

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА
СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В РАМКАХ
РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАМИЛЬТОНИАННОГО
ПОДХОДА

М. Динейхан^а, С. А. Жаугашева^б

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^б Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

ВВЕДЕНИЕ	730
СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ	733
СПЕКТР АТОМНЫХ СИСТЕМ	742
МАССОВЫЙ СПЕКТР ГЛЮБОЛОВ	758
СПЕКТР МЕЗОНОВ С ОРБИТАЛЬНЫМ И РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ	769
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	790
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	799

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОГО СПЕКТРА СВЯЗАННОГО СОСТОЯНИЯ В РАМКАХ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ГАМИЛЬТОНИАННОГО ПОДХОДА

М. Динейхан^а, С. А. Жаугашева^б

^а Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

^б Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

В формализме квантовой теории поля предлагается формула учета релятивистских поправок к массе связанного состояния при известном нерелятивистском потенциале парного взаимодействия на основе вычисления асимптотического поведения корреляционных функций соответствующих полевых токов с необходимыми квантовыми числами. Корреляционная функция представляется в форме функционального интеграла, что позволяет выделить необходимую асимптотику. Исключение временных переменных позволяет определить непертурбативную добавку к потенциалу взаимодействия. В рамках предлагаемого метода получены следующие результаты. Определена зависимость конstituентной массы составляющих частиц от массы свободного состояния, а также от орбитальных и радиальных квантовых чисел. Вычислены расщепления энергетического уровня мюонного водорода с учетом релятивистской поправки. Аналитически определен энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями для широкого класса потенциалов, которые описывают свойства кулоновского связанного состояния. Аналитически определены массовый спектр глобулов и конstituентные массы глюона с учетом спин-спиновых, спин-орбитальных и тензорных взаимодействий. Наши численные результаты, полученные для различных спиновых и орбитальных состояний глобулов, хорошо согласуются с результатами решеточных данных. Определены массовые спектры орбитально возбужденного состояния мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с учетом релятивистского и нелокального характеров взаимодействий. Наши результаты показывают, что только учет непертурбативного и нелокального характеров взаимодействий позволяет достичь для массового спектра мезонов удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. Определена зависимость конstituентной массы составляющих частиц от массы свободного состояния. Показано, что в случае легких кварков разность токовых и конstituентных масс в несколько раз больше, чем токовые массы кварков, а если кварки являются тяжелыми, то разность этих масс незначительна. Предложен один из вариантов учета нелокального характера взаимодействия при определении свойств адронов на больших расстояниях. Определена зависимость конstituентных масс от радиуса конфайнмента.

We propose one of the versions of calculation of the energy spectrum of bound state systems with relativistic corrections. In the framework of quantum field theory the expression that takes into account relativistic corrections to the mass of the bound state with a known nonrelativistic pair interaction potential is proposed on the basis of calculating the asymptotic behaviour of correlation functions of the corresponding field currents with the necessary quantum numbers. Excluding the time variables allows one to determine nonperturbative corrections to the interaction potential. In the framework of the given approach the following results are obtained. The nonperturbative corrections arising due to

the relativistic nature of a system to the interaction Hamiltonian are determined. The dependence of the constituent mass, of bound-state forming particles, on the free state mass and on the orbital and radial quantum numbers is analytically derived. The energy level shift of muonic hydrogen taking into account relativistic corrections is calculated. The energy spectrum of wide class of potentials, which describe the Coulomb bound state, is analytically derived with relativistic corrections. The mass spectrum of the glueballs and the constituent masses of the gluons are analytically calculated taking into account spin-orbit, spin-spin and tensor interactions. Our numerical results have shown very good agreement with the lattice data. Taking into account nonperturbative and nonlocality characters of interactions, the mass spectrum of the mesons consisting of the light-light and light-heavy quarks with orbital and radial excitations is determined. Our results show that good agreement with the experimental data for the slope and the intercept of the Regge trajectory can be obtained only taking into account the nonperturbative and the nonlocal characters of interactions. Dependence of the constituent masses of constituent particles on the masses of a free state is certain. When quarks are light, the difference of current and valent masses of quarks is greater than valent masses of quarks, and when quarks are heavy the difference of these masses is insignificant. One of the alternative variants of the accounting of nonlocality is suggested for the definition of properties of hadrons at large distances. The dependence of the constituent masses of constituent particles on the radius of confinement is determined.

PACS: 36.10.Dr; 12.20.Ds; 31.30.Jv; 11.10.St

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время о структуре и механизме формирования квантовых объектов существуют следующие представления: связанные состояния состоят из фермионов, а взаимодействия между этими фермионами осуществляются с помощью обмена бозонов. В частности, в атомной структуре, которая состоит из электронов и ядер, такими бозонами являются фотоны, в ядре нуклоны связаны мезонами, а адроны, состоящие из кварков, связаны глюонами. Таким образом, механизм формирования квантовых систем формально объясняется единым образом. Известно, что единый механизм формирования связанных систем непротиворечиво описывается в нерелятивистской квантовой механике.

Однако в современной релятивистской квантовой теории поля (КТП) образование и описание связанных состояний до сих пор не является хорошо поставленной задачей (см. в [1–3]). КТП описывает упругое и неупругое рассеяния свободных релятивистских частиц, находящихся на больших расстояниях друг от друга в состоянии плоских волн. При этом сама формулировка КТП проводится в рамках теории возмущений, т. е. в разложении по степеням взаимодействия, где никакие связанные состояния принципиально возникнуть не могут. Таким образом, возможная постановка задачи на связанные состояния требует выхода за рамки теории возмущений, где имеющиеся методы исследования по сути дела еще не развиты должным образом.

С другой стороны, известно, что энергетический спектр связанного состояния может быть определен с хорошей точностью в рамках нерелятивистской

квантовой механики (НКМ) при надлежащем подборе потенциала взаимодействия. Тем не менее нерелятивистское уравнение Шредингера (УШ), дающее математически корректное описание связанных состояний, уже не является достаточным, так как требуется учет релятивистского характера взаимодействия, поскольку для описания современных экспериментальных результатов, полученных как в атомной [4], так и в адронной физике [5], требуется учет релятивистских поправок.

Таким образом, реальная физика требует создания какого-либо математического решения проблемы описания связанных состояний на основе КТП. Все усилия, затрачиваемые на эту проблему, условно можно разделить на два направления.

Отправной точкой одного направления является утверждение, что если существует связанное состояние двух частиц с соответствующими квантовыми числами, то амплитуда упругого рассеяния этих частиц имеет простой полюс по энергии в точке массы связанного состояния. На основе этой идеи были сформулированы уравнение Бете–Солпитера [3, 6, 7] и так называемые квазипотенциальные уравнения [8].

Другое направление основано на убеждении, что нерелятивистское УШ является надежным инструментом исследования и определения энергетического спектра связанных состояний. При этом реальные релятивистские поправки малы, так что теоретическая задача сводится к получению релятивистских поправок к нерелятивистскому потенциалу взаимодействия исходя из формализма КТП. Эта идея лежит в основе потенциала Брейта [9] и эффективной нерелятивистской квантовой теории поля Касвелла и Лепажя [10]. Оба эти подхода используют матрицу рассеяния как источник искомых поправок. Авторами [10] прежде всего в рамках квантовой электродинамики (КЭД) изучена матрица рассеяния с соответствующими диаграммами Фейнмана с учетом перенормировки и последующим переходом к нерелятивистскому пределу, т. е. определен потенциал взаимодействия с релятивистской поправкой. В результате сформулирован метод нерелятивистской КЭД, или НКЭД, для определения энергетического спектра, с релятивистской поправкой. В дальнейшем этот метод усовершенствован в [11]. В настоящий момент свойства и спектр кулоновского связанного состояния с учетом релятивистской поправки определяются в рамках НКЭД. Этот метод также с высокой точностью описывает последние экспериментальные данные. В этом подходе ограничиваются только низшим порядком разложения по теории возмущения, а высшие порядки рассматриваются как малые поправки. В адронной физике потенциал взаимодействия кварков выбирается исходя из некоторых физических предположений. Феноменологические потенциальные модели кварков [12–14] хорошо описывают массовый спектр адронов, состоящих из тяжелых кварков. При изучении свойств адронов, состоящих из легких кварков, требуется учет релятивистского характера взаимодействия. Однако к насто-

ящему времени отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского характера взаимодействия в феноменологических моделях кварков.

В рамках последнего направления существует еще один подход, основанный на следующей идее. Точные решения для квантово-полевых функций Грина можно формально представить в виде функциональных интегралов. Техника вычислений этих функциональных интегралов в настоящее время находится еще в зачаточном состоянии, однако имеющиеся представления можно использовать для получения решения нерелятивистского уравнения Шредингера в форме функционального интеграла Фейнмана с потенциалом, содержащим необходимые релятивистские поправки. В этом направлении сделано еще не так много. Наша работа продолжает эти исследования.

В нашем подходе масса связанного состояния определяется асимптотическим поведением корреляционной функции от соответствующих токов с необходимыми квантовыми числами. Корреляционная функция представляется в форме функционального интеграла, что позволяет выделить необходимую асимптотику. В [15] предложен метод вычисления энергетического спектра на основе исследования асимптотического поведения вакуумного среднего (функции Грина) от токов заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле. При определении асимптотического поведения корреляционной функции используется представление в форме функционального интеграла, так что усреднение по внешнему калибровочному полю может быть выполнено точно. Полученное представление похоже на фейнмановский функциональный интеграл по путям [16] в нерелятивистской квантовой механике. При этом нелокальный функционал (потенциал) взаимодействия, возникающий в результате обмена калибровочным полем (фотон, глюон), определяется диаграммой Фейнмана и содержит вклады как в собственную энергию частиц, так и в формирование связанного состояния. Предлагается метод сведения этого нелокального функционала к потенциалу взаимодействия. Таким образом, потенциал взаимодействия определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана.

Работа построена следующим образом: в разд. 1 исследовалось асимптотическое поведение функции Грина токов заряженных частиц во внешнем калибровочном поле и получена формула, определяющая массу связанного состояния. Аналитически определена непертурбативная поправка к гамилтониану взаимодействия, которая связана с релятивистской природой взаимодействия. В разд. 2 этот подход применен к вычислению релятивистской поправки к энергетическому спектру кулоновского связанного состояния. В частности, аналитически определены релятивистские поправки к энергетическим спектрам атома водорода и мюонного водорода для орбитально и радиально возбужденных состояний, а также вычислен энергетический спектр широкого класса потенциалов с учетом релятивистских поправок. В разд. 3 аналитически определены массовый спектр глюоболов и конститuentные массы

глюона с учетом спин-спиновых, спин-орбитальных и тензорных взаимодействий и установлено, что глюон в связанном состоянии становится массивным. В разд. 4 определен массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с орбитальным и радиальным возбуждениями. Аналитически определен модифицированный потенциал взаимодействия. Определена зависимость конституентной массы составляющих частиц от массы исходного состояния, а также от орбитального и радиального квантовых чисел. Вычислены наклон и параметр пересечения редже-траектории для орбитально и радиально возбужденных состояний. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными. В заключении подытожены основные результаты вычислений. В приложениях приведены детали вычисления энергетического спектра связанного состояния в рамках метода осцилляторного представления.

1. СВЯЗАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

1.1. Масса релятивистского связанного состояния. Приступим к изложению деталей нашего подхода. Пусть $J(x) = \Phi^+(x)\Phi(x)$ — ток скалярных заряженных частиц. Если пренебречь аннигиляционным каналом, то тогда рассматриваемые корреляторы удобно представить как усреднение по калибровочному полю $A_\alpha(x)$ произведения функций Грина $G_m(x, y|A)$ скалярных частиц во внешнем калибровочном поле:

$$\begin{aligned} \Pi(x-y) &= \langle J(x)J(y) \rangle = \langle \Phi^+(x)\Phi(x)\Phi^+(y)\Phi(y) \rangle = \\ &= \langle G_{m_1}(x, y|A)G_{m_2}(y, x|A) \rangle_A. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Функция Грина $G_m(x, y|A)$ для скалярной частицы во внешнем калибровочном поле определяется уравнением

$$\left[\left(i \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{g}{c\hbar} A_\alpha(x) \right)^2 + \frac{c^2 m^2}{\hbar^2} \right] G_m(x, y|A) = \delta(x-y). \quad (1.2)$$

Решение уравнения (1.2) представляется в виде функционального интеграла (детали см. в [17]):

$$\begin{aligned} G_m(x, y|A) &= \int_0^\infty \frac{ds}{(4s\pi)^2} \exp \left\{ -sm^2 - \frac{(x-y)^2}{4s} \right\} \times \\ &\quad \times \int d\sigma_\beta \exp \left\{ ig \int_0^1 d\xi \frac{\partial Z_\alpha(\xi)}{\partial \xi} A_\alpha(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь введены обозначения

$$Z_\alpha(\xi) = (x-y)_\alpha \xi + y_\alpha - 2\sqrt{s}B_\alpha(\xi), \quad (1.4)$$

$$d\sigma_\beta = N\delta B_\beta \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^1 d\xi \dot{B}^2(\xi) \right\}$$

с нормировкой

$$B_\beta(0) = B_\beta(1) = 0 \quad \text{и} \quad \int d\sigma_\beta = 1,$$

где N — константа нормировки. При усреднении по внешнему калибровочному полю $A_\alpha(x)$ ограничиваемся только низшим порядком, т. е. учитываем только двухточечный гауссов коррелятор:

$$\left\langle \exp \left\{ i \int dx A_\alpha(x) J_\alpha(x) \right\} \right\rangle_A =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint dx dy J_\alpha(x) D_{\alpha\beta}(x-y) J_\beta(y) \right\}. \quad (1.5)$$

Здесь $J_\alpha(x)$ — реальный ток, а $D_{\alpha\beta}(x-y)$ пропагатор калибровочного поля:

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \langle A_\alpha(x) A_\beta(y) \rangle_A = \delta_{\alpha,\beta} D(x-y) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} D_d(x-y), \quad (1.6)$$

где

$$D(x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{e^{iqx}}{q^2}, \quad D_d(x) = \int \frac{dq}{(2\pi)^4} \frac{e^{iqx}}{q^2} \frac{d(q^2)}{q^2}. \quad (1.7)$$

Масса связанного состояния определяется как предел

$$M = - \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\ln \Pi(x-y)}{|x-y|}. \quad (1.8)$$

Таким образом, для определения массы M нужно вычислить корреляционную функцию $\Pi(x)$ в асимптотике $|x| \rightarrow \infty$.

Подставляя (1.3) в (1.1) и проводя усреднение по внешнему калибровочному полю, получаем

$$\Pi(x) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu_1 d\mu_2}{(8\pi^2 x)^2} J(\mu_1, \mu_2) \times$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{|x|}{2} \left(\frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 \right) - \frac{|x|}{2} \left(\frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 \right) \right\}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$J(\mu_1, \mu_2) = N_1 N_2 \iint \delta r_1 \delta r_2 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x d\tau [\mu_1 \dot{r}_1^2(\tau) + \mu_2 \dot{r}_2^2(\tau)] \right\} e^{-W},$$

$$W = W_{1,1} + W_{2,2} - 2W_{1,2}, \quad (1.10)$$

и использованы следующие обозначения:

$$W_{i,j} = \frac{g^2}{2} (-1)^{i+j} \times$$

$$\times \int_0^x \int_0^x d\tau_1 d\tau_2 Z'^{(i)}_{\alpha}(\tau_1) D_{\alpha\beta} \left(Z^{(i)}(\tau_1) - Z^{(j)}(\tau_2) \right) Z'^{(j)}_{\beta}(\tau_2). \quad (1.11)$$

Представление (1.10) имеет смысл квантовой функции Грина в форме функционального интеграла Фейнмана, когда две частицы с массами μ_1 и μ_2 взаимодействуют посредством нелокального потенциала W . Поэтому будем называть массы m_1 и m_2 токовыми, а параметры μ_1 и μ_2 — конституентными массами. Отметим, что в (1.10) функциональное интегрирование проводится по четырехмерным векторам $r_1 = (\mathbf{r}_1, r_1^{(4)})$ и $r_2 = (\mathbf{r}_2, r_2^{(4)})$. При этом величина $W_{i,j}$ определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана. Существуют два типа взаимодействий: первое — взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется непосредственно $W_{1,2}$; второе — взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т. е. диаграмма собственной энергии, вклад которой определяется $W_{1,1}$, $W_{2,2}$. В нерелятивистском пределе величина $W_{1,2}$ соответствует потенциальному взаимодействию, а $W_{1,1}$, $W_{2,2}$ соответствуют непотенциальным взаимодействиям, которые определяют вклад перенормировки массы частиц.

В асимптотике $|x| \rightarrow \infty$ интеграл (1.10) ведет себя как

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} J(\mu_1, \mu_2) \implies \exp\{-xE(\mu_1, \mu_2)\}, \quad (1.12)$$

где функция $E(\mu_1, \mu_2)$ зависит от константы связи g и от параметров μ_1 , μ_2 и не зависит от масс m_1 , m_2 . При $|x| \rightarrow \infty$ интеграл (1.9) вычисляется методом перевала. Масса связанного состояния определяется точкой перевала:

$$M = \frac{1}{2} \min_{\mu_1, \mu_2} \left\{ \frac{m_1^2}{\mu_1} + \mu_1 + \frac{m_2^2}{\mu_2} + \mu_2 + 2E(\mu_1, \mu_2) \right\}. \quad (1.13)$$

Таким образом, проблема свелась к вычислению функционального интеграла (1.10). Однако этот интеграл в общем виде не вычисляется и определяется только в рамках различных приближений. В настоящее время точные

математические методы вычисления этого интеграла отсутствуют. Поэтому надо привлекать различные физические предположения или приближения, чтобы как-то выполнить интегрирования по четвертым компонентам $r_1^{(4)}, r_2^{(4)}$. Такое интегрирование эффективно соответствует переходу к нерелятивистскому пределу. Другими словами, определяется потенциал взаимодействия с поправками, связанными с непертурбативным, релятивистским и нелокальным характерами взаимодействий. В частности, если в функционале $W_{i,j}$ в (1.11) пренебречь зависимостью от $r_1^{(4)}$ и $r_2^{(4)}$, то система (1.10) сводится к фейнмановскому интегралу по траекториям для движения скалярных частиц с массами μ_1, μ_2 в НКМ [16] с локальным потенциалом. В этом приближении согласно (1.10) гамильтониан взаимодействия скалярных частиц с массами μ_1 и μ_2 записывается в виде

$$H = \frac{1}{2\mu_1} \mathbf{P}_1^2 + \frac{1}{2\mu_2} \mathbf{P}_2^2 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (1.14)$$

где $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ — потенциал взаимодействия, который выражается через $W_{i,j}$, тогда $E(\mu_1, \mu_2)$ является собственным значением гамильтониана взаимодействия (1.14), т. е.

$$H\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = E(\mu_1, \mu_2)\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (1.15)$$

Тогда из условия минимума (1.13) получаем уравнение для μ_j :

$$\mu_j - \frac{m_j^2}{\mu_j} + 2\mu_j \frac{dE(\mu_1, \mu_2)}{d\mu_j} = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.16)$$

Параметры μ_1, μ_2 имеют размерность массы. При дальнейших вычислениях вводим новый параметр

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \quad (1.17)$$

Тогда выражение (1.13) принимает вид

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu \frac{dE}{d\mu} + E(\mu), \quad E(\mu_1, \mu_2) = E(\mu), \quad (1.18)$$

где

$$\mu_1 = \sqrt{m_1^2 - 2\mu^2 \frac{dE}{d\mu}}, \quad \mu_2 = \sqrt{m_2^2 - 2\mu^2 \frac{dE}{d\mu}}. \quad (1.19)$$

В нашем подходе энергетический спектр и волновая функция связанного состояния определяются из уравнения Шредингера с конституентной массой μ . Поправка, связанная с релятивистской природой взаимодействия, учитывается не только поправками к потенциалу взаимодействия, но также через параметры μ_1 и μ_2 (конституентные массы), которые представлены

в (1.13) и (1.19). Поэтому, используя стандартные потенциалы для описания свойств атомных и адронных связанных состояний, которые определены различными авторами, из УШ с конституентной массой мы сможем определить спектр с релятивистской поправкой. В функционале $W_{1,2}$ из (1.11) необходимо исключить зависимость от $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$, тогда получаем нерелятивистский потенциал плюс непертурбативную и релятивистскую поправки. Будут сделаны некоторые предположения, которые позволят определить эти поправки. Если константа связи мала, то в низшем приближении по теории возмущений можно выполнить интегрирование по четвертым компонентам $r_1^{(4)}$, $r_2^{(4)}$ в (1.10).

1.2. Релятивистская поправка к гамильтониану взаимодействия. В стандартном вычислении при учете непертурбативного характера взаимодействия, как правило, ограничиваются низшей степенью величины (v/c) , но в нашем подходе (исходя из некоторых предположений) включается ультрарелятивистский предел, т. е. мы определяем вид взаимодействия суммированием бесконечного ряда, полученного по степеням величины (v/c) .

