde{\omega}^2)} \left( 1 + 2\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-\nu_k \gamma \pm \tilde{\omega}^2}{(\gamma + \nu_k)(\nu_k (\nu_k + \lambda_p) \pm \tilde{\omega}^2)} \right). \quad (137)$$

Данные выражения можно получить из (94) и (95), представляя логарифмическую производную гамма-функции бесконечной суммой и делая замену  $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$ . Можно показать, что зависимость  $\lambda_p$  от  $q$  для данного типа связи достаточно слабая, чтобы ее учитывать. Как было показано выше, при линейной связи по координате между коллективной и внутренней подсистемами у нас отсутствуют коэффициенты диффузии и трения по координате [12, 13, 107, 110–112, 116, 118, 119]. В численных расчетах мы используем несколько наборов асимптотических диффузионных коэффициентов. Первый набор содержит микроскопические (квантовые) диффузионные коэффициенты (136) и (137), зависящие от координаты,

$$(i) \quad D_{pp}(q), \quad D_{pq}(q). \quad (138)$$

Второй набор диффузионных коэффициентов совпадает с первым набором, но  $D_{pq}$  полагается равным нулю:

$$(ii) \quad D_{pp}(q), \quad D_{pq}(q) \equiv 0. \quad (139)$$



Сравнивая результаты, полученные с наборами (i) и (ii), можно выявить роль  $D_{pq}$  в процессе эволюции системы. Результаты, полученные с этими наборами, можно сравнить с феноменологическим («классическим») набором, зависящим от  $q$ :

$$(iii) \quad D_{pp}^c(q) = \mu\lambda_p T^*(q), \quad D_{pq}^c(q) = 0, \quad (140)$$

где эффективная температура  $T^*(q) = 0,5\hbar\tilde{\omega}(q) \operatorname{cth}[\hbar\tilde{\omega}(q)/(2T)]$  (для потенциала с положительной жесткостью) или  $T^*(q) = 0,5\hbar\tilde{\omega}(q) \operatorname{ctg}[\hbar\tilde{\omega}(q)/(2T)]$  (для потенциала с отрицательной жесткостью) зависит от  $q$ . Результаты, полученные с помощью этих наборов диффузионных коэффициентов, можно сравнить с часто используемыми постоянными микроскопическими коэффициентами диффузии

$$(iv) \quad D_{pp}(q = q_L), \quad D_{pq}(q = q_L) \quad (141)$$

или постоянными феноменологическими коэффициентами диффузии

$$(v) \quad D_{pp}^c(q = q_L) = \mu\lambda_p T^*(q = q_L), \quad D_{pq}^c(q_L) = 0. \quad (142)$$

Здесь  $q_L$  указывает на положение левого минимума, откуда рассматривается распад.

**3.3. Скорость распада из потенциальной ямы. 3.3.1 Определение скорости распада.** Решая уравнение (133) с любым набором диффузионных коэффициентов из (i)–(v) для данного коэффициента трения  $\lambda_p = \lambda_p(\infty)$ , получаем зависящую от времени матрицу плотности  $\rho(t, q, 0) = \langle q | \rho | q \rangle$  в координатном представлении и находим вероятность  $P(t)$  прохождения гауссовского пакета через барьер при  $q = q_b$ :

$$P(t) = \int_{q_b}^{\infty} \rho(t, q, 0) dq = \sum_{k=0,2,4,\dots,q_b} \int_{q_b}^{\infty} f_k(t, q) dq, \quad (143)$$

а также скорость вероятности распада

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \frac{1}{1 - P(t)} \frac{dP(t)}{dt} = \frac{i\hbar}{\mu[1 - P(t)]} \int_{q_b}^{\infty} dq \partial_{q,z} \rho(t, q, z) \Big|_{z=0} = \\ &= \frac{-i\hbar}{\mu[1 - P(t)]} \sum_{k=1,3,5,\dots} f_k(t, q_b) \partial_z B_k(\sigma, z) \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (144)$$

**3.3.2 Асимметричный бистабильный потенциал.** Рассмотрим распад гауссовского пакета из малой ямы в более глубокую яму в асимметричном

потенциале с двумя минимумами (рис. 16), описываемом полиномом четвертой степени

$$\begin{aligned}\tilde{U}(q) &= -\frac{6q_R V_L}{q_L^2(2q_R - q_L)}q^2 - \frac{4(q_L + q_R)V_L}{q_L^3(q_L - 2q_R)}q^3 - \frac{3V_L}{q_L^3(2q_R - q_L)}q^4 = \\ &= -3,24q^2 - 0,43q^3 + 0,39q^4,\end{aligned}\quad (145)$$

где  $q_R$  — координата положения правого минимума;  $V_L$  — глубина левого минимума. Выберем вершину барьера в точке  $q = q_b = 0$ ,  $q_L = -1,67$  фм,  $q_R = 2,5$  фм, и  $V_L = 4$  МэВ. С такими параметрами глубина правого минимума равна 11,8 МэВ. В расчетах используем массовый параметр  $\mu = 448m_0$ . Тогда соответствующие частоты в левом минимуме и на вершине барьера равны  $\hbar\tilde{\omega}_m = 1$  МэВ и  $\hbar\tilde{\omega}_b = 0,77$  МэВ соответственно. Результатом локаль-

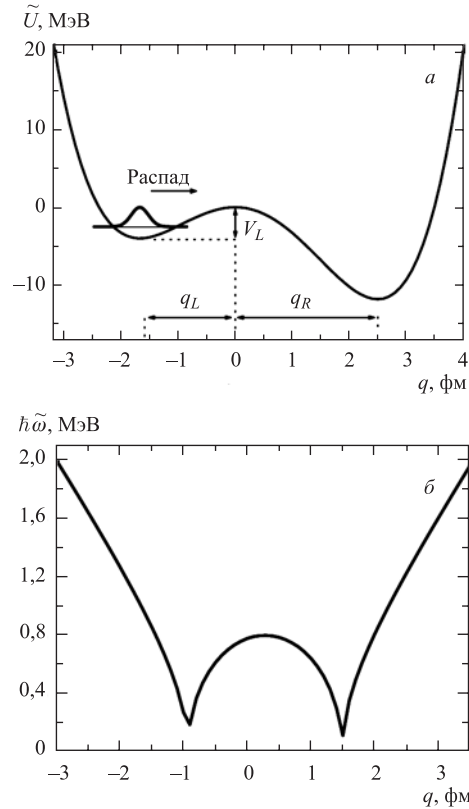


Рис. 16. *а*) Асимметричный бистабильный потенциал (145). Схематическое представление распада гауссовского пакета из левого минимума в правый минимум. *б*) Зависимость частоты от координаты  $q$

ного гармонического приближения потенциала является координатная зависимость  $\tilde{\omega}(q)$ , показанная на рис. 16. Здесь мы рассмотрим случай  $\tilde{\omega}_m > \tilde{\omega}_b$ . Выбранные параметры можно связать с вынужденным ядерным делением при низких энергиях возбуждения ядра. Для того, чтобы избежать связи полученных результатов лишь с ядерной физикой, представим результаты в безразмерных единицах.

Для потенциала (145) координатная зависимость коэффициентов диффузии показана на рис. 17. Можно видеть, что зависимость диффузионных коэффициентов от  $q$  сильнее при низкой температуре. Как следует из выражений (136) и (137), в случае  $\tilde{\omega}_m \geq \tilde{\omega}_b$  значение  $D_{pp}$  уменьшается, если двигаться от  $q_L$  до  $q_b = 0$ . С наборами диффузионных коэффициентов (138)–(142) мы рассмотрим распад начального гауссовского пакета, имеющего средние значения  $\langle q(0) \rangle = q_L$  и  $\langle p(0) \rangle = 0$  и дисперсии  $\sigma_{qq}(0) = 0,08 \text{ фм}^2$ ,  $\sigma_{pq} = 0$  и  $\sigma_{pp}(0) = 4,52 \text{ фм}^{-2}$  ( $\sigma_{qq}(0)\sigma_{pp}(0) - [\sigma_{pq}(0)]^2 > \hbar^2/4$ ), из левой потенциальной ямы (рис. 16).

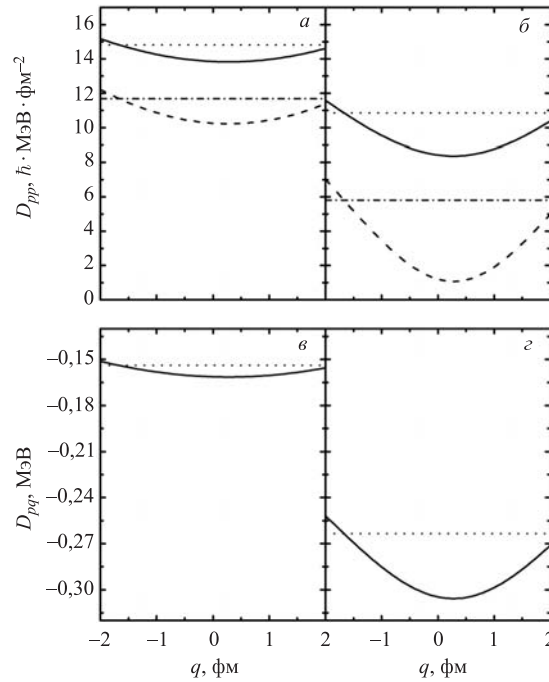


Рис. 17. Рассчитанные диффузионные коэффициенты как функции координаты  $q$  при  $\lambda_p/\tilde{\omega}_m = 1$  и  $\mu = 450m_0$  показаны для  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 0,3$  (а, в) и  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$  (б, г). Результаты, полученные с наборами диффузионных коэффициентов (i), (iii), (iv) и (v), показаны сплошной, штриховой, пунктирной и штрихпунктирной линиями соответственно

Зависимость скорости распада  $\Lambda(t)$  от времени показана на рис. 18 для наборов (i)–(v) коэффициентов диффузии и двух разных температур. Значение  $\Lambda(t)$  сильно изменяется за короткий начальный промежуток времени. Абсолютное значение  $\Lambda(t)$  растет с  $T$ . Для низких и высоких температур наборы (i) и (iii) так же, как и наборы (iv) и (v), дают близкие значения для  $\Lambda(\infty)$ . С набором (ii) скорость распада больше, чем с набором (i), так как отрицательное значение  $D_{pq}$  в наборе (i) уменьшает величину  $\Lambda(\infty)$ . Несмотря на то, что  $D_{pq} < 0$ , с микроскопическим набором (i) ((iv)) мы получаем практически такую же скорость распада, как и с классическим набором (iii) ((v)).

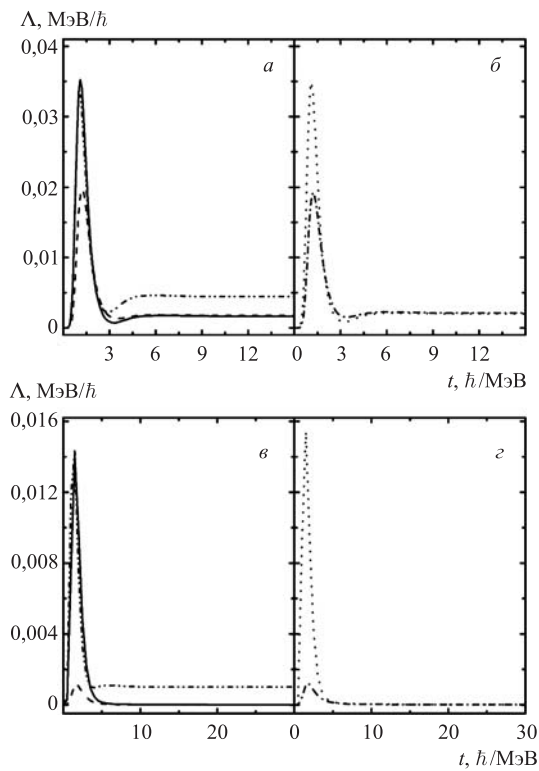


Рис. 18. Зависимость скорости распада  $\Lambda(t)$  из левой ямы потенциала (145) от времени для  $\mu = 450m_0$ ,  $\lambda_p/\tilde{\omega}_m = 1$ ,  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 0,3$  (в, з) и  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$  (а, б). Результаты, полученные с наборами диффузионных коэффициентов (i), (ii), (iii), (iv) и (v), показаны сплошной, штрихпунктирной с двумя точками, штриховой, пунктирной и штрихпунктирной линиями соответственно. Для наборов диффузионных коэффициентов (i), (ii), (iii), (iv) и (v) при  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 0,3$  ( $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$ ) асимптотические значения  $\Lambda(t)$  получаются  $9,7 \cdot 10^{-9}$  ( $1,69 \cdot 10^{-3}$ ),  $1,0 \cdot 10^{-3}$  ( $4,47 \cdot 10^{-3}$ ),  $1,78 \cdot 10^{-8}$  ( $1,75 \cdot 10^{-3}$ ),  $1,3 \cdot 10^{-5}$  ( $2,04 \cdot 10^{-3}$ ) и  $1,36 \cdot 10^{-5}$  ( $2,14 \cdot 10^{-3}$ ) соответственно

Значения  $\Lambda(\infty)$ , рассчитанные с постоянными диффузионными коэффициентами (iv) и (v), больше, чем значения  $\Lambda(\infty)$ , рассчитанные с зависящими от координаты диффузионными коэффициентами (i) и (iii) (рис. 18 и 19). Это различие примерно в 1,2 и  $10^3$  раза при  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$  и 0,3 соответственно. Поэтому в случае  $D_{pp}(q = q_L) \neq D_{pp}(q = q_b)$  заметно сильное влияние координатной зависимости коэффициентов диффузии на процесс распада при низких температурах. При  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) \geq 1$  скорость распада не чувствительна к координатной зависимости диффузионных коэффициентов (рис. 19), так как значения коэффициентов диффузии в потенциальной яме и на барьере становятся близкими с повышением температуры (рис. 17). Надо отметить, что рассмотренные температуры больше, чем температура  $T_{cr} = \hbar[(\tilde{\omega}_b^2 + \lambda_p^2/4)^{1/2} - \lambda_p/2]/(2\pi)$  перехода от термического к туннельному распаду [4–9, 123].

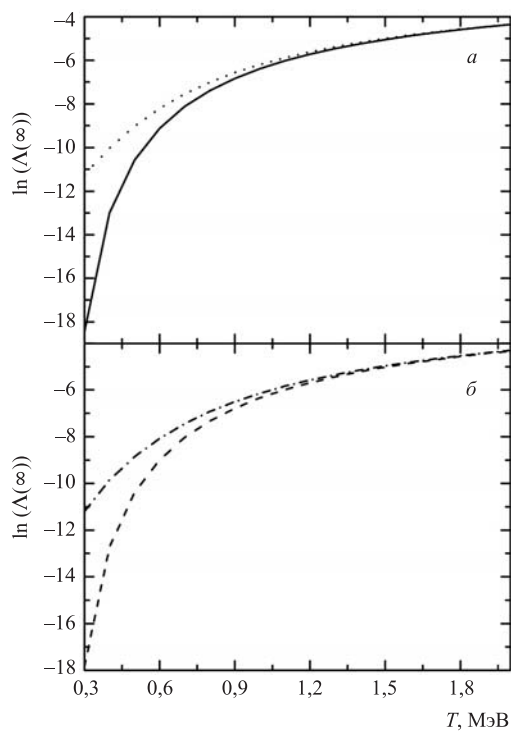


Рис. 19. Квазистационарное значение скорости распада  $\Lambda(t)$  из левой ямы потенциала (145) как функция температуры для  $\mu = 450m_0$  и  $\lambda_p/\tilde{\omega}_m = 1$ . Результаты расчетов с наборами диффузионных коэффициентов (i), (iii), (iv) и (v) показаны сплошной, штриховой, пунктирной и штрихпунктирной линиями соответственно

Влияние  $D_{pq}$  на скорость распада  $\Lambda(t)$  намного сильнее при низких температурах (рис. 18). Например, отношения  $\Lambda(\infty)$ , полученные с наборами (ii) и (i), равны примерно 2,6 и  $10^5$  при  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$  и 0,3 соответственно. Зависимости  $\Lambda(\infty)$  от трения для разных наборов диффузионных коэффициентов показаны на рис. 20. При низких температурах квазистационарное значение скорости распада вначале растет с увеличением  $\lambda_p$ . Этот результат согласуется с результатом [14] и объясняется тем, что при низких температурах роль диффузии становится сопоставимой с ролью трения. Однако дальнейший рост  $\lambda_p$  приводит к уменьшению значения  $\Lambda(\infty)$ . Интервал  $\lambda_p$ , где  $\Lambda(\infty)$  растет, больше для наборов диффузионных коэффициентов, зависящих от  $q$ , особенно для набора (i). При больших температурах и  $\lambda_p/\tilde{\omega}_m \geq 1$  квазистационарные скорости распада, рассчитанные со всеми наборами диффузионных коэффициентов, всегда уменьшаются с ростом  $\lambda_p$ .

