

ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА ДЛЯ СПИНА И СТЕРЖНЯ

С. С. Степанов

Исследовательский центр ООО «Абсолютист», Днепропетровск, Украина

ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА	246
ПОЧЕМУ УРАВНЕНИЕ ТОМАСА НЕ ОТНОСИТСЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ СО	248
УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ	252
НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА	256
МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И СПИН	258
ПРЕЦЕССИЯ СПИНА	260
КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА	262
РАЗЛИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	263
ДВИЖЕНИЕ СПИНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ	266
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	269
Приложение А ВИГНЕРОВСКОЕ ВРАЩЕНИЕ	271
Приложение Б КООРДИНАТНЫЕ ОСИ ДВИЖУЩЕЙСЯ СО	275
Приложение В ТЕНЗОР СПИНА	279
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	281

ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА ДЛЯ СПИНА И СТЕРЖНЯ

С. С. Степанов

Исследовательский центр ООО «Абсолютист», Днепропетровск, Украина

Получены дифференциальные уравнения, описывающие поворот стержня и прецессию собственного момента импульса гироскопа, движущихся по криволинейной траектории. Рассмотрены различные примеры такого движения.

Полученные уравнения отличаются от известной формулы Томаса, если интерпретировать ее как поворот неинерциальной системы отсчета относительно лабораторной системы. Связано это с тем, что координатные оси движущейся системы отсчета в общем случае неортогональны для неподвижных наблюдателей. При изменении скорости их ориентация изменяется не только в результате вигнеровского вращения, но и в силу лоренцевского сокращения длины. Выполнен совместный учет этих эффектов.

Показано, что векторы, связанные с различными физическими величинами, изменяются по-разному при движении неинерциальной системы отсчета. Поэтому кинематические уравнения, описывающие изменение этих векторов, относительно лабораторной системы отсчета оказываются различными.

In this paper we obtain the differential equations describing the rotating rod and precession of the spin of gyroscope that are moving along a curved trajectory. Several examples of such motion are considered.

The obtained equations differ from the traditional Thomas' expression interpreted as a rotation of the non-inertial frame relative to the fixed one. The cause of this disagreement is the fact that in general the axes of the moving frame are not orthogonal for the fixed observers. When the velocity changes, the axes direction changes due to both Wigner rotation and Lorentz contraction. In the present paper we take into account both these factors.

It is shown that the vectors representing various physical quantities transform in a different way in the moving reference frame. Thus the kinematic equations describing the motion of these quantities in the fixed frame are different as well.

PACS: 03.30.+p; 32.60.+i

1. ПРЕЦЕССИЯ ТОМАСА

Прецессия Люэлина Хиллета Томаса [1] была введена в 1926 г. с целью объяснения спинового расщепления линий в спектрах атомов. В настоящее время последовательное построение гамильтониана для электрона, находящегося в электромагнитном поле, осуществляется при помощи уравнения Дирака. Тем не менее кинематический эффект специальной теории относительности, учтенный Томасом, имеет самостоятельное значение. Существует

обширная литература, посвященная томасовской прецессии, прекрасный обзор которой можно найти в недавней статье [2].

Рассмотрим вращающийся гироскоп (волчок), к которому приложена сила, изменяющая скорость его поступательного движения. Если момент силы отсутствует, то в классической механике гироскоп при движении в пространстве будет сохранять направление вектора собственного момента импульса. В теории относительности преобразования Лоренца в общем случае не коммутативны. Это приводит к повороту момента импульса (прецессии) при изменении гироскопом скорости относительно «неподвижной» (лабораторной) системы отсчета.

Похожую задачу можно сформулировать для стержня, движущегося по криволинейной траектории. Если его ускорение (но не скорость) невелико, то стержень можно считать условно жестким. В качестве такого стержня может выступать одна из осей системы отсчета, начало которой движется с переменной скоростью. Предположим, что при изменении скорости все точки стержня переносятся параллельным образом с точки зрения наблюдателей в мгновенно сопутствующей стержню инерциальной системе отсчета (ИСО). В этом случае для наблюдателей в лабораторной системе отсчета поступательное движение стержня будет сопровождаться его поворотом.

Для вычисления величины поворота в поставленных задачах неинерциальная система отсчета (НИСО), связанная с гироскопом или стержнем, аппроксимируется сопутствующими ИСО в моменты времени t и $t + dt$. Пусть K — это лабораторная система отсчета, K' — сопутствующая ИСО, имеющая относительно K скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, а K'' — сопутствующая система в следующий момент времени $t + dt$, движущаяся относительно K со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (рис. 1). Предполагается, что относительно K' система K'' перемещается поступательно со скоростью $d\mathbf{v}'$.

Обозначим через $\mathbb{L}(\mathbf{v})$ матрицу буста (лоренцевского преобразования без вращения), а через $\mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi)$ — матрицу 3-мерного вращения декартовых осей вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ .

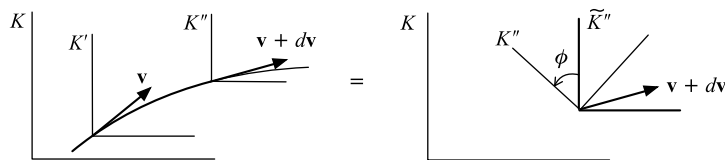


Рис. 1. Движение НИСО в моменты времени t и $t + dt$ аппроксимируется сопутствующими ИСО K' и K'' . Два последовательных буста (от лабораторной системы K к K' и затем к K'') эквивалентны бусту от K к \tilde{K}'' и следующему за ним повороту

Выполнение последовательных преобразований от K к K' со скоростью \mathbf{v} и от K' к K'' со скоростью $d\mathbf{v}'$ эквивалентно композиции буста и следующего за ним поворота (см. приложение А):

$$\mathbb{L}(d\mathbf{v}') \mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi) \mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v}), \quad (1)$$

где параметры бесконечно малого поворота, называемого вигнеровским вращением, равны

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (2)$$

а $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}'$ связаны стандартным законом сложения скоростей. Здесь и далее $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$ — лоренцевский фактор, и выбрана система единиц, в которой скорость света $c = 1$. Последовательность умножения матриц обратна последовательности выполняемых преобразований.

Соотношение (2) лежит в основе общепринятого подхода к решению задач ускоренного движения гироскопа [2–4] или стержня (координатной оси НИСО) [2]. Для наблюдателей в K' и K'' мгновенные положения, например, стержня параллельны друг другу. В силу вигнеровского вращения это будет не так для наблюдателей в лабораторной системе отсчета. Иногда [3] поворот (2) интерпретируется как вращение НИСО относительно лабораторной системы отсчета. Пусть \mathbf{s} — момент импульса гироскопа или вектор, направленный вдоль стержня. В результате поворота координатных осей меняются и любые векторы, неподвижные в НИСО: $d\mathbf{s} = d\phi \mathbf{n} \times \mathbf{s}$. Поэтому, вводя 3-мерное ускорение $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, можно записать

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s}. \quad (3)$$

Эту формулу получил Томас, а общеизвестный ее вывод приводится в учебнике Мёллера [3].

2. ПОЧЕМУ УРАВНЕНИЕ ТОМАСА НЕ ОТНОСИТСЯ К ЛАБОРАТОРНОЙ СО

Вигнеровское вращение в (1) выполняется *после* лоренцевского буста со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, переводящего K в систему \tilde{K}'' . Поэтому сопутствующая система K'' повернута на угол (2) относительно \tilde{K}'' , и интерпретация этого поворота относительно лабораторной системы требует определенной аккуратности. В частности, в [5] предлагается учитывать замедление времени, что приводит к замене $\gamma^2 \mapsto \gamma$ в числителе формулы (3). В этом случае, с точки зрения авторов работ [2, 5], уравнение (3) выполняется относительно лабораторной системы отсчета.

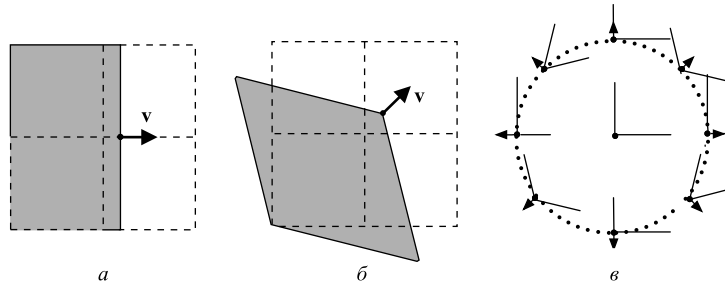


Рис. 2. *а, б*) Движение квадрата со скоростью $v = 0,8$ в различных направлениях. Штриховые линии — координатная сетка неподвижной системы. *в*) Координатные оси восьми ИСО, движущихся в различных направлениях

Однако кроме замедления времени необходимо учитывать и другие кинематические эффекты. Из преобразований Лоренца следует, что если *одновременно* зафиксировать положение всех точек движущегося объекта, то он будет выглядеть сжатым в направлении движения. Например, квадрат (в собственной системе отсчета), движущийся со скоростью \mathbf{v} в плоскости (x, y) вдоль одной из граней, будет короче в γ раз (рис. 2, *а*). Если же квадрат движется под углом 45° , то его диагональ вдоль направления движения будет сокращаться, а вторая диагональ — нет. Результат изображен на рис. 2, *б*.