Теперь приступим к определению структуры гамильтониана взаимодействия. Для этого приведем детали вычисления функционального интеграла, представленного в (1.10). Из (1.10) видно, что взаимодействие между составными частицами осуществляется обменом калибровочных полей. Согласно (1.6) пропагатор записывается в стандартном виде в импульсном представлении:

$$\tilde{D}\left(\mathbf{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right) \simeq \frac{1}{\mathbf{q}^2 + s^2/c^2} = \int_0^\infty d\eta \exp\left\{-\eta\left(\mathbf{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)\right\}. \quad (1.20)$$

Учитывая (1.20), из (1.12) для $W_{i,j}$ получаем

$$W_{i,j} = \frac{1}{2}g^2(-1)^{i+j} \int_0^x \int_0^x d\tau_1 d\tau_2 \int_{-\infty}^\infty \frac{ds}{2\pi} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\eta e^{is\tau} \Theta_{ij} \times \\ \times \exp\left\{-\eta\left(\mathbf{q}^2 + \frac{s^2}{c^2}\right)\right\} \exp\left\{-i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) - i\frac{s}{c}r^{(4)}\right\}, \quad (1.21)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_1 - \tau_2), \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}_i(\tau_1) - \mathbf{r}_j(\tau_2), \quad r^{(4)} = r_i^{(4)}(\tau_1) - r_j^{(4)}(\tau_2), \\ \Theta_{ij} &= 1 + \frac{\mathbf{n}}{c} (\dot{\mathbf{r}}_i(\tau_1) + \dot{\mathbf{r}}_j(\tau_2)) + \frac{\dot{\mathbf{r}}_i(\tau_1)\dot{\mathbf{r}}_j(\tau_2)}{c^2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Проводя интегрирования по переменным $d\mathbf{q}$, из (1.21) получаем

$$W_{i,j} = \frac{1}{2} g^2 (-1)^{i+j} \int_0^x \int_0^x d\tau_1 d\tau_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{(2\sqrt{\pi\eta})^3} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{\mathbf{r}^2}{4\eta}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{n+k}}{n!(k-n)!} \eta^n r^{(4)(k-n)} \left(\frac{is}{c}\right)^{n+k} e^{is\tau} \Theta_{ij}, \quad (1.23)$$

Проводя интегрирования по ds и $d\eta$ и некоторые упрощения, из (1.23) имеем

$$W_{i,j} = (-1)^{i+j} \frac{g^2}{8\pi} \int_0^x \int_0^x d\tau_1 d\tau_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} \frac{\Gamma(1/2-n)}{\sqrt{\pi} c^{k+n}} \times \\ \times \frac{(|\mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_j(\tau)|)^{2n-1}}{2^{2n}} \left(r_i^{(4)}(\tau_1) - r_j^{(4)}(\tau_2)\right)^{k-n} \frac{\partial^{k+n}}{\partial \tau^{k+n}} \delta(\tau) \equiv W_{i,j}^{(1)} + W_{i,j}^{(2)}. \quad (1.24)$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в (1.24). Первое слагаемое $W_{i,j}^{(1)}$ соответствует вкладу однофотонного (глюонного) обмена:

$$W_{i,j}^{(1)} = (-1)^{i+j} \frac{g^2}{8\pi} \int_0^t \int_0^t d\tau_1 d\tau_2 \frac{\delta(\tau_1 - \tau_2)}{|\mathbf{r}_j(\tau_1) - \mathbf{r}_j(\tau_2)|}. \quad (1.25)$$

При этом диагональное взаимодействие, т. е. $i = j$, определяет перенормировку массы:

$$-W_{1,1}^{(1)} + 2W_{1,2}^{(1)} - W_{2,2}^{(1)} = \int_0^x d\tau \left\{ -\frac{\alpha_s}{r(\tau)} + V(0) \right\}, \quad (1.26)$$

где

$$r(\tau) = |\mathbf{r}_1(\tau) - \mathbf{r}_2(\tau)|, \quad V(0) = \alpha_s \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{1}{\mathbf{q}^2}, \quad (1.27)$$

и $V(0)$ соответствует обычной перенормировке массового оператора в нерелятивистском пределе и определяется через конститuentные массы составляющих частиц. В феноменологических потенциальных моделях «искусственно» вводится новый параметр [18, 19]

$$V_0 = -2\sqrt{\lambda} \exp\{-(\gamma - 1/2)\}, \quad \gamma = 0,577215665,$$

который позволяет обеспечить идеальное согласие с экспериментальными данными. Этот параметр может быть связан с непотенциальным характером взаимодействия, т. е. с $V(0)$.

Теперь приведем некоторые детали вычисления второго слагаемого в (1.24). Прежде всего, используя следующие соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+n}}{\partial \tau^{k+n}} \delta(\tau) &= (-1)^{k+n} \frac{\partial^{k+n}}{\partial \beta^{k+n}} \exp\left(-\beta \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \delta(\tau) \Big|_{\beta=0} = \\ &= (-1)^{k+n} \frac{\partial^{k+n}}{\partial \beta^{k+n}} \delta(\tau - \beta) \Big|_{\beta=0} \end{aligned} \quad (1.28)$$

и проводя необходимые упрощения, из (1.24) для второго слагаемого $W_{i,j}^{(2)}$ получаем

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(2)} &= (-1)^{i+j} \frac{g^2}{8\pi} \int_0^x d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!} \frac{\Gamma(1/2-n)}{\sqrt{\pi} 2^{2n} c^{k+n}} \times \\ &\times \frac{\partial^{n+k}}{\partial \beta^{n+k}} \left\{ |\mathbf{r}_i(\tau + \beta) - \mathbf{r}_j(\tau)|^{2n-1} (r_i^{(4)}(\tau + \beta) - r_j^{(4)}(\tau))^{k-n} \right\} \Big|_{\beta=0}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Проводя замену переменных, переходим к системе центра масс

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i(\tau + \beta) &= \mathbf{R}(\tau + \beta) + \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{r}(\tau + \beta), \\ \mathbf{r}_j(\tau) &= \mathbf{R}(\tau) - \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \mathbf{r}(\tau). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Предположим, что в системе центра масс составные частицы покоятся, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{R}(\tau) = 0, \quad (1.31)$$

а скорость относительного движения составных частиц постоянная, т. е.

$$\mathbf{v}(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{r}(\tau) = \text{const}. \quad (1.32)$$

Исследуем асимптотическое поведение корреляционной функции в низшем приближении, и при $x \Rightarrow \infty$ зависимость от x должна быть линейной. С другой стороны, τ_1 и τ_2 являются собственными временами относительных движений составных частиц i и j соответственно. Поэтому считаем, что в асимптотике зависимость $r_i^{(4)}$ и $r_j^{(4)}$ от τ_1 и τ_2 линейная. Рассмотрим случай $n = k$, тогда, учитывая (1.30)–(1.32), для $W_{i,j}^{(2)}$ получаем

$$\begin{aligned} W_{i,j}^{(2)} &= (-1)^{i+j} \frac{g^2}{8\pi} \int_0^x d\tau \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(1/2-k)}{\sqrt{\pi} 2^{2k} c^{2k}} \times \\ &\times \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} |\mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}_j(\tau)|^{2k-1}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Параметр τ будем рассматривать как собственное время относительного движения составных частиц. Теперь приведем некоторые детали суммирования в (1.33). Для этого рассмотрим величину отдельно:

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!c^{2k}} \frac{\partial^{2k}}{\partial \tau^{2k}} (r^{2k-1}(\tau)), \quad (1.34)$$

где $r = |\mathbf{r}|$. Используя следующие соотношения:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial r}{\partial \tau} = (\mathbf{n}\mathbf{v}), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} = 0, \quad (1.35)$$

для различных значений k получаем

$$\begin{aligned} k = 1, & \quad \frac{\partial^2 r}{\partial \tau^2} = \frac{[\mathbf{r}, \mathbf{v}]^2}{r^3} = \frac{\widehat{\ell}^2}{r^3}, \\ k = 2, & \quad \frac{\partial^4 r^3}{\partial \tau^4} = \frac{9\widehat{\ell}^4}{r^5}, \\ & \quad \vdots, \\ k = n, & \quad \frac{\partial^{2n} r^{2n-1}}{\partial \tau^{2n}} = \frac{\widehat{\ell}^{2n}}{r^{2n+1}} \prod_{j=1}^n (2j-1)^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

и

$$\hbar \widehat{\ell} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}], \quad (1.37)$$

$\widehat{\ell}$ — оператор орбитального момента. Используя соотношения

$$\prod_{j=1}^k (2j-1)^2 = \left[\frac{(2k-1)!}{2^{k-1}(k-1)!} \right]^2 = \frac{\Gamma^2(2k)}{\Gamma^2(k)2^{2(k-1)}} \quad (1.38)$$

и

$$\Gamma(2k) = \frac{2^{2k-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(k) \Gamma(k+1/2), \quad (1.39)$$

а также учитывая (1.36), для исходного ряда (1.31) имеем

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!c^{2k}} \frac{\widehat{\ell}^{2k}}{r^{2k+1}} \frac{1}{(\hbar\mu)^{2k}} \frac{\Gamma^2(2k)}{\Gamma^2(k)2^{2(k-1)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k}{(k)!} \Gamma(k+1/2), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где введено обозначение

$$A = \frac{\widehat{\ell}^2}{4c^2 r^2 (\hbar\mu)^2}. \quad (1.41)$$

Используя интегральное представление для $\Gamma(k + 1/2)$ -функции, из (1.40) окончательно получаем

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k A^k}{(k)!} \int_0^{\infty} dx \frac{x^k}{\sqrt{x}} e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi r}} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^{-x} (e^{-Ax} - 1) = \\ &= \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \ell(\ell + 1)/(4\hbar^2 c^2 r^2 \mu^2)}} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Тогда, учитывая (1.27), (1.32) и (1.42), из (1.26) для гамильтониана взаимодействия с непертурбативной добавкой имеем

$$H = H^0 + \Delta H_{\text{nonper}}^0, \quad (1.43)$$

где H^0 — нерелятивистский гамильтониан с непотенциальной добавкой:

$$H^0 = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 - \frac{\alpha_s}{r} + V(0), \quad (1.44)$$

и $\Delta H_{\text{nonper}}^0$ — непертурбативная добавка:

$$\Delta H_{\text{nonper}}^0 = -\frac{\alpha_s}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \ell(\ell + 1)/(4\hbar^2 c^2 r^2 \mu^2)}} - 1 \right]. \quad (1.45)$$

Таким образом, мы получили непертурбативную добавку к гамильтониану взаимодействия, которая связана с релятивистской природой системы. Из (1.29) видно, что релятивистская поправка к гамильтониану взаимодействия состоит из двух частей: пространственной и временной. В (1.45) мы определили поправку, связанную только с пространственной компонентой.

Мы сформулировали модель, определяющую массу и энергетический спектр связанного состояния с учетом релятивистской поправки. Наш подход дает возможность определить конституентную массу составляющих частиц как функцию от массы исходного или свободного состояния, а также от энергетического спектра связанного состояния. В нашем подходе основная поправка связана с релятивистской природой взаимодействия, которая учитывается с помощью конституентной массы составляющих частиц.

Потенциал взаимодействия в нашем подходе определяется всевозможными типами диаграмм Фейнмана. Существует два типа взаимодействий: первое — взаимодействие составляющих частиц посредством калибровочного поля, вклад которого определяется обменными диаграммами, второе — взаимодействие составляющих частиц самих с собой, т. е. диаграмма собственной энергии. В нерелятивистском пределе обычно вклад обменной диаграммы соответствует потенциальному взаимодействию, а вклад диаграммы собственной энергии — непотенциальному взаимодействию.

Теперь применим наш подход для определения массы и энергетического спектра конкретного связанного состояния.

2. СПЕКТР АТОМНЫХ СИСТЕМ

2.1. Спектр атома водорода с учетом релятивистской поправки. В рамках нашего подхода вычислим энергетический спектр атома водорода. Согласно (1.15) энергетический спектр $E(\mu)$ определяется из УШ

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 - \frac{Z\alpha}{r} \right] \Psi = E(\mu) \Psi \quad (2.1)$$

и для энергетического спектра получаем

$$E(\mu) = -\frac{Z^2 \alpha^2}{2n^2} \mu. \quad (2.2)$$

Тогда, учитывая (2.2) и (1.18), для энергии связи в случае $m_1 = m_N = \infty$ и $m_2 = m_e$ имеем:

$$E_{\text{bin}} = \sqrt{m_e^2 - 2\mu^2 \left(\frac{dE}{d\mu} \right)} + \mu \left(\frac{dE}{d\mu} \right) + E(\mu) = m_e \sqrt{1 - \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2}}. \quad (2.3)$$

В [20] исходя из гамильтониана

$$H = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2} - \frac{\alpha}{r} \quad (2.4)$$

в рамках теории возмущений (ограничивая до 6-го порядка константу связи $\sim \alpha^6$) вычислен энергетический спектр атома водорода для состояний $n = 2$ и $\ell = 1$. В табл. 1 представлены наши результаты и результаты [20].

Из табл. 1 видно, что наши результаты, полученные для энергетического спектра атома водорода, больше результатов, полученных в рамках теории возмущений, а также видно, что с возрастанием значений константы связи эти отличия возрастают. Теперь приступим к определению энергетического

Таблица 1. Энергетический спектр атома водорода при различных значениях константы связи

α	E_{bin}/m_e (ТВ)	E_{bin}/m_e (данная работа)
0,0155522	0,999969765	0,999969766
0,142460	0,997452	0,997457
0,2599358	0,99147	0,99152
0,3566678	0,9838	0,9840
0,4359255	0,975	0,976
0,5	0,967	0,9682

спектра атома водорода для случая $m_1 = m_N \neq \infty$, т.е. с учетом эффекта отдачи. После некоторых вычислений из (1.18) для массы получаем

$$M = m_e \left(\sqrt{y^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} + \sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} - \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x \right), \quad (2.5)$$

где $y = m_N/m_e$ — масса ядра в атомной системе единиц, а параметр x определяется из следующего уравнения:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2}}. \quad (2.6)$$

В этом случае для энергетического спектра имеем

$$E_{\text{bin}} = m_e \left(\sqrt{y^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} - y + \sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} - \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x \right). \quad (2.7)$$

При этом конституентная масса ядра определяется в виде

$$\mu_N = m_e \left(\sqrt{y^2 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} \right), \quad (2.8)$$

а конституентная масса электрона равна

$$\mu_e = m_e \left(\sqrt{1 + \frac{Z^2 \alpha^2}{n^2} x^2} \right). \quad (2.9)$$

В табл. 2 приведены наши численные значения для E_{bin}/m_e , а также разница $\Delta E_{\text{bin}}/m_e$ энергетического спектра в случае $m_N = \infty$.

Из табл. 2 видно, что с возрастанием константы связи поправки, связанные с эффектом отдачи, также возрастают.

Таблица 2. Энергия связи атома водорода с учетом поправки отдачи

α	E_{bin}/m_e	$\Delta E_{\text{bin}}/m_e$
0,0155522	0,99996978	$1,646 \cdot 10^{-8}$
0,142546	0,99745824	$1,3897 \cdot 10^{-6}$
0,2599358	0,99152288	$4,6567 \cdot 10^{-6}$
0,3566678	0,98397897	$8,9404 \cdot 10^{-6}$
0,4359255	0,97597066	$1,3576 \cdot 10^{-5}$
0,5	0,96826398	$1,8146 \cdot 10^{-5}$

2.2. Расщепление энергетического уровня мюонного водорода с учетом релятивистской поправки. Мюонный водород (μp) — это связанное состояние, состоящее из мюона и протона. Энергетические спектры μp очень чувствительны к КЭД и к релятивистским эффектам. Далее вычисляем различные поправки к энергетическому спектру мюонного водорода. Энергетический спектр мюонного водорода без каких-либо поправок записывается в виде

$$E(\mu) = -\frac{\mu\alpha_{em}^2}{2n^2}, \quad (2.10)$$

где μ — приведенная масса. При дальнейших вычислениях будем использовать следующие значения масс и физических констант:

$$\begin{aligned} m_p &= 1836,152672m_e, & m_\mu &= 206,76824065m_e, \\ \alpha_{em} &= 1/137,0359911, & R_\infty &= m_e\alpha_{em}^2/2 = 13,6056923 \text{ эВ}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (1.19) определим конституентную массу мюона и протона, а также приведенную массу связанного состояния:

$$\mu_p = 1836,1527972m_e, \quad \mu_u = 206,7693525m_e, \quad \mu = 185,84169985m_e. \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) видно, что конституентная масса протона и мюона отличается от массы свободного состояния. Расщепление энергетического уровня мюонного водорода прежде всего определяется поправкой, связанной с электронной поляризационной петлей, а также поправкой, связанной с размерным эффектом протона (подробнее см. в [4]).

2.2.1. Однопетлевая электронная поляризационная поправка. В рамках НКЭД поправку к энергетическому спектру мюонного водорода вычислили многие авторы [4]. Основной поправкой к энергетическому спектру мюонного водорода является однопетлевая электронная поляризационная поправка. Однопетлевая электронная поляризационная диаграмма приводит к изменению фотонного пропагатора, т. е. приводит к поправке и к кулоновскому

потенциалу, и этот добавочный потенциал записывается в виде [9]

$$\delta V_{\text{VP}}^{(1)} = -\frac{g_1}{r} \int_1^{\infty} d\zeta e^{-2m_e r \zeta} w_1(\zeta), \quad (2.13)$$

где введено обозначение

$$g_1 = Z\alpha \frac{2\alpha}{3\pi}, \quad w_1(\zeta) = \left(1 + \frac{1}{2\zeta^2}\right) \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}. \quad (2.14)$$

Соответствующие поправки к энергетическому уровню для любых n вычисляются численным образом. Только для состояний $n = 1, 2, 3$, т. е. для низлежащих уровней, поправки определяются аналитически (детали см. в [4]). Для состояния с $n = 1 + \ell$ аналитический результат получен в [21].

Теперь в рамках нашего подхода с учетом однопетлевой электронной поляризационной поправки вычислим энергетический спектр мюонного водорода. Согласно (2.13) соответствующее УШ записывается в виде

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 - \frac{Z\alpha}{r} - \frac{g_1}{r} \int_1^{\infty} d\zeta e^{-2m_e r \zeta} w_1(\zeta) \right] \Psi = E\Psi. \quad (2.15)$$

Для определения собственного значения и ВФ из (2.15) будем применять метод ОП. Перед тем как определить энергетический спектр и волновую функцию из УШ с помощью метода осцилляторного представления [22], уместно напомнить, что этот метод основан на идеях и методах квантовой теории скалярного поля. Одно из существенных отличий КТП от КМ состоит в том, что квантованные поля, представляющие набор бесконечного числа осцилляторов для основного состояния или вакуума, при квантово-полевом взаимодействии сохраняют свою осцилляторную природу. В КМ собственные функции для большинства потенциалов, как правило, отличаются от гауссова поведения осцилляторной волновой функции. Поэтому для применения методов и идей КТП к решению квантово-механических задач следует в исходном радиальном УШ провести замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовым поведением, а трансформированное уравнение идентифицировать с радиальным УШ в пространстве с большой размерностью. Отметим, что впервые похожая идея обсуждалась Фоком при решении задачи о спектре водорода с помощью трансформации в четырехмерное пространство импульсов [23].

В соответствии с изложенным выше проведем замену переменных следующим образом (детали см. в [22, 24]):

$$r = q^2, \quad \Psi \Rightarrow \Psi(q^2) = q^{2\ell} \Phi(q^2). \quad (2.16)$$

Волновая функция является кулоновской. Используя атомную систему единиц ($\hbar = c = 1$), после некоторых стандартных упрощений из (2.15) получаем для модифицированного УШ

$$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) - 4\mu(Z\alpha + Eq^2) - 4\mu g_1 \int_1^\infty d\zeta e^{-2m\epsilon q^2 \zeta} w_1(\zeta) \right\} \Phi(q^2) = 0, \quad (2.17)$$

где d — размерность вспомогательного пространства:

$$d = 4 + 4\ell. \quad (2.18)$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное УШ в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . Из (2.15) и (2.18) следует, что орбитальное квантовое число ℓ вошло в определение размерности пространства d . Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, а именно: спектр и волновую функцию, решая модифицированное УШ только для основного состояния в d -мерном вспомогательном пространстве R^d .