В интервале трений  $\lambda_p/\tilde{\omega}_m = 1-3$  и при больших температурах «классический» набор (iii) приводит к незначительно большему асимптотическому значению  $\Lambda$ , чем квантовый набор (i) (рис. 20). При низких температурах значение  $\Lambda(\infty)$ , полученное с набором (i), отличается от значения с  $\Lambda(\infty)$ , полученного с набором (iii), максимально в 2,3 раза. Близость асимптотических значений  $\Lambda$ , полученных с наборами (i) и (iii), обосновывает примени-

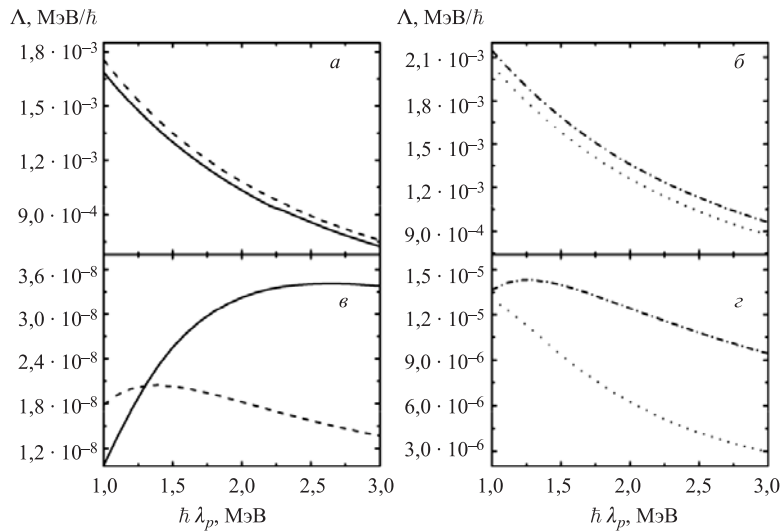


Рис. 20. Квазистационарное значение скорости распада  $\Lambda$  из левой ямы потенциала (145) как функция  $\lambda_p$  для  $\mu = 450m_0$ ,  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 0,3$  (z, c) и  $T/(\hbar\tilde{\omega}_m) = 1$  (a, b). Результаты расчетов с наборами диффузионных коэффициентов (i), (iii), (iv) и (v) показаны сплошной, штриховой (на рис. a и z), пунктирной и штрихпунктирной (на рис. b и c) линиями соответственно

мость «классического» коэффициента диффузии по импульсу, зависящего от координаты, при описании распада метастабильных состояний.

**3.3.3 Сравнительный анализ процесса распада в различных потенциалах с двумя минимумами.** Изучим теперь распад гауссовского пакета из правой неглубокой ямы в левую более глубокую яму асимметричного бистабильного потенциала. Для расчетов использованы следующие потенциалы с  $q_b = 0$ :

$$(A) \quad \tilde{U}(q) = -1,57q^2 + 0,18q^3 + 0,28q^4, \quad (146)$$

$$(B) \quad \tilde{U}(q) = -3,46q^2 + 0,38q^3 + 0,80q^4, \quad (147)$$

$$(C) \quad \tilde{U}(q) = (-3,93 + 1,24 \exp [q])q^2 - 0,68q^5 \quad (148)$$

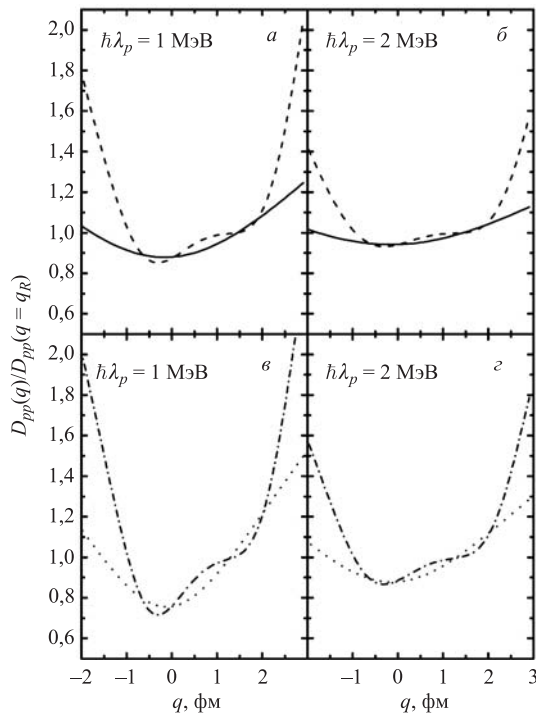


Рис. 21. Рассчитанные  $D_{pp}(q)/D_{pp}(q = q_R)$  как функции координаты  $q$  при  $\mu = 450m_0$ ,  $T = 0,3 \text{ МэВ}$ ,  $\hbar\lambda_p = 1 \text{ МэВ}$  (а, в) и  $2 \text{ МэВ}$  (б, г). Результаты, полученные для потенциалов (A), (B), (C) и (D), показаны сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно

и

$$(D) \quad \tilde{U}(q) = (-7,18 + 2,24 \exp[q])q^2 - 1,20q^5. \quad (149)$$

$V_R = 1,51, 2,71, 1,51, 2,71$  МэВ ( $V_R$  — глубина правой неглубокой ямы),  $q_R = 1,45, 1,30, 1,45, 1,38$  фм и  $q_L = -1,92, -1,66, -1,31, -1,33$  фм для потенциалов (A), (B), (C), (D) соответственно. С такими параметрами для глубины левого минимума получаем значения 3,21, 5,17, 3,54, 6,67 МэВ соответственно. С массовым параметром  $\mu = 448m_0$  имеем соответствующие частоты в правом минимуме и на барьере:  $\hbar\tilde{\omega}_m = 0,71, 1,07, 0,53, 0,78$  МэВ и  $\hbar\tilde{\omega}_b = 0,54, 0,80, 0,71, 0,96$  МэВ для потенциалов (A), (B), (C), (D) соответственно. Координатная зависимость  $\tilde{\omega}(q)$  является результатом локального гармонического приближения потенциала. Здесь мы рассмотрим случаи  $\tilde{\omega}_m > \tilde{\omega}_b$  (потенциалы (A) и (B)) и  $\tilde{\omega}_m < \tilde{\omega}_b$  (потенциалы (C) и (D)). Высоты барьеров для потенциалов (A) ((B)) и (C) ((D)) равны.

Координатные зависимости коэффициентов диффузии (136) и (137) (набор (i)) для потенциалов (146)–(149) показаны на рис. 21 и 22 при  $\hbar\lambda_p = 1$  и 2 МэВ и  $T = 0,3$  МэВ. Значение  $D_{pp}(q)$  ( $|D_{pq}(q)|$ ) падает (растет), если

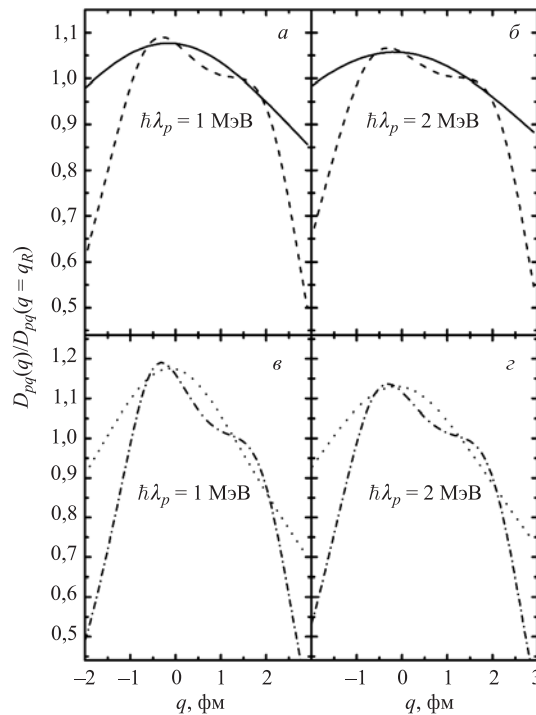


Рис. 22. То же, что и на рис. 21, но для  $D_{pq}(q)/D_{pq}(q = q_R)$



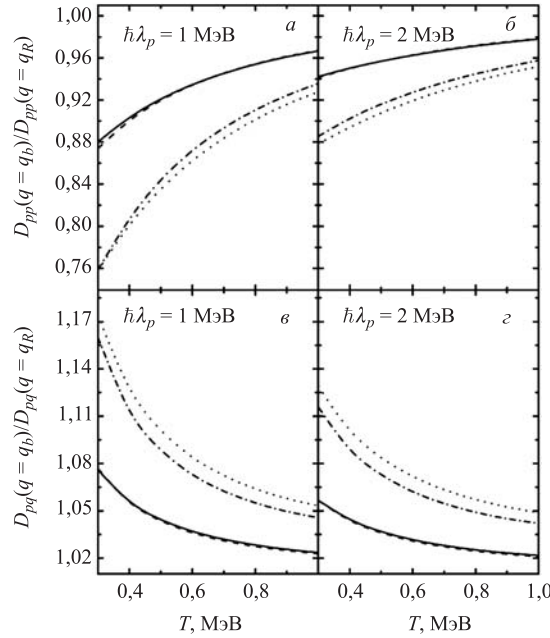


Рис. 23. Рассчитанные  $D_{pp}(q = q_b)/D_{pp}(q = q_R)$  (а, б) и  $D_{pq}(q = q_b)/D_{pq}(q = q_R)$  (в, г) как функции температуры при  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ (а, в) и 2 МэВ (б, г). Результаты, полученные для потенциалов (А), (В), (С) и (D), показаны сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно

двигаться от  $q_R$  к  $q_b = 0$ . На рис. 23 видно, что зависимости диффузионных коэффициентов от  $q$  сильнее при низких температурах, малых трениях и большой глубине ямы, откуда происходит распад. Поэтому учет координатной зависимости  $D_{pp}(q)$  и  $D_{pq}(q)$  является важным в квантовом режиме.

С наборами диффузионных коэффициентов (i)–(v) рассмотрим распад начального гауссовского пакета, который находится в правой потенциальной яме и имеет следующие средние значения:  $\langle q(0) \rangle = q_R$  и  $\langle p(0) \rangle = 0$  и дисперсии  $\sigma_{pq}(0) = 0$ ,  $\sigma_{qq}(0) = 0,16$  фм<sup>2</sup> и  $\sigma_{pp}(0) = 4 \hbar^2 \cdot \text{фм}^{-2}$  ( $\sigma_{qq}(0)\sigma_{pp}(0) - [\sigma_{pq}(0)]^2 > \hbar^2/4$ ) в потенциалах (А), (В), (С), (D) соответственно. Результаты оказываются не чувствительны к заданию начальных условий.

Зависимость от  $t$  отношения скоростей распада, рассчитанных с наборами диффузионных коэффициентов (iv) (с заменой  $q_L$  на  $q_R$ ) и (i), показана на рис. 24 для двух коэффициентов трения и  $T = 0,3$  МэВ. В начальный момент времени это отношение сильно изменяется, особенно при слабом трении, и затем достигает асимптотического значения. С набором диффузи-

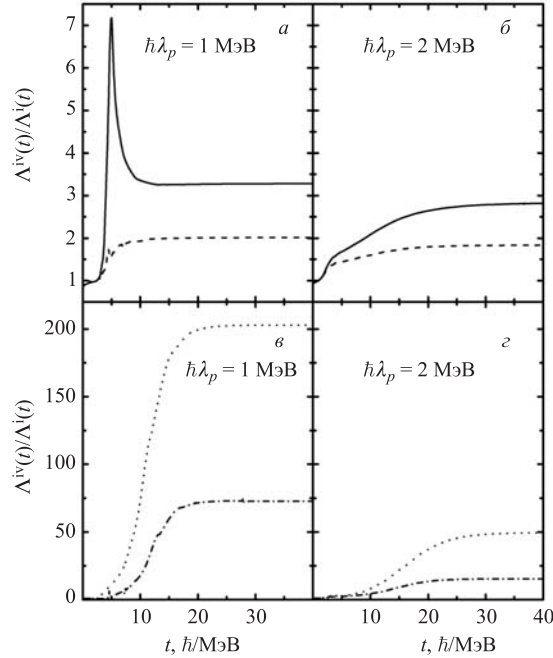


Рис. 24. Рассчитанные отношения скорости потока с координатно-независящими ( $\Lambda^{iv}(t)$ ) и координатно-зависящими ( $\Lambda^i(t)$ ) наборами микроскопических диффузионных коэффициентов (iv) (с заменой  $q_L$  на  $q_R$ ) и (i) как функции времени для  $\mu = 450m_0$ ,  $T = 0,3$  МэВ и  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ (а, в) и 2 МэВ (б, г). Результаты, полученные для потенциалов (А), (В), (С) и (D), показаны сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно

онных коэффициентов (iv) скорость распада больше, чем с набором (i), так как  $D_{pp}(q = q_R) > D_{pp}(q = q_b)$ ,  $|D_{pq}(q = q_R)| < |D_{pq}(q = q_b)|$  (рис. 21 и 22). Для потенциала (В) ((А)) отношения квазистационарных скоростей потока, рассчитанных с наборами (iv) и (i), — примерно 200 (3) и 50 (3) при  $\hbar\lambda_p = 1$  и 2 МэВ соответственно. Для потенциала (D) ((С)) эти отношения равны примерно 70 (2) и 15 (2) при  $\hbar\lambda_p = 1$  и 2 МэВ соответственно. Наблюдается сильное влияние координатной зависимости диффузионных коэффициентов (136) и (137) для потенциалов (В) и (D) при низких температурах. Скорость распада, рассчитанная для потенциала (В), меньше, чем скорость распада, рассчитанная для потенциала (D), так как в интервале между  $q = q_b$  и  $q = q_R$  значение  $D_{pp}(q)$  ( $|D_{pq}(q)|$ ) в потенциале (В) меньше (больше), чем в потенциале (D) (рис. 21 и 22). Можно показать, что при низких температурах скорость потока может быть сильно занижена с набо-

ром (iv) (с заменой  $q_L$  на  $q_R$ ) в случае  $D_{pp}(q = q_b) > D_{pp}(q = q_R)$ . Выше мы рассмотрели противоположный случай, когда  $D_{pp}(q = q_b) < D_{pp}(q = q_R)$ . Квазистационарное значение скорости распада растет с  $T$  (рис. 25). При высоких температурах скорость потока нечувствительна к координатной зависимости диффузионных коэффициентов, так как значения диффузионных коэффициентов в яме и на барьере становятся близкими с ростом температуры (рис. 23). Полученные зависимости проницаемостей от трения и диффузии при низких температурах указывают на то, что для негармонических потенциалов необходимо учитывать координатную зависимость коэффициентов диффузии.