Представим, что стороны квадрата — это координатные оси (x', y') движущейся системы отсчета. Тогда при произвольном направлении ее скорости эти оси будут не ортогональны друг другу и некоторым образом повернуты относительно неподвижной системы отсчета.

На рис. 2, *в* изображены координатные оси восьми систем отсчета и стрелками указаны направления их скорости (см. приложение Б). В зависимости от направления скорости координатные оси наклоняются под различными углами. Понятно, что помимо вигнеровского вращения необходимо учесть подобный эффект «искажения» координатной сетки движущейся системы отсчета.

Прецессия Томаса также тесно связана с относительностью одновременности. Рассмотрим стержень, расположенный «горизонтально» вдоль направления своего движения. Пусть наблюдатели в системе K' , связанной со стержнем, одновременно сообщают всем точкам стержня скорость в вертикальном направлении (рис. 3, *а*). Для «неподвижных» наблюдателей в K горизонтальная скорость стержня не изменится, а вертикальная окажется отличной от нуля. Поэтому стержень получает ускорение \mathbf{a} , перпендикулярное к его скорости \mathbf{v} . В соответствии с уравнением (3) в момент получения ускорения должен возникнуть поворот стержня ($\mathbf{v} \times \mathbf{a} \neq 0$). С физической точки зрения в основе этого эффекта лежит относительность одновременно-

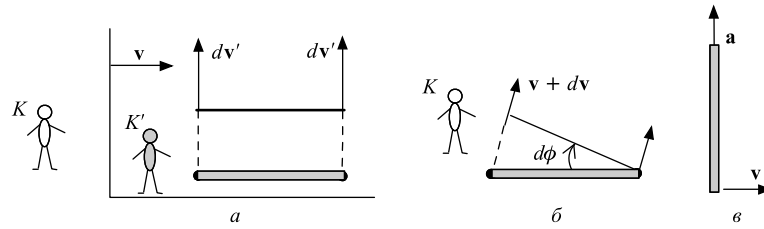


Рис. 3. Стержень, движущийся в горизонтальном направлении, приобретает вертикальную компоненту скорости. Рис. *a* для горизонтального стержня выполнен «с точки зрения» наблюдателей, связанных со стержнем, рис. *б* — для «неподвижных» наблюдателей в лабораторной системе отсчета. На рис. *в* аналогичное ускорение получает вертикально ориентированный стержень

сти двух событий. Если движущиеся наблюдатели одновременно начинают «поднимать вверх» левый и правый концы стержня, то эти два события будут неодновременны для неподвижных наблюдателей. Для них правый конец стержня начнет подниматься позже левого, что в лабораторной системе будет выглядеть как поворот (рис. 3, *б*).

Однако в общем случае уравнение (3) *неверно* описывает поведение ускоренно движущегося стержня. Из (3) следует, что такой же поворот должен произойти и для вертикально ориентированного стержня (рис. 3, *в*). В этом случае события начала смещения нижнего и верхнего конца стержня происходят на линии, перпендикулярной к скорости. Поэтому они одновременны для наблюдателей в обеих системах. Следовательно, отсутствует физическая причина для поворота в начальный момент времени (когда ускорение появилось, но скорость еще не изменилась и перпендикулярна стержню). Тем не менее формула Томаса (3) (если интерпретировать ее как уравнение в лабораторной системе отсчета) предсказывает поворот стержня и в этом случае, что неверно.

Похожие аргументы можно привести относительно собственного момента импульса вращающегося гироскопа. Пусть неподвижный (но вращающийся) гироскоп начинают с ускорением перемещать вдоль прямой таким образом, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{v} все время остаются параллельными. Тогда правая часть уравнения (3) будет равна нулю. Отсюда следует, что компоненты момента импульса гироскопа *не изменяются* при увеличении им скорости. Однако при этом гироскоп оказывается в движущейся ИСО (после прекращения ускорения). В силу преобразований Лоренца для момента импульса его компоненты *должны* отличаться от исходных в лабораторной системе отсчета.

Наконец, обратимся к эксперименту. Движение классического спина во внешнем электромагнитном поле описывается уравнением Баргмана–Мишеля–Телегди (ВМТ) [6]. С его помощью с высокой точностью определяются

аномальные магнитные моменты частиц [7]. Для частицы с нулевым магнитным моментом (нет ларморовской прецессии) в *лабораторной* системе отсчета уравнение ВМТ имеет вид (разд. 9)

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S}) \mathbf{v}. \quad (4)$$

Это уравнение является 3-мерной записью уравнения переноса Ферми [8] (разд. 7), которое также используется для описания движения гироскопа в гравитационном поле. Несложно видеть, что (4) существенно отличается от уравнения Томаса (3) и приводит не только к повороту спина, но и к изменению его длины.

Кроме того, при обсуждении вигнеровского поворота обычно предполагается, что все 3-мерные векторы поворачиваются одинаковым образом при изменении скорости ИСО. Это было бы так для обычного поворота неподвижной декартовой системы координат. Однако нас интересует изменение векторов, *движущихся* относительно лабораторной системы. В этом случае необходимо учитывать свойства этих векторов по отношению к преобразованиям Лоренца. Например, проекции спина являются пространственными компонентами 4-вектора. Полный момент импульса — это три из шести компонент 4-тензора. Радиус-вектор, направленный вдоль стержня, — это тоже 3-вектор. Все эти векторы одинаково ведут себя по отношению к 3-мерным вращениям, но абсолютно по-разному по отношению к преобразованиям Лоренца. В результате различные физические величины, выражаемые через 3-мерные векторы, будут иметь различные уравнения для своего изменения.

Различие лоренц-трансформационных свойств векторов не учитывается также в подходе, в котором используется неевклидовый характер пространства скоростей. Такое пространство 3-мерно. Поэтому рассматриваемые в нем 3-мерные векторы физически отождествляются, хотя они могут иметь абсолютно различную природу.

Таким образом, существует необходимость в прояснении ряда вопросов, связанных с кинематическими эффектами специальной теории относительности, которые приводят к прецессии Томаса.

Статья состоит из двух частей, которые посвящены повороту стержня и прецессии спина. При помощи подхода, основанного на сопутствующих ИСО, выводится уравнение, описывающее поворот ускоренно движущегося стержня, который при изменении скорости перемещается параллельно с точки зрения наблюдателей в сопутствующих ИСО. Обсуждаются условия применимости полученного уравнения. Уравнение, описывающее ускоренное движение спина (как уравнение переноса Ферми), может быть получено из достаточно простых ковариантных соображений. Однако сначала оно будет найдено при помощи двух сопутствующих ИСО, так же, как и в случае со стержнем. Мы покажем, что различные определения спина движущегося гироскопа

приводят к различным уравнениям прецессии относительно лабораторной системы отсчета. В качестве примера криволинейного движения спина будет рассмотрено движение в однородном электромагнитном поле и детально разобрана прецессия спина в этом случае.

В приложениях собран ряд вопросов, связанных с томасовской прецессией. В единых обозначениях сравнивается подход к проблеме в известных учебниках Джексона [4] и Мёллера [3] (приложение А). В приложении Б выводятся выражения для поворота координатных осей движущейся ИСО с точки зрения неподвижных наблюдателей. Приложение В посвящено деталям ковариантного введения 4-вектора и 4-тензора спина для системы частиц.

3. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТЕРЖНЯ

Пусть в ИСО находится стержень, один из концов которого расположен в начале системы отсчета. Это начало ИСО движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$ и ускорением $\mathbf{a}(t)$ относительно неподвижной (лабораторной) системы K . Стержень перемещается параллельно с точки зрения наблюдателей в мгновенно сопутствующей стержню ИСО. Нас интересует: как такое движение выглядит для наблюдателей в системе K ? Для них положение второго конца стержня (точка B) относительно точки A будет изменяться. Чтобы описать это изменение, можно рассмотреть две ИСО K' и K'' , сопутствующих ИСО, учесть вигнеровское вращение и лоренцевское сокращение длины. Однако в этом разделе мы будем использовать более простые рассуждения.

Рассмотрим неподвижный относительно ИСО K' стержень, один конец которого находится в начале системы (точка A на рис. 4).

Пусть другой «точно такой же» стержень движется относительно первого с *небольшой* постоянной скоростью $d\mathbf{v}'$ (относительно K') так, что в момент времени $t' = 0$ все точки обоих стержней совпадают. Можно считать, что

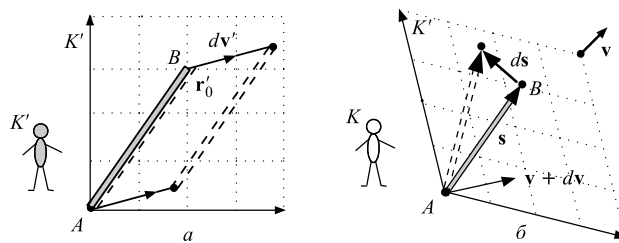


Рис. 4. Рис. *a* выполнен с точки зрения наблюдателя в системе K' , в которой находятся два совпадающих при $t' = 0$ стержня, один из которых неподвижен, а второй движется со скоростью $d\mathbf{v}'$. На рис. *б* для наблюдателей в K при $t = 0$ стержни не совпадают

второй стержень эквивалентен первому стержню, который в момент времени $t' = 0$ (в системе K') приобрел небольшую поступательную скорость $d\mathbf{v}'$ в произвольном направлении. Разница ориентации этих двух стержней для наблюдателей в лабораторной системе K даст требуемый поворот ускоренно движущегося стержня.