Волновая функция $\Psi_m(q^2)$ основного состояния в R^d зависит только от переменных q^2 . Поэтому оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \equiv \Delta_q \quad (2.19)$$

отождествим с лапласианом Δ_q во вспомогательном пространстве R^d , которое действует на волновую функцию основного состояния, зависящую только от радиуса q . Исходя из модифицированного УШ

$$H\Phi(q) = \varepsilon(E) \Phi(q), \quad (2.20)$$

согласно (2.17) получаем, что энергетический спектр $\varepsilon(E)$ в R^d равен нулю:

$$\varepsilon(E) = 0. \quad (2.21)$$

Рассмотрим это соотношение как условие определения энергетического спектра E исходного гамильтониана. Следуя методу ОП, представим канонические переменные через операторы рождения a^+ и уничтожения a в пространстве R^d :

$$q_j = \frac{a_j + a_j^+}{\sqrt{2\omega}}, \quad P_j = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \frac{a_j - a_j^+}{i}, \quad (2.22)$$

$$j = 1, \dots, d, \quad [a_i, a_j^+] = \delta_{i,j},$$

где ω — частота осциллятора, которая пока неизвестна. Подставляя (2.22) в (2.20) и упорядочивая по операторам рождения a^+ и уничтожения a , получаем

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I. \quad (2.23)$$

Здесь H_0 является гамильтонианом свободных осцилляторов:

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j), \quad (2.24)$$

и ε_0 является энергией основного состояния в нулевом приближении ОП:

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{2dE\mu}{\omega} - 4\mu Z\alpha - 4\mu g_1 \int_1^\infty d\zeta \frac{w_1(\zeta)}{(1 + 2m_e\zeta/\omega)^{d/2}}. \quad (2.25)$$

Гамильтониан взаимодействия H_I также представляется в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a , причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным:

$$H_I = -4\mu g_1 \int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta) \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \times \\ \times \exp \left[-\eta^2 \left(1 + \frac{2m_e\zeta}{\omega} \right) \right] : e_2^{-2i\sqrt{2m_e\zeta}(\eta \cdot q)} :. \quad (2.26)$$

Здесь $: \star :$ является символом нормального упорядочивания и мы использовали обозначение

$$e_2^{-x} = e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2.$$

Некоторые детали представления гамильтониана H_I в нормальной форме приведены в приложении А.

Вклад гамильтониана взаимодействия H_I рассматривается как малое возмущение. В квантовой теории поля после представления канонических переменных через операторы рождения, уничтожения и гамильтониана взаимодействия в нормальной форме требование отсутствия в гамильтониане взаимодействия полевых операторов второй степени по существу эквивалентно перенормировкам константы связи и волновой функции [25–27]. Более того, такая процедура позволяет учесть основной вклад через перенормировку масс и энергию вакуума. Другими словами, все квадратичные формы полностью включены в гамильтониан свободного осциллятора. Данное требование позволяет сформировать, согласно ОП, условие [22]

$$\begin{cases} \frac{\partial \varepsilon_0(E)}{\partial \omega} = 0, \\ \varepsilon(E) = 0 \end{cases} \quad (2.27)$$

с целью найти частоту ω осциллятора, которая определяет основной квантовый вклад. Учитывая (2.25), из уравнения (2.21) и (2.27) сможем вычислить энергетический спектр исходной системы E . В рамках ОП для различных потенциалов [24] неоднократно проверялось, что поправка первого порядка, связанная с гамильтонианом взаимодействия, тождественно равна нулю, а поправка второго порядка меньше 1%. Поэтому ограничимся рассмотрением только нулевого приближения в ОП. Согласно (2.27), т. е. из условий ОП, частота осциллятора ω определяется из уравнения

$$\frac{d\omega}{4} + \frac{2dE\mu}{\omega} - 4\mu g_1 \int_1^{\infty} d\zeta \frac{w_1(\zeta)}{(1 + 2m_e\zeta/\omega)^{1+d/2}} \frac{dm_e\zeta}{\omega} = 0. \quad (2.28)$$

Теперь метод ОП применим к вычислению энергетического спектра мюонного водорода с орбитальным и радиальным возбуждениями. Орбитальное квантовое число ℓ поглощено в размерность вспомогательного пространства d . Волновую функцию с радиальным возбуждением представим в виде

$$|n_r\rangle = C_{n_r} (a^+ a^+)^{n_r} |0\rangle, \quad (2.29)$$

где $|0\rangle$ — волновая функция основного состояния и C_{n_r} — коэффициент нормировки:

$$C_{n_r} = \left[\frac{\Gamma(d/2)}{4^{n_r} n_r! \Gamma(d/2 + n_r)} \right]^{1/2}. \quad (2.30)$$

Тогда энергетический спектр с радиальным возбуждением определяется в следующем виде:

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r | H | n_r \rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r | H_I | n_r \rangle. \quad (2.31)$$

Детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ представлены в приложении Б и записываются как

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -4\mu g_1 \int_1^{\infty} d\zeta w_1(\zeta) T_{n_r} \left(\frac{2m_e\zeta}{\omega} \right). \quad (2.32)$$

Учитывая (2.25), (2.31) и (2.32), из системы уравнений, представленной в (2.27), после некоторых упрощений для частоты осциллятора получаем

$$\omega_n = \frac{2\mu Z\alpha}{n} + \frac{2\mu g_1}{n} \int_1^{\infty} d\zeta w_1(\zeta) \times \left[\frac{1}{(1 + n\zeta\beta)^{d/2}} + \frac{0,5d n\zeta\beta}{(1 + n\zeta\beta)^{1+d/2}} + T_{n_r}(n\zeta\beta) \right], \quad (2.33)$$

где $n = 1 + n_r + \ell$ — главное квантовое число, и введено обозначение: $\beta = m_e/(\mu Z\alpha)$. Таким образом, энергетический спектр для любых n определяется из уравнения:

$$2n_r\omega_n + \varepsilon_0(E) - \frac{2\mu g_1}{n} \int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta) T_{n_r}(n\zeta\beta) = 0, \quad (2.34)$$

где $\varepsilon_0(E)$ представлено в (2.25). Учитывая (2.33) и (2.25), из (2.34) для энергетического спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями получаем

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 \alpha^2}{2n^2} - \frac{\mu Z \alpha g_1}{n^2} \int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta) \times \\ \times \left[\frac{x}{(1+x)^{d/2+1}} \left(\frac{d}{2} - 2n \right) + \frac{1}{(1+x)^{d/2}} + T_{n_r}(x) \right], \quad (2.35)$$

здесь использовано обозначение $x = (nm_e\zeta)/(M_2Z\alpha)$. Из (2.35) сможем определить расщепление энергетического уровня на $2p$ - и $2s$ -состояния с учетом однопетлевой электронной поляризационной поправки:

$$\Delta E^{(1)}(2p - 2s) = \mu \frac{Z^2 \alpha^2}{2} \frac{8\alpha}{3\pi} \beta^2 \int_0^1 \frac{duu}{(u+2\beta)^4} \left(1 + \frac{u^2}{2} \right) \sqrt{1-u^2}. \quad (2.36)$$

Численный результат нашего вычисления [15]

$$\Delta E^{(1)}(2p - 2s) = 205,009 \text{ МэВ}. \quad (2.37)$$

Для сравнения приводим результаты других авторов [4, 28]:

$$\Delta E^{(1)}(2p - 2s) = 205,0074 \text{ МэВ}. \quad (2.38)$$

2.2.2. Двухпетлевая электронная поляризационная поправка. Определим вклад двухпетлевой электронной поляризационной поправки к энергетическому спектру мюонного водорода. Соответствующий потенциал для двухпетлевой электронной поляризационной диаграммы представляется в виде (дети см. в [4])

$$\delta V_{\text{VP}}^{(2)} = \frac{g_2}{r} \int_1^\infty d\zeta e^{-2m_e r \zeta} w_2(\zeta), \quad (2.39)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 g_2 = Z\alpha \left(\frac{\alpha}{\pi} \right), \quad w_2(\zeta) = & \left(\frac{13}{54\zeta^2} + \frac{7}{108\zeta^4} + \frac{2}{9\zeta^6} \right) \sqrt{\zeta^2 - 1} + \\
 & + \left(-\frac{44}{9\zeta} + \frac{2}{3\zeta^3} + \frac{5}{4\zeta^5} + \frac{2}{9\zeta^7} \right) \ln \left[\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1} \right] + \\
 & + \left(\frac{4}{3\zeta^2} + \frac{2}{3\zeta^4} \right) \sqrt{\zeta^2 - 1} \ln [8\zeta(\zeta^2 - 1)] + \left(\frac{2}{3\zeta^5} - \frac{8}{3\zeta} \right) \times \\
 & \times \int_{\zeta}^{\infty} dx \left(\frac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \ln [8x(x^2 - 1)] \right). \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

После стандартных упрощений из (2.39) получаем поправку, соответствующую двухпетлевой электронной поляризации:

$$\begin{aligned}
 \Delta E^{(2)}(2p - 2s) = & \frac{\mu\alpha^2 Z^2}{2} \left(\frac{2\alpha\beta}{\pi} \right)^2 \int_0^1 \frac{duu}{(u + 2\beta)^4} \times \\
 & \times \left\{ \left(\frac{13}{54} + \frac{7}{108}u^2 + \frac{2}{9}u^4 \right) \sqrt{1 - u^2} + \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}u^2 \right) \sqrt{1 - u^2} \times \right. \\
 & \left. \times (\ln [8(1 - u^2)]) - 3 \ln u - \left(-\frac{8}{3} + \frac{2}{3}u^4 \right) F(u) \right\}, \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 F(u) = \int_0^u \frac{dt}{t} \left\{ \frac{3 - t^2}{1 - t^2} (\ln [1 + \sqrt{1 - t^2}] - \ln t) - \right. \\
 \left. - \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} (\ln [8(1 - t^2)] - 3 \ln t) \right\}. \quad (2.42)
 \end{aligned}$$

Наш численный результат

$$\Delta E^{(2)}(2p - 2s) = 1,509 \text{ МэВ}. \quad (2.43)$$

Для сравнения приводим результаты других авторов [4, 28]:

$$\Delta E^{(2)}(2p - 2s) = 1,5079 \text{ МэВ}. \quad (2.44)$$

Из (2.37) и (2.43) видно, что наши результаты по сравнению с результатами других авторов оказались больше. Это связано с тем, что в нашем подходе не проводится разложение в релятивистском гамильтониане.

2.3. Спектр растущего потенциала. Теперь определим энергетический спектр $E(\mu)$ растущего потенциала с учетом орбитального и радиального возбуждений. Соответствующее УШ записывается в виде

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + g \cdot r^\nu \right] \Psi = E(\mu) \Psi, \quad (2.45)$$

где g — константа связи, а μ — приведенная масса связанного состояния. Потенциалом, представленным в (2.45), описываются многочисленные атомные и молекулярные процессы (см., например, [29, 30]). Энергетический спектр и волновая функция определяются из УШ в рамках метода ОП [22, 24]. Прежде всего проведем замену переменных таким образом, чтобы искомая волновая функция на больших расстояниях обладала гауссовым поведением, и перейдем к d -мерному вспомогательному пространству R^d , а гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a (детали см. в [22]). В соответствии с вышеизложенным проведем замену переменных следующим образом:

$$r = q^{2\rho}, \quad \Psi \Rightarrow \Psi(q^2) = q^{2\rho\ell} \Phi(q^2), \quad (2.46)$$

где ρ — параметр, связанный с поведением волновой функции на больших расстояниях. После некоторых стандартных упрощений из (2.45) получаем для модифицированного УШ

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) - 4\rho^2 \mu g q^{2(2\rho+\nu\rho-1)} - \right. \\ \left. - 4\rho^2 \mu E q^{2(2\rho-1)} \right\} \Phi(q^2) = 0, \quad (2.47)$$

где d — размерность вспомогательного пространства:

$$d = 2 + 2\rho + 4\rho\ell. \quad (2.48)$$

Гамильтониан взаимодействия H_I также представляется в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a , причем он не содержит квадратичных слагаемых по каноническим переменным (детали см. в [24]). Гамильтониан, представленный в (2.47), перепишем в виде

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I, \quad (2.49)$$

где H_0 — гамильтониан свободного осциллятора:

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j), \quad (2.50)$$

и $\varepsilon_0(E)$ — энергия основного состояния в R^d :

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} + \frac{4\rho^2\mu_2 g}{\omega^{2\rho+\nu\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho + \nu\rho - 1)}{\Gamma(d/2)}, \quad (2.51)$$

а H_I — гамильтониан взаимодействия представляется в нормальной форме:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho+\nu\rho-1}} \frac{gx^{-2\rho-\nu\rho}}{\Gamma(1-2\rho-\nu\rho)} \right]. \quad (2.52)$$

Здесь η_j и q_j являются векторами в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . Теперь определим энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями. В ОП волновая функция с радиальным возбуждением представлена в (2.29), а энергетический спектр в R^d определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r | H | n_r \rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r | H_I | n_r \rangle. \quad (2.53)$$

Матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ представляется в виде

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \mu g}{\omega^{2\rho+\nu\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho + \nu\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (2.54)$$

Детали вычисления этого матричного элемента (2.54) представлены в приложении Б, параметры \tilde{B} и \tilde{C} — в (Б.6) и (Б.7) соответственно. В ОП энергетический спектр исходного гамильтониана и частота осциллятора определяются из системы уравнений (2.27).

Рассмотрим случай $m_1 = m_2 \equiv m$; также приведенную массу и частоту осциллятора параметризуем следующим образом:

$$\mu = m \cdot x, \quad \omega^2 = Z \cdot m. \quad (2.55)$$

Учитывая (2.51), из (2.27) после некоторых стандартных вычислений для Z получаем

$$Z = (xW_1)^{1/(2+\nu)}, \quad (2.56)$$

а также для энергетического спектра имеем

$$\frac{E(\ell, n_r)}{m} = \min_{\rho} \left\{ x^{-\nu/(2+\nu)} W_1^{2/(2+\nu)} \left(W_2 + \frac{W_3}{W_1} \right) \right\}. \quad (2.57)$$

Согласно (1.19) параметр x определяется из уравнения

$$x^2 - \frac{\nu}{2(2+\nu)} (xW_1)^{2/(2+\nu)} \left(W_2 + \frac{W_3}{W_1} \right) - \frac{1}{4} = 0. \quad (2.58)$$

Из этого уравнения сможем определить параметр x как функцию от константы связи g и от масс m . В выражениях (2.56)–(2.58) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{g}{m^{\nu+1}} \frac{8\rho^2 \Gamma(3\rho + \nu\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{\nu\rho + (2\rho + \nu\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}}{2\rho + \tilde{B} + 4n_r(2\rho - 1)/(1 + \rho + 2\rho\ell)}, \\ W_2 &= \frac{1}{8\rho^2} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + 4n_r/(1 + \rho + 2\rho\ell)}{1 + \tilde{B}}, \\ W_3 &= \frac{g}{m^{\nu+1}} \frac{\Gamma(3\rho + \nu\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Из (2.57) и (2.58) видим, что для различных типов растущего потенциала можно определить энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями с учетом релятивистских поправок.

Таблица 3. Энергетический спектр потенциала гармонического осциллятора и линейно растущего потенциала при значениях [32] $m = 1$ ГэВ, $g = 0,211$ ГэВ². Все величины в единицах ГэВ

ν	n_r	ℓ			
		0	1	2	3
1	0	2,7921 (2,7992)	3,1199 (3,1414)	3,3944	3,6364
	1	3,3456 (3,3629)	3,5868	3,8075	2,0111
	2	3,7754 (3,8079)	3,9755	4,1642	4,3427
	3	4,064 (4,1905)	4,185	4,3122	4,4323
2	0	3,72125 (3,8249)	4,6036 (4,9015)	5,3743	6,0705
	1	5,3742 (5,7911)	6,0705	6,7130	7,3147
	2	6,7130 (7,4829)	7,3147	7,8838	8,4263
	3	7,8838 (9,0215)	8,4263	8,9465	9,4476

Численные результаты [31] для энергетического спектра связанного состояния с релятивистской поправкой для линейного и гармонического осциллятора потенциалов представлены в табл. 3. Параметры потенциалов определены в [32] для массы $m = 1$ ГэВ и константы связи $g = 0,211$ ГэВ² в случае линейного потенциала, а в случае гармонического осциллятора $g = 0,5$ ГэВ³. Эти данные использованы нами при численных расчетах. Исходя из уравнения Солпитера для скалярных частиц в [33] установлен верхний предел для энергетического спектра с орбитальным и радиальным возбужденными состояниями с учетом релятивистских поправок для линейно растущего потенциала и для потенциала гармонического осциллятора. Результаты этой работы также приведены в табл. 3 в скобках.

2.4. Спектр потенциала воронки. Теперь определим энергетический спектр потенциала воронки с орбитальным и радиальным возбуждениями. Соответствующее УШ записывается в следующем виде:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + gr^\nu - \frac{k}{r} \right] \Psi = E(\mu) \Psi. \quad (2.60)$$

При $\nu = 1$ этот потенциал соответствует стандартному потенциалу Корнелла [34], который широко применяется для описания энергетического спектра связанных состояний. Также при значениях $\nu = 1$ и $\nu = 2$ этот потенциал описывает атомную систему, связанную с обычными, сферически-симметричными эффектами Штарка и Зеемана [35] соответственно. С другой стороны, известно, что кулоновское взаимодействие с параболическим потенциалом удовлетворительно описывает свойства квантовой точки, т. е. искусственного атома [36].

В нашем случае энергетический спектр и волновая функция определяются из УШ в рамках метода ОП [22, 24]. В этом случае после замены переменных (2.46) соответствующее модифицированное УШ в d -мерном вспомогательном пространстве R^d записывается в виде

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) - 4\rho^2 \mu g q^{2(2\rho+\nu\rho-1)} - \right. \\ \left. - 4\rho^2 \mu E q^{2(2\rho-1)} - 4\rho^2 \mu k q^{2(\rho-1)} \right\} \Phi(q^2) = 0. \quad (2.61)$$

Согласно ОП гамильтониан представляется в нормальной форме в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . Тогда энергия основного состояния $\varepsilon_0(E)$ в R^d определена следующим образом:

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu g}{\omega^{2\rho+\nu\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho + \nu\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \times \\ \times \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4k\mu\rho^2}{\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + \rho - 1)}{\Gamma(d/2)}, \quad (2.62)$$

а гамильтониан взаимодействия представляется в виде

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2\mu g}{\omega^{2\rho+\nu\rho-1}} \frac{x^{-2\rho-\nu\rho}}{\Gamma(1-2\rho-\nu\rho)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{4k\mu\rho^2}{\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} \right]. \quad (2.63)$$

После некоторых вычислений для энергетического спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями получаем

$$\frac{E(\ell, n_r)}{m} = \min_\rho \left\{ \frac{1}{x} Z^2 W_2 - Z W_5 + \frac{1}{Z^\nu} W_3 \right\}. \quad (2.64)$$

В этом случае параметр Z определяется из следующего уравнения:

$$Z^{2+\nu} - Z^{1+\nu} x W_5 - x W_1 = 0, \quad (2.65)$$

где W_1 , W_2 и W_3 представлены в (2.59), а также введены следующие обозначения:

$$W_4 = k \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{D}}{1 + \tilde{B}}, \quad (2.66)$$

$$W_5 = 8k\rho^2 \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{\rho + (2\rho - 1)\tilde{D} - (\rho - 1)\tilde{B}}{2\rho + \tilde{B} + 4n_r(2\rho - 1)/(1 + \rho + 2\rho\ell)}.$$

Явный вид выражения \tilde{D} приведен в приложении Б. Параметр x определяется из уравнения

$$x^2 + \frac{x^2}{2m} \frac{dE}{dx} - \frac{1}{4} = 0. \quad (2.67)$$

Таблица 4. Энергетический спектр [31] потенциала воронки при значениях параметров [32] $m = 1$ ГэВ, $k = 0,456$ и $g = 0,211$ ГэВ². Энергетический спектр в единицах ГэВ

n_r	ℓ			
	0	1	2	3
0	2,5130 (2,5162)	2,9550 (2,9816)	3,2688	3,5317
1	3,1520 (3,1570)	3,4506	3,6968	3,9158
2	3,6150 (3,6337)	3,8551	4,0634	4,2541
3	3,9982 (4,0348)	4,2052	4,3884	4,5594

В работе [33], которая посвящена описанию свойств скалярных частиц для потенциала воронки, в рамках уравнения Солпитера численным методом установлен верхний предел энергетического спектра для орбитально и радиально возбужденных состояний. Результаты авторов [33] также приведены в табл. 4 в скобках.