На рис. 26 сравниваются результаты, полученные с микроскопическим набором (i) и феноменологическим набором

$$(vi) \quad D_{pp}^c(q) = \frac{1}{2} \mu \lambda_p \hbar \tilde{\omega}(q) \operatorname{cth} \left[ \frac{\hbar \tilde{\omega}(q)}{2T} \right], \quad D_{pq}^c(q) = 0. \quad (150)$$

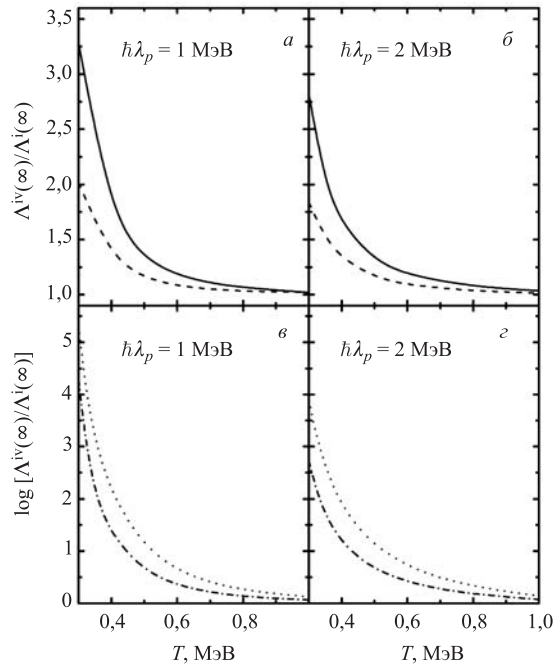


Рис. 25. Рассчитанные отношения скоростей потока с координатно-независящими ( $\Lambda^{iv}(t)$ ) и координатно-зависящими ( $\Lambda^i(t)$ ) наборами микроскопических диффузионных коэффициентов (iv) (с заменой  $q_L$  на  $q_R$ ) и (i) как функции температуры для  $\mu = 450m_0$ ,  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ (а, в) и 2 МэВ (б, г). Результаты, полученные для потенциалов (A), (B), (C) и (D), показаны сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно

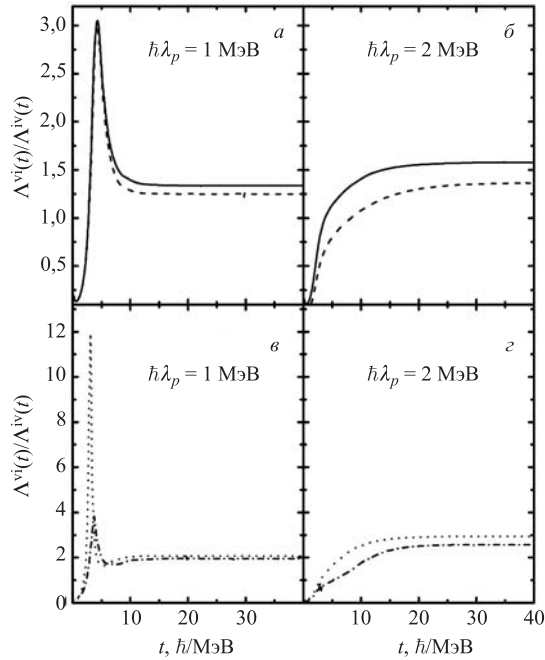


Рис. 26. То же, что и на рис. 25, но для отношения скоростей потоков, рассчитанных с координатно-зависимым набором (vi) феноменологических диффузионных коэффициентов ( $\Lambda^{vi}(t)$ ) и координатно-независимым набором (iv) (с заменой  $q_L$  на  $q_R$ ) микроскопических диффузионных коэффициентов ( $\Lambda^{iv}(t)$ ). Результаты, полученные для потенциалов (A), (B), (C) и (D), показаны сплошной, пунктирной, штриховой и штрихпунктирной линиями соответственно

Для потенциалов (A) и (C) с неглубокой правой ямой «классический» набор диффузионных коэффициентов (vi) приводит к слегка большим значениям  $\Lambda(\infty)$ , чем квантовый набор (iv) для  $\hbar\lambda_p = 1-2$  МэВ (рис. 26). Для потенциалов (B) и (D) с набором диффузионных коэффициентов (vi) скорость проницаемости больше примерно в 2–3 раза, чем скорость проницаемости, полученная с набором (iv).

#### 4. КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕЛЕНИЯ И ЗАХВАТА

**4.1. Процесс деления. 4.1.1. Временной масштаб деления.** Рассмотрим процесс деления как переход начального гауссовского пакета из левой ямы в более глубокую правую яму в асимметричном бистабильном потенциале

$$\tilde{U}(q) = -0,838q - 0,118q^2 + 0,01q^4. \quad (151)$$

Глубина левой ямы (высота барьера) —  $V_L = B_f = 3,7$  МэВ, положения левого минимума и барьера —  $q_L = -3,41$  фм и  $q_b = 0$  соответственно. Мы идентифицируем барьер с седловой точкой, минимум с основным состоянием делящегося ядра и более глубокий минимум при  $q = q_R = 12,23$  фм с точкой разрыва. Большая глубина второго минимума (116,7 МэВ) гарантирует, что при температурах, используемых в расчетах, не будет обратного потока из правого минимума при  $q = q_R$  в левый минимум при  $q = q_L$ . В реальности при больших положительных значениях  $q$  не существует минимума. Такой выбор продиктован желанием оставить область интегрирования мастер-уравнения, ограниченной по  $q$ . Полагая массовый параметр  $\mu = Am_0/4$  ( $A = 248$  — массовое число делящегося ядра), получаем частоты в левом потенциальном минимуме и на вершине барьера равными  $\hbar\tilde{\omega}_m = 1,2$  МэВ и  $\hbar\tilde{\omega}_b = 1,06$  МэВ соответственно. Выбранные параметры, которые связаны с делением ядра  $^{248}\text{См}$ , взяты из работ [57, 59, 125].

В расчетах на основе уравнения (130) и диффузионных коэффициентов (136) и (137) использованы следующие параметры начального гауссовского пакета:  $\langle q(0) \rangle = q_L$ ,  $\langle p(0) \rangle = 0$ ,  $\sigma_{pq}(0) = 0$ ,  $\sigma_{qq}(0) = \frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}_m} \text{cth}\left(\frac{\hbar\tilde{\omega}_m}{2T}\right)$ ,  $\sigma_{pp}(0) = \frac{\hbar^2}{4\sigma_{qq}(0)}$ . Начальный пакет стартует из левого минимума, который расположен относительно далеко от барьера деления.

Зависимость от времени скорости деления через седловую точку показана на рис. 27 для нескольких коэффициентов трения, приводящих к режиму слабого ( $\lambda_p < 2\tilde{\omega}_m$ ) или сильного ( $\lambda_p > 2\tilde{\omega}_m$ ) затухания. Можно видеть, что скорость деления или ширина деления как функция времени характеризуется тремя этапами: этап задержки деления в начальный момент времени, этап роста и этап установления квазистационарного режима. Время задержки или переходное время деления определяется интервалом времени между началом процесса деления и достижением тока вероятности через седловую точку 90 % от его квазистационарного значения. Сильная связь движения по  $q$  с внутренней подсистемой ведет к длительной задержке начального процесса деления и к меньшему квазистационарному значению скорости потока через барьер. Начальная задержка деления может привести к росту вероятности эмиссии частиц. Как следствие переходного этапа деления, выживаемость сильно возбужденного составного ядра может резко вырасти. Численные расчеты на основе классических уравнений Ланжевена и Фоккера–Планка показывают аналогичное поведение для  $\Lambda(t)$  [57, 59, 125–128]. Однако в квантовом случае переходные времена примерно в два раза больше, чем переходные времена на основе классического уравнения Ланжевена [125–127]. В то же время классическая и квантовая асимптотические скорости деления практически одинаковы, особенно при высоких температурах. Поэтому в квантовом рас-

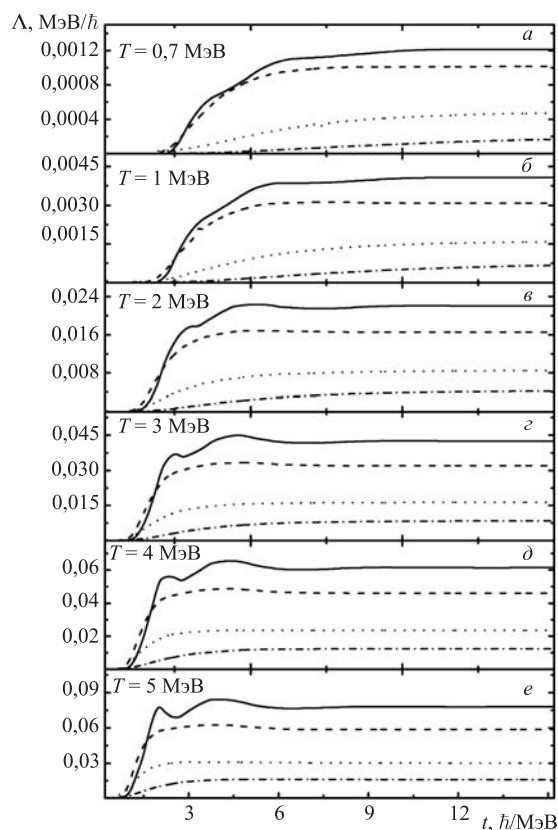


Рис. 27. Скорость деления  $\Lambda(t)$  как функция времени для указанных температур. Результаты расчетов при  $\hbar\lambda_p = 0,66, 1,32, 3,3$  и  $6,6$  МэВ показаны сплошной, штриховой, пунктирной и штрихпунктирной линиями соответственно

смотрении временной эволюции деления вероятность эмиссии нейтрона в начале процесса больше, чем в классическом рассмотрении.

На рис. 28 видно, что переходное время  $\tau$  уменьшается с ростом трения, достигая минимума около  $\lambda_p \approx \tilde{\omega}_m$ , и потом увеличивается вследствие роста затухания. Аналогичное поведение наблюдается и в классическом рассмотрении [59]. В квантовом случае переходное время  $\tau$  меняется от  $\sim 10^{-21}$  до  $\sim 10^{-20}$  с в рассмотренном диапазоне трений и температур. Величина  $\tau$  слабо уменьшается с ростом температуры. Например, при  $\lambda_p \approx \tilde{\omega}_m$  получаем  $\tau \approx 10^{-21}$  с для  $T = 5$  МэВ и  $\tau \approx 4 \cdot 10^{-21}$  с для  $T = 0,7$  МэВ. Рис. 28, 29 и 30 показывают, что переходное время примерно в 5–230 раз

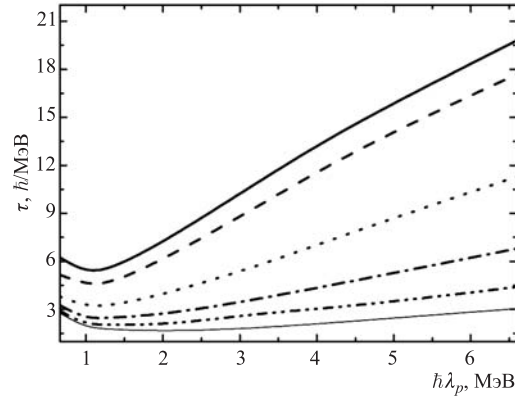


Рис. 28. Зависимость переходного времени от коэффициента трения. Результаты расчетов при  $T = 0,7, 1, 2, 3, 4$  и  $5$  МэВ представлены сплошной, штриховой, пунктирной, штрихпунктирной, штрихпунктирной с двумя точками и тонкой сплошной линиями соответственно

меньше, чем время деления  $\tau_f \left( \int_0^{\tau_f} \Lambda(t) dt = 1 \right)$ . Отсюда следует, что доля нейтронов, испущенных в течение переходного времени, составляет порядка 0,4–20% по отношению к средней множественности предделительных нейтронов. Полное время жизни делящегося ядра растет с приведенным коэффициентом диссипации от  $5,4 \cdot 10^{-19}$  до  $3 \cdot 10^{-18}$  с при  $T = 0,7$  МэВ ( $E_{CN}^* = 12,2$  МэВ — энергия возбуждения делящегося ядра), от  $1,7 \cdot 10^{-19}$  до  $8,3 \cdot 10^{-19}$  с при  $T = 1$  МэВ ( $E_{CN}^* = 24,8$  МэВ), от  $3 \cdot 10^{-20}$  до  $1,5 \cdot 10^{-19}$  с при  $T = 2$  МэВ ( $E_{CN}^* = 99,2$  МэВ) и от  $8,5 \cdot 10^{-21}$  до  $4,2 \cdot 10^{-20}$  с при  $T = 5$  МэВ ( $E_{CN}^* = 620$  МэВ). В режиме слабой связи с ростом температуры от  $T = 0,7$  МэВ ( $T < B_f$ ) до  $T = 5$  МэВ ( $T > B_f$ ) время деления уменьшается быстрее, чем переходное время. В пределе сильной связи вклад переходного времени в  $\tau_f$  растет с температурой при  $T \leq B_f$  и уменьшается с  $T$  при  $T > B_f$ . Из расчетов следует, что распределение вероятности в течение времени установления квазистационарного тока и скорость деления нечувствительны к разумным изменениям  $\sigma_{qq}(0)$  при фиксированном значении коллективной энергии.

На рис. 29 приведена квазистационарная скорость деления по аналитической формуле Крамерса

$$\Lambda_{Kr} = \frac{\tilde{\omega}_m}{2\pi\tilde{\omega}_b} \left( \left[ \tilde{\omega}_b^2 + \frac{\lambda_p^2}{4} \right]^{1/2} - \frac{\lambda_p}{2} \right) \exp \left[ -\frac{B_f}{T} \right]. \quad (152)$$

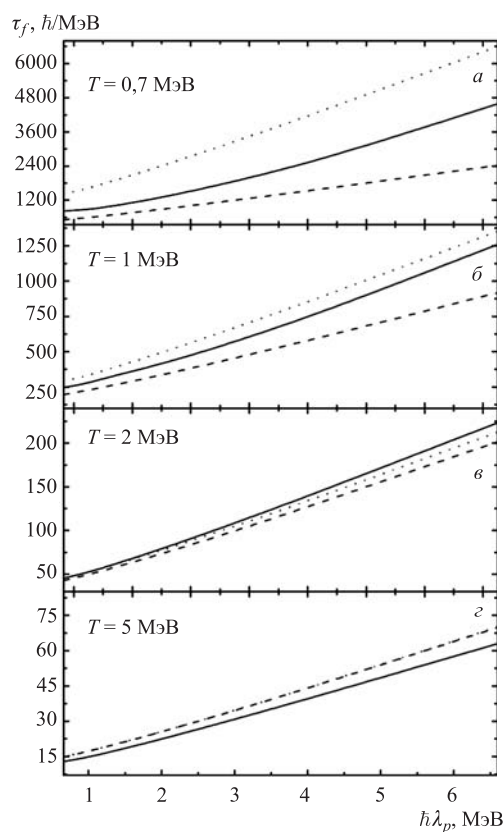


Рис. 29. Время деления как функция коэффициента трения при указанных температурах. Результаты, полученные с зависящей от времени скоростью потока, квазистационарной скоростью потока Крамерса и модифицированной квазистационарной скоростью потока Крамерса ( $T \rightarrow T^*$ ), показаны сплошной, пунктирной и штриховой линиями соответственно

Видно, что данная формула хорошо описывает скорость деления для случаев слабой и сильной связи. Самое большое отклонение между  $\Lambda^{Kr}$  и  $\Lambda(\infty)$  примерно 71 % при  $\lambda_p = 0,66$  МэВ и 44 % при  $\lambda_p = 6,6$  МэВ для  $T = 0,7$  МэВ. Модификация  $T \rightarrow T^* = \hbar\tilde{\omega}_m/2\text{ctanh}[\hbar\tilde{\omega}_m/(2T)]$  в (152) приводит к лучшему согласию при  $\lambda_p = 0,66$  МэВ, отклонение 37 %. Такая модификация позволяет преодолеть ограничение формулы Крамерса при низких температурах в случае слабой связи. Хотя в литературе предел применимости стационарного решения Крамерса уравнения Фоккера–Планка определяется условием  $T/B_f < 1$ , видно что относительное отклонение между  $\Lambda^{Kr}$  и  $\Lambda(\infty)$  при



температуре  $T = 5$  МэВ ( $T > B_f$ ) примерно 16% при  $\hbar\lambda_p = 0,66$  МэВ и примерно 11% при  $\hbar\lambda_p = 6,6$  МэВ. Скорость деления, рассчитанная с помощью формулы Крамерса, становится меньше, чем  $\Lambda(\infty)$  для температур, превышающих барьер деления.