Пусть система отсчета K' движется относительно «неподвижной» системы отсчета K со скоростью \mathbf{v} . В момент времени $t = 0$ концы стержней в точке A и начала систем отсчета K и K' совпадают. Однако в силу относительности одновременности вторые концы стержней (точки B) совпадать не будут (хотя это так в системе K'). Для неподвижных наблюдателей в K стержни оказываются повернутыми вокруг точки A .

Уравнения движения некоторой точки, имеющей постоянную скорость в системах K' и K , имеют вид

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t', \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t. \quad (5)$$

Найдем связь скоростей \mathbf{u} , \mathbf{u}' и начальных положений \mathbf{r}_0 , \mathbf{r}'_0 точки в момент времени $t = 0$ и $t' = 0$ соответственно. Подставим уравнения движения в обратные преобразования Лоренца (118), приложение Б:

$$\begin{aligned} t &= \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'_0 + (\mathbf{v}\mathbf{u}')t'), \\ \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t &= \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}'t' + \mathbf{v}\gamma t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}')t', \end{aligned} \quad (6)$$

где $\Gamma = \gamma^2/(\gamma + 1) = (\gamma - 1)/v^2$. В левую часть уравнения (7) подставим время t из (6) и сгруппируем слагаемые при t' :

$$\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0 + \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) = [\mathbf{u}' + \gamma\mathbf{v} + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}') - \gamma\mathbf{u}(1 + \mathbf{v}\mathbf{u}')]t'. \quad (8)$$

Это соотношение выполняется при любом t' , если его левая и правая части равны нулю.

В результате приходим к известной формуле сложения скоростей

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}' + \mathbf{v}\gamma + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{u}')}{\gamma(1 + \mathbf{v}\mathbf{u}')} \quad (9)$$

и получаем связь начальных положений точки в двух системах отсчета:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 - \gamma\mathbf{u}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0). \quad (10)$$

В момент времени $t = t' = 0$ точки A первого и второго стержня совпадают и находятся в началах систем отсчета ($\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}'_0 = 0$). Точка B первого стержня имеет скорость $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (или $\mathbf{u}' = 0$). Поэтому из (10) следует, что в момент времени $t = 0$ в системе K она имеет координаты

$$\mathbf{r}_{01} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0). \quad (11)$$

Точка B второго стержня имеет скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (или $\mathbf{u}' = d\mathbf{v}'$). Из (10) получаем ее положение в момент $t = 0$ в системе K :

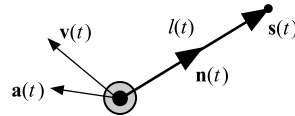
$$\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{r}'_0 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{r}'_0) - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{r}'_0)d\mathbf{v}. \quad (12)$$

Вычитая из (12) уравнение (11), получим изменение положения точки B относительно точки A (смещение конца B второго стержня относительно первого) для наблюдателей в системе K . Значения \mathbf{r}'_0 точек B для обоих стержней в системе K' одинаковы (стержни при $t' = 0$ совпадают).

Введем вектор \mathbf{s} , соединяющий концы стержня A и B . Так как радиус-вектор точки A нулевой, имеем $\mathbf{s} = \mathbf{r}_{0_1}$. После изменения стержнем скорости в (12) $\mathbf{r}_{0_2} = \mathbf{s} + d\mathbf{s}$. Поэтому

$$d\mathbf{s} = -\gamma(\mathbf{v}\mathbf{s}')d\mathbf{v} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})d\mathbf{v}, \quad (13)$$

где $\mathbf{s}' = \mathbf{r}'_{0_1} = \mathbf{r}'_{0_2}$ — положение точки B стержней в системе K' . Во втором равенстве с учетом (11) подставлено $\mathbf{v}\mathbf{s}' = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{s})$. Вводя вектор 3-мерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, окончательно приходим к уравнению



$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{a}. \quad (14)$$

Так как точки A обоих стержней совпадали, в уравнении (14) производная по времени от \mathbf{s} имеет смысл скорости изменения ориентации и длины стержня (изменение положения точки B относительно A). Сама же точка A независимо движется с переменной скоростью $\mathbf{v}(t)$.

В результате изменения скорости происходит изменение как длины стержня, так и его ориентации. Можно разделить эти два эффекта. Вводя длину стержня $l = \sqrt{\mathbf{s}^2}$ и единичный вектор в его направлении $\mathbf{n} = \mathbf{s}/l$, из (14) несложно получить

$$\frac{d \ln l}{dt} = -\gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})(\mathbf{a}\mathbf{n}). \quad (15)$$

Аналогично для единичного вектора \mathbf{n}

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})[\mathbf{a} \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}. \quad (16)$$

Из этого уравнения следует, что угловая скорость поворота зависит от ориентации стержня \mathbf{n} . Действительно, перепишем (16) в виде

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{n}, \quad (17)$$

где угловая скорость вращения вектора \mathbf{n} равна

$$\boldsymbol{\Omega} = \gamma^2(\mathbf{v}\mathbf{n})[\mathbf{a} \times \mathbf{n}]. \quad (18)$$

В то же время в соответствии с уравнением (3) угловая скорость равна

$$\boldsymbol{\Omega}_T = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \quad (19)$$

и не зависит от ориентации стержня.

При помощи уравнения (14) несложно проанализировать рассмотренное во введении изменение вертикальной скорости стержня, который движется в горизонтальном направлении (рис. 5, *a*).

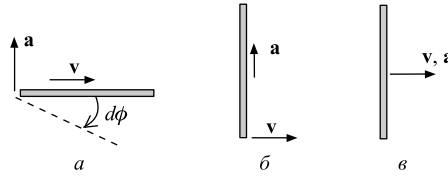


Рис. 5. Различная ориентация стержня, скорости и ускорения

Если стержень перед началом ускорения был ориентирован горизонтально вдоль своей скорости, то $\mathbf{v}\mathbf{n} = v$, а угловая скорость поворота будет перпендикулярна плоскости, в которой лежат векторы скорости и ускорения. В этом случае угол поворота равен

$$d\phi = \gamma^2 v dv, \quad (20)$$

где dv — приращение вертикальной составляющей скорости. Угол же поворота в соответствии с формулой Томаса (3) составит

$$d\phi = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} v dv \quad (21)$$

и при малых скоростях окажется в два раза меньше, чем следует из уравнения (14).

На рис. 5, *b* изображен стержень, ориентированный перпендикулярно к скорости. Так как $\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$, то поворот стержня происходить не будет. Этот же результат следует из соображений, основанных на относительности одновременности. Как отмечалось в предыдущем разделе, формула Томаса в этом случае тем не менее предсказывает вращение стержня.

На рис. 5, *c* также изображен стержень, ориентированный перпендикулярно к скорости. Однако теперь его ускорение параллельно скорости стержня. Так как по-прежнему $\mathbf{v}\mathbf{s} = 0$, поворот стержня, естественно, происходить не будет. Заметим, что в этом случае $\mathbf{v} \times \mathbf{a} = 0$ и формула Томаса (3) также предсказывает отсутствие вращения.

4. НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА

С целью установления пределов применимости уравнения (14) рассмотрим ускоренное движение горизонтально лежащего стержня (рис. 6, *a*). Если стержень, скорость и ускорение параллельны, то уравнение (15) принимает вид

$$\frac{d \ln l}{dt} = -\frac{va}{1-v^2} = \frac{1}{2} \frac{d \ln(1-v^2)}{dt}. \quad (22)$$

Интегрируя его с начальным условием $l(0) = l_0$, $v(0) = 0$, получаем

$$l(t) = l_0 \sqrt{1-v^2}. \quad (23)$$

Это выражение совпадает с мгновенным лоренцевским сокращением движущегося со скоростью $v = v(t)$ стержня. Такая зависимость длины от времени на самом деле справедлива только при небольшом ускорении. Дело в том, что использование двух сопутствующих ИСО для описания неинерциального движения является лишь некоторым приближением. Кратко рассмотрим физические эффекты, происходящие в неинерционной системе отсчета, отсылая за подробностями к [11].

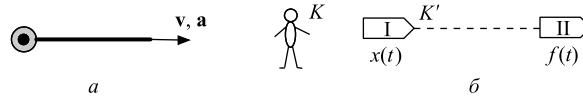


Рис. 6. Ускоренное движение горизонтального стержня и его моделирование при помощи двух космических кораблей

Пусть с началом и концом стержня связаны два наблюдателя, которые на рис. 6, *б* представлены в виде двух космических кораблей. Предположим, что они покоились относительно ИСО K и в момент времени $t = 0$ начали ускоренное движение. Первый корабль при $t = 0$ имел координату $x = 0$, а второй — $x = l_0$. Пусть при $t > 0$ первый корабль движется релятивистски равноускоренно вдоль оси x следующим образом:

$$x(t) = \frac{1}{w} (\sqrt{1 + (wt)^2} - 1) = \frac{\gamma - 1}{w}, \quad (24)$$

где $w = \text{const}$ — собственное ускорение первого корабля. Как при этом изменяется координата $f(t)$ второго корабля?

Ответ существенно зависит от того, является ли ИСО жесткой для ее наблюдателей или нет. Когда корабли синхронно (одновременно) ускорятся

с точки зрения системы K , то их ускорение не будет синхронным в K' , и наоборот.