2.5. Спектр экранированного кулоновского потенциала. Теперь определим энергетический спектр потенциала, состоящего из кулоновского потенциала и потенциала Юкавы («экранированный кулон»). Такой потенциал описывает взаимодействие электрического заряда в ионизированной среде, в частности, в металле [37]. Соответствующее УШ записывается в виде

$$\left(\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 - \frac{A}{r} + \frac{B}{r} e^{-Cr} \right) \Psi(r) = E\Psi(r), \quad (2.68)$$

где A и B являются константами связи кулоновских и юкавских взаимодействий, а C — параметр экранировки. Предполагаем, что параметры A и C положительны. Для удобства при дальнейших вычислениях перейдем к новым единицам: будем использовать для единицы длины $a_0 = \hbar^2/(\mu_0 A)$ и для единицы энергии $E_0 = \mu_0 A^2/(2\hbar)$. Здесь μ_0 — приведенная масса частиц в свободном или в исходном состояниях. В этом случае параметр потенциала будем заменять следующим образом: $B' = 2B/A$ и $C' = C \cdot a_0$, и при дальнейших вычислениях опустим штрихи. Тогда в этих единицах УШ представляется в виде

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] - \frac{\mu}{r\mu_0} + \frac{\mu B}{2r\mu_0} e^{-Cr} \right) \Psi_R(r) = \\ = \frac{\mu}{2\mu_0} U \Psi_R(r), \end{aligned} \quad (2.69)$$

где $U = E/E_0$ и $\mu_0 = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. В рамках ОП из УШ (2.69) будем определять энергетический спектр связанного состояния. В этом случае после замены переменных (2.46) соответствующее модифицированное УШ в d -мерном вспомогательном пространстве R^d записывается в виде

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) - 4\rho^2 \frac{\mu}{\mu_0} q^{2(\rho-1)} - \right. \\ \left. - \frac{\mu}{\mu_0} 2\rho^2 U q^{2(2\rho-1)} + \frac{\mu}{\mu_0} 2\rho^2 q^{2(\rho-1)} e^{-Cq^{2\rho}} \right\} \Phi(q^2) = 0. \quad (2.70)$$

Согласно ОП из (2.70) гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}} : \times \\ \times \left[-\frac{2\rho^2\mu}{\mu_0\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \frac{2\rho^2\mu U}{\mu_0\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \right. \\ \left. + \frac{2B\mu\rho^2}{\mu_0\omega^{\rho-1}} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-C)^j}{j!\omega^{j\rho}} \frac{x^{-\rho(1+j)}}{\Gamma(1-\rho-j\rho)} \right], \quad (2.71)$$

энергию основного состояния представим в виде

$$\varepsilon_0(U) = \frac{d\omega}{4} - \frac{2\rho^2\mu U}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\mu_0\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2\mu}{\mu_0\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} + \\ + \frac{2k\mu\rho^2}{\mu_0\Gamma(d/2)} \int_0^\infty du u^{d/2-1} e^{-u} \left(\frac{u}{\omega} \right)^{\rho-1} \exp \left\{ -C \left(\frac{u}{\omega} \right)^\rho \right\}. \quad (2.72)$$

Энергетический параметр U и частота осциллятора ω определяются из уравнений (2.27). После некоторых упрощений имеем

$$U = \min_\rho \left\{ \frac{1}{2x} \frac{Z^2}{4\rho^2} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - 2Z \frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \right. \\ \left. + \frac{ZB}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \int_0^\infty du u^{2\rho+2\rho\ell-1} \exp \left(-u - \frac{C}{Z} \right) \right\}, \quad (2.73)$$

где параметр Z определяется из уравнения

$$Z^2 - \frac{8xZ\rho^2\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} + \frac{2xB\rho^2}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} \times \\ \times \int_0^\infty du u^{2\rho+2\rho\ell-1} (Z + Cu^\rho) \exp \left(-u - \frac{C}{Z} \right) = 0. \quad (2.74)$$

В этом случае параметр x определяется из уравнения, представленного в (2.67). Мы изучаем кулоновское связанное состояние с экранированным потенциалом. Поэтому параметр $A = \alpha_{\text{ем}}$. Численные результаты для энергетического спектра потенциала Юкавы представлены в табл. 5, там же приведены результаты численных расчетов, которые получены в [37].

Таблица 5. Энергетический спектр для потенциала Юкавы для основного состояния при значении константы связи $A = \alpha_{em}$ и $B = 1$; определена зависимость от параметра C

C	ρ	[31]	[37]
0,001	1,0	0,251	0,251
0,005	1,0	0,25497	0,25496
0,01	1,0	0,25985	0,25895
0,05	1,0	0,29650	0,9650
0,1	0,99	0,33694	0,33694
0,2	0,97	0,404244	0,40424
0,5	0,91	0,54246	0,542243
1,0	0,89	0,67482	0,67482
2,0	0,89	0,80554	0,80666
10,0	0,92	0,97223	0,97424

Из табл. 5 видно, что релятивистская поправка к энергетическому спектру связанного состояния при значении константы связи $A = 1/137$ очень мала. Это связано с тем, что при экранировке электрического заряда система более менее становится нерелятивистской.

3. МАССОВЫЙ СПЕКТР ГЛЮБОЛОВ

3.1. Спектр глюбола, состоящего из скалярных глюонов. Рассмотрим двухглюонное связанное состояние с массой μ_1 . Глюон находится только в связанном состоянии, поэтому гамильтониан взаимодействия выбираем так, чтобы он удовлетворял условию конфайнмента глюона. Тогда УШ такой системы записывается в виде

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma_{ad} r \right] \Psi = E(\mu) \Psi. \quad (3.1)$$

Для определения собственного значения и ВФ из (3.1) будем применять метод ОП. В результате замены переменных мы получили модифицированное УШ в d -мерном вспомогательном пространстве R^d :

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right) + 4\rho^2 \mu \sigma_{ad} q^{2(3\rho-1)} - 4\rho^2 \mu E q^{2(2\rho-1)} \right\} \Phi(q^2) = 0. \quad (3.2)$$

Для энергии основного состояния в нулевом приближении ОП в d -мерном вспомогательном пространстве R^d получаем

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma_{ad}}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4E\rho^2 \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)}. \quad (3.3)$$

Вклад гамильтониана взаимодействия H_I рассматривается как малое возмущение и представляется в нормальной форме

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-i\sqrt{x}\omega(q\eta)} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\sigma_{\text{ad}}x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} \right]. \quad (3.4)$$

Согласно (2.27), т. е. из условия ОП, частота осциллятора ω определяется в следующем виде:

$$\omega^\rho = \left[4\rho^2\mu\sigma_{\text{ad}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \right]^{1/3}. \quad (3.5)$$

Учитывая (3.3) и (3.5), из (2.27) определяем энергетический спектр E как функцию от параметра μ :

$$E(\mu) = \frac{3}{2\mu^{1/3}} \frac{1}{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)} \left[\frac{\sigma_{\text{ad}}^2 \Gamma(d/2 + 1) \Gamma^2(d/2 + 3\rho - 1)}{4\rho^2} \right]^{1/3}. \quad (3.6)$$

Вариационный параметр ρ обычно определяется из уравнения, полученного из минимума энергии $E(\mu)$:

$$\Psi(2 + 2\rho\ell + \rho)(1 + 2\ell) + 2\Psi(2\rho\ell + 4\rho)(4 + 2\ell) - \\ - 2/\rho - 3\Psi(2\rho\ell + 3\rho)(3 + 2\ell) = 0, \quad (3.7)$$

где Ψ — функция:

$$\Psi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \ln \Gamma(x). \quad (3.8)$$

Теперь приступим к определению масс глюоболов. Согласно (1.17) для связанного состояния глюонов параметр μ определяется из уравнения

$$2 + \frac{dE(\mu)}{d\mu} = 0. \quad (3.9)$$

Тогда, учитывая (3.6), из (3.9) имеем

$$\mu = \left[\frac{\sigma_{\text{ad}}^2 \Gamma(d/2 + 1) \Gamma^2(d/2 + 3\rho - 1)}{256\rho^2 \Gamma^3(d/2 + 2\rho - 1)} \right]^{1/4}. \quad (3.10)$$

После некоторых упрощений для массы глюоболов получаем

$$M = 2\sqrt{\sigma_{\text{ad}}} \left[\frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell) \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}, \quad (3.11)$$

а также для конституентной массы глюонов имеем

$$\mu_G = \frac{\sqrt{\sigma_{\text{ад}}}}{2} \left[\frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)\Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{\rho^2\Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) видно, что при конкретных значениях орбитального квантового числа ℓ масса глюбола (померона) и конституентная масса глюонов определяются как функции от $\sigma_{\text{ад}}$ — параметра натяжения струны. При значениях параметра натяжения струны

$$\sigma_{\text{ад}} = \frac{9}{4}\sigma_f, \quad \sigma_f = 0,18 \text{ ГэВ}^2 \quad (3.13)$$

полученные численные результаты [38] представлены в табл. 6 (в скобках приведены результаты [39]), и наши результаты хорошо согласуются с ними.

Таблица 6. Массовый спектр глюбола и глюона в связанном состоянии без учета спинowego взаимодействия

Параметры	ℓ			
	0	1	2	3
ρ	0,57241	0,57392	0,57493	0,57513
μ_G , ГэВ	0,5279	0,69306	0,82612	0,94063
M , ГэВ	2,1116 (2,11)	2,77224 (2,77)	3,304487 (3,30)	3,762514

3.2. Вклад одноглюонного обмена в массу глюбола. Глюоны взаимодействуют между собой. В данном пункте определим вклад одноглюонного обмена в массу глюбола. УШ для связанного состояния двухглюонной системы с учетом одноглюонного обмена записывается в следующем виде:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma_{\text{ад}} r - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right] \Psi = E(\mu) \Psi. \quad (3.14)$$

Прежде всего из (3.14) с помощью метода ОП определим $E(\mu)$ — энергетический спектр как функцию от μ . В этом случае после замены переменных для модифицированного УШ в R^d из (3.14) получаем

$$\left[\frac{1}{2} \mathbf{P}_q^2 + 4\rho^2 \mu \sigma_{\text{ад}} q^{2(3\rho-1)} - \frac{16}{3} \alpha_s \rho^2 \mu q^{2(\rho-1)} - 4\rho^2 \mu E(\mu) q^{2(2\rho-1)} \right] \Phi(q^2) = 0. \quad (3.15)$$

После некоторых стандартных упрощений, изложенных выше, в нулевом приближении ОП для энергии основного состояния имеем

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2\mu\sigma_{\text{ad}}}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16}{3\omega^{\rho-1}} \alpha_s \rho^2 \mu \frac{\Gamma(d/2 + \rho - 1)}{\Gamma(d/2)}. \quad (3.16)$$

В этом случае ограничимся только рассмотрением основного состояния, т. е. $\ell = 0$. Тогда после некоторых упрощений для $E(\mu)$ получаем

$$E(\mu) = \min_{\rho} \left\{ \frac{Z^2}{8\rho^2\mu} \frac{\Gamma(2 + \rho)}{\Gamma(3\rho)} + \frac{\sigma_{\text{ad}}}{Z} \frac{\Gamma(4\rho)}{\Gamma(3\rho)} - \frac{4\alpha_s Z}{3} \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(3\rho)} \right\}. \quad (3.17)$$

Здесь параметр $Z = \omega^\rho$ определяется из следующего уравнения, которое получено из условия ОП:

$$Z^3 - Z^2 \frac{16\rho^2\mu\alpha_s\Gamma(2\rho)}{\Gamma(2 + \rho)} - \frac{4\rho^2\mu\sigma_{\text{ad}}\Gamma(4\rho)}{\Gamma(2 + \rho)} = 0. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.17) и (3.18), из (3.9) определяем параметр μ . Тогда из (1.18) для массы глюбола получаем

$$M_p = 2\mu + E(\mu), \quad (3.19)$$

а для конституентной массы глюона имеем

$$\mu_G = 2\mu. \quad (3.20)$$

Полученные численные результаты представлены в табл. 7.

Таблица 7. Массовый спектр глюбола и глюона в связанном состоянии с учетом одноглюонного обмена

Параметры	α				
	0	0,1	0,2	0,3	0,39
ρ	0,5735	0,6300	0,700	0,795	0,885
μ , ГэВ	0,26398	0,28568	0,31561	0,35950	0,41961
μ_G , ГэВ	0,52795	0,57135	0,63121	0,71899	0,83921
M , ГэВ	2,1116 (2,11)	1,95543	1,78442 (1,776)	1,59448 (1,587)	1,39809 (1,39)

3.3. Массовый спектр глобола с учетом непертурбативного потенциала взаимодействия. Вычислим массовый спектр двухглюонного связанного состояния с учетом одноглюонного обмена и непертурбативного характера взаимодействия. Согласно (1.45) полный гамильтониан взаимодействия записывается в следующем виде:

$$H = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma_{\text{ad}} r - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \ell(\ell+1)/\mu^2 r^2}} - 1 \right]. \quad (3.21)$$

Собственные значения этого гамильтониана также определяются с помощью метода ОП. В этом случае после замены переменных модифицированное УШ записывается в следующем виде:

$$\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{P}_q^2 + 4\rho^2 \mu \sigma_{\text{ad}} q^{2(3\rho-1)} - \frac{16\rho^2 \mu \alpha_s}{3} \frac{q^{(\rho-1)}}{\sqrt{1 + \ell(\ell+1)/q^{4\rho}}} - 4\rho^2 \mu E q^{2(2\rho-1)} \right\} \Phi(q^2) = 0. \quad (3.22)$$

После некоторых несложных упрощений (детали см. в приложении Б) для энергии основного состояния в нулевом приближении получаем

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma_{\text{ad}}}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu \omega^{d/2}}{3\Gamma(d/2)} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2+2\rho-2} e^{-\omega u}}{\sqrt{u^{2\rho} + \ell(\ell+1)/4}}. \quad (3.23)$$

Учитывая (3.23), из системы уравнений (2.27) для энергетического спектра исходного гамильтониана имеем

$$E(\mu) = \min_{\rho} \left\{ \frac{Z^2}{8\rho^2 \mu} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\ell\rho)}{\Gamma(3\rho + 2\ell\rho)} + \frac{\sigma_{\text{ad}}}{Z} \frac{\Gamma(4\rho + 2\ell\rho)}{\Gamma(3\rho + 2\ell\rho)} - \frac{4\alpha_s}{3\rho} \frac{Z}{\Gamma(3\rho + 2\ell\rho)} \int_0^\infty dt \frac{t^{2+2\ell} \exp(-t^{1/\rho})}{\sqrt{t^2 + Z^2 \ell(\ell+1)/4}} \right\}, \quad (3.24)$$

где параметр Z определяется из следующего уравнения:

$$Z^3 - \frac{4\rho^2 \mu \sigma_{\text{ad}} \Gamma(4\rho + 2\ell\rho)}{\Gamma(2 + \rho + 2\ell\rho)} - \frac{16Z^2 \rho^2 \mu \alpha_s}{3\Gamma(2 + \rho + 2\ell\rho)} \times \int_0^\infty dt \frac{t^{2+2\ell} \exp(-t^{1/\rho})}{\sqrt{t^2 + Z^2 \ell(\ell+1)/4}} [3\rho + 2\rho\ell - t^{1/\rho}] = 0. \quad (3.25)$$

Учитывая (3.24) и (3.25), из (3.19) и (3.20) определяем массу глюбола и конститuentную массу глюона. Полученные численные результаты представлены в табл. 8.

Таблица 8. Массовый спектр глюбола и глюона в связанном состоянии с учетом непертурбативного характера взаимодействия

ℓ	Параметры	α				
		0	0,1	0,2	0,3	0,39
1	ρ	0,574	0,58	0,59	0,595	0,60
	μ , ГэВ	0,3465	0,3553	0,3644	0,3739	0,3827
	μ_G , ГэВ	0,6931	0,7106	0,7288	0,7478	0,7654
	M , ГэВ	2,772 (2,77)	2,684	2,594 (2,56)	2,5002 (2,45)	2,418 (2,36)
2	ρ	0,5745	0,575	0,58	0,58	0,5850
	μ , ГэВ	0,4131	0,4184	0,4245	0,4302	0,4354
	μ_G , ГэВ	0,8261	0,8373	0,8489	0,8603	0,8707
	M , ГэВ	3,304 (3,30)	3,239	3,173 (3,14)	3,106 (3,05)	3,045 (2,97)
3	ρ	0,5751	0,5752	0,5755	0,5765	0,5850
	μ , ГэВ	0,4703	0,4744	0,4784	0,4824	0,486
	μ_G , ГэВ	0,9406	0,9488	0,9556	0,9647	0,9719
	M , ГэВ	3,762	3,710	3,656	3,603	3,555

3.4. Наклон траектории Редже для глюбола. В этом пункте определим наклон траектории Редже для двухглюонного связанного состояния. При больших значениях орбитального квантового числа $\ell \gg 1$ потенциалы, соответствующие одноглюонному обмену и непертурбативному взаимодействию, между собой сокращаются, а взаимодействие между составляющими частицами определяется потенциалом запириания. В этом случае массовый спектр глюбола определен в (3.11), и из этого выражения определяем зависимость массы глюбола от ℓ при значении $\ell \gg 1$. Используя асимптотические формулы для гамма-функции:

$$\Gamma(az + b) \sim \sqrt{2\pi} e^{-az} (az)^{az+b-1/2}, \quad (3.26)$$

из (3.11) в этом пределе для массы получаем

$$M_p = 8\sigma_{ad}\ell. \quad (3.27)$$

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными (подробнее см. в [40]). Из табл. 6, 7 и 8 видно, что с возрастанием константы связи масса связанного состояния уменьшается, а конститuentная масса составляющих частиц возрастает.

3.5. Спектр глоболов с учетом спин-орбитального взаимодействия. В этом пункте массовый спектр глоболов определяем с учетом спин-спинового и спин-орбитального взаимодействий. Полный гамильтониан взаимодействия представляется в виде

$$H = H_c + H_{\text{spin}}, \quad (3.28)$$

где H_c является центральным гамильтонианом, т. е. описывающим взаимодействие без учета спинового взаимодействия:

$$H_c = \frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma_{\text{ad}} r - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \ell(\ell + 1)/(r^2 \mu^2)4}} - 1 \right]. \quad (3.29)$$

Вторая часть гамильтониана описывает спин-орбитальное взаимодействие и записывается в стандартном виде (более детально см. в [41, 42]):

$$H_{\text{spin}} = H_{\text{SS}} + H_{\text{LS}} + H_{\text{TT}}. \quad (3.30)$$

Здесь H_{SS} — гамильтониан спин-спинового взаимодействия:

$$H_{\text{SS}} = \frac{(\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)}{\mu^2} \Delta V_v, \quad (3.31)$$

H_{LS} — гамильтониан, описывающий спин-орбитальное взаимодействие:

$$H_{\text{LS}} = \frac{(\mathbf{L} \mathbf{S})}{8\mu^2} \left[\frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_v - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_s \right], \quad (3.32)$$

и наконец, H_{TT} — тензорный гамильтониан взаимодействия:

$$H_{\text{TT}} = \frac{S_{12}}{48\mu^2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} V_v - \frac{\partial^2}{\partial r^2} V_v \right]. \quad (3.33)$$

Здесь V_v — векторный потенциал, соответствующий одноглюонному обмену:

$$V_v = -\frac{4\alpha_s}{3} \frac{1}{\sqrt{r^2 + \ell(\ell + 1)/\mu^2}4}, \quad (3.34)$$

а V_s — потенциал конфайнмента:

$$V_s = r\sigma_{\text{ad}}, \quad (3.35)$$

также использованы следующие обозначения:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2, \quad (3.36)$$

$$S_{12} = \frac{4}{(2\ell + 3)(2\ell - 1)} \left[\mathbf{L}^2 \mathbf{S}^2 - \frac{3}{2} (\mathbf{L} \mathbf{S}) - 3 (\mathbf{L} \mathbf{S})^2 \right].$$

Используя выражения (3.30)–(3.36) для гамильтониана взаимодействия, вычислим массовый спектр глюбола. Прежде всего определим массу для основного состояния, т. е. при $\ell = 0$. В этом случае энергетический спектр в нулевом приближении ОП

$$\varepsilon_0(E) = \varepsilon_0^C(E) + \varepsilon_0^{SS}(E), \quad (3.37)$$

где $\varepsilon_0^C(E)$ и $\varepsilon_0^{SS}(E)$ являются вкладами гамильтонианного центрального и спин-спинового взаимодействий соответственно:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^C(E) = & \frac{(1+\rho)\omega}{2} + \frac{4\rho^2\mu\sigma_{\text{ad}}}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(4\rho)}{\Gamma(1+\rho)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(3\rho)}{\Gamma(1+\rho)} - \\ & - \frac{16\alpha_s\rho^2\mu\omega^{1+\rho}}{3\Gamma(1+\rho)} \int_0^\infty du \frac{u^{3\rho-1} e^{-u\omega}}{\sqrt{u^{2\rho} + \ell(\ell+1)/\mu^2 4}}, \quad (3.38) \\ \varepsilon_0^{SS} = & \frac{\alpha_s\rho(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)}{36\mu} \frac{\omega^{1+\rho}}{\Gamma(1+\rho)}. \end{aligned}$$

После некоторых упрощений из условия ОП (2.27) получаем для энергетического спектра

$$E(\mu) = \sqrt{\sigma_{\text{ad}}} \min_{\{\rho, Z\}} \left[xA + \frac{1}{x}B \right], \quad (3.39)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A = & \frac{Z^2}{8\rho^2} \frac{\Gamma(2+\rho)}{\Gamma(3\rho)} - \frac{4Z\alpha_s}{3} \frac{\Gamma(2\rho)}{\Gamma(3\rho)} - \frac{\alpha_s\rho(\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2)}{144\rho^2} \frac{Z^3}{\Gamma(3\rho)}, \\ B = & \frac{1}{Z} \frac{\Gamma(4\rho)}{\Gamma(3\rho)}, \quad x = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma_{\text{ad}}}}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

а параметр x определяется из уравнений (1.17), (1.19). Используя эти параметры для массы глюбола, имеем

$$M = \sqrt{\sigma_{\text{ad}}} \left[2x + \frac{E(\mu)}{\sqrt{\sigma_{\text{ad}}}} \right]. \quad (3.41)$$

В этом случае определенная масса глюбола соответствует следующим состояниям спина с P - и C -четностями:

$$J^{PC} = 0^{++}, 1^{+-}, 2^{++}.$$

Наши численные результаты представлены в табл. 9.