**4.1.2. Вероятность деления на первом шаге девозбуждения сильно возбужденного ядра  $^{248}\text{Ст}$ .** Вклад  $\tau$  в  $\tau_f$  относительно существен только при малых значениях  $\lambda_p$  (предел слабой связи) и больших значениях  $T$ . Из рис. 30 следует, что при сильном возбуждении ( $E_{\text{CN}}^* \geq 100$  МэВ) тяжелых ядер ширина нейтронной эмиссии  $\Gamma_n = \hbar/\tau_n$  становится сравнимой или больше, чем переходная ширина  $\hbar/\tau$ . И тогда существенно уменьшается вероятность

$$P_f(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p) = \frac{\Gamma_n}{\hbar} \int_0^{\infty} dt P(t) \exp\left[-\frac{\Gamma_n t}{\hbar}\right] \quad (153)$$

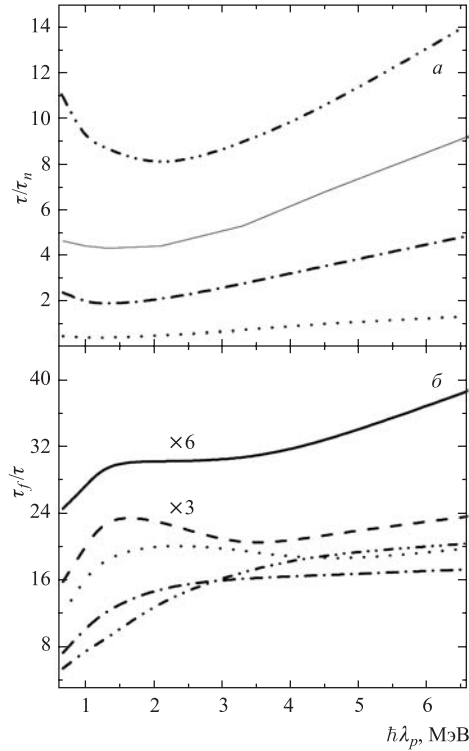


Рис. 30. Рассчитанные отношения  $\tau/\tau_n$  (а) и  $\tau_f/\tau$  (б) как функции коэффициента трения. Результаты расчетов для  $T = 0,7, 1, 2, 3, 4$  и  $5$  МэВ представлены сплошной, штриховой, пунктирной, штрихпунктирной, тонкой сплошной и штрихпунктирной с двумя точками линиями соответственно

деления в конкуренции с эмиссией нейтрона. Здесь,  $\eta(t) = \Gamma_n/\hbar \times \exp[-\Gamma_n t/\hbar]$  — вероятность того, что нейтрон вылетает в момент времени  $t$ . Мы используем в расчетах следующее аналитическое выражение для ширины нейтронной эмиссии [129]

$$\Gamma_n = \frac{T^2 A^{2/3}}{20\pi} \exp\left[-\frac{B_n}{T}\right],$$

где  $B_n = 6,2$  МэВ — энергия связи нейтрона в ядре  $^{248}\text{См}$ . В противоположность переходному времени время нейтронной эмиссии уменьшается примерно экспоненциально с ростом энергии возбуждения: от  $1,5 \cdot 10^{-17}$  с при  $T = 0,7$  МэВ до  $1,5 \cdot 10^{-22}$  с при  $T = 5$  МэВ. Используя приближенное

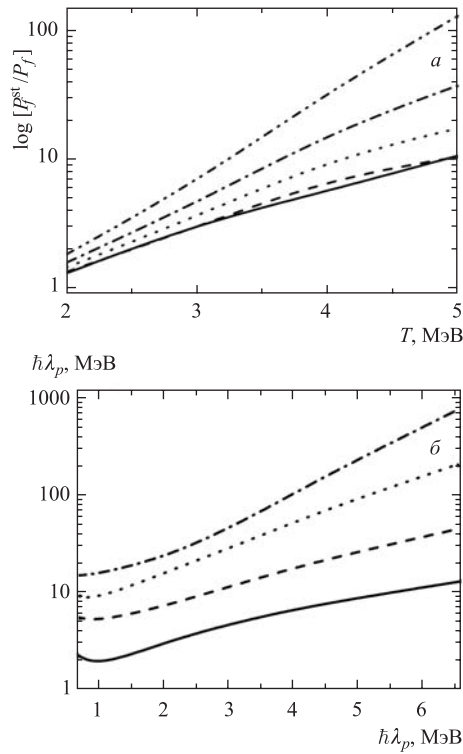


Рис. 31. *а)* Рассчитанная  $\log [P_f^{\text{st}}/P_f]$  как функция температуры. Сплошная, штриховая, пунктирная, штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками линии соответствуют  $\hbar\lambda_p = 0,99, 2,1, 3,3, 4,5$  и  $6,6$  МэВ. *б)* Рассчитанный эффективный диссипативный коэффициент как функция коэффициента трения. Сплошная, штриховая, пунктирная и штрихпунктирная линии соответствуют  $T = 2, 3, 4$  и  $5$  МэВ

выражение  $(\theta(t))$  — ступенчатая функция)

$$P(t) = 1 - [\theta(\tau - t) + \exp[-\Lambda(\infty)t]\theta(t - \tau)],$$

можно свести (153) к выражению следующего вида:

$$P_f(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p) = P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p) \exp\left[-\frac{\Gamma_n \tau}{\hbar}\right] = \frac{\hbar \Lambda(\infty)}{\hbar \Lambda(\infty) + \Gamma_n} \exp\left[-\frac{\Gamma_n \tau}{\hbar}\right]. \quad (154)$$

В ситуации  $\tau \geq \tau_n = \hbar/\Gamma_n$  значение вероятности деления  $P_f$  отличается от статистического значения вероятности деления  $P_f^{\text{st}}$  с учетом ядерной вязкости (модификация Крамерса). Точные численные результаты рис. 31 показывают, что условие  $\Gamma_n \tau/\hbar \geq 1$  реализуется при  $E_{\text{CN}}^* \geq 100$  МэВ для случаев слабой и сильной связи. Отклонение между  $P_f(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p)$  и  $P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p)$  растет с энергией возбуждения и трения:  $P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^* = 99,2 \text{ МэВ}, \lambda_p = 0,66 \text{ МэВ})/P_f(E_{\text{CN}}^* = 99,2 \text{ МэВ}, \lambda_p = 0,66 \text{ МэВ}) = 1,7$ ,  $P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^* = 620 \text{ МэВ}, \lambda_p = 0,66 \text{ МэВ})/P_f(E_{\text{CN}}^* = 620 \text{ МэВ}, \lambda_p = 0,66 \text{ МэВ}) = 11,7$  и  $P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^* = 99,2 \text{ МэВ}, \lambda_p = 6,6 \text{ МэВ})/P_f(E_{\text{CN}}^* = 99,2 \text{ МэВ}, \lambda_p = 6,6 \text{ МэВ}) = 1,8$ ,  $P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^* = 620 \text{ МэВ}, \lambda_p = 6,6 \text{ МэВ})/P_f(E_{\text{CN}}^* = 620 \text{ МэВ}, \lambda_p = 6,6 \text{ МэВ}) = 128,5$ . Зависимость вероятности деления от  $\lambda_p$  усиливается с ростом энергии возбуждения. Следует отметить, что при больших энергиях возбуждения переходная стадия может влиять на несколько шагов испарительного каскада.

Условие  $P_f(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p) = P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^*, \tilde{\lambda}_p)$  может быть удовлетворено с помощью эффективного коэффициента трения

$$\tilde{\lambda}_p = \frac{\tilde{\omega}_b^2}{[\tilde{\omega}_b^2 + \lambda_p^2/4]^{1/2} - \lambda_p/2} \frac{P_f^{\text{st}}(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p)}{P_f(E_{\text{CN}}^*, \lambda_p)}. \quad (155)$$

При получении формулы (155) мы полагаем, что  $\tilde{\lambda}_p \gg \tilde{\omega}_b$ ,  $\Gamma_f \gg \Gamma_n$  и  $a_f/a_n = 1$ , где  $a_f = a$  и  $a_n = a$ , являются параметрами плотности уровней в делительном и нейтронном каналах соответственно. Таким образом, при фиксированном  $a_f/a_n$  значение вероятности деления может воспроизводиться в рамках статистической модели (с модификацией Крамерса статистической модели Бора–Уиллера, но без учета переходной стадии) с эффективным коэффициентом трения ( $\tilde{\lambda}_p > \lambda_p$ ) (рис. 31). Заметим, что  $\tilde{\lambda}_p$ , как и переходное время, имеет минимальное значение при  $\lambda_p \approx \omega_m$ . Среднюю нейтронную множественность в течение переходного времени можно оценить с помощью простой формулы:  $\nu \approx \tau/\tau_n$ . Из рис. 30 видно, что средняя множественность предделительных нейтронов ( $\tau_f/\tau_n$ ) увеличивается с ростом энергии возбуждения составного ядра. Данный эффект согласуется с экспериментальными данными. Из сравнения средней множественности предделительных нейтронов и экспериментальных данных можно внести ограничение сверху на зна-

чение коэффициента трения:  $\hbar\lambda_p \leq 2$  МэВ. При  $\hbar\lambda_p = 1$  МэВ и рассмотренных энергиях возбуждения составного ядра доля «переходных» нейтронов составляет  $\tau_f/\tau_n \cdot 100\% \approx 6-20\%$ .

#### 4.2. Процессы захвата и слияния ядер. 4.2.1. Вероятность захвата.

Формализм приведенной матрицы плотности, который был описан выше, можно применить и для описания процесса захвата налетающего ядра ядром-мишенью при энергиях бомбардировки около кулоновского барьера. Потенциал взаимодействия двух ядер можно представить в виде

$$V(R, L, \Omega_P, \Omega_T) = V_{\text{nuc}}(R, \Omega_P, \Omega_T) + V_{\text{coul}}(R, \Omega_P, \Omega_T) + V_{\text{rot}}(R, L), \quad (156)$$

где  $V_{\text{nuc}}$ ,  $V_{\text{coul}}$  и  $V_{\text{rot}}$  — ядерный, кулоновский и центробежный потенциалы соответственно. Система двух взаимодействующих ядер характеризуется зарядовым и нейтронным числами  $Z$  и  $N$  легкого ядра и соответствующими числами тяжелого ядра, параметрами  $\beta_P$  и  $\beta_T$  квадрупольной деформации ядер и углами ориентации  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$  по отношению к оси столкновения. Параметры деформации берутся из работы [130]. Для ядерной части ядро-ядерного потенциала мы используем формализм двойной свертки [131]:

$$V_{\text{nuc}} = \int \rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{R} - \mathbf{r}_2)F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (157)$$

где  $F(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = C_0 \left[ F_{\text{in}} \frac{\rho_0(\mathbf{r}_1)}{\rho_{00}} + F_{\text{ex}} \left( 1 - \frac{\rho_0(\mathbf{r}_1)}{\rho_{00}} \right) \right] \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  — зависящее от плотности эффективное нуклон-нуклонное взаимодействие, а  $\rho_1(\mathbf{r}_1)$  и  $\rho_2(\mathbf{r}_2)$  — нуклонные плотности налетающего ядра и ядра-мишени и  $\rho_0(\mathbf{r}) = \rho_1(\mathbf{r}) + \rho_2(\mathbf{R} - \mathbf{r})$ . Расчеты произведены со следующими значениями параметров нуклон-нуклонной силы:  $C_0 = 300$  МэВ фм<sup>3</sup>,  $F_{\text{in}} = 0,09$ ,  $F_{\text{ex}} = -2,59$  и  $\rho_{00} = 0,17$  фм<sup>-3</sup>. Для вычисления кулоновского и центробежного потенциалов использованы следующие формулы:

$$V_{\text{coul}} = e^2 \int \frac{\rho_1^z(\mathbf{r}_1)\rho_2^z(\mathbf{R} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \quad (158)$$

и

$$V_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu R^2} \quad (159)$$

соответственно. Здесь  $\rho_1^z$  и  $\rho_2^z$  — зарядовые плотности ядер. Ядерные плотности задаются в виде параметризации Саксона–Вудса, где параметр радиуса ядра  $r_0 = 1,15$  фм и параметр диффузности  $a = 0,53-0,56$  фм в зависимости от массы ядра [131].

На рис. 32 приведены расчеты ядро-ядерного потенциала для системы  $^{50}\text{Ti} + ^{196}\text{Pt}$  при разных значениях углового момента  $L$ . С ростом центробежной части потенциала глубина кармана становится меньше, а положение минимума кармана становится ближе к барьеру.

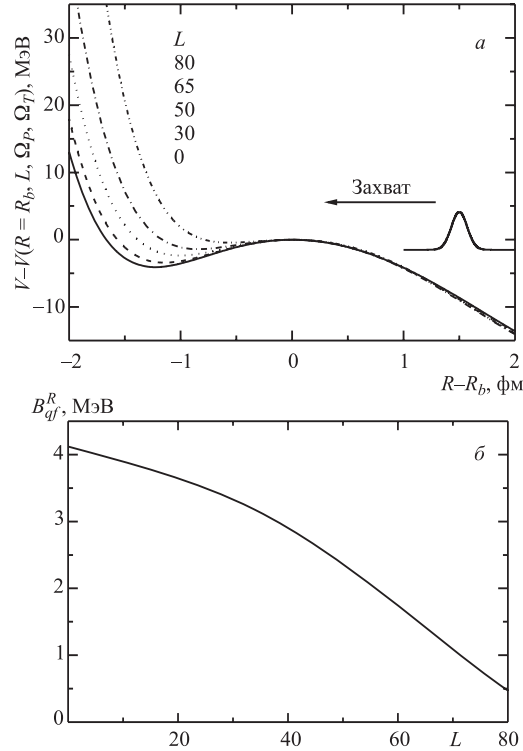


Рис. 32. *a)* Зависимость ядро-ядерного потенциала взаимодействия от относительного расстояния  $R - R_b$  между центрами масс сферических ядер в двойной ядерной системе  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  при различных значениях углового момента  $L$ . Энергия взаимодействия отсчитывается от кулоновского барьера при данном угловом моменте. *б)* Зависимость глубины потенциального кармана от  $L$

Как видно из рисунка, с увеличением  $L$  от 0 до 80 значения глубины и положения (по отношению к барьеру) потенциального кармана меняются от 4,12 до 0,46 МэВ и от 1,23 до 0,57 фм соответственно. При больших значениях углового момента потенциальный карман исчезает. Это означает, что угловые моменты  $L > L_{\text{max}} = 85$  не дают вклада в сечение захвата.

Захват можно представить как процесс заселения части начального гауссовского пакета, который находится справа от барьера, в левый потенциальный карман (рис. 32). Вероятность захвата определяется как отношение

$$P_0(t = \tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) = \frac{\int_0^{\infty} \rho(t = \tau, R) dR}{\int_0^{\infty} \rho(t = 0, R) dR}. \quad (160)$$

Так как движение в правом направлении инфинитно, то со временем устанавливается квазистационарный обратный поток из левого потенциального кармана и  $\tau$  в формуле (160) определяет время установления квазистационарного режима.