Если наблюдатели в K' «выдерживают» свою систему жесткой, то наблюдатели в инерциальной системе K будут регистрировать ее сокращение в направлении движения. События (ускорительные импульсы корабля) по ходу движения в системе K' происходят позже по сравнению с событиями, расположенными против хода, и второй корабль в системе K разгоняется медленнее.

Пусть для контроля относительной неподвижности неинерциальные наблюдатели используют радиолокационный метод, обмениваясь световыми сигналами. Тогда можно показать (например, [3, 11]), что собственное расстояние между ними будет неизменным, если второй корабль имеет следующее уравнение движения:

$$f(t) = \frac{1}{w} (\sqrt{(1 + w l_0)^2 + (wt)^2} - 1). \quad (25)$$

В результате расстояние между кораблями (длина стержня) с точки зрения неподвижных наблюдателей будет равна $l(t) = f(t) - x(t)$ или

$$l(t) = \frac{\sqrt{\gamma^2 + 2wl_0 + (wl_0)^2} - \gamma}{w} \approx \frac{l_0}{\gamma} \left(1 + \frac{v^2}{2} wl_0 + \dots \right). \quad (26)$$

Это соотношение стремится к мгновенному лоренцевскому сокращению (23), только при $v^2 wl_0 = v^2 \gamma^3 a l_0 \ll 1$, где $a = w/\gamma^3$ — ускорение левого корабля относительно лабораторной системы отсчета.

Физика в неинерционной системе достаточно своеобразна. В частности, течение времени различно для удаленных, хотя и относительно неподвижных наблюдателей. Например, если второй (правый) корабль посылает периодические сигналы с частотой ν_0 , то первый корабль будет принимать их с частотой $\nu = \nu_0(1 + wl_0)$, тем большей, чем больше расстояние между кораблями. Если ускорение прекращается, то «отключение двигателей» произойдет неодновременно и последним перестанет ускоряться правый корабль. Когда и он отключит свои двигатели, оба корабля окажутся в одной инерциальной системе отсчета. Расстояние между ними будет в точности равно лоренцевскому сокращению длины, однако часы окажутся рассинхронизированными.

При получении уравнения (14) мы игнорировали все эти эффекты, следуя общепринятому методу двух сопутствующих ИСО. Это приближение будет справедливым только при относительно небольшом ускорении (точнее, при $a \ll a_0 = c^4/(v^2 \gamma^3 l_0)$, где восстановлена скорость света c). Впрочем, для метрового стержня, движущегося со скоростью $v = 0,8 c$, имеем достаточно большое значение $a_0 = 3 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$.

5. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА И СПИН

До сих пор мы рассматривали поворот стержня, движущегося по криволинейной траектории. Иногда вектор спина (собственного момента импульса) гироскопа отождествляют с таким стержнем (или осью координат НИСО). Ниже мы покажем, что это в общем случае неверно.

Как известно [12], в теории относительности момент импульса \mathbf{L} точечной частицы не является векторной частью 4-вектора. Чтобы записать преобразования между двумя инерциальными системами отсчета, необходимы два вектора

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{G} = E\mathbf{r} - \mathbf{p}t, \quad (27)$$

где \mathbf{p} — импульс частицы, а E — ее энергия. Эти векторы являются компонентами антисимметричного тензора

$$L^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha = (\mathbf{G}, \mathbf{L}), \quad (28)$$

где $x^\alpha = \{t, \mathbf{r}\}$ — 4-вектор положения частицы в данный момент времени, а $p^\alpha = \{E, \mathbf{p}\}$ — ее 4-импульс и $\mathbf{G} = \{L^{10}, L^{20}, L^{30}\}$, $\mathbf{L} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}$.

Используя преобразования Лоренца для координат-времени (116) (приложение Б) и аналогичные для энергии-импульса, можно получить преобразования

$$\begin{cases} \mathbf{L}' = \gamma(\mathbf{L} + \mathbf{v} \times \mathbf{G}) - \Gamma(\mathbf{v}\mathbf{L})\mathbf{v}, \\ \mathbf{G}' = \gamma(\mathbf{G} - \mathbf{v} \times \mathbf{L}) - \Gamma(\mathbf{v}\mathbf{G})\mathbf{v}. \end{cases} \quad (29)$$

Продольные компоненты векторов \mathbf{L} и \mathbf{G} при преобразованиях Лоренца не изменяются: $\mathbf{v}\mathbf{L} = \mathbf{v}\mathbf{L}'$, $\mathbf{v}\mathbf{G} = \mathbf{v}\mathbf{G}'$. Кроме того, для точечной частицы эти векторы ортогональны в любой системе отсчета ($\mathbf{L}\mathbf{G} = 0$).

Суммарная энергия движения, импульс и момент импульса системы частиц определяют суммированием по всем частицам:

$$\mathcal{E} = \sum E, \quad \mathbf{P} = \sum \mathbf{p}, \quad \mathbf{L} = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (30)$$

где опущены индексы, нумерующие частицы. В системе отсчета, в которой суммарный импульс равен нулю ($\mathbf{P} = 0$), вектор \mathbf{G} , деленный на суммарную энергию \mathcal{E} , имеет смысл центра энергии системы [12] (в нерелятивистском случае центра масс):

$$\mathbf{R} = \frac{\sum E\mathbf{r}}{\sum E} \approx \frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m}, \quad (31)$$

где приближенное равенство записано в нерелятивистском пределе, в котором энергия частицы E приблизительно равна ее массе m .

Для системы частиц кроме полного момента импульса можно ввести также 4-вектор классического (не квантового) спина [8]

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (32)$$

где $\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma}$ — символ Леви-Чевиты, а U^α — суммарная 4-скорость системы частиц, определяемая при помощи суммарного 4-импульса $P^\alpha = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}$:

$$U^\alpha = \frac{P^\alpha}{M} = \{U^0, \mathbf{U}\} = \gamma \{1, \mathbf{u}\}, \quad (33)$$

где \mathbf{u} — 3-вектор «суммарной скорости», $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$, а $M = \sqrt{\mathcal{E}^2 - \mathbf{P}^2}$ — масса системы частиц (без учета энергии их взаимодействия). Мы используем сигнатуру $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ и $\varepsilon_{0123} = 1$.

Физический смысл классического спина становится ясным, если его определение (32) записать в 3-мерных обозначениях $S^\alpha = \{S^0, \mathbf{S}\}$:

$$\mathbf{S} = \gamma (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}), \quad S^0 = \mathbf{uS}. \quad (34)$$

Таким образом, спин имеет смысл *собственного момента импульса* и пропорционален разнице полного момента импульса (\mathbf{L}) и момента движения системы как целого ($\mathbf{R} \times \mathbf{P}$). Кроме того, 4-спин (в отличие от полного момента) не изменяется при трансляционных преобразованиях.

В силу антисимметричности символа Леви-Чевиты произведение спина на 4-вектор скорости в любой системе отсчета равно нулю:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} = S_\alpha U^\alpha = 0. \quad (35)$$

Поэтому в системе покоя $\mathbf{U} = \{1, \mathbf{0}\}$ спин обладает только векторными компонентами $\mathbf{S} = \{0, \mathbf{S}\}$. В произвольной системе отсчета $S^0 = \mathbf{uS}$.

Для точечной частицы $\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, поэтому всегда $\mathbf{S} = \mathbf{0}$. В случае системы частиц суммарный момент импульса непропорционален суммарному импульсу (30) и спин (в общем случае) не равен нулю.

Трансляционно-инвариантную величину, характеризующую собственный момент вращения, можно ввести не единственным образом. Например, при помощи 4-вектора спина можно определить 4-тензор спина (см. приложение В):

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (36)$$

Два 3-мерных вектора, составляющих компоненты тензора спина, обозначим строчными буквами $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\}$, $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$, где

$$\mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{s}, \quad \mathbf{s} = \gamma \mathbf{S} - \gamma (\mathbf{uS}) \mathbf{u}. \quad (37)$$

В системе покоя, в которой $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, оба 3-вектора спина совпадают ($\mathbf{s} = \mathbf{S}$) и равны полному моменту импульса системы \mathbf{L} .

6. ПРЕЦЕССИЯ СПИНА

Рассмотрим прецессию (изменение величины и ориентации) спина гироскопа при его криволинейном движении. Последующие рассуждения будут справедливы для любого 4-вектора S , ортогонального к 4-скорости $U = \{\gamma u, \mathbf{u}\gamma u\}$:

$$U \cdot S = U^0 S^0 - \mathbf{U}\mathbf{S} = 0. \quad (38)$$

Из этого соотношения следует, что $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$. Запишем преобразования для 3-вектора спина (заменяя в преобразованиях Лоренца (116) $t \mapsto \mathbf{u}\mathbf{S}$ и $\mathbf{r} \mapsto \mathbf{S}$):

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \gamma(\mathbf{u}\mathbf{S})\mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{v}\mathbf{S})\mathbf{v}. \quad (39)$$

Обратное преобразование получается заменой скорости $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \gamma(\mathbf{u}'\mathbf{S}')\mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{v}\mathbf{S}')\mathbf{v}, \quad (40)$$

так как в любой системе отсчета $S^0 = \mathbf{u}\mathbf{S}$. Если гироскоп неподвижен ($\mathbf{u}' = 0$) относительно системы K' , то

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}(\mathbf{v}\mathbf{S}')\mathbf{v}. \quad (41)$$

Обратное преобразование получается из (39) после подстановки $\mathbf{u} = \mathbf{v}$:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1}(\mathbf{v}\mathbf{S})\mathbf{v}. \quad (42)$$

То, что (41) и (42) взаимно обратны, несложно проверить их прямой подстановкой друг в друга.