В табл. 9 также приведены результаты других авторов, которые имеют хорошее согласие с нашими результатами. Теперь приступим к вычислению

Таблица 9. Массовый спектр глюбола для основного состояния $\ell = 0$ с учетом непертурбативного характера взаимодействия, а также спин-спинового [43] взаимодействия. В единицах ГэВ и при значении параметров $\sigma_{\text{ад}} = 0,45 \text{ ГэВ}^2$, $\alpha_s = 0,3$

J^{PC}	Наши результаты	Решеточные данные	Эксперимент	Другие работы
0^{++}	1,64	1,73 [44] 1,63 [45] 1,61 [46] 1,75 [47]	1,50 [48] 2,11 [48] 2,32 [49]	1,98 [50] 2,69 [51]
2^{++}	1,97	2,40 [53] 2,35 [45] 2,26 [46] 2,42 [47]	2,02 [52]	2,42 [50] 2,70 [51]

энергетического спектра глюбола с $\ell \neq 0$. В этом случае из УШ с полным гамильтонианом для энергетического спектра $E(\mu)$ в рамках ОП имеем

$$E = E^{(C)} + E^{(SS)} + E^{(LS)} + E^{(TT)}. \quad (3.42)$$

Здесь $E^{(C)}$ — вклад в энергетический спектр глюбола от центрального гамильтониана:

$$E^{(C)} = \frac{x^2 \sqrt{\sigma_{\text{ад}}} \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{8\rho^2 \Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} + \frac{\sqrt{\sigma_{\text{ад}}} \Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{xz \Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} - \frac{4\alpha_s xz \sqrt{\sigma_{\text{ад}}}}{3\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \int_0^\infty du \frac{u^{3\rho+2\rho\ell-1} e^{-u}}{\sqrt{u^{2\rho} + z^2 \ell(\ell+1)/4}}, \quad (3.43)$$

а $E^{(LS)}$ — вклад спин-орбитального взаимодействия:

$$E^{(LS)} = \frac{z^2 \sqrt{\sigma_{\text{ад}}} (\mathbf{LS})}{8\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \times \left\{ -\frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{xz} + 4\alpha_s xz \int_0^\infty du \frac{u^{3\rho+2\rho\ell-1} e^{-u}}{\left[u^{2\rho} + \frac{z^2 \ell(\ell+1)}{4} \right]^{3/2}} \right\}, \quad (3.44)$$

$E^{(TT)}$ — вклад тензорного взаимодействия:

$$E^{(TT)} = \frac{\alpha_s x z^3 \sqrt{\sigma_{\text{ад}}} S_{12}}{12\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \int_0^\infty du \frac{u^{5\rho+2\rho\ell-1} e^{-u}}{\left[u^{2\rho} + \frac{z^2 \ell(\ell+1)}{4} \right]^{5/2}}, \quad (3.45)$$

и, наконец, $E^{(SS)}$ — вклад спин-спинового взаимодействия:

$$E^{(SS)} = \frac{\alpha_s \ell \sqrt{\sigma_{\text{ад}}} (\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2)}{18\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} x z^3 \rho^2 \int_0^\infty du \frac{u^{3\rho+2\rho\ell-1} e^{-u}}{\left[u^{2\rho} + \frac{z^2 \ell(\ell+1)}{4} \right]^{5/2}} \times \\ \times \left[u^{2\rho} + \frac{z^2}{2} (3+2\ell)(1+\ell) \right]. \quad (3.46)$$

Параметр x определяется из уравнения

$$2 + \frac{1}{\sqrt{\sigma_{\text{ад}}}} \frac{\partial E}{\partial x} = 0, \quad (3.47)$$

энергия определяется в следующем виде:

$$E(\mu) = \min_{\{\rho, Z\}} [E(x, \rho, z)]. \quad (3.48)$$

Наши численные результаты для массового спектра глюбола при состояниях $\ell \neq 0$ представлены в табл. 10.

Таблица 10. Массовый спектр глюбола для состояний $\ell \neq 0$. Значения параметров $\sigma_{\text{ад}} = 0,45 \text{ ГэВ}^2$, $\alpha_s = 0,3$ (в единицах ГэВ)

S	$\ell = 1$			$\ell = 2$			$\ell = 3$		
	J^{PC}	Наши результаты	Другие работы	J^{PC}	Наши результаты	Другие работы	J^{PC}	Наши результаты	Другие работы
0	0^{--}	2,95		0^{++}	3,39	1,72 [44]	0^{--}	3,95	
	1^{--}	2,99		1^{++}	3,42		1^{--}	3,97	3,81 [44]
				2^{++}	3,47	3,50 [47]	2^{--}	4,00	3,90 [44]
							3^{--}	4,05	4,10 [44]
1	0^{-+}	2,92	2,59 [53]	0^{+-}	3,36	4,82 [44]	0^{-+}	3,90	3,64 [46]
	1^{-+}	2,95		1^{+-}	3,39	2,95 [44]	1^{-+}	3,95	
	2^{-+}	3,02	3,10 [53]	2^{+-}	3,44	4,10 [44]	2^{-+}	3,99	3,89 [46]
				3^{+-}	3,52	3,53 [44]	3^{-+}	4,03	
						4^{-+}	4,10		
2	0^{--}	2,86		0^{++}	3,31	2,67[32]	0^{--}	3,90	
	1^{--}	2,89		1^{++}	3,33		1^{--}	3,92	
	2^{--}	2,95		2^{++}	3,38	2,38 [44]	2^{--}	3,95	
	3^{--}	3,05		3^{++}	3,46	3,69 [46]	3^{--}	4,00	

3.6. Обсуждение результатов. Аналитически определен массовый спектр глобола и конститuentные массы глюона. Определены непертурбативные добавки к гамильтониану взаимодействия, которые связаны с релятивистским характером взаимодействия. При больших значениях орбитального квантового числа, т. е. при $\ell \Rightarrow \infty$, вклады векторного потенциала и потенциала, связанного с непертурбативным характером взаимодействия, между собой сокращаются, и наклон траектории Редже определяется через тензор натяжения струны. Эти результаты хорошо описывают экспериментальные данные.

В нашем подходе массовый спектр связанного состояния представлен в (1.12) и выражается через собственное значение гамильтониана взаимодействия с непертурбативной и релятивистской поправками, которые определяются из УШ. Наши численные результаты представлены в табл. 6–10. В настоящий момент массовый спектр глобола определяется только в численном эксперименте, т. е. из решеточной КХД. Мы определили массовый спектр глобола со спинами $S = 0-2$ и с орбитальными моментами $\ell = 0-3$. Массовый спектр глоболов, состоящий только из скалярных глюонов, определен в [39], и наши результаты хорошо согласуются с ним. Массовый спектр, полученный нами для основного состояния, т. е. при $\ell = 0$ со спинами $J^{PC} = 0^{++}, 2^{++}$, представлен в табл. 9. Наши результаты по массам для состояния $J^{PC} = 0^{++}$ хорошо согласуются с результатами решеточных экспериментов (см. табл. 9), а результаты других теоретических работ отличаются от результатов численного эксперимента. Наши результаты для состояния $J^{PC} = 2^{++}$ меньше, чем решеточные данные, однако согласуются с результатами [52]. В табл. 10 приведены численные результаты для масс глоболов со спинами $S = 0-2$ и с орбитальным возбуждением. В настоящее время массовый спектр, описывающий состояние глобола со спинами $S = 0-2$ и орбитальным возбуждением универсальным образом, как аналитического, так и численного подхода не имеет. Наши численные результаты согласуются с результатами других авторов следующим образом: для состояния $\ell = 1$ со спином $S = 1$ с работой [53]; для $\ell = 3, S = 0$ с работой [44, 46]; для $\ell = 3$ и $S = 1$ с работой [46]. Решеточные вычисления для состояния с орбитальным возбуждением $\ell = 2$ и со спином $S = 1$, которые получены в [44], а также спектр высоковозбужденных состояний оказывается ниже, чем наши численные результаты (см. табл. 10). С другой стороны, наши результаты, полученные для состояния с орбитальным квантовым числом $\ell = 2$ и $S = 0$, наилучшим образом согласуются с решеточными данными, полученными в [47].

Наш подход приемлемо описывает массовый спектр глобола как основного, так и возбужденного состояний. В частности, в нашем подходе для любых ℓ с возрастанием J масса связанного состояния увеличивается. Тогда можно утверждать, что наш подход универсальным образом описывает массовый спектр глобола для орбитально возбужденных состояний и для любых значений спинового квантового числа. Однако многие авторы ограничиваются

рассмотрением, к примеру, только возбужденных состояний [44] или только основного состояния [47] глюбола по отдельности, а в нашем подходе мы рассматриваем как основные, так и возбужденные состояния единым образом с учетом спин-спинового и спин-орбитального взаимодействий.

4. СПЕКТР МЕЗОНОВ С ОРБИТАЛЬНЫМ И РАДИАЛЬНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЯМИ

Описание массового спектра адронов с орбитальным и радиальным возбуждениями является одной из фундаментальных проблем сильных взаимодействий. В настоящий момент существуют феноменологические потенциальные модели кварков [12–14], которые хорошо описывают массовый спектр адронов. Однако большинство этих моделей в основном содержат многочисленные параметры, многие из которых физически никак не обоснованы, либо эти модели ограничиваются описанием только конкретных случаев. Кроме того, феноменологические модели кварков в основном описывают физику адронов, состоящих из тяжелых кварков [12]. При изучении свойств адронов, состоящих из легких кварков, требуется учет релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействий. К настоящему времени отсутствует общепринятый рецепт учета релятивистского нелокального характера взаимодействия в феноменологических моделях кварков. В феноменологической модели кварков, т. е. в нерелятивистском УШ, нарушается условие релятивистской инвариантности [54].

При определении непертурбативного характера взаимодействия в стандартной КТП обычно сталкиваются с решением интегрального уравнения типа уравнения Бете–Солпитера с произвольным ядром. Конечно, найти решение такого уравнения очень сложно. Поэтому описание свойств связанного состояния с учетом релятивистского, непертурбативного и нелокального характера взаимодействий требует особого рассмотрения. В КХД до недавнего времени только в рамках метода правил сумм [55] использовали калибровочно-инвариантный язык конденсатов, чтобы описать вклад непертурбативного характера взаимодействия. Однако для описания большинства явлений, возникающих на больших расстояниях, этот метод оказывается недостаточным. В [56], где используется представление Фока–Фейнмана–Швингера, предложен один из методов учета непертурбативного характера взаимодействия для описания свойств релятивистского связанного состояния. Основой метода является применение калибровочно-инвариантной функции Грина для белых объектов, которые могут быть записаны с помощью интегралов по путям [57]. Ключевым моментом данного подхода является вычисление функционального интеграла. Конечно, этот интеграл в общем виде не вычисляется, его вычисление возможно только при некоторых физических

предположениях. В [15, 31, 38] предложен один из альтернативных вариантов вычисления функционального интеграла и определена масса глобола. В нашей работе с учетом релятивистского и нелокального характера взаимодействий вычислен массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, с орбитальным и радиальным возбуждениями, а также определена зависимость конститuentной массы составляющих частиц от масс исходного состояния. Вычислены наклон и параметр пересечения редже-траектории для орбитального и радиального возбужденных состояний. Полученные результаты удовлетворительно согласуются с существующими экспериментальными данными.

4.1. Спектр мезонов, состоящих из легко-легких кварков. *4.1.1. Спектр линейно растущего потенциала.* Запирание цветных зарядов осуществляется с помощью линейно растущего потенциала. Определим $E(\mu)$ — энергетический спектр линейно растущего потенциала, с учетом орбитального и радиального возбуждения:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma \cdot r \right] \Psi = E(\mu) \Psi, \quad (4.1)$$

где σ — параметр натяжения струны. Энергетический спектр и волновая функция определяются из УШ в рамках метода ОП [22, 24]. Прежде всего перейдем к d -мерному вспомогательному пространству R^d , а гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме по операторам рождения a^+ и уничтожения a (детали см. в [24]):

$$H = H_0 + \varepsilon_0(E) + H_I, \quad (4.2)$$

где H_0 — гамильтониан свободного осциллятора:

$$H_0 = \omega(a_j^+ a_j), \quad (4.3)$$

а энергия основного состояния $\varepsilon_0(E)$ в R^d имеет вид

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2 \mu E \Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2 \mu \sigma \Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(d/2)} \quad (4.4)$$

и H_I , гамильтониан взаимодействия, представляется в нормальной форме:

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2 \mu}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(1-2\rho)} E x^{-2\rho} + \frac{4\rho^2 \mu}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(1-3\rho)} \sigma x^{-3\rho} \right]. \quad (4.5)$$

Энергетический спектр в R^d определяется следующим образом:

$$\varepsilon_{n_r}(E) = \langle n_r | H | n_r \rangle = \varepsilon_0(E) + 2n_r\omega + \langle n_r | H_I | n_r \rangle. \quad (4.6)$$

Матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ имеет вид

$$\langle n_r | H_I | n_r \rangle = -\frac{4\rho^2 E \mu \Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \mu \sigma \Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (4.7)$$

Детали вычисления матричного элемента (4.7) приведены в приложении Б, а параметры \tilde{B} и \tilde{C} — в (Б.6) и (Б.7) соответственно. Согласно методу ОП энергетический спектр исходного УШ и частота осциллятора определяются из системы уравнений (2.27). Прежде всего определим энергетический спектр с орбитальным возбуждением. Тогда, учитывая (4.4), из (2.27) для частоты осциллятора ω получаем

$$\omega^\rho = (\mu\sigma)^{1/3} \left[\frac{4\rho^2 \Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/3} \quad (4.8)$$

и для энергетического спектра имеем

$$E(\ell, 0) = \frac{3}{2} \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \min_{\rho} \left[\frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell) \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{4\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/3}. \quad (4.9)$$

В этом случае, учитывая (4.8) и (4.9), из (1.19) получаем массу связанного состояния

$$M(\ell, 0) = 2\sqrt{\sigma} \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell) \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}. \quad (4.10)$$

Мы аналитически определили энергетический спектр и массу связанного состояния с орбитальным возбуждением для растущего потенциала. Далее приступаем к определению массового спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями. После некоторых упрощений для частоты осциллятора с учетом радиального возбуждения имеем

$$\omega_{n_r}^\rho = \omega^\rho D_1^{1/3}, \quad (4.11)$$

где ω^ρ представлена в (4.8).

Для энергетического спектра получаем

$$E(\ell, n_r) = \frac{\sigma^{2/3}}{\mu^{1/3}} \min_{\rho} \left[\frac{D_4^3 \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell) \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)}{32\rho^2 \Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell) D_1} \right]^{1/3}. \quad (4.12)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \frac{\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}}{\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B}}, \\
 D_2 &= \left(1 + \frac{4n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell}\right) \frac{1}{1 + \tilde{B}}, \\
 D_3 &= \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}}, \quad D_4 = D_2 D_1 + 2D_3.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

В этом случае согласно (1.18) масса связанного состояния определяется в виде

$$M(\ell, n_r) = 2\sqrt{\sigma} \left[\frac{\Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell)\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)D_4^3}{27D_1\rho^2\Gamma^3(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/4}. \tag{4.14}$$

Таким образом, мы аналитически определили массу связанного состояния с орбитальным и радиальным возбуждениями мезонов, состоящих из легких кварков, для растущего потенциала при условии

$$\frac{m_u}{\sqrt{\sigma}} \cong \frac{m_d}{\sqrt{\sigma}} \ll 1, \tag{4.15}$$

где m_u и m_d — массы легких кварков.

4.1.2. Спектр кулоновского плюс растущего потенциала. Теперь приступим к определению энергетического спектра кулоновского плюс растущего потенциала с учетом орбитального и радиального возбуждений из УШ:

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma r - \frac{4\alpha_s}{3r} \right] \Psi = E(\mu)\Psi. \tag{4.16}$$

Согласно ОП гамильтониан взаимодействия представим в нормальной форме в d -мерном вспомогательном пространстве R^d . В этом случае $\varepsilon_0(E)$ — энергия основного состояния — в R^d имеет вид

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_0(E) &= \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \times \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + \rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tag{4.17}
 \end{aligned}$$

и гамильтониан взаимодействия

$$H_I = \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega} : \times \\ \times \left[-\frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} \right]. \quad (4.18)$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным в предыдущих разделах, и учитывая представление (А.9), определим энергетический спектр с учетом только орбитального возбуждения:

$$\frac{E(\ell, 0)}{\sqrt{\sigma}} = \\ = \min_\rho \left[\frac{z^2}{8\rho^2 x} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} + \frac{\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{z\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} - \frac{4\alpha_s z}{3} \frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \right]. \quad (4.19)$$

Здесь параметры z и x определяются из уравнения

$$z^3 - z^2 \frac{16x\alpha_s\rho^2\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{3\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} - \frac{4x\rho^2\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} = 0 \quad (4.20)$$

и

$$2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{x}} \right) = 0. \quad (4.21)$$

Масса и конституентная масса параметризованы в следующем виде:

$$\mu = \sqrt{\sigma}x, \quad \text{и} \quad M = 2\mu + E. \quad (4.22)$$

В этом случае энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями после некоторых упрощений для кулоновского плюс растущего потенциала имеет вид

$$\frac{E(\ell, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = \min_\rho \left[\frac{z^2}{8x\rho^2} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \frac{4n_r}{1+\rho+2\rho\ell}}{1 + \tilde{B}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \frac{4\alpha_s z}{3} \frac{\Gamma(2\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{D}}{1 + \tilde{B}} \right], \quad (4.23)$$

параметр z определяется из уравнения

$$z^3 - z^2 x \frac{16\alpha_s \rho^2}{3} \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + (2\rho - 1)\tilde{D} - (\rho - 1)\tilde{B}]}{\left[\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B}\right]} -$$

$$- 4x\rho^2 \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + (3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}]}{\left[\rho + (2\rho - 1)\frac{n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B}\right]} = 0, \quad (4.24)$$

а параметр x — из уравнения (4.21), явный вид параметров \tilde{B} , \tilde{C} и \tilde{D} приведен в приложении Б.

Масса и конstituентная масса связанного состояния определяются из (4.22). В приближении (4.15) мы определили массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких кварков.

На рис. 1 представлена зависимость квадрата массового спектра от орбитального квантового числа при различных значениях радиального квантового числа $n_r = 0, \dots, 4$, где константа сильного взаимодействия $\alpha_s = 0,39$. Из (4.14), (4.19) и (4.23) видно, что энергетический спектр и масса связанного состояния определены в единицах $\sqrt{\sigma}$, где σ — параметр натяжения струны, который является единственным параметром в нашем методе [31, 38]. По многочисленным результатам описания экспериментальных и решеточных данных значение натяжения струны равно $\sigma = 0,19$ ГэВ². При малых значениях $\ell \leq 5$ зависимость M^2/σ от ℓ является линейной и может быть

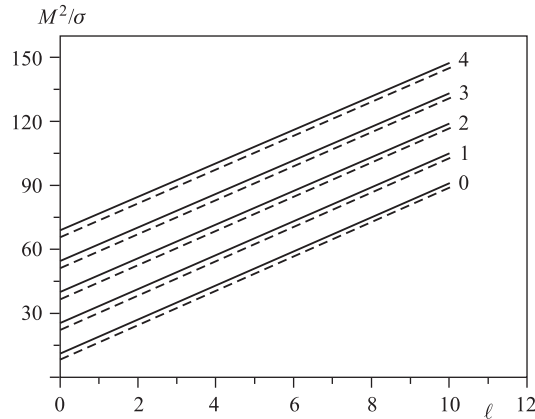


Рис. 1. Зависимость квадрата масс мезонов, состоящих из легко-легких кварков, определенных в единицах σ , от ℓ при значениях $n_r = 0, \dots, 4$. Сплошные линии соответствуют растущему потенциалу, а штриховые — кулоновскому плюс растущему потенциалу

аппроксимирована для растущего потенциала

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 8\ell + 3,5\pi, \quad (4.25)$$

для кулоновского плюс растущего потенциала

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 8\ell + 2,64\pi, \quad (4.26)$$

Параметр наклона ℓ -траектории Редже при $\ell \leq 5$ экспериментально определен в [58–64] и равен

$$\alpha'_{L(\text{exp})} = (0,81 \pm 0,01) \text{ ГэВ}^{-2}, \quad (4.27)$$

а в нашем случае (для обоих видов потенциала он является одинаковым) $\alpha'_L = 0,658 \text{ ГэВ}^{-2}$, т. е. ниже, чем дает эксперимент. Экспериментальное значение параметра пересечения ℓ -траектории Редже в [58–64]

$$\alpha_{L(\text{exp})}(0) = -0,30 \pm 0,02, \quad (4.28)$$

у нас для растущего потенциала $\alpha_L(0) = -1,374$ и для кулоновского плюс растущего потенциала $\alpha_L(0) = -1,037$, т. е. в этом случае по модулям наши результаты больше, чем экспериментальные. Поведение n_r -траектории Редже параметризуется в виде [59]

$$M^2(\ell, n_r) = M^2(\ell, 0) + \Omega n_r. \quad (4.29)$$

Параметр Ω определен из эксперимента для состояний $n_r = 1, 2, 3$ [62–64] в интервале $\Omega_{\text{exp}} = (1,6–1,388) \text{ ГэВ}^{-2}$. При значении натяжения струны $\sigma = 0,198 \text{ ГэВ}^{-2}$ для растущего потенциала определено среднее значение параметра $\Omega = 2,7056 \text{ ГэВ}^{-2}$, а для кулоновского плюс растущего потенциала $\Omega = 2,656 \text{ ГэВ}^{-2}$. Таким образом, полученные результаты без учета непертурбативного и нелокального характера взаимодействия для наклона и параметра пересечения редже-траектории имеют неудовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

4.2. Спектр мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков. Мы аналитически определили массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких кварков, с орбитальным и радиальным возбуждениями для линейно растущего и кулоновского плюс растущего потенциалов. В этом пункте приступим к определению массового спектра мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, и конститuentной массы кварков с орбитальным и радиальным возбуждениями для этих потенциалов. В этом случае

$$m_1 = 0, \quad m_2 = m_q \neq 0, \quad (4.30)$$

где m_q — масса, в частности, s -кварка.