**4.2.2. Сечение захвата.** Для расчета сечения захвата будет использована вышеописанная микроскопическая модель взаимодействия двух тяжелых ядер на начальной стадии реакции. Когда взаимодействующие ядра в основном состоянии имеют статическую деформацию, низкие кулоновские барьеры ассоциируются со столкновениями типа «нос–нос», в то время как высокие кулоновские барьеры связаны с боковыми столкновениями. При учете статической деформации сталкивающихся ядер полная вероятность захвата  $P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, J)$  получается усреднением по всем возможным ориентациям  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$  осей симметрии деформированного ядра-снаряда и ядра-мишени относительно оси, проходящей через центры масс взаимодействующих ядер:

$$P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int P_0(\tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) d\Omega_P d\Omega_T, \quad (161)$$

где  $P_0(\tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T)$  определяет вероятность захвата при фиксированных ориентациях  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$  ядер, парциальной волне  $L$  и энергии бомбардировки  $E_{\text{cm}}$ . Парциальное сечение захвата (сечение образования двойной ядерной системы) определяется формулой

$$\sigma_c(E_{\text{cm}}, L) = \pi\lambda^2(2L+1)P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L), \quad (162)$$

где  $\lambda^2 = \hbar^2/(2\mu E_{\text{cm}})$  — приведенная длина волны де Бройля. Отсюда полное сечение захвата

$$\sigma_c(E_{\text{cm}}) = \sum_L \sigma_c(E_{\text{cm}}, L) = \pi\lambda^2 \sum_L (2L+1)P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L). \quad (163)$$

**4.2.3. Сечение образования испарительных остатков.** Реакции слияния успешно используются для синтеза тяжелых и сверхтяжелых элементов и получения ядер, удаленных от области стабильности [132, 133]. Выбор оптимальных экспериментальных условий для получения новых тяжелых и сверхтяжелых элементов чрезвычайно важен, поскольку величины сечений находятся на пределе возможностей регистрации. Новые эксперименты по синтезу сверхтяжелых элементов проводятся в ОИЯИ, GSI, GANIL, Беркли и RIKEN. Обсуждаются перспективы получения экзотических, тяжелых и сверхтяжелых ядер с помощью интенсивных пучков нейтронно-обогащенных ядер.

Модель двойной ядерной системы успешно описывает процесс слияния [28, 90–95]. Слияние ядер рассматривается как эволюция двойной ядерной системы. Составное ядро образуется посредством передачи нуклонов из

легкого ядра в тяжелое ядро. В этой модели рассматривается полное слияние и квазиделение (распад двойной ядерной системы) как диффузионные процессы по коллективным координатам массовой (зарядовой) асимметрии  $\eta = (A_{\text{tot}} - 2A)/A_{\text{tot}}$  ( $\eta_Z = (Z_{\text{tot}} - 2Z)/Z_{\text{tot}}$ ) и  $R$  соответственно. Здесь  $Z$  и  $A = Z + N$  — зарядовое и массовое числа легкого ядра в двойной ядерной системе и  $Z_{\text{tot}}$  и  $A_{\text{tot}}$  — зарядовое и массовое числа ядер в двойной ядерной системе. Модель двойной ядерной системы, где движение по  $\eta$  ( $\eta_Z$ ) главным образом ответственно за слияние, дает возможность обнаружить новые важные особенности полного слияния: 1) появление специфического внутреннего барьера слияния (точка Бусинаро–Галлоне при  $\eta = \eta_{\text{BG}}$ ) по координате массовой асимметрии; 2) конкуренция между полным слиянием и квазиделением в ходе эволюции двойной ядерной системы к составному ядру. Из-за этой конкуренции вероятность слияния сильно уменьшается с уменьшением массовой асимметрии начальной двойной ядерной системы в реакциях, ведущих к одному и тому же составному ядру, что согласуется с экспериментальными данными. Экспериментально наблюдаемое быстрое падение сечения холодного слияния ( $\text{HI}, 1n$ ) с увеличением заряда составного ядра объясняется также этой конкуренцией [28, 90–95]. Предсказательная сила модели заключается в возможности описать сечения холодного и горячего слияния в реакциях, для которых экспериментальные значения отличаются на несколько порядков величины.

Сечение слияния можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{fus}}(E_{\text{cm}}) &= \sum_L \sigma_{\text{fus}}(E_{\text{cm}}, L) = \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi} \sum_L (2L + 1) \int P_0(\tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) d\Omega_P d\Omega_T. \end{aligned}$$

Тогда сечение образования испарительного остатка

$$\sigma_{\text{ER}}^s(E_{\text{cm}}) = \sum_L \sigma_{\text{fus}}(E_{\text{cm}}, L) W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}, L) \quad (164)$$

определяется парциальным сечением  $\sigma_{\text{fus}}(E_{\text{cm}}, L)$  слияния ядер и вероятностью  $W_{\text{sur}}^s$  выживания образовавшегося возбужденного составного ядра [90, 92]. Изотопная зависимость сечения главным образом определяется вероятностью  $P_{\text{CN}}$  слияния ядер после захвата ядер с образованием двойной ядерной системы во входном канале и  $W_{\text{sur}}^s$ .  $P_{\text{CN}}$  зависит от конкуренции между полным слиянием и квазиделением [90, 92]. Эта конкуренция может сильно уменьшить величину  $\sigma_{\text{ER}}^s(E_{\text{cm}})$ . Испарительные остатки образуются с вероятностью  $W_{\text{sur}}^s$  из возбужденного составного ядра в ходе конкуренции между делением и эмиссией нейтронов, заряженных частиц,  $\gamma$ -квантов. Вероятность

выживания вычисляется в рамках статистической модели, которая учитывает затухание оболочечных эффектов при больших энергиях возбуждения ядра [91, 95, 129, 134–143].

В рассматриваемых реакциях составные ядра заселяются до  $L = 50$  в зависимости от  $E_{\text{cm}}$ , а большие парциальные волны в основном дают вклад в процесс деления [135]. Для актинидов вклад больших угловых моментов в выражении (164) ограничен из-за  $W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}, L)$ , которую можно аппроксимировать следующим образом:  $W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}, L) = W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}, L = 0) \exp[-L(L + 1)/(L_{\text{max}}(L_{\text{max}} + 1))]$ . Параметр  $L_{\text{max}}$  характеризует уменьшение барьера деления с угловым моментом. Для небольших  $L_{\text{max}}$  и  $L \leq L_{\text{max}}$   $P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) \approx P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}, L = 0, \Omega_P, \Omega_T)$ . Тогда сечение образования испарительного остатка (164) можно представить в следующем факторизованном виде [90–92, 94, 95]:

$$\sigma_{\text{ER}}^s(E_{\text{cm}}) \approx \sigma_{\text{fus}}^{\text{eff}}(E_{\text{cm}}) W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}) \approx \sigma_c(E_{\text{cm}}) P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}) W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}), \quad (165)$$

где  $W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}) = W_{\text{sur}}^s(E_{\text{cm}}, L = 0)$  — вероятность выживания при нулевом угловом моменте:  $\sigma_{\text{fus}}^{\text{eff}}(E_{\text{cm}}) = \chi^2 \frac{(L_{\text{max}} + 1)^2}{16\pi} \int P_0(\tau, E_{\text{cm}}, L = 0, \Omega_P, \Omega_T) \times P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}, L = 0, \Omega_P, \Omega_T) d\Omega_P d\Omega_T$  и  $\sigma_c(E_{\text{cm}}) = \pi \chi^2 (L_{\text{max}} + 1)^2 P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L = 0)$  и  $P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}) \approx P_{\text{CN}}(E_{\text{cm}}, L = 0, \Omega_P, \Omega_T)$ , где  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$  — средние углы ориентации ядер, которые зависят от  $E_{\text{cm}}$ . Для асимметричных реакций, рассмотренных здесь, величина  $P_{\text{CN}}$  слабо зависит от  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$ , так как взаимная ориентация ядер влияет не только на величину внутреннего барьера слияния, но и на энергию возбуждения двойной ядерной системы. Для расчета  $\sigma_{\text{ER}}^s$  необходимо вычислить вероятность выживания при  $L = 0$ , поскольку зависимость  $\sigma_{\text{ER}}^s$  от углового момента включена в эффективное сечение захвата  $\sigma_c(E_{\text{cm}})$ . Как и в работе [134], мы используем  $L_{\text{max}} = 15$ . В этом случае меньше половины парциальных волн, дающих вклад в сечение захвата, приводят с наибольшей вероятностью к испарительным остаткам.

**4.2.4. Вероятности полного слияния и выживания.** Образовавшаяся начальная двойная ядерная система обычно находится в локальном потенциальном минимуме по координате массовой (зарядовой) асимметрии и  $R$ . При расчете потенциальной энергии по  $\eta$  учитываются микроскопические эффекты. Вероятность слияния  $P_{\text{CN}}$  дает вероятность того, что двойная ядерная система перешла внутренний барьер слияния  $B_{\eta}^{\text{fus}}$  по  $\eta$  и образовалось составное ядро. Барьер  $B_{\text{qf}}^{\eta}$  препятствует убыванию  $\eta$  (симметризации двойной ядерной системы), а барьер  $B_{\text{qf}}^R = V(R_b, L = 0, \Omega_P, \Omega_T) - V(R_m, L = 0, \Omega_P, \Omega_T)$  — распаду по  $R$ . Поскольку величина  $B_{\text{qf}}^R$  слабо зависит от деформации и ориентации ядер, она может быть определена для сферических ядер. В этом случае  $R_m \approx R_P + R_T + 0,5$  фм и  $R_b \approx R_m + 1,5$  фм, где  $R_P$  и  $R_T$  — радиусы ядер. Двойная ядерная система может распадаться по



$R$  из начальной конфигурации или может эволюционировать к более симметричной конфигурации с последующим распадом по  $R$ . Для расчета  $P_{CN}$  в работе [95] было предположено следующее аналитическое выражение

$$P_{CN} \approx \frac{1,25 \exp(-(B_{\eta}^{\text{fus}} - B_{\text{qf}})/(kT_{\text{DNS}}))}{1 + 1,25 \exp(-(B_{\eta}^{\text{fus}} - B_{\text{qf}})/(kT_{\text{DNS}}))}, \quad (166)$$

где  $B_{\text{qf}} = \min(B_{\text{qf}}^R, B_{\text{qf}}^{\eta})$ .  $T_{\text{DNS}}$  — температура начальной двойной ядерной системы. Как следует из расчетов, (166) обеспечивает хорошую аппроксимацию для вероятности слияния, рассчитанной с помощью других более точных методов. Как уже отмечалось,  $B_{\eta}^{\text{fus}}$  и  $T_{\text{DNS}}$  зависят от взаимной ориентации ядер. Уменьшение  $B_{\eta}^{\text{fus}}$  за счет ориентации ядер сопровождается уменьшением  $T_{\text{DNS}}$  и  $B_{\text{qf}}$ , что приводит к относительно слабой зависимости  $P_{CN}$  от  $\Omega_P$  и  $\Omega_T$ . Поэтому расчет  $P_{CN}$  можно проводить при взаимной ориентации ядер, отвечающей минимуму потенциальной энергии двойной ядерной системы.

Так как  $\sigma_{\text{ER}}^s$  можно представить в виде (165) [90, 92], то расчет вероятности выживания производится только при  $L = 0$ . Вероятность выживания [129, 136, 140] при эмиссии  $x$  частиц в определенной последовательности  $s$  вычисляется следующим образом:

$$W_{\text{sur}}^s(E_{\text{CN}}^*) \approx P_s(E_{\text{CN}}^*) \prod_{i_s=1}^x \frac{\Gamma_{i_s}(E_{i_s}^*)}{\Gamma_t(E_{i_s}^*)}. \quad (167)$$

Здесь  $i_s$ ,  $P_s$  и  $E_{i_s}^*$  — индекс испарительного шага, вероятность реализации канала  $s$  при начальной энергии возбуждения  $E_{\text{CN}}^*$  составного ядра и среднее значение энергии возбуждения соответственно. Полная ширина распада для составного ядра  $\Gamma_t$  является суммой  $\Gamma_i$  парциальных ширин испарения частицы,  $\gamma$ -эмиссии и деления  $\Gamma_f$ . На первом шаге  $i_s = 1_s$  и  $E_{1_s}^* = E_{\text{CN}}^*$ . Детали расчетов  $P_s$  и  $\Gamma_{i_s}$ , а также значения параметров даны в работе [95]. Для расчета значения  $\Gamma_{i_s}$  в рамках модели ферми-газа использован модифицированный статистический код GROGIF [136]. Для всех ядер, рассмотренных здесь, мы использовали следующий параметр плотности уровней  $a = A/10$  и  $a_f = 1,02a_n = 1,02a$  для изотопов Th и  $a_f = a_n = a$  для изотопов Fm ( $a_f(a_n)$  — параметр плотности уровней при делении (эмиссии нейтронов)).

Барьер деления  $B_f$  имеет жидкокапельную часть  $B_f^{\text{LD}}$  и микроскопическую часть:

$$B_f(E_{\text{CN}}^*) = B_f^{\text{LD}} + B_f^M(E_{\text{CN}}^* = 0) \exp\left[-\frac{E_{\text{CN}}^*}{E_D}\right]. \quad (168)$$

Жидкокапельная часть вычисляется, как и в работе [144]. Значение  $B_f^M(E_{\text{CN}}^* = 0) = \delta W_{\text{sd}}^A - \delta W_{\text{gr}}^A$  — разница между оболочечной поправкой

$\delta W_{\text{gr}}^A$  ядра с массовым числом  $A$  в основном состоянии и оболочечной поправкой  $\delta W_{\text{sd}}^A$  в седловой точке. Предполагается, что  $\delta W_{\text{sd}}^A = 0$ .  $\delta W_{\text{sd}}^A$  взяты из массовых таблиц [145]. Из-за зависимости оболочечных эффектов от возбуждения ядра значение  $B_f$  зависит от  $E_{\text{CN}}^*$ . Для расчета фактора затухания  $E_D$  мы используем формулу  $E_D = 0,4A^{4/3}/a$ , предложенную в работе [134].

**4.2.5. Рассчитанные вероятности захвата.** Решая мастер-уравнение (133), находим диагональные элементы  $\rho(t, R)$  матрицы плотности в координатном представлении. Во всех расчетах в качестве начального состояния используется гауссовский пакет со средней координатой  $\langle R(0) \rangle = 1,5$  фм и дисперсиями  $\sigma_{PR}(0) = 0$ ,  $\sigma_{RR}(0) = 0,25$  фм<sup>2</sup> и  $\sigma_{PP}(0) = 1,0 \hbar^2$  фм<sup>-2</sup>. Начальный средний импульс  $\langle P(0) \rangle$  зависит от начальной энергии  $E_{\text{cm}}$ . Диффузионные коэффициенты мастер-уравнения (130) рассчитаны по формулам (136) и (137) при  $T = 1,2$  МэВ. Следует отметить слабую зависимость вероятности захвата от температуры. Так как ядро-ядерное взаимодействие изменяется с угловым моментом, то диффузионные коэффициенты являются также функциями  $L$ . В области потенциального кармана  $D_{PP}$  и  $D_{PR}$  достаточно слабо возрастают с увеличением углового момента. Координатная зависимость диффузионных коэффициентов около барьера достаточно слабая. Предположим сначала ядра сферическими, чтобы показать роль квантово-статистических эффектов.

На рис. 33 приведен расчет зависимости от времени вероятности захвата. В формуле для начальной кинетической энергии  $E_{\text{kin}}(0) = (\langle P(0) \rangle^2 + \sigma_{PP}(0))/(2\mu)$  учтена энергия, связанная с квантовыми флуктуациями. Полная энергия коллективной подсистемы отсчитывается от кулоновского барьера, т. е.  $\Delta E(0) = E_{\text{cm}} - V(R = R_b, L, \Omega_P, \Omega_T)$ . Как видно из рисунка, время  $\tau \approx 2,2 \hbar/\text{МэВ}$  установления квазистационарной скорости потока слабо зависит от трения, углового момента и начального значения полной энергии в рассматриваемом диапазоне параметров. При надбарьерных энергиях и малых трениях ( $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ) наблюдается небольшой всплеск потока до установления квазистационарного режима. При больших трениях ( $\hbar\lambda_P = 2$  МэВ) мы не наблюдаем этого всплеска. Это объясняется тем, что при малых трениях диссипация энергии коллективной подсистемы менее интенсивная и часть волнового пакета, зашедшая за кулоновский барьер, отражается от задней стенки потенциала и с большей вероятностью проходит обратно над барьером. Отметим, что с увеличением начального значения энергии бомбардировки амплитуда всплеска становится больше.