Введем три системы отсчета K , K' и K'' . Пусть скорость системы K' относительно K равна \mathbf{v} , а скорость системы K'' относительно K' равна $d\mathbf{v}'$. Соответственно, скорость K'' относительно K равна $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Применим преобразование (41) между ИСО K' и K'' . Пусть в системе K'' находится неподвижный (но вращающийся) гироскоп со спином \mathbf{S}'' .

В этом случае в преобразовании (41) необходимо добавить всем величинам штрих и заменить $\mathbf{v} \mapsto d\mathbf{v}'$. В результате в первом приближении по $d\mathbf{v}'$ спин остается в системе K' без изменений:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}''. \quad (43)$$

Рассмотрим теперь «точно такой же» гироскоп, неподвижный в системе K' , со спином \mathbf{S}' (рис. 7). Когда начала систем K' и K'' совпадают, аналогично стержням из разд. 3 «совпадают» и гироскопы. Поэтому будем считать, что гироскоп системы K'' получается при изменении на $d\mathbf{v}'$ скорости гироскопа системы K' .

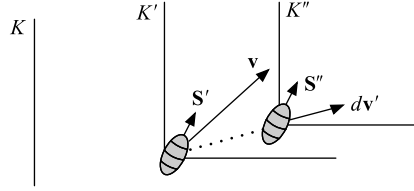


Рис. 7. Два вращающихся гироскопа, неподвижных относительно систем K' и K''

Пусть первый гироскоп относительно лабораторной системы K имеет спин \mathbf{S} , а второй — $\mathbf{S} + d\mathbf{S}$. Скорость первого гироскопа равна \mathbf{v} , и для него выполняется преобразование (42). Второй гироскоп имеет скорость $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, поэтому для него из (39) следует

$$\mathbf{S}'' = \mathbf{S} + d\mathbf{S} - \gamma((\mathbf{v} + d\mathbf{v})(\mathbf{S} + d\mathbf{S}))\mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{v}(\mathbf{S} + d\mathbf{S}))\mathbf{v}. \quad (44)$$

Вычитая из этого преобразования (42), учитывая (43) и сохраняя первый порядок малости, имеем

$$d\mathbf{S} = \frac{\gamma}{\gamma + 1}(\mathbf{v} d\mathbf{S})\mathbf{v} + \gamma(\mathbf{S} d\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (45)$$

Умножим правую и левую части на \mathbf{v} :

$$\mathbf{v}d\mathbf{S} = \gamma^2 v^2 (\mathbf{S} d\mathbf{v}). \quad (46)$$

Поэтому (45) можно переписать следующим образом:

$$d\mathbf{S} = \gamma^2 (\mathbf{S} d\mathbf{v})\mathbf{v}. \quad (47)$$

Вводя вектор 3-мерного ускорения $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, окончательно получаем

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{a}\mathbf{S})\mathbf{v}. \quad (48)$$

Если ускорение остается перпендикулярным вектору спина ($\mathbf{a}\mathbf{S} = 0$), то спин при таком движении не изменяется. В остальных случаях при ускоренном движении происходит изменение спина. При ускорении гироскопа из состояния покоя вдоль оси x интегрирование (48) приводит к следующей зависимости продольной к скорости компоненты спина от времени: $S_x(t) = S_x(0)/\sqrt{1 - v^2(t)}$. Это же соотношение следует и из преобразований Лоренца (41).

Обратим внимание, что уравнение (48) отличается от уравнения (14), описывающего поворот «жесткого» стержня при криволинейном движении. Поэтому повороты стержня и спина в общем случае различны.

7. КОВАРИАНТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Уравнению (48) можно придать ковариантную форму

$$\frac{dS}{d\tau} = -(\mathbf{A} \cdot \mathbf{S})V, \quad (49)$$

где $V = \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\}$ — 4-скорость, а \mathbf{A} — 4-ускорение:

$$\mathbf{A} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{\gamma, \mathbf{v}\gamma\} = \{(\mathbf{v}\mathbf{a})\gamma^4, \mathbf{a}\gamma^2 + \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{a})\gamma^4\}, \quad (50)$$

$d\tau = \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dt$ — собственное время гироскопа и использованы безындексные обозначения для 4-векторов (т. е. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} = A^\alpha S_\alpha$, и т. д.).

Дифференциальное уравнение (49) называется уравнением переноса Ферми. Оно может быть получено [8] в предположении, что изменение 4-вектора спина dS^α при изменении скорости системы отсчета пропорционально 4-скорости V^α . Действительно, пусть в сопутствующей гироскопу ИСО K' (где $\mathbf{v} = 0$) нет прецессии:

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt'} = 0. \quad (51)$$

Предположим, что производная 4-спина по собственному времени τ выражается через 4-скорость V , 4-ускорение \mathbf{A} и сам 4-спин. В сопутствующей гироскопу ИСО эти 4-векторы имеют компоненты

$$\mathbf{S} = \{0, \mathbf{S}'\}, \quad V = \{1, \mathbf{0}\}, \quad \mathbf{A} = \{0, \mathbf{a}'\}. \quad (52)$$

Так как только у 4-скорости в этой системе равны нулю пространственные компоненты, можно записать

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = \alpha V, \quad \frac{d\{S'_0, \mathbf{S}'\}}{dt'} = \alpha\{1, \mathbf{0}\}, \quad (53)$$

где α — некоторый скаляр. Первое соотношение записано для 4-векторов в безындексном виде, а второе — его покомпонентное выражение в сопутствующей ИСО K' . Заметим, что хотя нулевая компонента 4-спина $S_0 = \mathbf{v}\mathbf{S}$ в K' равна нулю, ее производная по времени отлична от нуля:

$$\frac{dS'_0}{dt'} = \frac{d(\mathbf{v}'\mathbf{S}')}{dt'} = \mathbf{a}'\mathbf{S}', \quad (54)$$

где учтено соотношение (51). Поэтому для нулевой компоненты уравнения (53) в сопутствующей системе $\alpha = \mathbf{a}'\mathbf{S}'$.

Дифференцируя условие ортогональности 4-векторов скорости и спина $V \cdot S = 0$ и учитывая (53), получаем

$$0 = \frac{d(V \cdot S)}{d\tau} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} + \alpha V \cdot V. \quad (55)$$

Так как квадрат 4-скорости равен единице ($V^2 = 1$), находим $\alpha = -\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}$ и приходим к уравнению (49).

Вводя матрицу $(V \otimes A)_{\alpha\beta} = V_\alpha A_\beta$, уравнение переноса Ферми можно записать в эквивалентном матричном виде

$$\frac{d\mathbf{S}}{d\tau} = -(V \otimes A) \cdot \mathbf{S}, \quad (56)$$

где матрица $(V \otimes A)$ определяет повороты 4-вектора спина.

Благодаря уравнению переноса Ферми и условию $V \cdot S = 0$ квадрат 4-спина оказывается постоянным:

$$\frac{dS^2}{d\tau} = 0, \quad (57)$$

хотя квадрат 3-спина изменяется:

$$\frac{d\mathbf{S}^2}{dt} = 2\gamma^2(\mathbf{vS})(\mathbf{aS}) \quad (58)$$

(если спин не ортогонален скорости или ускорению). Поэтому чистой прецессии (поворота вектора спина \mathbf{S}) не происходит, и при движении изменяется не только направление спина, но и его длина.

При помощи ковариантного дифференциала уравнение переноса Ферми можно записать в криволинейных координатах

$$\frac{DS^\alpha}{d\tau} = \frac{dS^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^\mu V^\nu = -(A^\mu S_\mu)V^\alpha. \quad (59)$$

В таком виде оно справедливо при наличии гравитационного поля и дополнительного внешнего силового поля, создающего 4-силу A :

$$\frac{DV^\alpha}{d\tau} = \frac{dV^\alpha}{d\tau} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha V^\mu V^\nu = A^\alpha. \quad (60)$$

Если гироскоп свободно движется в гравитационном поле, то $A = 0$ и (60) становится уравнением геодезической. Прецессия спина в этом случае также происходит. Однако она определяется уравнением $DS/d\tau = 0$ и носит чисто динамический характер, возникая благодаря гравитационному полю (геометрии 4-пространства).

8. РАЗЛИЧНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение Томаса (3) можно получить из уравнения (48), описывающего изменение спина в лабораторной системе отсчета [13]. Однако оно при этом будет иметь достаточно специфический смысл.

Возьмем производную по времени *лабораторной* системы от преобразования (42) для спина между сопутствующей (\mathbf{S}') и лабораторной (\mathbf{S}) системами отсчета:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{vS})\mathbf{v}. \quad (61)$$

Учитывая производную лоренцевского фактора $d\gamma/dt = \gamma^3 (\mathbf{v}\mathbf{a})$, уравнение (48) и следующее из него уравнение

$$\frac{d(\mathbf{vS})}{dt} = \gamma^2 (\mathbf{aS}), \quad (62)$$

получаем

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\mathbf{aS})\mathbf{v} - \frac{\gamma}{\gamma + 1} (\mathbf{vS})\mathbf{a} - \frac{\gamma^3}{(\gamma + 1)^2} (\mathbf{v}\mathbf{a})(\mathbf{vS})\mathbf{v}. \quad (63)$$

Подставляя в правую часть вместо \mathbf{S} обратное преобразование (41), окончательно приходим к уравнению

$$\frac{d\mathbf{S}'}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{S}'. \quad (64)$$

Уравнение (64) формально совпадает с уравнением Томаса (3). Однако в (64) все величины (за исключением спина) относятся к лабораторной системе отсчета. Спин же \mathbf{S}' измеряется наблюдателями в сопутствующей к частице системе отсчета. Поэтому фактически (64) не является уравнением прецессии ни относительно лабораторной системы отсчета, ни относительно сопутствующей. Хотя при этом оно математически абсолютно корректно, как и выражение для вигнеровского вращения (2).