Прежде всего вычислим массу и конституентную массу для растущего потенциала. С учетом (4.10) и (4.9) из (4.11) определен энергетический спектр с орбитальным и радиальным возбуждениями, при этом масса и конституентная масса определяются из (1.18) и (1.19) соответственно. Тогда после некоторых упрощений для массы связанного состояния получаем

$$M(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \left(\sqrt{\mu_0 s^2} + \sqrt{\xi^2 + \mu_0 s^2} + \frac{s^2}{\sqrt{\mu_0}} \right) \quad (4.31)$$

и для конституентной массы кварков имеем

$$\mu_1(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma \mu_0 s^2}, \quad \mu_2(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma(\xi^2 + \mu_0 s^2)}, \quad (4.32)$$

а энергетический спектр определяется в виде

$$E(\ell, n_r) = \frac{3}{2} \min_{\rho} \left(\frac{s^2 \sqrt{\sigma}}{\sqrt{\mu_0}} \right). \quad (4.33)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\xi^2 = \frac{m_q^2}{\sigma}, \quad s^2 = \left[\frac{D_4^3 \Gamma^2(4\rho + 2\rho\ell) \Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{108 \rho^2 \mu^3 D_1 \Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \right]^{1/3}, \quad (4.34)$$

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \frac{s^4 - 2\xi^2 s}{2s^3 - \xi^2} + \sqrt{\frac{(s^4 - 2\xi^2 s)^2}{4(2s^3 - 2\xi^2)^2} + \frac{s^2 \xi^2}{2s^3 - \xi^2}}.$$

В том случае, когда потенциал взаимодействия является кулоновским плюс растущим, энергетический спектр определяется (4.23), а параметр z — из (4.24). Из (1.19), учитывая (4.23), для конституентной массы кварков имеем

$$\mu_1(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \sqrt{-2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}, \quad (4.35)$$

$$\mu_2(\ell, n_r) = \sqrt{\sigma} \sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}.$$

При этом параметр x определяется из уравнения

$$1 - \frac{1}{\sqrt{-2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}} - \frac{x}{\sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right)}} = 0. \quad (4.36)$$

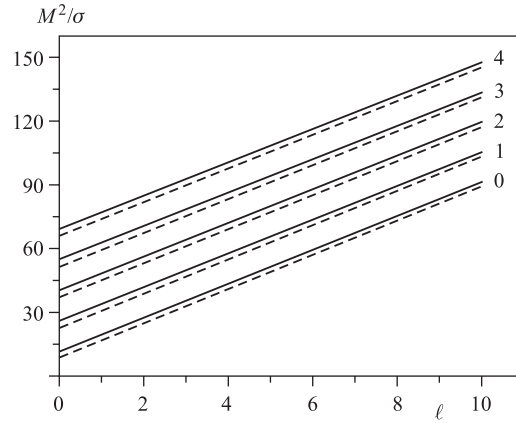


Рис. 2. Зависимость квадрата масс мезонов, состоящих из легко-тяжелых кварков, от ℓ при $n_r = 0, \dots, 4$ и $m_s = 0,155$ ГэВ, $\alpha_s = 0,39$. Сплошные линии соответствуют растущему потенциалу, а штриховые — кулоновскому плюс растущему потенциалу

Полученные численные результаты представлены на рис. 2 при значениях массы s -кварка $m_s = 0,155$ ГэВ, константы связи $\alpha_s = 0,39$ и натяжения струны $\sigma = 0,19$ ГэВ². Редже-траектория для орбитально возбужденного состояния при $n_r = 0$ для растущего потенциала параметризуется как в (4.25) и является линейной, а для кулоновского плюс растущего потенциала наклон редже-траектории с ростом ℓ увеличивается, например, при $\ell = 1$ $\alpha'_L = 0,629$, а при $\ell = 5$, $\alpha'_L = 0,656$, т. е. траектория является нелинейной. Эта зависимость качественно согласуется с экспериментальным результатом [60] для ℓ -траектории Редже каонов, которые состоят из легко-тяжелых кварков.

4.3. Зависимость конституентной массы связанного состояния от масс составляющих частиц. В настоящий момент существуют многочисленные модели, как потенциальные, так и непотенциальные, которые описывают свойства и механизм взаимодействия адронов. Экспериментально [61] более или менее уточнены массы различных кварков. В большинстве (почти во всех) моделях используется масса кварков как исходный параметр, при этом для массы легких кварков, в частности, u -, d -кварков, считают, что $m_u = 150\text{--}220$ МэВ, а экспериментально [61] — всего лишь $m_u \approx m_d \sim 4\text{--}8,5$ МэВ. С другой стороны, масса π -мезона, состоящего из u - и d -кварков, равна ~ 140 МэВ, т. е. массы легких кварков в связанном состоянии резко увеличиваются. Также известно, что массы c - и b -кварков, формирующих чармоний и боттомоний, в связанном состоянии являются почти постоянными. Тогда возникает естественный вопрос: можно ли объяснить механизм увеличения масс легких кварков и почти постоянство масс тяжелых квар-

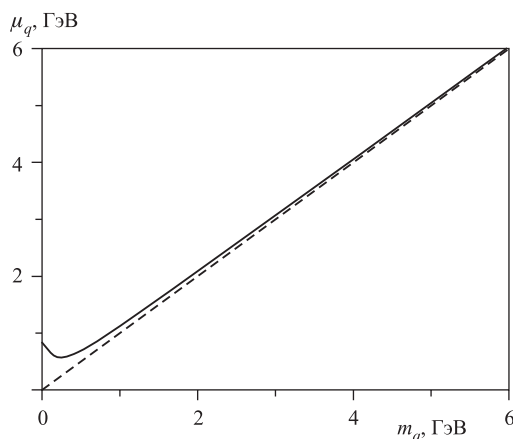


Рис. 3. Зависимость конstituентной массы от массы свободного состояния при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$ для основного состояния

ков в связанном состоянии. Этому вопросу посвящено много работ, однако в рамках потенциальных и даже полевых моделей пока не удалось объяснить этот механизм по существу. Наши результаты показывают, что в рамках метода [31, 38, 43, 65] возможно описать увеличение масс легких кварков, а также почти не увеличенные массы тяжелых кварков в связанном состоянии. Из (1.19) видно, что конstituентная масса связанного состояния определяется через m и E , т. е. в нашем случае конstituентная масса зависит от m — массы исходного состояния, а также от квантовых чисел ℓ и n_r . С использованием этих зависимостей для кулоновского плюс растущего потенциала при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$ определена зависимость конstituентной массы от m для основного состояния, которая представлена на рис. 3. Видно, что когда m мала, разность конstituентных и валентных масс кварков велика, и с возрастанием массы m разность этих масс уменьшается. Для растущего потенциала получаются аналогичные зависимости этих величин. При различных значениях m определяется отношение и разности масс конstituентных и исходных состояний к первоначальной массе частиц. Наши результаты показали, что при $m = 0,155 \text{ ГэВ}$ отношение масс $(\mu - m)/m = 1,942$, т. е. разность почти в два раза больше массы исходного состояния, а при $m = 0,45 \text{ ГэВ}$ составляет 0,44, при $m_q = 1,5 \text{ ГэВ}$ (в районе масс c -кварка) это отношение равно всего лишь 0,095, т. е. разность конstituентных и исходных масс в 10,5 раз меньше массы исходного состояния; это наглядно видно на рис. 3. Когда кварк достаточно легкий, конstituентная масса кварка во много раз больше валентной массы кварка. С возрастанием массы исходного состояния разность конstituентной и исходной масс уменьшается. Если

масса исходного состояния сопоставима с массой тяжелых кварков, таких как c и b , то разность конститuentной массы и массы исходного состояния становится незначительной.

4.4. Вклад непертурбативного и нелокального характера взаимодействий в массовый спектр связанного состояния. 4.4.1. *Спектр связанного состояния с учетом вклада диаграммы собственной энергии.* В нашем методе взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется выражением (1.11). Из (1.11) видно, что недиагональное взаимодействие $W_{1,2}$ определяет взаимодействие между составляющими частицами, а в нерелятивистском пределе соответствует потенциалу взаимодействия. Взаимодействие составляющих частиц в связанном состоянии определяется не только обменом глюонов между собой, но и взаимодействием частиц самих с собой, т. е. диаграммой собственной энергии, вклад которой определяется выражениями $W_{1,1}$ и $W_{2,2}$. В этом разделе излагаются детали определения вкладов $W_{1,1}$ и $W_{2,2}$, т. е. вкладов диаграмм собственной энергии в массовый спектр связанного состояния и в конститuentную массу. Учет вклада диаграммы собственной энергии приводит к тому, что появляется дополнительный гамильтониан, явный вид которого определен в [66]:

$$\Delta H_{SE} = -\frac{3\sigma}{\pi} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right), \quad (4.37)$$

где μ_1 и μ_2 — конститuentные массы составляющих частиц, а σ — натяжение струны. С учетом (4.37) для массового спектра связанного состояния, состоящего из легко-легких кварков, имеем

$$M = 2\mu + E - \frac{2\sigma}{\pi\mu}. \quad (4.38)$$

В этом случае параметр μ определяется из уравнения

$$2 + \frac{\partial E}{\partial \mu} = 0. \quad (4.39)$$

Массу связанного состояния, состоящего из легко-тяжелых кварков, определяем в виде

$$\frac{M}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} + \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{E}{\sqrt{\sigma}}, \quad (4.40)$$

где μ_1 и μ_2 — конститuentные массы составляющих частиц:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{\sqrt{\sigma}} &= \sqrt{-2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}, \\ \frac{\mu_2}{\sqrt{\sigma}} &= \sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Здесь использована параметризация $\mu = x\sqrt{\sigma}$, параметр x определяется из уравнения

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{-2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}} + \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 2x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{\sigma}} \right) + \frac{4}{\pi}}}, \quad (4.42)$$

а параметр ξ представлен в (4.34). Энергетический спектр E для конкретного вида потенциала определяется из УШ, он был представлен в предыдущем разделе.

4.4.2. *Спектр связанного состояния с учетом непертурбативной добавки.* Определение потенциала взаимодействия между составляющими частицами в связанном состоянии с обменом непертурбативных глюонов приводит к дополнительному взаимодействию, явный вид которого определен в работе [38]:

$$\Delta H_{\text{str}} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell(\ell+1)}{4\mu^2 r^2}}} - 1 \right]. \quad (4.43)$$

Это взаимодействие очень похоже на струнную добавку, которая определена в [58, 59]. Струнные добавки определяются различными методами. В частности, в [59] это взаимодействие определяется в рамках теории возмущений как малая поправка. Из (4.43) видно, что при $\ell = 0$ вклад этого взаимодействия равен нулю. Если $\mu \gg 1$, то в (4.43) можно провести разложение по степеням малой величины. Разложение первого порядка соответствует результатам вышеуказанных работ. Вклад взаимодействия (4.43) в энергетический спектр $E(\mu)$ определяется с помощью ОП. Для простоты определим струнную добавку к энергетическому спектру растущего потенциала. Энергия в нулевом приближении в ОП равна:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E) = & \frac{d\omega}{4} - \frac{4\rho^2 E \mu \Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\omega^{2\rho-1} \Gamma(d/2)} + \\ & + \frac{4\rho^2 \sigma \mu \Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\omega^{3\rho-1} \Gamma(d/2)} + \frac{16\alpha_s \rho^2 \mu \Gamma(d/2 + \rho - 1)}{3\omega^{\rho-1} \Gamma(d/2)} - \\ & - \frac{16\rho^2 \alpha_s \mu \omega^{d/2+1}}{3 \Gamma(d/2)} \int_0^\infty du \frac{u^{d/2+2\rho-2} e^{-\omega u}}{\sqrt{u^{2\rho} + \ell(\ell+1)/\mu^2 4}}, \quad (4.44) \end{aligned}$$

а гамильтониан взаимодействия в нормальной форме представляется в виде

$$\begin{aligned}
 H_I = & \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega(q\eta)} : \times \\
 & \times \left[-\frac{4\rho^2\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{Ex^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2\mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\sigma x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} + \right. \\
 & + \frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \frac{16\rho^2\alpha_s\mu}{3} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{\Gamma(1/2)} \times \\
 & \left. \times \int_0^\infty d\tau \exp \{ -\ell(\ell+1)\tau/\mu^2 \} \frac{\tau^{j-1/2}}{\omega^{2\rho+2j\rho-1}} \frac{x^{-2\rho-2j\rho}}{\Gamma(1-2\rho-2j\rho)} \right]. \quad (4.45)
 \end{aligned}$$

Из системы уравнений (2.27) определим энергетический спектр и частоту осциллятора с учетом орбитального и радиального возбуждений. Масса и конститuentная масса для связанного состояния определяются из (4.22) для легко-легких кварков, а из (4.31) — для легко-тяжелых кварков. Эти алгебраические уравнения решаются численным образом.

4.5. Спектр связанного состояния с учетом нелокальности взаимодействия. 4.5.1. *Модифицированный потенциал взаимодействия.* В потенциальном подходе считают, что конфайнмент цветных объектов может быть объяснен только вне рамок теории возмущений и что он связан с возникновением линейно растущего кварк-кваркового потенциала или кварк-антикварковой струны в результате непертурбативного (нелинейного) взаимодействия глюонов. Однако при описании поведения адронов, состоящих из легких кварков, необходим учет эффектов, возникающих на больших расстояниях. Очевидно, что процессы конфайнмента и адронизации кварков происходят на одних и тех же расстояниях. В настоящий момент переход на большие расстояния осуществляется двумя способами: введением корреляционной длины T_g глюонного вакуума или введением радиуса конфайнмента r_c , связанного с расстоянием между составляющими частицами (кварками) в адроне (детали см. в [59]). В данной работе нелокальный характер взаимодействия учитывается введением радиуса конфайнмента. Естественно, поведение кварков и глюонов определяется пропагаторами, в частности, для кварков — Дирака, а для глюона — Клейна–Гордона. КХД полностью описывает поведение кварков и глюонов, и на малых расстояниях кварки становятся почти свободными. Это экспериментально подтверждено. Поэтому при малых расстояниях в области деконфайнмента поведение пропагаторов кварков и глюонов соответствует плоским волнам. Конечно, эти пропагаторы, соответствующие плоским волнам, не могут правильно описать свойства частиц в области конфайнмента, т. е. на больших расстояниях. В связи с этим пропагаторы квар-

ков и глюонов в области конфайнмента определяются в рамках нелокальной квантовой теории поля [67]. В [68] в рамках нелокальной КТП было показано, что пропагаторы конститuentных частиц (кварков и глюонов) являются целыми аналитическими функциями гауссова типа в импульсном пространстве. В частности, пропагаторы безмассовых частиц определены в евклидовом пространстве в виде

$$\tilde{D}(p^2) = \frac{1}{p^2} \left(1 - \exp \left\{ -\frac{p^2}{2\Lambda^2} \right\} \right) \Rightarrow \frac{1}{p^2} \text{ при } \Lambda \rightarrow 0 \quad (4.46)$$

или в координатном представлении

$$D(y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp \{ i(py) \} \tilde{D}(p^2) = \frac{1}{4\pi^2 y^2} \exp \left\{ -\frac{\Lambda y}{2} \right\}. \quad (4.47)$$

Здесь $y = (\mathbf{y}, y_4)$, $\mathbf{y} \in R^3$, $y_4 \in R^1$. Параметр Λ определяет шкалу конфайнмента, $r_c = 1/\Lambda$ — радиус конфайнмента. Когда взаимодействие между составляющими частицами в связанном состоянии осуществляется обменом безмассовых частиц с пропагатором (4.46), тогда потенциал в нерелятивистском пределе определяется следующим образом:

$$V_{\text{mod}}(\mathbf{r}) = g^2 \int_{-\infty}^{\infty} du D(\mathbf{r}^2 + u^2) = \frac{\alpha_s}{r} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{r\Lambda/\sqrt{2}} ds e^{-s^2} \right], \quad (4.48)$$

и при $\Lambda \rightarrow 0$ из (4.47) получаем стандартный кулоновский потенциал. Таким образом, потенциал взаимодействия в области конфайнмента модифицируется. С другой стороны, в области конфайнмента потенциал взаимодействия может быть определен с помощью функции распределения

$$V_{\text{mod}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' V(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r}), \quad (4.49)$$

где $V(\mathbf{r}')$ — потенциал, соответствующий плоскому пропагатору глюона, т. е. $V(\mathbf{r}') = 1/r'$, а $\Phi(\mathbf{r}' - \mathbf{r})$ — функция распределения, которая согласно (4.49) в R^3 равна

$$\Phi(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}') - \frac{\Lambda^3}{(2\pi)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\Lambda^2 \mathbf{r}'^2}{2} \right\}. \quad (4.50)$$

Аналогичное определение потенциала взаимодействия в области конфайнмента через потенциал в области деконфайнмента приведено в [69]. Такая же модификация существует для линейно растущего потенциала. Согласно (4.46) пропагатор, приводящий к линейно растущему потенциалу, представим в виде

$$\tilde{D}(p^2) = -\frac{1}{p^4} \left(1 - 2 \exp \left\{ -\frac{p^2}{2\Lambda^2} \right\} + \exp \left\{ -\frac{p^2}{\Lambda^2} \right\} \right) \Rightarrow -\frac{1}{p^4} \text{ при } \Lambda \rightarrow 0. \quad (4.51)$$

Проводя вычисления, аналогичные представленным выше, из (4.51) для модифицированного линейно растущего потенциала получаем

$$V_{\text{mod}}(r) = \sigma r \left\{ 1 - \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}r\Lambda} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\frac{1}{t} - 1 \right) \times \right. \\ \left. \times \left[\exp\left(-\frac{r^2\Lambda^2}{4}t\right) - \exp\left(-\frac{r^2\Lambda^2}{2}t\right) \right] \right\} \equiv \sigma(r)r, \quad (4.52)$$

и при $\Lambda \rightarrow 0$ из (4.52) получаем стандартный линейно растущий потенциал. В [59] модифицированный линейный потенциал определен в следующем виде:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \left[1 - \gamma \frac{\exp(\sqrt{\sigma_0}(r - R_1))}{B + \exp(\sqrt{\sigma_0}(r - R_1))} \right], \quad (4.53)$$

где γ , R_1 и B являются дополнительными свободными параметрами. При следующих значениях этих параметров [59]:

$$\sigma_0 = (0,185 \pm 0,005) \text{ ГэВ}^2, \quad \gamma = 0,40, \quad R_1 = 6 \text{ ГэВ}^{-2}, \quad B = 20,0, \quad (4.54)$$

получено хорошее согласие с экспериментальным результатом для массового спектра мезонов.

Таким образом, модифицированный потенциал отличается от линейного или кулоновского потенциалов. Это отклонение связано с нелокальным характером взаимодействия. На рис. 4 представлена зависимость линейно ра-

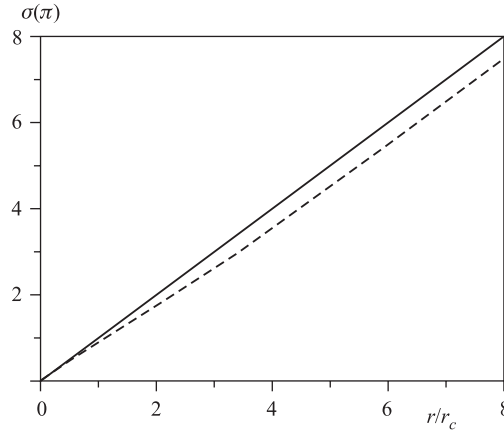


Рис. 4. Зависимость линейно растущего и модифицированного потенциала от радиуса конфайнмента r/r_c для основного состояния

стущего потенциала и ее соответствующий модифицированный вариант. Модифицированный потенциал изображен штриховой линией. Видно, что с возрастанием радиуса (в единицах $r_c = 1/\Lambda$ — радиуса конфинмента) разница между модифицированным и немодифицированным потенциалами увеличивается.