На рис. 34 приведена зависимость вероятности захвата от начальной энергии бомбардировки, отсчитываемой от кулоновского барьера. Вначале с ростом энергии вероятность захвата растет, но дальнейший рост приводит к уменьшению вероятности, так как при больших энергиях над барьером движение пакета становится почти свободным и нечувствительным к присутствию

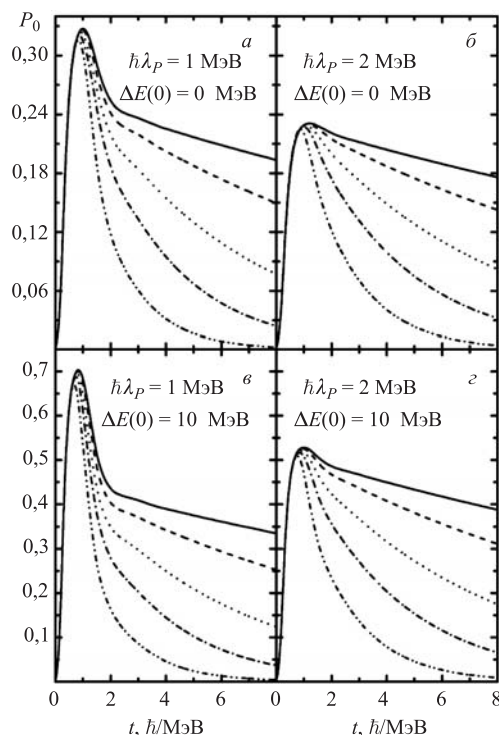


Рис. 33. Зависимость вероятности  $P_0$  от времени при  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ (*a, в*) и 2 МэВ (*б, г*) для системы  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  в предположении сферических ядер. Рис. *a, б* (рис. *в, г*) показывают расчеты при энергии бомбардировки  $\Delta E(0) = 0$  МэВ (10 МэВ), отсчитываемой от кулоновского барьера при данном угловом моменте  $L$ . Сплошная, штриховая, пунктирная, штрихпунктирная и штрихпунктирная с двумя точками линии соответствуют угловым моментам 0, 30, 50, 65 и 80 соответственно

потенциального кармана. При трении  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ (2 МэВ) вероятность захвата оказывается максимальной при значении энергии  $\Delta E(0) \approx 16$  МэВ ( $\approx 30$  МэВ) для угловых моментов  $L = 0$  и 50. При  $\hbar\lambda_P = 3$  МэВ максимум  $P_0$  находится при  $\Delta E(0) > 50$  МэВ. Надо заметить, что с ростом энергии отношение вероятностей  $P_0(L = 0)/P_0(L = 50)$  при  $L = 0$  и 50 увеличивается, так как диссипация энергии при  $L = 0$  больше, чем при  $L = 50$ , в начальный момент времени до установления квазистационарного режима. При  $L = 0$  длительность нахождения пакета в потенциальном кармане больше, чем при  $L = 50$ . Поэтому вероятность захвата при малых угловых моментах больше.

На рис. 35 показана зависимость вероятности захвата от трения для значений энергии бомбардировки  $\Delta E(0) = 0$  и 10 МэВ и углового момента

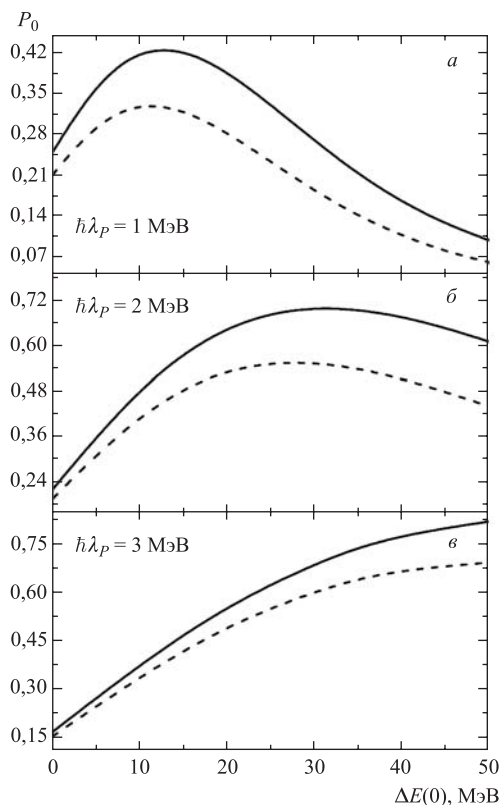


Рис. 34. Зависимость вероятности захвата от  $\Delta E(0)$  при указанных коэффициентах трения  $L = 0$  (сплошная линия) и  $L = 50$  (штриховая линия) для системы  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$

$L = 0$  и  $50$ . Как видно из рисунка, с ростом трения вероятность захвата сначала растет, однако дальнейший рост трения приводит к уменьшению  $P_0$ . Для энергии  $\Delta E(0) = 0$  МэВ (10 МэВ) максимальное значение  $P_0$  принимает при трении  $\hbar\lambda_P \approx 1,2$  МэВ (1,6 МэВ). Такое поведение связано с тем, что на процесс прохождения пакета через потенциальный барьер влияют два фактора: трение, которое препятствует процессу, и диффузия, которая, наоборот, помогает. С ростом трения растет и диффузия, чем и объясняется рост вероятности захвата при малых трениях. Однако дальнейший рост трения приводит к уменьшению вероятности захвата. Следует отметить, что диффузия является следствием квантово-статистических эффектов и отсутствует в чисто классическом рассмотрении процесса захвата. Из-за диффузии зависимости вероятности захвата от энергии, углового момента и трения становятся более плавными.

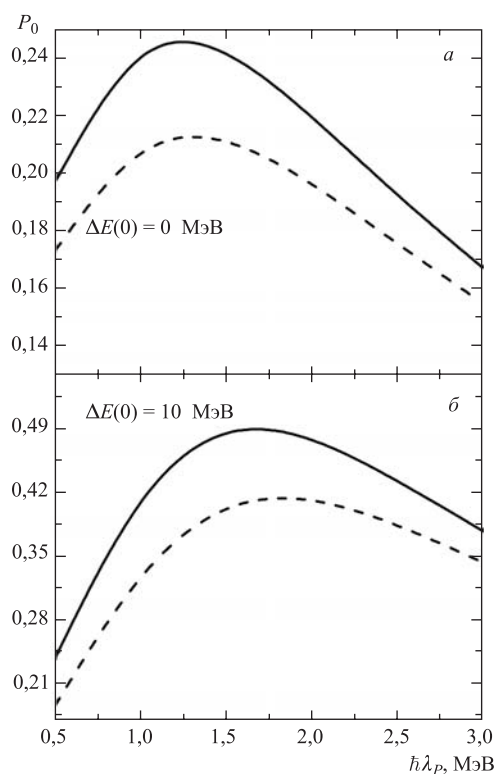


Рис. 35. Зависимость вероятности захвата от значения коэффициента трения при указанных значениях энергии налетающего ядра  $\Delta E(0)$ ,  $L = 0$  (сплошная линия) и  $L = 50$  (штриховая линия) для системы  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$

На рис. 36 приведена зависимость вероятности захвата от углового момента для различных начальных значений полной энергии  $\Delta E(0) = 0, 10$  и  $30$  МэВ и для двух значений коэффициента трения  $\hbar\lambda_P = 1$  и  $2$  МэВ. С ростом углового момента вероятность захвата уменьшается, так как глубина потенциального кармана становится меньше. Однако скорость падения вероятности с ростом  $L$  зависит от энергии столкновения. Так как с увеличением значения начальной кинетической энергии коллективная энергия относительного движения ядер диссипирует интенсивнее, то уменьшение вероятности захвата с ростом  $L$  сильнее при больших значениях  $\Delta E(0) > 0$ . При  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ и  $L > 30$  вероятность захвата оказывается больше при  $\Delta E(0) = 0$  МэВ, чем при  $\Delta E(0) = 30$  МэВ. При трении  $\hbar\lambda_P = 2$  МэВ в рассмотренном диапазоне  $L$  вероятность захвата увеличивается с ростом энергии столкновения. С учетом статистических флуктуаций в нашем рассмотрении

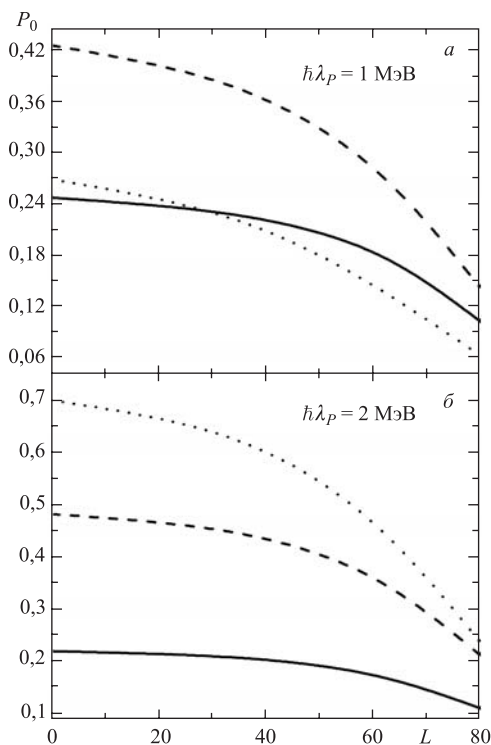


Рис. 36. Зависимость вероятности захвата от углового момента при энергиях  $\Delta E(0) = 0$  МэВ (сплошная линия), 10 МэВ (штриховая линия) и 30 МэВ (пунктирная линия) для системы  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$ . Энергии налетающего ядра  $\Delta E(0)$  отсчитаны от кулоновского барьера при соответствующем угловом моменте. Расчеты проведены для коэффициентов трения  $\hbar\lambda_P = 1$  МэВ (а) и  $\hbar\lambda_P = 2$  МэВ (б)

эффект  $L$ -окна, обнаруженный в классических и квазиклассических моделях, отсутствует.

До сих пор мы рассмотрели зависимости вероятности захвата от  $\lambda_P$ ,  $E_{\text{cm}}$  и  $L$  для случая сферических ядер. Далее мы рассмотрим случай, когда одно из сталкивающихся ядер сферическое, а другое деформированное. Тогда из выражения (161)

$$P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L) = \frac{1}{2} \int_0^\pi P_0(\tau, E_{\text{cm}}, L, \Omega_P, \Omega_T) \sin \theta d\theta,$$

где  $\Omega_T$  или  $\Omega_P$  зависят от  $\theta$ .

На рис. 37 показаны результаты расчетов вероятности захвата  $P_{\text{cap}}(E_{\text{cm}}, L = 0)$ , усредненной по всем ориентациям, для реакции  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$  при

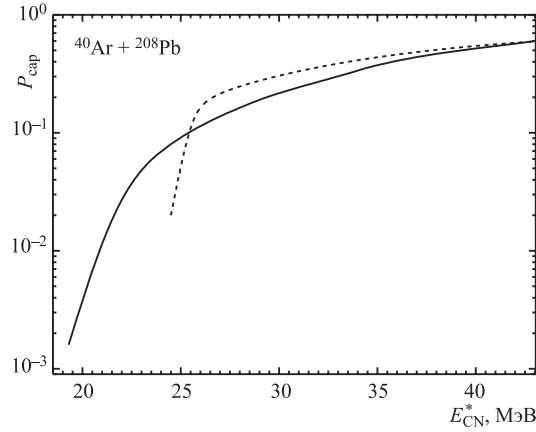


Рис. 37. Рассчитанная вероятность захвата, усредненная по всем ориентациям, как функция энергии возбуждения составного ядра в реакции  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$  при  $\lambda_P = 2$  МэВ (сплошная линия). Штриховой линией показан расчет вероятности захвата для сферических ядер

$\hbar\lambda_P = 2$  МэВ. Видно, что вероятность захвата растет с энергией бомбардировки. В столкновениях с  $E_{\text{cm}}$  меньше кулоновского барьера, рассчитанного для сферических ядер и соответствующего  $E_{\text{CN}}^* \approx 27$  МэВ, образование двойной ядерной системы сильно затруднено.

#### 4.2.6. Рассчитанные сечения образования испарительных остатков.

При одинаковых значениях  $E_{\text{cm}}$  вероятность слияния примерно в 5–10 раз больше в реакции  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ , чем в реакции  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  (рис. 38). Это в основном связано с большим значением  $B_{\text{fus}}^\eta$  и меньшим значением  $B_{\text{qf}}$  в

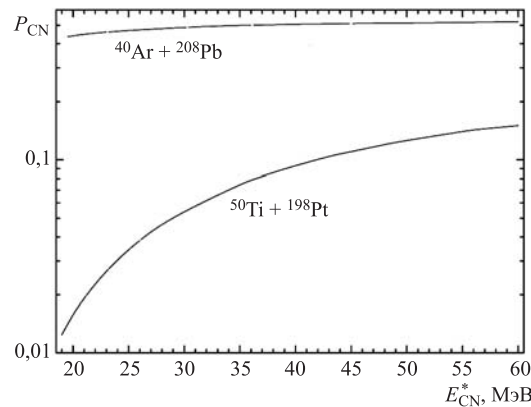


Рис. 38. Вероятности слияния как функции энергии возбуждения составного ядра в реакциях  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  и  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$

случае реакции  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$ . В реакции с  $^{50}\text{Ti}$  массовая асимметрия во входном канале меньше, чем в реакции с  $^{40}\text{Ar}$ , что приводит к меньшей вероятности слияния. В асимметричных реакциях  $^{16}\text{O} + ^{233,238}\text{U}$  вероятность слияния практически равна 1.

Для проверки предложенных методов расчета вероятности захвата и сечения испарительного остатка рассмотрим реакции полного слияния  $^{16}\text{O} + ^{233,238}\text{U}$ ,  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{48}\text{Ca} + ^{172}\text{Yb}$ ,  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  (рис. 39–43), образующие нейтронно-дефицитные изотопы Th и Fm в  $xn$ -испарительных каналах. Ха-

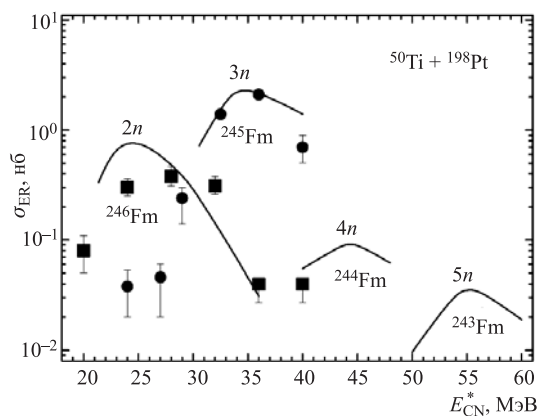


Рис. 39. Рассчитанные сечения функций возбуждения и испарительных остатков для указанных  $xn$ -испарительных каналов в реакции  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$ . Экспериментальные данные взяты из работы [146]

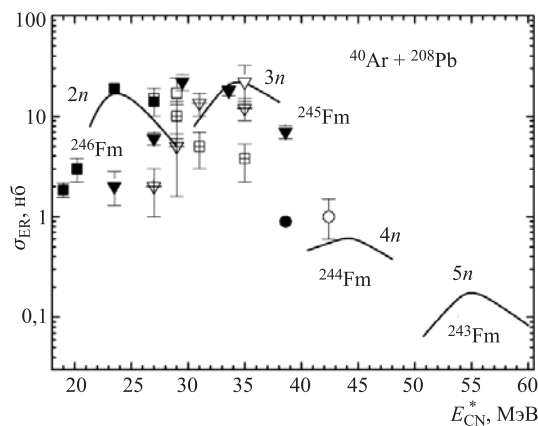


Рис. 40. То же, что и на рис. 39, но для реакции  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ . Экспериментальные данные, обозначенные темными символами, светлыми символами и символами с крестом, взяты из работ [151], [150] и [152] соответственно



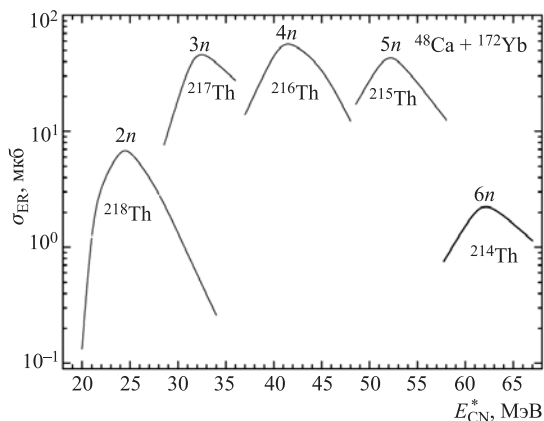


Рис. 41. То же, что и на рис. 39, но для реакции  $^{48}\text{Ca} + ^{172}\text{Yb}$

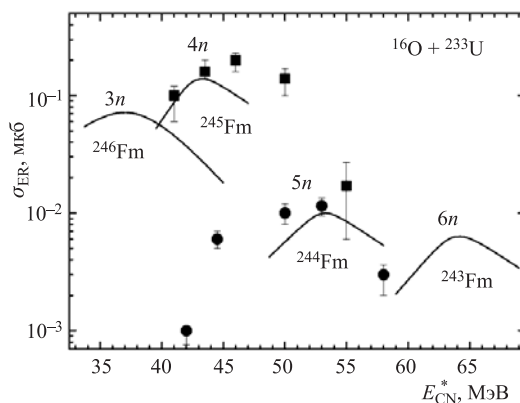


Рис. 42. То же, что и на рис. 39, но для реакции  $^{16}\text{O} + ^{233}\text{U}$ . Экспериментальные данные взяты из работы [147]

характеристики распада изотопов Fm, получаемых в реакциях  $^{16}\text{O} + ^{233,238}\text{U}$ ,  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$  и  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$ , очень близки к характеристикам сверхтяжелых ядер. Согласие теоретических результатов и экспериментальных данных [146, 147, 149–154], представленных на рис. 39, 40, 42 и 43, достаточно хорошее.