Переход от (48) к (64) можно проделать в ковариантном виде [17], вводя матрицу лоренцевского преобразования $S' = \Lambda \cdot S$. Используя уравнение переноса в матричном виде (56), несложно получить

$$\frac{dS'}{d\tau} = \left(\frac{d\Lambda}{d\tau} \cdot \Lambda^{-1} - \Lambda \cdot (\mathbf{V} \otimes \mathbf{A}) \cdot \Lambda^{-1} \right) \cdot S', \quad (65)$$

где Λ^{-1} — обратная к Λ матрица. Можно также переписать это уравнение в тетрадном формализме [18]. Выбор конкретной лабораторной системы отсчета для 4-векторов S, V, A и матрицы Λ перехода к сопутствующей системе отсчета снова нам даст уравнение (64) в смешанных обозначениях (величинах, относящихся к различным системам отсчета).

Как отмечалось в разд. 1, на вигнеровское вращение накладывается лоренцевский буст. Поэтому в лабораторной системе отсчета не происходит

только лишь поворота неинерциальной системы отсчета. В результате векторы с различными трансформационными свойствами имеют различные динамические уравнения.

Например, соотношение (61) можно интерпретировать не как преобразование Лоренца, а как определение нового вектора спина в лабораторной системе отсчета. Тогда уравнение (64) будет уравнением, относящимся к лабораторной системе для модифицированного спина \mathbf{S}' .

Найдем, например, уравнение для пространственных компонент тензора спина (37). Дифференцируя \mathbf{s} (полагая $\mathbf{u} = \mathbf{v}$), с учетом уравнений (48) и (62) получаем

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma^3 (\mathbf{v}\mathbf{a})\mathbf{S} - \gamma^3 (\mathbf{v}\mathbf{a})(\mathbf{v}\mathbf{S})\mathbf{v} - \gamma(\mathbf{v}\mathbf{S})\mathbf{a}. \quad (66)$$

Умножая (37) на скорость, несложно обратить связь \mathbf{S} и \mathbf{s} :

$$\mathbf{v}\mathbf{S} = \gamma(\mathbf{v}\mathbf{s}), \quad \mathbf{S} = \frac{\mathbf{s}}{\gamma} + \gamma(\mathbf{v}\mathbf{s})\mathbf{v}. \quad (67)$$

Подставляя эти соотношения в (66), окончательно получаем

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma^2[\mathbf{v} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{a}]]. \quad (68)$$

Это же уравнение можно получить аналогично (48) методом двух гироскопов. Однако при этом необходимо использовать преобразования не для 4-вектора, а для 4-тензора.

Запишем уравнение (68) в ковариантных обозначениях. Продифференцируем определение 4-тензора (36) по собственному времени:

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} A_\mu S_\nu, \quad (69)$$

где учтено уравнение переноса Ферми и антисимметричность тензора $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$. В приложении В показано, что 4-вектор спина выражается через тензор $S_{\alpha\beta}$ так же, как и через $L_{\alpha\beta}$:

$$S_\nu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} V^\gamma. \quad (70)$$

Подставляя его в (69) и учитывая $V \cdot A = 0$, окончательно получаем

$$\frac{dS^{\alpha\beta}}{d\tau} = A_\gamma (S^{\gamma\alpha} V^\beta - S^{\gamma\beta} V^\alpha), \quad (71)$$

что является 4-мерной версией уравнения (68) для $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$.

9. ДВИЖЕНИЕ СПИНА ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

До сих пор мы рассматривали прецессию Томаса как кинематическую задачу. В реальности, чтобы НИСО двигалась с ускорением, необходимо силовое поле или другой способ изменения скорости изучаемого объекта.

Экспериментально наиболее доступны две физические ситуации: 1) микрочастица (электрон, протон, атомное ядро) движется во внешнем электромагнитном поле; 2) макроскопический гироскоп движется по орбите вокруг Земли. В обеих ситуациях спин объекта изменяется как в результате кинематического эффекта Томаса, так и в силу динамических причин.

Проще всего кинематика и динамика разделяются при движении в электромагнитном поле. В этом случае поведение классического спина удовлетворяет уравнению Баргмана–Мишеля–Телегди [6]. Пусть в системе покоя частицы изменение спина, находящегося в магнитном поле, испытывает ларморовскую прецессию

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m} \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (72)$$

где Q, m — заряд и масса частицы, а g — гиромагнитный фактор (для электрона $Q = -e, g \approx 2$). Кроме того, пусть производная 4-вектора спина по собственному времени частицы $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2}$ линейна по тензору электромагнитного поля $F \equiv F^{\alpha\beta}$ и спину $S \equiv S^\alpha$. Кроме этого производная спина может зависеть от 4-скорости V :

$$\frac{dS}{d\tau} = \alpha_1 S + \alpha_2 V + \alpha_3 F \cdot S + \alpha_4 F \cdot V + \alpha_5 (S \cdot F \cdot V) V, \quad (73)$$

где α_i — некоторые константы. Предполагается также, что на частицу действует сила Лоренца (однородное магнитное поле):

$$A = \frac{dV}{d\tau} = \frac{Q}{m} F \cdot V. \quad (74)$$

Производная условия ортогональности 4-спина и 4-скорости $S \cdot V = 0$ с учетом уравнений (73), (74) дает $\alpha_2 = 0, \alpha_5 = \alpha_3 - Q/m$. Уравнение Лармора (72) в системе покоя частицы ($V = \{1, \mathbf{0}\}$) позволяет найти оставшиеся коэффициенты: $\alpha_1 = \alpha_4 = 0, \alpha_3 = gQ/2m$. В результате получается ВМТ-уравнение

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{gQ}{2m} F \cdot S - \left(1 - \frac{g}{2}\right) (A \cdot S) V, \quad (75)$$

где 4-ускорение A определяется силой Лоренца (74).

Запишем ВМТ-уравнение в 3-мерных обозначениях. Учитывая $F \cdot S = \{\mathbf{E}S, S^0 \mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}\}$, где \mathbf{E} и \mathbf{B} — электрическое и магнитное поля, имеем

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{gQ}{2m\gamma} ((\mathbf{v}S) \mathbf{E} + \mathbf{S} \times \mathbf{B}) + \left(1 - \frac{g}{2}\right) \gamma^2 (\mathbf{a}S) \mathbf{v}. \quad (76)$$

Если магнитный момент у частицы со спином отсутствует ($g = 0$), то прецессия спина имеет чисто кинематическую природу и из (76) следует уравнение (48). На самом деле частицы, имеющие заряд и спин, но не имеющие магнитного момента, неизвестны. Однако, например, ядро урана ${}^{235}_{92}\text{U}$ имеет достаточно малый g -фактор ($g = -0,26$), что в 11 раз меньше, чем у протона, и в 8 — чем у электрона. Для такого объекта кинематический эффект преобладает над динамическим.

При движении в однородном магнитном поле модуль скорости частицы постоянен и 3-вектор ускорения равен

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{Q}{m\gamma} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{v}], \quad \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \omega [\mathbf{n} \times \mathbf{a}] = -\omega^2 \mathbf{v}, \quad (77)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении магнитного поля, а циклотронная частота $\omega = -QB/m\gamma$ в зависимости от знака заряда частицы может быть как положительной, так и отрицательной. Уравнение для спина принимает вид

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{g}{2}\omega [\mathbf{n} \times \mathbf{S}] + \left(1 - \frac{g}{2}\right) \gamma^2 (\mathbf{aS})\mathbf{v}, \quad (78)$$

откуда, используя (77), несложно получить

$$\frac{d(\mathbf{vS})}{dt} = \gamma^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{aS}), \quad \frac{d(\mathbf{aS})}{dt} = -\omega^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right) (\mathbf{vS}). \quad (79)$$

Эти уравнения приводят к уравнениям осцилляторного типа

$$\frac{d^2(\mathbf{vS})}{dt^2} + \bar{\omega}^2(\mathbf{vS}) = 0, \quad \frac{d^2(\mathbf{aS})}{dt^2} + \bar{\omega}^2(\mathbf{aS}) = 0, \quad (80)$$

где $\bar{\omega} = \gamma\omega(1 - g/2)$. Потому проекции спина на скорость и ускорение совершают гармонические колебания с частотой, не зависящей от величины скорости:

$$\omega_a = \frac{2-g}{2}\gamma\omega = \frac{2-g}{2} \frac{QB}{m}. \quad (81)$$

Для электрона $g \approx 2$ и динамическая ларморовская прецессия практически полностью компенсирует кинематическую прецессию. Небольшое изменение поляризации электрона связано с отклонением g -фактора от двойки. Это позволяет измерять аномальные магнитные моменты [7].