4.5.2. *Спектр связанного состояния в модифицированном потенциале.* Определим массу и конституентную массу составляющих частиц с учетом размерного (нелокального) эффекта. В этом подпункте приведем детали вычисления энергетического спектра с учетом нелокального характера взаимодействия. Основной вклад при определении масс и конституентных масс связанного состояния в рамках нашего подхода определяется вкладом растущего потенциала, а вклад других поправок, которые связаны с различным характером взаимодействий, является малым. Рассмотрим УШ с модифицированным потенциалом

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma(r)r \right] \Psi(\mathbf{r}) = E(\mu) \Psi(\mathbf{r}), \quad (4.55)$$

где потенциал взаимодействия представлен в (4.52). Из (4.55) определяем энергетический спектр E с помощью метода ОП. Проведя замену переменных, переходим в d -мерное вспомогательное пространство R^d и для модифицированного УШ имеем

$$\left\{ \frac{1}{2} \mathbf{P}_q^2 + 4\rho^2 \mu \sigma q^{2(3\rho-1)} - 4\rho^2 \mu E q^{2(2\rho-1)} - \frac{4\mu\rho^2\sigma}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \times \right. \\ \left. \times \frac{q^{2(4\rho+2\rho j-1)}}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \right\} \Phi(q^2) = 0. \quad (4.56)$$

В этом случае энергия основного состояния в R^d имеет вид

$$\varepsilon_0(E) = \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \\ - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{2\sigma\rho^2\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \times \\ \times \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(d/2 + 4\rho + 2j\rho - 1)}{\omega^{4\rho+2j\rho-1}\Gamma(d/2)}, \quad (4.57)$$

и для гамильтониана взаимодействия, который представлен в нормальной форме, получаем

$$\begin{aligned}
 H_I = & \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp \{ -\eta^2(1+x) \} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega} : \times \\
 & \times \left[\frac{4\rho^2\mu\sigma}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{2\sigma\rho^2\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{x^{-4\rho-2j\rho}}{\omega^{4\rho+2j\rho-1}\Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \right].
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

После некоторых упрощений, аналогичных проделанным в п. 2.1 и в приложениях А и Б, для энергетического спектра имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{E(\ell, n_r)}{\sqrt{\sigma}} = & \min_\rho \left[\frac{z^2}{8\rho^2 y} \frac{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \frac{4n_r}{(1+\rho+2\rho\ell)}}{1 + \tilde{B}} + \right. \\
 & + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \times \\
 & \left. \times \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{1}{z^{2j}} \frac{\Gamma(5\rho+2j\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho+2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{W}_j}{1 + \tilde{B}} \right],
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

где параметр z определяется из уравнения

$$\begin{aligned}
 z^3 - & \frac{4\rho^2 y \Gamma(4\rho+2\rho\ell)}{\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} \frac{A1(\rho)}{A0(\rho)} + \frac{4y\rho^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(2+\rho+2\rho\ell)} \times \\
 & \times \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{(j+1)!} \frac{1}{(2j+1)(2j+3)} \left(1 - \frac{1}{2^{(1+j)}} \right) \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{A2(\rho, j)}{A0(\rho)} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 A0(\rho) &= \rho + (2\rho - 1) \frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2} \tilde{B}, \\
 A1(\rho) &= \rho + (3\rho - 1) \tilde{B} - (2\rho - 1) \tilde{C}, \\
 A2(\rho, j) &= 2\rho + 2j\rho + (4\rho + 2j\rho - 1) \tilde{B} - (2\rho - 1) \tilde{W}_j,
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

а \widetilde{W}_j равен:

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_j = & \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \times \\ & \times \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-4\rho-2j\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

где \widetilde{B} , \widetilde{C} и $A_{n_r}(k)$ представлены в (Б.6), (Б.7) и (Б.8) соответственно. В (4.59) и (4.60) параметр $x = \mu/\sqrt{\sigma}$.

Далее вычислим энергетический спектр модифицированного потенциала с учетом одноглюонного обмена. Рассмотрим УШ

$$\left[\frac{1}{2\mu} \mathbf{P}^2 + \sigma(r)r - \frac{4\alpha_s}{3} \frac{\alpha_s}{r} \right] \Psi(\mathbf{r}) = E(\mu)\Psi(\mathbf{r}), \quad (4.63)$$

где $\sigma(r)$ представлена в (Б.2). С помощью ОП из (4.63) определим энергетический спектр. Здесь после некоторых упрощений получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(E) = & \frac{d\omega}{4} + \frac{4\rho^2\mu\sigma_0}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \\ & - \frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} - \frac{8\sigma_0\rho^2\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \times \\ & \times \frac{1}{2j+1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(d/2+4\rho+2j\rho-1)}{\omega^{4\rho+2j\rho-1}\Gamma(d/2)} \end{aligned} \quad (4.64)$$

и для гамильтониана взаимодействия

$$\begin{aligned} H_I = & \int_0^{\infty} dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \exp\{-\eta^2(1+x)\} : e_2^{-2i\sqrt{x}\omega} : \times \\ & \times \left[\frac{4\rho^2\mu\sigma_0}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} - \frac{4\rho^2\mu E}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} - \frac{16\alpha_s\rho^2\mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{x^{-\rho}}{\Gamma(1-\rho)} - \right. \\ & \left. - \frac{8\sigma_0\rho^2\mu}{\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{1}{2j+1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2}} \right)^{2j+1} \frac{x^{-4\rho+2j\rho}}{\omega^{4\rho+2j\rho-1}\Gamma(1-4\rho-2j\rho)} \right]. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Из системы уравнений (2.27) определяем энергию исходной системы и частоту осциллятора. При этом энергетический спектр равен

$$\begin{aligned} \frac{E(\ell, n_r)}{\sqrt{\sigma}} &= \frac{z^2}{8\rho^2 x} \frac{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \times \\ &\times \frac{1 + 4n_r/(1 + \rho + 2\rho\ell)}{1 + \tilde{B}} + \frac{1}{z} \frac{\Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{C}}{1 + \tilde{B}} - \\ &- \frac{4\alpha_s z}{3} \frac{\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{D}}{1 + \tilde{B}} - \frac{2}{z^2 \sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \times \\ &\times \frac{1}{2j + 1} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{1}{z^{2j}} \frac{\Gamma(5\rho + 2j\rho + 2\rho\ell)}{\Gamma(3\rho + 2\rho\ell)} \frac{1 + \tilde{W}_j}{1 + \tilde{B}}. \quad (4.66) \end{aligned}$$

Здесь параметр z , который связан с частотой осциллятора ($z = \omega^\rho/\sqrt{\sigma}$), определяется из уравнения

$$\begin{aligned} 1 - \frac{16x\rho^2\alpha_s\Gamma(2\rho + 2\rho\ell)}{3z\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + (2\rho - 1)\tilde{D} - (\rho - 1)\tilde{B}]}{\left[\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right]} - \\ - \frac{4x\rho^2\Gamma(4\rho + 2\rho\ell)}{z^3\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \frac{[\rho + 4(3\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{C}]}{\left[\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right]} + \\ + \frac{8x\rho^2}{z^4\sqrt{\pi}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(2j + 1)z^{2j}} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{2\sigma}} \right)^{2j+1} \frac{\Gamma(5\rho + 2j\rho - 1)}{\Gamma(2 + \rho + 2\rho\ell)} \times \\ \times \frac{[2\rho + 2j\rho + (4\rho + 2j\rho - 1)\tilde{B} - (2\rho - 1)\tilde{W}_j]}{\left[\rho + (2\rho - 1)\frac{2n_r}{1 + \rho + 2\rho\ell} + \frac{1}{2}\tilde{B} \right]} = 0. \quad (4.67) \end{aligned}$$

На основе полученных выражений определены масса и конституентная масса составляющих частиц с учетом глюонного распределения для растущего и кулоновского плюс растущего потенциалов. При этом алгебраические уравнения (4.40) и (4.41) решаются численными методами.

4.6. Результаты и обсуждения. Наши результаты, которые представлены на рис. 1 и 2, показывают, что без учета непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия невозможно достичь хорошего согласия с экспериментальными данными, в частности, по наклону и по параметру пересечения редже-траектории как для орбитального, так и для радиального возбуждений. При определении не учитывалось спиновое расщепление массового спектра, а определялось только спиновое усреднение массы мезонов [58, 59]. Экспериментальное уточнение значения спинового усреднения массы мезонов

с орбитальным и радиальным возбуждениями приведено в [58, 59]. В предыдущем пункте получено аналитическое выражение, которое дает возможность определить спиновое усреднение массы с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия. Учет нелокального характера взаимодействия приводит к появлению нового параметра $r_c = 1/\Lambda$ — радиуса конфайнмента; масса и конститuentная масса связанного состояния зависят от этого параметра. Эта зависимость определена в [58, 59] различными методами модификации потенциала взаимодействия. В (4.59) и (4.66) представлены энергетические спектры с учетом нелокальности взаимодействия для растущего и кулоновского плюс растущего потенциалов соответственно. Тогда масса мезонов, состоящих из легко-легких кварков, и конститuentная масса кварков определяются из (4.40) и (4.41) с учетом вклада диаграммы собственной энергии. Далее представим численные результаты, полученные с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия, только для кулоновского плюс растущего потенциала при значениях $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$. Прежде всего определим массу и конститuentную массу связанного состояния для $\ell = 0$. Согласно (4.43) вклад струнной добавки равен нулю. В этом случае определяется зависимость конститuentной массы от радиуса конфайнмента r_c для основного состояния. Результаты представлены на рис. 5. Также видно, что с возрастанием расстояния между составляющими частицами в релятивистском связанном состоянии конститuentная масса составляющих частиц уменьшается, а с уменьшением — возрастает. Также из этого рисунка видно, что если радиус $r_c = 1 \text{ фм}$, то конститuentная масса $\sim 1,5 \text{ ГэВ}$, а если радиус равен 2 фм , то конститuentная масса составляет всего лишь $\sim 0,5 \text{ ГэВ}$. Таким образом, при уменьшении расстояния между составляющими частицами в связанном состоянии их конститuentная

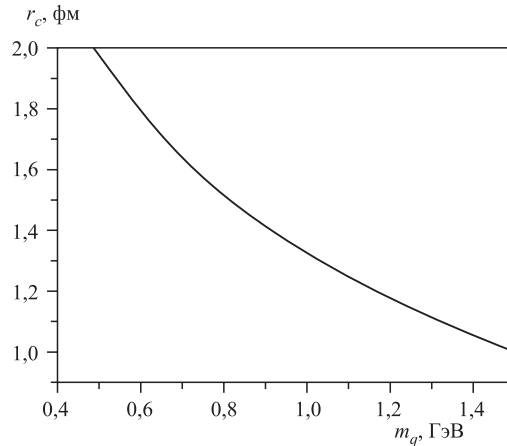


Рис. 5. Зависимость конститuentной массы от радиуса конфайнмента при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$ для основного состояния

масса увеличивается. Поэтому согласно (4.43) и (4.37) непертурбативная добавка, связанная с диаграммой собственной энергии и струнным взаимодействием, уменьшается, т. е. при некоторых значениях радиуса r_c вклады этих взаимодействий могут быть несущественными. При таком условии динамику формирования связанных состояний вполне возможно определить в рамках феноменологических потенциальных моделей.

Из КХД известно, что при высоких энергиях, если переданный импульс достаточно велик (или расстояние мало), то формируются мезоны, состоящие из тяжелых кварков, например, c и b , массы которых во много раз больше масс u - и d -кварков. Это подтверждается нашим результатом. Очевидно, что если масса составляющих кварков большая, то масса мезонов, состоящих из этих кварков, также будет больше, чем масса мезонов, состоящих из легких кварков. Поэтому при возрастании массы мезонов радиус конфайнмента уменьшается, с учетом этого определяется масса мезонов с радиальным возбуждением. Полученные численные результаты представлены в табл. 11. В ней также приведены экспериментальные данные спинового усреднения массы мезонов и численные значения радиуса конфайнмента.

Таблица 11. Спиновое усреднение массы мезонов с радиальным возбуждением при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$

ns	$\bar{M}, \text{ ГэВ}$			$r_c, \text{ фм}$
	Эксперимент	[59]	Данная работа	
$1s$	0,612	0,618	0,611	2,065
$2s$	$1,42 \pm 0,04$	1,400	1,406	1,2703
$3s$	$\pi(1,80)$	1,868	1,829	1,06
$4s$	$\rho(2,15)$	2,176	2,15	1,01
$5s$		2,502	2,503	0,973

Из выражения (4.29) определяются параметры Ω n_r -траектории Редже:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= 1,60 \text{ ГэВ}, \quad n_r = 1, \\ \Omega_2 &= 1,49 \text{ ГэВ}, \quad n_r = 2, \\ \Omega_3 &= 1,42 \text{ ГэВ}, \quad n_r = 3. \end{aligned} \tag{4.68}$$

В эксперименте более или менее достоверно определено значение этого параметра только для первого радиально возбужденного состояния: $\Omega_{\text{exp}} = (1,6 \pm 0,1) \text{ ГэВ}^2$. Таким образом, наши результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. В нашем подходе параметр ρ связан с асимптотическим поведением волновой функции. Значение ρ при больших расстояниях, т. е. для мезонов, состоящих из легких кварков, оказалось $\sim 0,7$, а при малых расстояниях для тяжелых мезонов $\sim 0,98$. Волновая функция связанного состояния на больших расстояниях является функцией Эйри,

которая обеспечивает ненаблюдаемость цветных объектов, а на малых расстояниях становится кулоновской. Это означает, что на малых расстояниях взаимодействие между составляющими цветными объектами осуществляется одноглюонным обменом, и эти объекты можно рассматривать как свободные.

Таблица 12. Спиновое усреднение массы мезонов с орбитальным возбуждением при $\alpha_s = 0,39$ и $\sigma = 0,19 \text{ ГэВ}^2$

ℓ	\overline{M} , ГэВ			r_c , фм
	Эксперимент	[59]	Данная работа	
0	0,612	0,618	0,611	2,065
1	$1,252 \pm 0,05$	1,190	1,232	1,2703
2	$1,67 \pm 0,02$	1,628	1,661	1,06
3	$2,02 \pm 0,01$	1,926	1,988	1,01
4			2,196	0,973

Теперь приступим к определению массового спектра мезонов с орбитальным возбуждением. В этом случае необходим учет вклада гамильтониана, представленного в (4.43). В подп. 4.4.2 определен энергетический спектр растущего потенциала с учетом этого взаимодействия. Проводя аналогичные вычисления и учитывая непертурбативную добавку (4.43), из (4.39) определили величину μ . Тогда масса мезона определяется из (4.38), а конституентная масса согласно (1.13) равна $\mu_q = 2\mu$. Полученные численные результаты для массы мезонов с орбитальным возбуждением представлены в табл. 12. В этом случае параметризация (4.26) ℓ -траектории Редже записывается в виде

$$\frac{M^2(\ell, 0)}{\sigma} = 2\pi\ell + 1,965. \quad (4.69)$$

Тогда наклон ℓ -траектории Редже равен $\alpha'_L = 0,838 \text{ ГэВ}^{-2}$. В этом случае для кулоновского плюс растущего потенциала параметр пересечения ℓ -траектории Редже $\alpha_L(0) = -0,313$. Полученные результаты с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия для наклона и пересечения ℓ -траектории Редже удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными (4.27) и (4.28).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно заключить следующее.

Предложен метод описания механизма формирования связанного состояния с учетом релятивистского характера взаимодействия, т. е. вычисления энергетического спектра с учетом релятивистской поправки. В этом подходе исследуется асимптотическое поведение функции корреляции для заряженных скалярных частиц во внешнем калибровочном поле и определяется

масса связанного состояния. При определении асимптотического поведения функции петли используется представление функционального интеграла для функции Грина и проводится усреднение по внешнему калибровочному полю. Полученное представление похоже на фейнмановский функциональный интеграл по путям, который был получен в нерелятивистской квантовой механике для связанного состояния, состоящего из заряженных скалярных частиц с конститuentной массой. Определена зависимость конститuentной массы составляющих частиц от массы свободного состояния. Наши результаты показали, что если составные частицы являются легкими и система сильно связана, то разность конститuentных и исходных (свободных) масс частиц оказывается в несколько раз больше исходных масс частиц, а если составляющие частицы тяжелые, как c - и b -кварки, то разность этих масс незначительна. Это дает возможность определить энергетический и массовый спектры связанных состояний в рамках уравнения Шредингера с конститuentной массой.

Аналитически определен потенциал взаимодействия с учетом релятивистской поправки. Потенциал взаимодействия в нашем подходе определяется диаграммой Фейнмана как обменом калибровочного поля (фотон, глюон), так и диаграммой собственной энергии. Таким образом, потенциал взаимодействия определяется вкладом всевозможных типов диаграмм Фейнмана. В нерелятивистском пределе обычно вклад обменной диаграммы соответствует потенциальному взаимодействию, а вклад диаграммы собственной энергии — непотенциальному взаимодействию. Определена непертурбативная добавка к гамильтониану взаимодействия, которая связана с релятивистской природой системы. Поправку, связанную с пространственной и временной компонентами пропагатора, рассмотрели отдельно. Для поправки, связанной с пространственной компонентой, мы получили аналитическое выражение, суммируя бесконечный ряд по степеням величины (v/c) , и наш результат показал, что это взаимодействие дает вклад только в орбитально возбужденном состоянии.

Прежде всего наш подход применен к определению релятивистских поправок для связанных состояний с кулоновским взаимодействием. В наших результатах были определены следующие энергетические спектры.

1. Спектр атома водорода с учетом радиационных и релятивистских поправок. Поправки с возрастанием константы связи увеличиваются. Численный результат, полученный в рамках нашего подхода для спектра с орбитальным и радиальным возбуждениями, оказывается больше результата, полученного в рамках теории возмущений, но меньше верхней границы, установленной в численных расчетах.

2. Спектр мюонного водорода с орбитальным и радиальным возбужденными состояниями с учетом радиационной и релятивистской поправок. Определены расщепления энергетического уровня, связанные с одно- и двухпетлевой электронными поляризациями для орбитально и радиально возбужденных

состояний. Численные результаты, полученные нами для расщепления энергетического уровня мюонного водорода, оказались больше, чем результаты других авторов.

3. Спектр с орбитально и радиально возбужденными состояниями с учетом радиационной и релятивистской поправок для следующих потенциалов: линейного потенциала; потенциала воронки; степенного потенциала; кулоновского плюс степенного потенциала; ангармонического потенциала и кулоновского экранированного потенциала. Эти потенциалы описывают различные характеристики и свойства атомных и молекулярных связанных состояний.

В рамках нашего подхода изучены свойства глюоболов. Определен массовый спектр глюоболов, состоящих из двух глюонов, с орбитальным возбуждением и с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия. На основании полученных нами результатов можно отметить следующее.

1. Вклады векторного потенциала и потенциала, связанного с непертурбативным характером взаимодействия, между собой сокращаются, и, более того, при больших значениях орбитального квантового числа векторный потенциал полностью аннулируется. Тогда взаимодействие между глюонами определяется только скалярным потенциалом запираания. В этом пределе наклон траектории Редже определяется через тензор натяжения струны. Этот результат хорошо описывает экспериментальные данные.

2. Аналитически определены массовый спектр глюоболов (померонов) и конститuentные массы глюона и установлено, что глюон в связанном состоянии становится массовым. Также определен массовый спектр глюоболов с учетом спин-спиновых, спин-орбитальных и тензорных взаимодействий. Наши численные результаты, полученные для различных спиновых и орбитальных состояний глюоболов, хорошо согласуются с результатами решеточных данных.

В рамках нашего подхода определен массовый спектр мезонов, состоящих из легко-легких и легко-тяжелых кварков, как для орбитального, так и для радиального возбужденных состояний с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия. Нами были определены следующие зависимости.

1. Зависимость конститuentной массы составляющих частиц от массы свободного состояния. Также показано, что, когда кварки легкие, разность конститuentных (токовых) и валентных масс кварков оказывается в несколько раз больше валентных масс кварков; если кварки тяжелые, как c и b , то разность этих масс незначительна.

2. С выбором пропагатора в виде целой аналитической функции гауссового типа в импульсном пространстве определен модифицированный потенциал взаимодействия кварков от радиуса конфайнмента. Предложен один из

альтернативных вариантов учета нелокального характера взаимодействия при определении свойств адронов на больших расстояниях.

3. Зависимость конституентной массы от характерного размера (радиуса) конфайнмента. Также было показано, что при уменьшении радиуса конфайнмента конституентная масса составляющих частиц увеличивается. Это приводит к уменьшению вклада непертурбативного характера взаимодействия в массовый спектр связанного состояния.

Также нами были определены наклон и параметр пересечения редже-траектории для орбитально и радиально возбужденных состояний. Показано, что только с учетом непертурбативного и нелокального характеров взаимодействия для этих параметров возможно достичь удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. Также отметим, что при малых $\ell \leq 5$ редже-траектории для мезонов, состоящих из одинаковых кварков, являются линейными, а для мезонов, состоящих из легких и тяжелых кварков, — нелинейными.