Имеющиеся экспериментальные сечения [135] (в максимумах  $xn$ -каналов)  $\sigma_{\text{ER}}^{3n} = (59,7 \pm 7,2)$  мкб и  $\sigma_{\text{ER}}^{4n} = (86,8 \pm 6,1)$  мкб для реакции  $^{48}\text{Ca} + ^{172}\text{Yb}$  сравнимы с расчетными сечениями на рис. 41. Теория переоценивает (недооценивает) примерно на фактор 3 сечение  $4n$  ( $6n$ )-канала в реакции  $^{16}\text{O} + ^{238}\text{U}$ . Надо заметить, что в экспериментах не все испарительные каналы можно

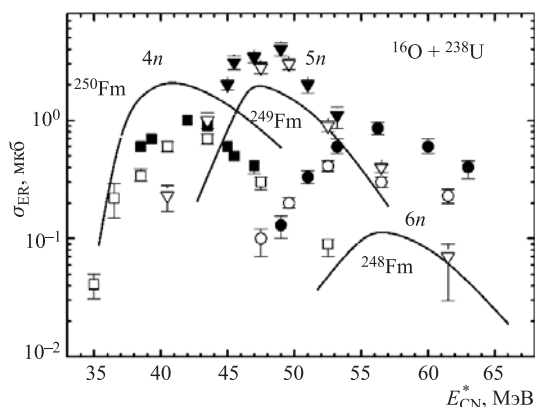


Рис. 43. То же, что и на рис. 39, но для реакции  $^{16}\text{O} + ^{238}\text{U}$ . Экспериментальные данные, обозначенные темными и светлыми символами, взяты из работ [153] и [154] соответственно

хорошо отделить друг от друга, и поэтому экспериментальные ошибки достаточно велики.

Минимальные значения энергий возбуждения  $E_{\text{CN}}^{*\text{min}}$  (энергий бомбардировки  $E_{\text{cm}}^{\text{min}}$ ), при которых захват ядер со всеми ориентациями становится возможным, следующие: 41,8 МэВ (83,3 МэВ), 43,7 МэВ (82,0 МэВ), 31,0 МэВ (159,7 МэВ), 38,1 МэВ (156,3 МэВ) и 31,4 МэВ (184,3 МэВ) в реакциях  $^{16}\text{O} + ^{233}\text{U}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{238}\text{U}$ ,  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{48}\text{Ca} + ^{172}\text{Yb}$  и  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  соответственно. При  $E_{\text{cm}} < E_{\text{cm}}^{\text{min}}$   $3n$ -,  $4n$ -,  $2n$ -,  $3n$ - и  $2n$ -каналы реализуются в реакциях  $^{16}\text{O} + ^{233}\text{U}$ ,  $^{16}\text{O} + ^{238}\text{U}$ ,  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$ ,  $^{48}\text{Ca} + ^{172}\text{Yb}$  и  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  соответственно.

Если  $xn$ -канал реализуется при  $E_{\text{cm}} < E_{\text{cm}}^{\text{min}}$ , то  $\sigma_{\text{ER}}^{xn}(E_{\text{cm}}) \leq \sigma_{\text{ER}}^{(x+1)n}(E_{\text{cm}})$  из-за сильного уменьшения сечения захвата и вероятности полного слияния, хотя  $xn$ -канал выигрывает по выживаемости составного ядра по сравнению с каналом  $(x+1)n$ . Т. е. этот выигрыш может компенсироваться потерями в процессах захвата и полного слияния. Например, поскольку сечения захвата как функции  $E_{\text{CN}}^*$  для реакций  $^{40}\text{Ar} + ^{208}\text{Pb}$  и  $^{50}\text{Ti} + ^{198}\text{Pt}$  практически одинаковы, так как  $E_{\text{CN}}^{*\text{min}} = E_{\text{cm}}^{\text{min}} + Q$  и  $V(R_b, L, \Omega_P, \Omega_T)$  для них примерно совпадают, то различие отношений  $\sigma_{\text{ER}}^{2n}(E_{\text{cm}})/\sigma_{\text{ER}}^{3n}(E_{\text{cm}})$  в основном определяется сильным различием  $P_{\text{CN}}$  при меньших энергиях в этих реакциях (рис. 38).

## 5. ВЫВОДЫ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках микроскопического подхода показано получение системы нелинейных уравнений Ланжевена в пределе общей связи между коллективной и внутренней (бозонной или фермионной) подсистемами. Эти уравнения движе-

ния для коллективной подсистемы удовлетворяют квантовым флуктуационно-диссипационным соотношениям и соотношению неопределенности. Исходя из немарковских уравнений Ланжевена разработана новая методика получения транспортных коэффициентов, зависящих явно от времени. Для немарковской динамики получены наборы диффузионных коэффициентов, которые сохраняют состояние системы чистым. При специальном выборе констант связи найдены наборы диффузионных коэффициентов, обеспечивающие сохранение когерентности состояния. Предсказанный степенной закон распада корреляционных функций осциллятора в пределе низких температур и больших времен может быть предметом экспериментального изучения. Полученные аналитические формулы могут быть использованы для описания флуктуационно-диссипационной динамики ядерных процессов со сложными потенциалами. Развитый подход полезен при описании времен жизни метастабильных систем, переходных процессов и декогерентности в квантовых системах.

Развитый микроскопический подход использован для рассмотрения влияния квантовых и тепловых флуктуаций на эволюцию двойной ядерной системы по коллективным координатам массовой асимметрии и относительного расстояния. Расчеты показывают, что с ростом затухания и уменьшением температуры в системе растут квантовые эффекты. Квантовые статистические эффекты увеличивают вероятность прохождения через кулоновский барьер, т. е. вероятность формирования двойной ядерной конфигурации. Для энергий достаточно ниже кулоновского барьера наблюдается рост проницаемости с диссипацией. Это объясняется тем фактом, что при больших трениях скорость диссипации энергии коллективной подсистемы меньше из-за малости кинетической энергии и большого значения коэффициента диффузии по импульсу. Полученные результаты подтверждают, что квантовая природа перехода через барьер должна быть учтена при расчете сечения захвата в ядроядерном столкновении. Показано, что в пределе сильного затухания проницаемость потенциального барьера по координате массовой асимметрии (относительного расстояния), рассчитанная с помощью зависящих от времени микроскопических немарковских коэффициентов диффузии для перевернутого осциллятора, оказывается больше в 7–8 (3–4) раз, чем проницаемость, рассчитанная с помощью постоянного феноменологического марковского коэффициента диффузии по импульсу.

Решением мастер-уравнения для приведенной матрицы плотности для квантовой нелинейной коллективной подсистемы обнаружено сильное влияние диффузионных коэффициентов, зависящих от координаты, на скорость распада при низких температурах (выше температуры перехода от термического режима к туннельному режиму). Полученные результаты расчетов скорости распада при низких температурах показывают, что координатная зависимость диффузионных коэффициентов должна быть учтена в случае

сложных потенциалов. Влияние координатной зависимости диффузионных коэффициентов на скорость распада намного сильнее, чем влияние квантовых эффектов из-за негармоничности потенциала. Данный эффект может быть важным в процессах спонтанного и вынужденного деления. При низких температурах квазистационарная вероятность распада может даже расти с увеличением трения, особенно с диффузионными коэффициентами, зависящими от координаты. Это объясняется усилением роли диффузии при низких температурах по сравнению с ролью трения в процессе распада.

С помощью численного решения квантового мастер-уравнения для редуцированной матрицы плотности показано влияние квантовых статистических эффектов на зависимость процесса деления от времени. Установлено, что асимптотические скорости деления в квантовом и классическом случаях практически совпадают. В квантовом случае переходные времена больше примерно в два раза, чем в классическом случае, основанном на уравнении Ланжевена. Значение переходного времени определяет вес нейтронного канала распада на ранней стадии эволюции. Когда при больших энергиях возбуждения ( $E_{CN}^* \geq 100$  МэВ) среднее время эмиссии нейтрона становится сопоставимым или меньше, чем переходное время, отклонение вероятности деления от стандартного значения статистической модели становится существенно большим на первых шагах каскада девозбуждения. Т. е. в сильно возбужденных ядрах деление затруднено из-за переходных эффектов. Это можно эффективно описать в рамках статистической модели с модификацией Крамерса (но без переходных эффектов), используя большие значения коэффициента трения. Показано, что аналитическая формула Крамерса с термодинамической температурой или с эффективной квантовой температурой достаточно хорошо работает как в режиме слабой, так и сильной связи.

Формализм приведенной матрицы плотности применен для описания процесса захвата налетающего ядра ядром-мишенью. Найдены оптимальные значения энергии налетающего ядра, приводящие к максимальным значениям вероятности захвата при разных значениях коэффициента трения и углового момента. Не обнаружен эффект  $L$ -окна, предсказанный в классических моделях без учета статистических флуктуаций. Изучена роль статической деформации ядра-мишени или налетающего ядра в процессе захвата при  $E_{cm}$  ниже эффективного кулоновского барьера для сферических ядер. С учетом вероятности захвата получено достаточно хорошее описание сечений испарительных остатков в реакциях слияния при подбарьерных энергиях.

При анализе экспериментальных данных по делению сильно возбужденных ядер следует учитывать увеличение переходного времени и множественности предразрывных нейтронов за счет квантовых эффектов, а не за счет увеличения ядерной вязкости. Изучая среднюю множественность предразрывных нейтронов, можно найти ограничения на абсолютную величину коэффициента трения. Переходные эффекты можно исследовать в реакциях квази-

деления с радиоактивными пучками, когда образуется и распадается двойная ядерная система, состоящая из ядра с большим избытком нейтронов. Вылет нейтрона из двойной ядерной системы может существенно увеличить время жизни последней и уменьшить вероятность слияния ядер. При малых энергиях возбуждения скорость распада метастабильных состояний чувствительна к координатной зависимости диффузионных коэффициентов. Определяя экспериментально зависимость скорости распада от температуры, можно получить опосредованно представление о потенциальном барьере. Сравнение с экспериментальными данными по сечению захвата при энергиях столкновения двух ядер выше кулоновского барьера позволит установить наиболее реалистическое значение коэффициента трения. Изучение зависимости сечения захвата от углового момента позволит подтвердить отсутствие  $L$ -окна.

Авторы благодарны Р. В. Джолосу, Ю. В. Пальчикову, В. Д. Тонееву и В. Шайду за полезные обсуждения и ценные замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и DFG (Бонн).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н. Избр. тр.: В 3 т. Киев: Наук. думка, 1971.
2. Белавин А. А. и др. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 264.
3. Caldeira A. O., Leggett A. J. // Physica A. 1983. V. 121. P. 587; Ann. Phys. 1983. V. 149. P. 374; Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. P. 211; 1982. V. 48. P. 1571.
4. van Kampen N. G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North-Holland, 1981.
5. Gardiner C. W. Quantum Noise. Berlin: Springer, 1991.
6. Carmichael H. J. An Open System Approach to Quantum Optics. Berlin: Springer, 1993.
7. Klimontovich Yu. L. Statistical Theory of Open Systems. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1995.
8. Zubarev D., Morozov V., Röpke G. Statistical Mechanics of Nonequilibrium Processes. Berlin: Akad. Verlag, 1997.
9. Weiss U. Quantum Dissipative Systems. Singapore: World Sci., 1999.
10. Ford G. W., Lewis J. T., O'Connell R. F. // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 4419.
11. Lindenberg K., West B. // Phys. Rev. A. 1984. V. 30. P. 568.
12. Dodonov V. V., Man'ko O. V., Man'ko V. I. // J. of Russian Laser Research. 1995. V. 16. P. 1;  
Dodonov V. V., Man'ko V. I. // Proc. Lebedev Phys. Inst. of Sci. V. 167. N. Y.: Nova Sci.; Commack, 1987.
13. Grabert H., Schramm P., Ingold G.-L. // Phys. Rep. 1988. V. 168. P. 115;  
Talkner P. // Ann. Phys. 1986. V. 167. P. 390.

14. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* // Phys. Lett. A. 1998. V. 244. P. 482; 1999. V. 260. P. 39;  
*Palchikov Yu. V. et al.* // J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 4265; Physica A. 2002. V. 316. P. 297.
15. *Volkov V. V.* // Phys. Rep. 1978. V. 44. P. 93.
16. *Bass R.* Nuclear Reactions with Heavy Ions. Berlin: Springer-Verlag, 1980. 203 p.
17. *Nörenberg W.* Heavy Ion Collisions / Ed. R. Bock. Amsterdam: Elsevier, 1980. V. 2. P. 1.
18. *Джолос Р. В., Шмидт Р.* // ЭЧАЯ. 1981. Т. 12. С. 324;  
*Schmidt R., Toneev V. D., Wolschin G.* // Nucl. Phys. A. 1978. V. 311. P. 247;  
*Шмидт Р., Тонеев В. Д.* // ЯФ. 1979. Т. 30. С. 112.
19. *Schröder W. U., Huizenga J. R.* Treatise on Heavy-Ion Science / Ed. Bromley D. A. N. Y.: Plenum Press, 1984. V. 2. P. 115.
20. *Gross D. H. E., Kalinowski H.* // Phys. Rep. 1978. V. 45. P. 175.
21. *Freiesleben H., Kratz J. V.* // Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 1.
22. *Fröbrich P.* // Ibid. V. 116. P. 337.
23. *Maruhn J. A., Greiner W., Scheid W.* Heavy Ion Collisions / Ed. R. Bock. Amsterdam: Elsevier, 1980. V. 2. P. 397.
24. *Weidenmüller H. A.* // Progr. Part. Nucl. Phys. / Ed. Wilkinson D. 1980. V. 3. P. 49.
25. *Антоненко Н. В. и др.* // ЭЧАЯ. 1994. Т. 25. С. 1379.
26. *Адеев Г. Д. и др.* // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 1229;  
*Адеев Г. Д.* // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 1572.
27. *Гончар И. И.* // ЭЧАЯ. 1995. Т. 26. С. 932.
28. *Волков В. В.* // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35. С. 797.
29. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* // Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 034601.
30. *Adamian G. G. et al.* // Phys. Rev. C. 1997. V. 56. P. 373.
31. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W.* // Nucl. Phys. A. 1999. V. 645. P. 376.
32. *Адеев Г. Д. и др.* // ЭЧАЯ. 2005. Т. 36. С. 731.
33. *Волков В. В.* Ядерные реакции глубоконеупругих передач. М.: Энергоиздат, 1982.
34. *Иткис М. Г. и др.* // ЭЧАЯ. 1988. Т. 19. С. 701;  
*Иткис М. Г., Русанов А. Я.* // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 389.
35. *Ньютон Дж. О.* // ЭЧАЯ. 1990. Т. 21. С. 821.
36. *Беляев С. Т., Зелевинский В. Г.* // УФН. 1985. Т. 147. С. 210.
37. *Grange P., Pauli H. C., Weidenmüller H. A.* // Phys. Lett. B. 1979. V. 88. P. 9.
38. *Grange P., Pauli H. C., Weidenmüller H. A.* // Z. Phys. A. 1980. V. 296. P. 107.
39. *Адеев Г. Д., Гончар И. И.* // ЯФ. 1983. Т. 37. С. 1113.
40. *Адеев Г. Д., Гончар И. И.* // ЯФ. 1984. Т. 40. С. 869.