Запишем явное решение осцилляторных уравнений в случае нулевого магнитного момента ($g = 0$):

$$\begin{cases} \mathbf{vS} = (\mathbf{vS})_0 \cos(\omega\gamma t) + \frac{\gamma}{\omega} (\mathbf{aS})_0 \sin(\omega\gamma t), \\ \mathbf{aS} = (\mathbf{aS})_0 \cos(\omega\gamma t) - \frac{\omega}{\gamma} (\mathbf{vS})_0 \sin(\omega\gamma t), \end{cases} \quad (82)$$

где индекс 0 соответствует времени $t = 0$ и для получения начальных значений использованы уравнения (79). Пусть движение заряда по окружности с циклотронной частотой ω происходит в плоскости (x, y) по траектории $\{x, y\} = R\{\cos(\omega t), \sin(\omega t)\}$, где радиус окружности равен $R = v/\omega$. Относительно лабораторной системы компонента спина S_z не изменяется, а проекции на оси (x, y) равны

$$\begin{cases} S_x \cos(\omega t) + S_y \sin(\omega t) = S_{x0} \cos(\omega\gamma t) + (S_{y0}/\gamma) \sin(\omega\gamma t), \\ -S_x \sin(\omega t) + S_y \cos(\omega t) = S_{y0} \cos(\omega\gamma t) - (\gamma S_{x0}) \sin(\omega\gamma t), \end{cases} \quad (83)$$

где S_{x0}, S_{y0} — начальные значения проекций спина на оси лабораторной системы координат в момент $t = 0$, когда скорость имела компоненты $\mathbf{v} = R\omega\{0, 1\}$, а ускорение $\mathbf{a} = -R\omega^2\{1, 0\}$.

При совершении гироскопом полного оборота ($\omega t = 2\pi$) по окружности с малой скоростью ($\gamma \approx 1 + v^2/2$) компоненты спина поворачиваются на небольшой угол πv^2 :

$$\begin{cases} S_x \approx S_{x0} + S_{y0} \pi v^2, \\ S_y \approx S_{y0} - S_{x0} \pi v^2. \end{cases} \quad (84)$$

В пределе *малых скоростей* при движении *по окружности* прецессия спина выглядит так же, как и решение уравнения Томаса (3).

При произвольной скорости движения по окружности угловая скорость вращения спина является переменной. Действительно, из уравнений (83) следует, что для тангенса $\text{tg } \phi = S_y/S_x$ угла спина с осью x лабораторной системы отсчета справедливо соотношение

$$\text{tg}(\phi - \omega t) = \frac{\text{tg } \phi_0 - \gamma \text{tg}(\omega\gamma t)}{1 + \text{tg } \phi_0 \text{tg}(\omega\gamma t)/\gamma}. \quad (85)$$

Поэтому, например, для $\phi_0 = 0$ угловая скорость поворота вектора спина $\Omega = d\phi/dt$ равна

$$-\frac{\Omega(t)}{\omega} = \frac{v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}{1 - v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}. \quad (86)$$

Отношение $-\Omega(t)/\omega$ по модулю изменяется от 0 до $v^2\gamma^2$ с частотой $\omega\gamma$. На рис. 8 приведено изменение угловой частоты на протяжении одного оборота гироскопа по окружности при различных его скоростях движения v .

Найдем среднее значение угловой скорости по периоду ее изменения:

$$-\frac{\langle \Omega(t) \rangle}{\omega} = \frac{1}{\pi/\omega\gamma} \int_0^{\pi/\omega\gamma} \frac{v^2 \cos^2(\omega\gamma t)}{1 - v^2 \cos^2(\omega\gamma t)} dt = \gamma - 1. \quad (87)$$

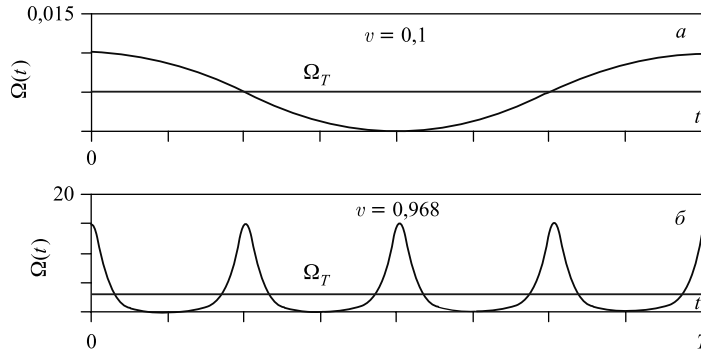


Рис. 8. Отношение угловой скорости вращения вектора спина к угловой скорости движения гироскопа по окружности Ω/ω в течение одного оборота $t = [0 \dots T]$ при скоростях $v = 0,1$ (а) и $v = 0,968$ (б). Горизонтальная линия соответствует томасовской частоте прецессии

Таким образом, *средняя частота прецессии* совпадает с томасовской частотой. Действительно, при $\mathbf{a} = \omega[\mathbf{n} \times \mathbf{v}]$, где \mathbf{n} — единичный вектор, перпендикулярный скорости, томасовская частота, соответствующая уравнению (3), равна

$$\Omega_T = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1}[\mathbf{v} \times \mathbf{a}] = -\frac{\gamma^2 v^2}{\gamma + 1}\omega \mathbf{n} = -(\gamma - 1)\omega \mathbf{n}.$$

Если вместо собственного момента импульса гироскопа рассматривать жесткий стержень, то в соотношении для угловой скорости его поворота (86) вместо косинусов будут находиться синусы. Усреднение этой функции также приводит к значению $\gamma - 1$, т.е. в среднем стержень вращается с угловой скоростью, равной угловой скорости томасовской прецессии.

Таким образом, прецессия вектора спина выглядит сложнее, чем динамика, описываемая классическим уравнением (3). При равномерном движении по окружности с угловой скоростью ω изменяются как ориентация, так и модуль вектора спина. Если под прецессией понимать мгновенную угловую скорость вращения спина, то она периодически изменяется со временем. Частота этого изменения тем больше, чем быстрее гироскоп движется по окружности. Амплитуда колебаний угловой скорости прецессии также увеличивается с ростом скорости. Тем не менее среднее значение угловой скорости прецессии совпадает с классическим результатом Томаса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Векторы, характеризующие физические величины с различными трансформационными свойствами относительно преобразований Лоренца, по-разному изменяются при движении неинерциальной системы отсчета. В работе

получены дифференциальные уравнения, описывающие изменение вектора \mathbf{s} , связанного с ускоренно движущимся стержнем:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\gamma^2 \mathbf{a}(\mathbf{v}\mathbf{s}), \quad (88)$$

классического спина \mathbf{S} и пространственных компонент тензора спина $\tilde{\mathbf{S}}$ вращающегося гироскопа:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v}(\mathbf{a}\mathbf{S}), \quad \frac{d\tilde{\mathbf{S}}}{dt} = \gamma^2 \mathbf{v} \times [\tilde{\mathbf{S}} \times \mathbf{a}], \quad (89)$$

где \mathbf{v}, \mathbf{a} — мгновенные скорость и ускорение системы и $\gamma = 1/\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$. Уравнения записаны в лабораторной системе отсчета.

Полученные уравнения отличаются от известной формулы Томаса

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\gamma^2}{\gamma+1} [\mathbf{v} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{s}, \quad (90)$$

если интерпретировать ее как поворот некоторого вектора \mathbf{s} , жестко связанного с ИСО относительно лабораторной системы.

Различие уравнений (90) и (88), (89) приводит к *качественно* отличным результатам при описании ускоренного движения стержня или вращающейся системы частиц. Одинаковая динамика прецессии спина или поворота стержня возникает только в некоторых частных случаях.

Основная причина расхождения с классической формулой Томаса (90) связана с эффектами лоренцевского сокращения длины и трансформационными свойствами спина, которые учтены в настоящей работе. В общем случае при изменении скорости системы отсчета возникает ее поворот (вигнеровское вращение). Этот кинематический эффект теории относительности приводит к вращению всех векторов, «жестко» связанных с этой системой отсчета. Относительно мгновенно сопутствующей ИСО \tilde{K} , движущейся со скоростью $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, подобный поворот можно описать при помощи уравнения Томаса (90). Однако относительно лабораторной системы отсчета необходимо учитывать лоренцевское сокращение длины. Оно приводит к дополнительному вращению и изменению длин векторов. В результате уравнение (88) для стержня отличается от уравнения Томаса.

Аналогична ситуация со спином вращающейся системы. Для корректного рассмотрения прецессии спина необходимо учитывать его трансформационные свойства.

Физические явления, происходящие в неинерциальных системах отсчета, существенно сложнее по сравнению с физикой инерциальных систем. Представление неинерционной системы как совокупности мгновенно сопутствующих инерциальных систем служит лишь первым приближением. Поэтому

уравнения для вращающегося гироскопа (89), как и уравнение для стержня (88), являются приближенными. Они справедливы при относительно небольших ускорениях системы. Впрочем, на примере частного случая «жесткой» ИСО в работе была проделана оценка характерного ускорения метрового стержня, равного $a_0 = 3 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$. При $a \ll a_0$ модель сопутствующих ИСО достаточно хорошо выполняется. Понятно, что это происходит в большинстве реально осуществимых физических ситуаций.