Приложение А

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАНОНИЧЕСКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Важным элементом вычислений в ОП [22] является представление канонических переменных в нормальной форме. Поэтому приведем детали этого представления для различных потенциалов. Установим ряд полезных соотношений для операторов рождения и уничтожения. Пусть операторы a_j^+ и a_j удовлетворяют коммутационным соотношениям (4.8). Тогда для этих операторов выполняется следующее стандартное тождество:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}^+} = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}^+} e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} e^{-(k\mathbf{p})}, \quad (\text{A.1})$$

где \mathbf{k} и \mathbf{p} — векторы в d -мерном пространстве.

Рассмотрим выражение

$$Y_j(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} a_j^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}}. \quad (\text{A.2})$$

При $\mathbf{k} = 0$ из (A.2) имеем

$$Y_j(0) = a_j^+. \quad (\text{A.3})$$

Учитывая (A.3), из (A.2) для $dY_j(\mathbf{k})/dk_l$ получаем

$$\frac{dY_j(\mathbf{k})}{dk_l} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} i[a_l, a_j^+] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} = i\delta_{jl}. \quad (\text{A.4})$$

Проводя интегрирование по k_l и учитывая (A.3), имеем

$$Y_j(\mathbf{k}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}} a_j^+ e^{-i\mathbf{k}\mathbf{a}} = a_j^+ + ik_j. \quad (\text{A.5})$$

Аналогично можно установить соотношения

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{a}^+} a_j e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}^+} &= a_j + ip_j, \\ e^{\alpha\mathbf{a}^+ \mathbf{a}} a_j e^{-\alpha\mathbf{a}^+ \mathbf{a}} &= a_j e^{-\alpha}, \\ e^{\alpha\mathbf{a}^+ \mathbf{a}} a_j^+ e^{-\alpha\mathbf{a}^+ \mathbf{a}} &= a_j^+ e^{\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Используя эти соотношения, представим в нормальной форме различные виды потенциалов взаимодействия. Рассмотрим детали представления конкретных видов потенциалов в нормальной форме:

а) растущий потенциал

$$\begin{aligned} q^{2n} &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} e^{-xq^2} \Big|_{x=0} = \\ &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x/\omega)} : e^{-2i\sqrt{x}(q\eta)} : \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{1}{\omega^n} \frac{\Gamma(d/2+n)}{\Gamma(d/2)} + : q^2 : \frac{n}{\omega^{n-1}} \frac{\Gamma(d/2+n)}{\Gamma(d/2+1)} + \\ &+ \frac{(-1)^n}{\omega^n} \frac{d^n}{dx^n} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : \Big|_{x=0}, \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots$ является целым и положительным;

б) степенной потенциал

$$\begin{aligned} q^{2\tau} &= \int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)} x^{-1-\tau} e^{-xq^2} = \\ &= \int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)} x^{-1-\tau} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x/\omega)} : e^{-2i\sqrt{x}(q\eta)} : = \\ &= \frac{1}{\omega^\tau} \frac{\Gamma(d/2+\tau)}{\Gamma(d/2)} + : q^2 : \frac{\tau}{\omega^{\tau-1}} \frac{\Gamma(d/2+\tau)}{\Gamma(d/2+1)} + \\ &+ \frac{1}{\omega^\tau} \int_0^\infty \frac{dx}{\Gamma(-\tau)} x^{-1-\tau} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : , \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

где $\tau \neq n$ и использовано обозначение $e_2^x = e^x - 1 - x - x^2/2$;

в) в общем случае для потенциала будем использовать фурье-преобразование

$$\begin{aligned} W(q^2) &= \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \widetilde{W}(k^2) e^{i(kq)} = \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \widetilde{W}(k^2) \exp\left(ik \frac{a+a^+}{\sqrt{2\omega}}\right) = \\ &= \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \widetilde{W}(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{4\omega}\right) \exp\left(ik \frac{a^+}{\sqrt{2\omega}}\right) \exp\left(ik \frac{a}{\sqrt{2\omega}}\right) = \\ &= \int \left(\frac{dk}{2\pi}\right)^d \widetilde{W}(k^2) \exp\left(-\frac{k^2}{4\omega}\right) : e^{ikq} : . \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Здесь $(kq) = \sum k_j q_j$ и

$$\widetilde{W}(k^2) = \int (dx)^d W(x^2) e^{i(kx)}.$$

С помощью соотношений, которые приведены в формулах (A.7)–(A.9), определяются нормальные формы различных потенциалов. В частности, из (A.7) получаем для $n = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{d}{2\omega} + : q^2 : , \\ q^4 &= \frac{d(d+2)}{4\omega^2} + \frac{d+2}{\omega} : q^2 : + : q^4 : , \\ q^6 &= \frac{d(d+2)(d+4)}{8\omega^3} + \frac{3(d+2)(d+4)}{4\omega^2} : q^2 : + \frac{3(d+4)}{2\omega} : q^4 : + : q^6 : . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

При определении энергетического спектра различных потенциалов с радиальным возбуждением нужно определить действие операторов: $(a^+ a^+)^n$ или $(aa)^n$. Для этих операторов будем использовать следующее представление:

$$\begin{aligned} (a^+ a^+)^n &= (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \exp\{-\beta(a^+ a^+)\} \Big|_{\beta=0} \times \\ &\times (-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n} \int \left(\frac{d\xi}{\sqrt{\pi}}\right)^d \exp\{-\xi^2 - 2i\sqrt{\beta}(a^+ \xi)\} \Big|_{\beta=0} . \quad (\text{A.11}) \end{aligned}$$

Также будем использовать соотношение

$$e_2^{i(kq)} = P_v e^{iv(kq)},$$

где P_v — оператор, действующий только по переменной v , и действие оператора определяется в следующем виде:

$$P_v = \text{const} = 0, \quad P_v v^n = 0, \quad n \leq 2, \quad P_v v^n = 1, \quad n > 2.$$

Эти соотношения часто встречаются при вычислении матричных элементов различных физических процессов в ОП.

Используя эти представления, мы получили выражение для $\varepsilon_0(E)$ энергии основного состояния, а также для H_I гамильтониана взаимодействия.

Определим константу нормировки волновой функции.

В ОП волновая функция с радиальным возбуждением определяется в виде

$$|n_r\rangle = C_{n_r} (a_j^\dagger a_j^\dagger)^{n_r} |0\rangle, \quad j = 1, \dots, d, \quad (\text{A.12})$$

где C_n — константа нормировки, и она определяется из условий

$$1 \equiv \langle n|n\rangle = C_n^2 \langle 0| (a_i a_i)^n (a_j^\dagger a_j^\dagger)^n |0\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Учитывая (A.11) и (A.1), после некоторых упрощений из (A.13) имеем

$$\begin{aligned} 1 &= C_n^2 \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \beta^n} \int \left(\frac{d\xi}{\sqrt{\pi}} \right)^d \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\xi^2 - \eta^2} \times \\ &\quad \times \langle 0| e^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi)} e^{-2i\sqrt{\beta}(a^\dagger\eta)} |0\rangle \Big|_{\alpha, \beta=0} = \\ &= C_n^2 \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \beta^n} \int \left(\frac{d\xi}{\sqrt{\pi}} \right)^d \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\xi^2 - \eta^2 - 4\sqrt{\alpha\beta}(\xi\eta)} \Big|_{\alpha, \beta=0} = \\ &= C_n^2 \frac{\partial^{2n}}{\partial \alpha^n \partial \beta^n} \frac{1}{(1 - 4\alpha\beta)^{d/2}} \Big|_{\alpha, \beta=0}. \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

И, наконец, из (A.14) получаем

$$C_n = \left(\frac{\Gamma(d/2)}{4^n n! \Gamma(d/2 + n)} \right)^{1/2}. \quad (\text{A.15})$$

Приложение Б

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ПОТЕНЦИАЛОВ

Представим некоторые детали вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$. Прежде всего вычислим матричный элемент для линейно растущего потенциала. Гамильтониан взаимодействия представлен в (3.4), и со-

ответствующий матричный элемент записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle n_r | H_I | n_r \rangle = & \int_0^\infty dx \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \times \\ & \times \left[-\frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{x^{-2\rho}}{\Gamma(1-2\rho)} + \frac{4\rho^2 \sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{x^{-3\rho}}{\Gamma(1-3\rho)} \right] \times \\ & \times \langle n_r | : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : | n_r \rangle. \quad (\text{Б.1}) \end{aligned}$$

Из (Б.1) видно, что для вычисления матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ нам нужно определить величину

$$T_n(x) = \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \langle n | : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : | n \rangle. \quad (\text{Б.2})$$

Учитывая (А.11) и (А.12), после некоторых упрощений из (Б.2) получаем

$$\begin{aligned} T_n(x) = & \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} \langle n | : e_2^{-2i\sqrt{x\omega}(qn)} : | n \rangle = \\ = & P_v C_n^2 \frac{d^{2n}}{d\alpha^n d\beta^n} \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d \iint \left(\frac{d\xi_1}{\sqrt{\pi}} \right)^d \left(\frac{d\xi_2}{\sqrt{\pi}} \right)^d \times \\ & \times e^{-\eta^2(1+x) - \xi_1^2 - \xi_2^2} \langle 0 | e^{-2i\sqrt{\alpha}(a\xi_1)} e^{-iv\sqrt{2x}(a^+\eta)} \times \\ & \times e^{-iv\sqrt{2x}(a\eta)} e^{-2i\sqrt{\beta}(a^+\xi_2)} | 0 \rangle \Big|_{\beta, \alpha=0} \quad (\text{Б.3}) \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} T_n(k) = & \sum_{k=2}^{2n} \sum_{s=0}^n (-1)^k \frac{x^k}{(1+x)^{k+d/2}} \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(n+d/2)} \times \\ & \times \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n-s+1) \Gamma^2(k-s+1) \Gamma(2s-k+1)}. \quad (\text{Б.4}) \end{aligned}$$

Подставляя (Б.4) в (Б.1) и проводя интегрирование по x , из (Б.1) имеем

$$\begin{aligned} \langle n_r | H_I | n_r \rangle = & -\frac{4\rho^2 E\mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 2\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \\ & + \frac{4\rho^2 \sigma\mu}{\omega^{3\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2 + 3\rho - 1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C}. \quad (\text{Б.5}) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\tilde{B} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-2\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-2\rho)}{\Gamma(k+d/2)} \quad (\text{Б.6})$$

и

$$\tilde{C} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-3\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-3\rho)}{\Gamma(k+d/2)}, \quad (\text{Б.7})$$

где

$$A_{n_r}(k) = \sum_{s=1}^{n_r} \frac{2^{2s-k}}{\Gamma(n_r-s+1)} \frac{\Gamma(k+n_r-s+d/2)}{\Gamma^2(k-s+1)\Gamma(2s-k+1)}, \quad (\text{Б.8})$$

Аналогичным образом вычисляется матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для гамильтониана взаимодействия, представленного в (2.52). Полученное выражение представлено в (2.54).

Далее приступим к вычислению матричного элемента $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для кулоновского плюс растущего потенциала или потенциала воронки, гамильтониан взаимодействия которых представлен в (2.63). В этом случае после некоторых аналогичных упрощений имеем

$$\begin{aligned} \langle n_r | H_I | n_r \rangle = & -\frac{4\rho^2 E \mu}{\omega^{2\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+2\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{B} + \frac{4\rho^2 \sigma \mu}{\omega^{3\rho-1}} \times \\ & \times \frac{\Gamma(d/2+3\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{C} - \frac{16\rho^2 \alpha_s \mu}{3\omega^{\rho-1}} \frac{\Gamma(d/2+\rho-1)}{\Gamma(d/2)} \tilde{D}, \quad (\text{Б.9}) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{D} = \frac{\Gamma(1+n_r)}{\Gamma(n_r+d/2)} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(1-\rho)} \sum_{k=2}^{2n_r} (-1)^k A_{n_r}(k) \frac{\Gamma(1+k-\rho)}{\Gamma(k+d/2)}. \quad (\text{Б.10})$$

Используя (Б.8), мы определили энергетический спектр гамильтониана, представленного в (2.61) и (3.15), с орбитальным и радиальным возбуждениями.

Теперь определим матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для потенциала (2.13), соответствующего однопетлевой электронной поправке:

$$\begin{aligned} \langle n_r | H_I | n_r \rangle = & -4\mu g_1 \int_1^\infty d\zeta w_1(\zeta) \langle n_r | \int \left(\frac{d\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^d e^{-\eta^2(1+x)} : \times \\ & \times e^{-2i\sqrt{x\omega}(q\eta)} : | n_r \rangle. \quad (\text{Б.11}) \end{aligned}$$

Полученные значения для матричного элемента представлены в (2.26). Аналогичным образом вычисляется матричный элемент $\langle n_r | H_I | n_r \rangle$ для любых потенциалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1976.
2. Weinberg S. The Quantum Theory of Fields. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
3. Itzykson C., Zuber J. B. Quantum Field Theory. N. Y.: McGraw-Hill, 1980.
4. Eides M. I. et al. // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 61.
5. Amsler C. et al. Review of Particle Physics // Phys. Lett. B. 2008. V. 667. P. 1.
6. Greiner W., Reinhard J. Quantum Electrodynamics. Berlin: Springer, 1992.
7. Wick G. C. // Phys. Rev. 1954. V. 96. P. 1124;
Cutkosky R. E. // Ibid. P. 1135;
Efimov G. V. // Few-Body Syst. 2003. V. 33. P. 199.
8. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cim. 1963. V. 29. P. 380;
Faustov R. N., Galkin V. O., Mishurov A. Yu. // Phys. Lett. B. 1995. V. 356. P. 516;
Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 6302.
9. Berestetskii V. B., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Quantum Electrodynamics. 2nd Ed. Oxford: Pergamon Press, 1982.
10. Caswell W. E., Lepage G. P. // Phys. Lett. B. 1986. V. 167. P. 437.
11. Kinoshita T., Nio M. // Phys. Rev. D. 1996. V. 53. P. 4909.
12. Quigg C., Rosner J. L. // Phys. Rev. 1990. V. 56. P. 167.
13. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. // УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
14. Godfrey S., Isgur N. // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 189;
Isgur N., Wise M. // Phys. Lett. B. 1984. V. 232. P. 113; 1990. V. 237. P. 527.
15. Dineykhon M. et al. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2009. V. 42. P. 145001.
16. Feynman R. P., Hibbs A. P. Quantum Mechanics and Path Integrals. N. Y.: McGraw-Hill, 1963.
17. Dineykhon M., Efimov G. V., Namsrai Kh. // Fortschr. Phys. 1991. V. 39. P. 259.
18. Godfrey S., Isgur N. // Phys. Rev. D. 1985. V. 32. P. 189.
19. Isgur N., Wise M. // Phys. Lett. B. 1989. V. 262. P. 113; V. 237. P. 527; Phys. Rep. 1991. V. 200. P. 127.
20. Brambilla N., Vairo A. // Phys. Lett. B. 1995. V. 359. P. 133.
21. Glauber R., Rarita W., Schwed P. // Phys. Rev. 1960. V. 120. P. 609.
22. Dineykhon M. et al. Oscillator Representation in Quantum Physics. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, 1995. V. 26.
23. Fock V. A. Principles of Quantum Mechanics. M.: Nauka, 1976.

24. *Dineykhan M., Efimov G. V.* // Rep. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 287; Yad. Fiz. 1996. V. 59. P. 862;
Dineykhan M. // Z. Phys. D. 1997. V. 41. P. 77;
Dineykhan M., Nazmitdinov R. G. // Yad. Fiz. 1999. V. 62. P. 143;
Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Nazmitdinov R. G. // JETP. 2001. V. 119. P. 1210.
25. *Fradkin E. S.* // Nucl. Phys. V. 49. P. 624.
26. *Hayashi K. et al.* // Fortsh. Phys. 1967. V. 15. P. 625.
27. *Salam A.* Nonpolynomial Lagrangians. Renormalization and Gravity. N. Y.: Gordon and Breach Sci. Publ., 1971.
28. *Pachuki K.* // Phys. Rev. A. 1996. V. 53. P. 2092; 1999. V. 60. P. 3593.
29. *Lucha W., Schoberl F. F.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 139; Phys. Lett. B. 1996. V. 387. P. 573; Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 3790.
30. *Arteca G. A., Fernandez F. M., Castro E. A.* Large Order Perturbation Theory and Summation Methods in Quantum Mechanics. Lecture Notes in Physics. Berlin: Spinger, 1990. V. 53.
31. *Dineykhan M., Zhaugasheva S. A., Toinbaeva N. Sh.* // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 2010. V. 43. P. 015003.
32. *Lucha W., Rupprecht H., Schoberl F. F.* // Phys. Rev. D. 1992. V. 46. P. 1088.
33. *Lucha W., Schoberl F. F.* // Phys. Rev. A. 1997. V. 56. P. 139;
Lucha W., Schoberl F. F. // Phys. Lett. B. 1996. V. 387. P. 573;
Lucha W., Schoberl F. F. // Phys. Rev. A. 1996. V. 54. P. 3790.
34. *Eichten E. et al.* // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 3090.
35. *Fernandez F. M.* // Phys. Lett. A. 1995. V. 203. P. 275;
Gomez F. G., Sesma J. // Phys. Lett. A. 1996. V. 219. P. 187.
36. *Kastner M. A.* // Phys. Today. 1995. V. 46. P. 24;
Ashoori R. G. // Nature. 1996. V. 379. P. 413;
Johnson N. F. // J. Phys. Condens. Matt. 1995. V. 7. P. 965;
Dineykhan M., Nazmitdinov R. G. // Phys. Rev. B. 1997. V. 55. P. 13707.
37. *Adamowski J.* // Phys. Rev. A. 1985. V. 31. P. 43;
Adamowski J. // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 4384.
38. *Динейхан М., Жаугашева С. А., Кожамкулов Т. А.* // ЯФ. 2005. Т. 68. С. 340–350.
39. *Kaidalov A. B., Simonov Yu. A.* // Yad. Fiz. 2000. V. 63. P. 1307–4526.
40. *Simonov Yu. A.* // Phys. Lett. B. 1990. V. 249. P. 514; Preprint TPI-MINN-90/19-T.
41. *Lucha W., Schoberl F. F., Gromes D.* // Phys. Rep. 1991. V. 200. P. 127.
42. *Eichten E., Feinberg F.* // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 2724.
43. *Dineykhan M. et al.* // Few-Body Syst. 2005. V. 37. P. 49–69.
44. *Godfrey S.* hep-ph/0211464.
45. *Niedermayer F., Rufenacht P., Wenger U.* // Nucl. Phys. B. 2001. V. 597. P. 413.

46. *Teper M. J.* hep-lat/9711011.
47. *Liu D. Q., Wu I. M., Chen Y.* // High Energy. Nucl. Phys. 2002. V. 26. P. 222.
48. *Bugg D. V., Peardon M. J., Zou B. S.* // Phys. Lett. B. 2000. V. 476. P. 49.
49. *Anisovich A. V. et al.* // Phys. Lett. B. 1999. V. 471. P. 271; Nucl. Phys. A. 2000. V. 662. P. 319.
50. *Szczepaniak P., Swanson E. S.* hep-ph/0308268.
51. *Hou W. S., Wong G. G.* hep-ph/0207292.
52. *Zou B. S.* // Nucl. Phys. A. 1999. V. 655. P. 41.
53. *Morningstar C. J., Peardon M. J.* // Phys. Rev. D. 1985. V. 31. P. 034509; 1997. V. 56. P. 4043.
54. *Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д.* Релятивистская квантовая теория. М., 2000.
55. *Shifman M. A., Vainshtain A. I., Zakharov V. I.* // Nucl. Phys. B. 1979. V. 147.
56. *Dosch H. G.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 190. P. 177;
Dosch H. G., Simonov Yu. A. // Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 393.
57. *Simonov Yu. A.* // Nucl. Phys. B. 1988. V. 307. P. 393;
Simonov Yu. A., Tjon J. A. // Ann. Phys. 2002. V. 300. P. 54.
58. *Badalian A. M., Bakker B. L. G.* // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 034025.
59. *Badalian A. M., Bakker B. L. G., Simonov Yu. A.* // Ibid. P. 034026.
60. *Tang A., Norbury J. W.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 016006.
61. *Hagiwara K. et al.* Particle Data Group // Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 010001.
62. *Abele A. et al.* // Phys. Lett. B. 1998. V. 423. P. 175;
Amsler C. // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 1293.
63. *Anisovich A. V. et al.* // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 051502;
Anisovich V. V. hep-ph/0110326.
64. *Bugg D. V. et al.* // Phys. Lett. B. 1995. V. 353. P. 378;
Anisovich A. V. et al. // Nucl. Phys. A. 2000. V. 662. P. 319.
65. *Динейхан М., Жаугашева С. А., Каримжан К.* // Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, № 5(154). С. 636–654.
66. *Simonov Yu. A.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 515. P. 137.
67. *Ефимов Г. В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
68. *Eftimov G. V., Nedelko S. N.* // Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 176; 1996. V. 54. P. 4483;
Ефимов Г. В. // Теор. мат. физ. 2004. Т. 141. С. 80.
69. *Brau F., Setay C.* // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 014017.