41. *Adeev G. D. et al.* // ЯФ. 1986. Т. 43. С. 1137.
42. *Wegmann G.* // Phys. Lett. B. 1974. V. 50. P. 327.
43. *Griffin J. J., Dworzecka M.* // Nucl. Phys. A. 1986. V. 455. P. 61.
44. *Nix J. R., Sierk A. J.* // Intern. School-Seminar on Heavy Ion Physics, Dubna, 1980. Dubna, 1987. P. 453.
45. *Pomorski K., Hofmann H.* // Phys. Lett. B. 1991. V. 263. P. 164.
46. *Bush B. W., Bertsch G. F., Brown B. A.* // Phys. Rev. C. 1992. V. 45. P. 1709.
47. *Davies K. T. R., Sierk A. J., Nix J. R.* // Phys. Rev. C. 1976. V. 13. P. 2385.
48. *Lazarev Yu. A.* // At. Ener. Rev. 1977. V. 15. P. 75.
49. *Лукьянов С. М. и др.* // Междунар. школа-семинар по физике тяжелых ионов, Дубна, 1989. Дубна, 1990. С. 225.
50. *Жданов С. В. и др.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 3169; 1993. Т. 56. С. 55.
51. *Scheuter F. et al.* // Phys. Lett. B. 1984. V. 149. P. 303.
52. *Tillack G. R.* // Phys. Lett. B. 1992. V. 278. P. 403;  
*Tillack G. R. et al.* // Ibid. V. 296. P. 296.
53. *Nix J. R.* // Nucl. Phys. A. 1969. V. 130. P. 241.
54. *Wada T., Abe Y., Carjan N.* // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3538.
55. *Косенко Г. И. и др.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 920.
56. *Schultheis H., Schultheis R.* // Phys. Rev. C. 1978. V. 18. P. 1317; 1979. V. 20. P. 403.
57. *Grange P., Weidenmüller H. A.* // Phys. Lett. B. 1980. V. 96. P. 26;  
*Grange P., Qing Li-Jang, Weidenmüller H. A.* // Phys. Rev. C. 1983. V. 27. P. 2063.
58. *Hassani S., Grange P.* // Phys. Lett. B. 1984. V. 137. P. 281; Z. Phys. A. 1986. V. 325. P. 95.
59. *Bhatt K. H., Grange P., Hiller B.* // Phys. Rev. C. 1986. V. 33. P. 954.
60. *Grange P. et al.* // Ibid. V. 34. P. 209.
61. *Lanza E. G., Weidenmüller H. A.* // Z. Phys. A. 1986. V. 323. P. 157.
62. *Cha D., Bertsch G. F.* // Phys. Rev. C. 1992. V. 46. P. 306.
63. *Zank W. P. et al.* // Phys. Rev. C. 1986. V. 33. P. 519.
64. *Hinde D. J. et al.* // Nucl. Phys. A. 1986. V. 452. P. 550; Phys. Rev. C. 1988. V. 37. P. 2923.
65. *Gavron A. et al.* // Phys. Rev. C. 1987. V. 35. P. 579.
66. *Karpov A. V. et al.* // Phys. Rev. C. 2001. V. 63. P. 054610;  
*Nadtochy P. N., Adeev G. D., Karpov A. V.* // Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 064615;  
*Vanin D. V., Kosenko G. I., Adeev G. D.* // Phys. Rev. C. 1999. V. 59. P. 2114.
67. *Ivanyuk F. A., Hofmann H.* // Nucl. Phys. A. 1999. V. 657. P. 19.
68. *Hofmann H.* // Phys. Rep. 1997. V. 284. P. 137;  
*Hofmann H., Kiderlen D.* // Intern. J. Mod. Phys. E. 1998. V. 7. P. 243.

69. *Nörenberg W.* // Phys. Lett. B. 1974. V. 53. P. 289.
70. *Agassi D., Ko C. M., Weidenmüller H. A.* // Ann. Phys. 1979. V. 117. P. 140.
71. *Исаев П. Н.* // ЯФ. 1984. Т. 41. С. 664.
72. *Moretto L. G., Sventek J. S.* // Phys. Lett. B. 1975. V. 58. P. 26.
73. *Бунаков В. Е.* // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11. С. 1285.
74. *Hofmann H., Siemens P. J.* // Nucl. Phys. A. 1976. V. 257. P. 165; 1977. V. 275. P. 464.
75. *Коломиец В. М., Цехмистренко И. Ю.* // ЯФ. 1987. Т. 45. С. 1279.
76. *Коломиец В. М.* Приближение локальной плотности в атомной и ядерной физике. Киев: Наук. думка, 1990.
77. *Ayik S., Schürmann B., Nörenberg W.* // Z. Phys. A. 1976. V. 277. P. 299; V. 279. P. 145.
78. *Feldmeier H.* // Rep. Progr. Phys. 1987. V. 50. P. 915.
79. *Randrup J.* // Nucl. Phys. A. 1978. V. 307. P. 319; 1979. V. 327. P. 490.
80. *Adamian G. G. et al.* // Nucl. Phys. A. 1993. V. 551. P. 321.
81. *Baldo M., Rapisarda J.* The Response of Nuclei under Extreme Conditions / Ed. Broglia R. A. N. Y.: Plenum Press, 1988. 201 p.
82. *Джолос Р. В., Муминов А. И., Насиров А. К.* // ЯФ. 1986. Т. 44. С. 357;  
*Джолос Р. В., Насиров А. К.* // ЯФ. 1984. Т. 40. С. 721; 1987. Т. 45. С. 1298; 1985. Т. 42. С. 175.
83. *Антоненко Н. В., Джолос Р. В.* // ЯФ. 1989. Т. 50. С. 98; Т. 51. С. 690;  
*Antonenko N. V., Jolos R. V.* // Z. Phys. 1991. V. 338. P. 423; Phys. Scr. T. 1990. V. 32. P. 27.
84. *Адамян Г. Г., Джолос Р. В., Насиров А. К.* // ЯФ. 1992. Т. 55. С. 660.
85. *Adamian G. G., Jolos R. V., Nasirov A. K.* // Z. Phys. A. 1994. V. 347. P. 203.
86. *Blocki J. et al.* // Ann. Phys. 1978. V. 113. P. 330.
87. *Ngo C., Hofmann H.* // Z. Phys. A. 1977. V. 282. P. 83.
88. *Ayik S.* // Z. Phys. A. 1979. V. 292. P. 257.
89. *Lukasiak A., Cassing W., Nörenberg W.* // Nucl. Phys. A. 1984. V. 426. P. 181;  
*Berdichevsky D. et al.* // Nucl. Phys. A. 1989. V. 499. P. 609.
90. *Antonenko N. V. et al.* // Phys. Lett. B. 1993. V. 319. P. 425; Phys. Rev. C. 1995. V. 51. P. 2635.
91. *Adamian G. G. et al.* // Nucl. Phys. A. 1999. V. 646. P. 29; Phys. Rev. C. 2000. V. 62. P. 064303.
92. *Adamian G. G. et al.* // Nucl. Phys. A. 1997. V. 627. P. 361; 1998. V. 633. P. 409;  
*Nuovo Cim. A.* 1997. V. 110. P. 1143.
93. *Adamian G. G., Antonenko N. V., Tchuivilsky Yu. M.* // Phys. Lett. B. 1984. V. 314. P. 25.



94. Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W. // Nucl. Phys. A. 2000. V. 678. P. 24; Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 011601(R); 014607; 044601.
95. Zubov A. S. et al. // Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 014616; 2002. V. 65. P. 024308.
96. Cherepanov E. A. JINR Preprint E7-99-27. Dubna, 1999.
97. Jolos R. V., Muminov A. I., Nasirov A. K. // Eur. Phys. J. A. 1999. V. 4. P. 245; Giardina G. et al. // Eur. Phys. J. A. 2000. V. 8. P. 205; Fazio G. et al. // Eur. Phys. J. A. 2004. V. 22. P. 75.
98. Adamian G. G., Antonenko N. V., Scheid W. // Nucl. Phys. A. 1997. V. 618. P. 176.
99. Aguiar C. E., Barbosa V. C., Donangelo R. // Nucl. Phys. A. 1990. V. 517. P. 205; Aritomo Y. et al. // Phys. Rev. C. 1997. V. 55. P. 1011; Swiatecki W. J., Siwek-Wilczynska K., Wilczynski J. // Phys. Rev. C. 2005. V. 71. P. 014602; Shen C., Kosenko G. I., Abe Y. // Phys. Rev. C. 2002. V. 66. P. 061602.
100. Jing-Shang Z., Weidenmüller H. A. // Z. Phys. A. 1994. V. 347. P. 203.
101. Grange P. // Nucl. Phys. A. 1984. V. 428. P. 37.
102. Adeev G. D., Pashkevich V. V. // Nucl. Phys. A. 1989. V. 502. P. 405.
103. Delagrangé H. // Z. Phys. A. 1986. V. 323. P. 437.
104. Strumberger E., Dittrich K., Pomorski K. // Nucl. Phys. A. 1991. V. 529. P. 522.
105. Kolomietz V. M., Radionov S. V., Shlomo S. // Phys. Rev. C. 2001. V. 64. P. 054302.
106. Haake F., Reibold R. // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. P. 2462.
107. Hu B. L., Paz J. P., Zhang Y. // Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 2843.
108. Karrlein R., Grabert H. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 153.
109. Lindblad G. // Commun. Math. Phys. 1976. V. 48. P. 119; Rep. Math. Phys. 1976. V. 10. P. 393.
110. Dekker H. // Phys. Rep. 1981. V. 80. P. 1.
111. Isar A. et al. // Intern. J. Mod. Phys. E. 1994. V. 3. P. 635.
112. Kanokov Z. et al. // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. P. 016121; 016122; Kalandarov Sh. A. et al. // Phys. Rev. E. 2006. V. 74. P. 011118; 2007. V. 75. P. 031115.
113. Зелевинский В. Г. // XII Зимняя школа ЛИЯФ, 1977. С. 53.
114. Джолос Р. В., Иванова С. П., Иванов В. В. // ЯФ. 1984. Т. 40. С. 74; Ivanova S. P., Jolos R. V. // Nucl. Phys. A. 1991. V. 530. P. 232.
115. Саргсян В. В. и др. // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 2071.
116. Адамян Г. Г. и др. // ТМФ. 2005. Т. 145. С. 87.
117. Ankerhold J., Pechukas P., Grabert H. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 87. P. 086802.
118. Саргсян В. В. и др. // ТМФ. 2008. Т. 156. С. 307.
119. Sargsyan V. V. et al. // Phys. Rev. C. 2008. V. 77. P. 024607.

120. *Sargsyan V. V. et al.* // Phys. Rev. A. 2007. V. 75. P. 062115.
121. *Sargsyan V. V. et al.* // Physica A. 2007. V. 386. P. 36.
122. *Ayik S. et al.* // Phys. Rev. C. 2005. V. 71. P. 054611;  
*Takigawa N. et al.* // Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 054605.
123. *Hanggi P., Talkner P., Borkovec M.* // Rev. Mod. Phys. 1990. V. 62. P. 251.
124. *Cuccoli A. et al.* // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 8418; Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. R4849.
125. *Jurado B., Schmidt K. H., Benlliure J.* // Phys. Lett. B. 2003. V. 553. P. 186.
126. *Jurado B. et al.* // Nucl. Phys. A. 2005. V. 747. P. 14.
127. *Sargsyan V. V. et al.* // Phys. Rev. C. 2007. V. 76. P. 064604.
128. *Nadtochy P. N., Kelic A., Schmidt K. H.* // Ibid. V. 75. P. 064614.
129. *Vandenbosch R., Huizenga J. R.* Nuclear Fission. N. Y.: Acad. Press, 1973.
130. *Raman S., Nestor C. W., Tikkanen P.* // At. Data Nucl. Data Tables. 2001. V. 78. P. 1.
131. *Adamian G. G. et al.* // Intern. J. Mod. Phys. E. 1996. V. 5. P. 191.
132. *Hofmann S., Münzenberg G.* // Rev. Mod. Phys. 2000. V. 72. P. 733;  
*Armbruster P.* // Rep. Prog. Phys. 1999. V. 62. P. 465; Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 2000. V. 50. P. 411; C. R. Physique 2003. V. 4. P. 571;  
*Hofmann S.* // Rep. Prog. Phys. 1998. V. 61. P. 636;  
*Hofmann S. et al.* // Eur. Phys. J. A. 2001. V. 10. P. 5; 2002. V. 14. P. 147; 2002. V. 15. P. 195.
133. *Oganessian Yu. Ts. et al.* // Phys. Rev. C. 2004. V. 69. P. 021601; 054607; V. 70. P. 064609; 2005. V. 72. P. 034611.
134. *Schmidt K. H., Morawek W.* // Rep. Prog. Phys. 1991. V. 54. P. 949;  
*Schmidt K. H. et al.* // Proc. of Symp. on Physics and Chemistry of Fission. Vienna, 1980. P. 409.
135. *Sahn C.-C. et al.* // Nucl. Phys. A. 1985. V. 441. P. 316.
136. *Gilat J.* // Phys. Rev. C. 1970. V. 1. P. 1432.
137. *Barashenkov V. S., Toneev V. D.* High Energy Interaction of Particles and Nuclei with Atomic Nuclei. M.: Atomizdat, 1972.
138. *Grusha O. V. et al.* // Nucl. Phys. A. 1984. V. 429. P. 313.
139. *Grusha O. V., Ivanova S. P., Shubin Yu. N.* // VANT. Ser. «Nucl. Constants.» 1987. V. 1. P. 36.
140. *Cherepanov E. A., Iljinov A. S., Mebel M. V.* // J. Phys. G. 1983. V. 9. P. 931;  
*Cherepanov E. A.* // Proc. of the Intern. Symp. on In-Beam Nuclear Spectroscopy. Debrecen, 1984. P. 499;  
*Cherepanov E. A., Iljinov A. S.* // Nucleonika. 1980. V. 25. P. 611.
141. *Ignatyuk A. V., Istekov K. K., Smirenkin G. N.* // Sov. J. Nucl. Phys. 1975. V. 29. P. 875.

142. *Ignatyuk A.* Statistical Properties of Excited Atomic Nuclei. M.: Energoatomizdat, 1983.
143. *Iljinov A. S. et al.* // Nucl. Phys. A. 1992. V. 543. P. 517.
144. *Sierk A. J.* // Phys. Rev. C. 1986. V. 33. P. 2039.
145. *Möller P., Nix J. R.* // At. Data Nucl. Data Tables. 1988. V. 39. P. 213.
146. *Hessberger F. P.* // Phys. Rev. D. 2007. V. 45. P. 33.
147. *Nurmi M. et al.* // Phys. Lett. B. 1967. V. 26. P. 78.
148. *Nishio K. et al.* // Phys. Rev. Lett. B. 2004. V. 93. P. 162701.
149. *Gäggeler H. W. et al.* // Z. Phys. A. 1984. V. 316. P. 291.
150. *Münzenberg G. et al.* // Z. Phys. A. 1981. V. 302. P. 7.
151. *Čagarda P.* Ph. D. Thesis. Bratislava: Comenius Univ., 2002.
152. *Hessberger F. P. et al.* GSI Scientific Report. GSI 87-1. 1986. P. 17.
153. *Akarpiev G. N. et al.* // At. Ener. 1966. V. 21. P. 243.
154. *Nishio K. et al.* // JAERI-Rev. 2004. V. 027. P. 39.
155. *Саргсян В. В. и др.* // ЯФ. 2009. Т. 72. С. 459.