Кроме того, уравнения (89) перестают выполняться при большой угловой скорости вращения гироскопа. В последнем случае начинают сказываться эффекты относительности одновременности, существенные для составных систем (не точечный гироскоп). Например, хотя энергия и импульс точечной частицы являются компонентами 4-вектора $p^\alpha = \{E, \mathbf{p}\}$, суммарная энергия и импульс гироскопа (без учета энергии связи) такого 4-вектора не образуют [14]. Это же относится к суммарному моменту импульса и спину. Первый не является 4-тензором, а второй — 4-вектором. Более того, можно показать, что если спин гироскопа постоянен в ИСО, где его центр энергии неподвижен, то это не означает, что в общем случае он будет постоянным и в других ИСО. Тем не менее все эти эффекты имеют более высокий порядок малости по $\omega_0 r_0$, где ω_0 — собственная угловая скорость вращения гироскопа, а r_0 — его характерные размеры. Эти вопросы более подробно будут рассмотрены в отдельной публикации.

Таким образом, в пределе небольших поступательных ускорений и угловых скоростей уравнения (89) выполняются. Скорость же движения гироскопа при этом может быть достаточно большой.

Автор благодарит О. Ю. Орлянского, А. Ю. Силенко, В. В. Скалозуба и О. В. Теряева за многочисленные стимулирующие дискуссии, доброжелательные замечания и полезные советы.

Приложение А ВИГНЕРОВСКОЕ ВРАЩЕНИЕ

Обозначим через $X = \{t, \mathbf{r}\}$ 4-вектор события в пространстве-времени. Лоренцевский буст (чистое преобразование Лоренца без вращения) будем обозначать в матричном виде как $X' = \mathbb{L}(\mathbf{v})X$ или в явной компонентной записи (см. приложение Б)

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}). \quad (91)$$

Поворот декартовой системы координат вокруг единичного вектора \mathbf{n} на угол ϕ в матричном виде обозначим как $X' = \mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi)X$ или

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} \cos \phi + \mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{r})(1 - \cos \phi) - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] \sin \phi \quad (92)$$

при неизменности времени ($t' = t$).

Необходимо различать пассивное и активное вращения. При *пассивном вращении* точка пространства считается фиксированной, а поворачивается по часовой стрелке вокруг вектора \mathbf{n} одна система координат относительно другой. Расписав преобразования (92) в компонентах $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ и $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$, получим связь проекций *одного и того же* радиуса-вектора на оси каждой системы координат. При этом компоненты вектора $\mathbf{n} = \{n_x, n_y, n_z\}$ берутся относительно первой системы. При *активном вращении* координатная система одна, а поворачивается вектор \mathbf{r} . В этом случае после замены $\phi \mapsto -\phi$ формула (92) устанавливает векторную связь двух *различных* векторов \mathbf{r}' и \mathbf{r} .

Далее вращение всегда понимается в пассивном смысле. Преобразования Лоренца также являются пассивными преобразованиями, так как связывают результаты наблюдения одного и того же события из двух систем отсчета.

Инфинитезимальные преобразования Лоренца $\mathbb{L}(d\mathbf{v})$

$$t' = t - \mathbf{r} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - t d\mathbf{v} \quad (93)$$

и вращения $\mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - [\mathbf{n} \times \mathbf{r}] d\phi \quad (94)$$

записываются с точностью до первого порядка малости по параметрам.

Рассмотрим композицию бустов. Пусть ИСО K_1 движется относительно K со скоростью \mathbf{v}_1 , а K_2 относительно K_1 — со скоростью \mathbf{v}_2 . Тогда

$$X_1 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_1)X, \quad X_2 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_2)X_1 \quad (95)$$

или

$$X_2 = \mathbb{L}(\mathbf{v}_2)\mathbb{L}(\mathbf{v}_1)X. \quad (96)$$

Обратим внимание, что произведение матриц осуществляется в обратном порядке к выполнению преобразований.

Результат произведения матриц (96) может быть найден при помощи прямых, достаточно громоздких алгебраических вычислений. Для этого в (91) исключаются промежуточные координаты и время. Существенно более простые в математическом отношении вычисления получаются при использовании кватернионной техники [11]. Результирующая матрица произведения бустов не является бустом, но может быть представлена в виде композиции буста, а затем 3-мерного вращения:

$$\mathbb{L}(\mathbf{v}_2)\mathbb{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi)\mathbb{L}(\mathbf{w}). \quad (97)$$

Угол поворота ϕ и единичный вектор \mathbf{n} находятся из уравнения

$$\mathbf{n} \sin \phi = -[\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2] \frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 + \gamma_w + \gamma_1 + \gamma_2)}{(1 + \gamma_w)(1 + \gamma_1)(1 + \gamma_2)}, \quad (98)$$

а итоговая скорость \mathbf{w} имеет смысл скорости начала системы K_2 относительно K :

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1\gamma_1 + \Gamma_1\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)}{\gamma_1(1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)}. \quad (99)$$

Факторы γ_1 и Γ_1 относятся к скорости \mathbf{v}_1 , а γ_2 — к скорости \mathbf{v}_2 . Фактор Лоренца γ_w для скорости \mathbf{w} равен

$$\gamma_w = \gamma_1\gamma_2(1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2). \quad (100)$$

Формула (98) была получена Стаппом в 1956 г. [16], а поворот, возникающий в результирующем преобразовании, называется вигнеровским вращением [15].

Аналогичное разложение произведения двух бустов на буст и вращение можно выполнить в обратном порядке:

$$\mathbb{L}(\mathbf{v}_2)\mathbb{L}(\mathbf{v}_1) = \mathbb{L}(\tilde{\mathbf{w}})\mathbb{R}(\mathbf{n}, \phi), \quad (101)$$

когда сначала выполняется поворот, а затем буст. В этом случае угол ϕ и единичный вектор \mathbf{n} (98) остаются без изменений, а итоговая скорость $\tilde{\mathbf{w}}$ получается из (99) перестановкой индексов 1 и 2:

$$\tilde{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\gamma_2 + \Gamma_2\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)}{\gamma_2(1 + \mathbf{v}_1\mathbf{v}_2)}. \quad (102)$$

Эта скорость с обратным знаком имеет смысл скорости движения начала системы K относительно K_2 . Заметим, что $|\tilde{\mathbf{w}}| = |\mathbf{w}|$, поэтому факторы Лоренца для этих двух скоростей совпадают. Отметим также соотношение

$$\frac{\tilde{\mathbf{w}} \times \mathbf{w}}{w^2} = \mathbf{n} \sin \phi, \quad (103)$$

из которого следует, что угол между векторами скоростей \mathbf{w} и $\tilde{\mathbf{w}}$ соответствует вигнеровскому повороту (98).

Рассмотрим в единых обозначениях описание прецессии Томаса, приведенное в книгах Джексона [4] и Мёллера [3]. Пусть есть три системы отсчета: K , K' и K'' , описанные в разд. 1, где K' и K'' — сопутствующие ИСО к движущейся по криволинейной траектории НИСО, а K — лабораторная ИСО.

В [4] предполагается, что K' и K'' связаны с K бустами:

$$X' = \mathbb{L}(\mathbf{v})X, \quad X'' = \mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})X, \quad (104)$$

откуда, учитывая, что $\mathbb{L}^{-1}(\mathbf{v}) = \mathbb{L}(-\mathbf{v})$, получаем

$$X'' = \mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})\mathbb{L}(-\mathbf{v})X'. \quad (105)$$

Используя общие соотношения (98), (99) с $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ в первом приближении по $d\mathbf{v}$, находим бесконечно малый угол поворота:

$$\mathbf{n} d\phi = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (106)$$

где учтено, что в векторном произведении (98) стоит малая величина $d\mathbf{v}$, поэтому в множителе после него все величины можно взять в нулевом порядке по $d\mathbf{v}$: $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}$, $\gamma_w = \gamma^2(1 - \mathbf{v}^2) = 1$. В явном виде преобразование между K' и K'' записывается следующим образом:

$$t'' = t' - \mathbf{r}' \Delta \mathbf{v}, \quad \mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - d\phi [\mathbf{n} \times \mathbf{r}'] - t' \Delta \mathbf{v}, \quad (107)$$

где

$$\Delta \mathbf{v} = \gamma(d\mathbf{v} + \Gamma(\mathbf{v} d\mathbf{v})\mathbf{v}).$$

В первом приближении по $d\mathbf{v}$ скорости \mathbf{w} и $\tilde{\mathbf{w}}$ совпадают и равны $\Delta \mathbf{v}$.

Полученное 3-мерное вращение возникает между сопутствующими системами K' и K'' . При этом предполагается, что эти системы получаются из лабораторной системы при помощи бустов (104). Таким образом, их оси «параллельны» K , а не друг другу. Слово «параллельно» взято в кавычки, так как мгновенное положение осей движущейся с произвольной скоростью ИСО не параллельно лабораторной ИСО (см. приложение Б). Поэтому под «параллельностью» мы подразумеваем выполнение чистого лоренцевского буста.

В исходной постановке задачи предполагалось, что при изменении скорости ИСО сопутствующие ей ИСО связаны лоренцевским преобразованием (т.е. их оси переносятся параллельно, со сделанной выше оговоркой). Поэтому в подходе Джексона, очевидно, рассматривается иная задача.

Идеологии параллельного переноса осей сопутствующих систем больше соответствует вывод Мёллера [3], который рассматривает последовательность преобразований

$$X' = \mathbb{L}(\mathbf{v})X, \quad X'' = \mathbb{L}(d\mathbf{v}')X', \quad (108)$$

откуда

$$X'' = \mathbb{L}(d\mathbf{v}')\mathbb{L}(\mathbf{v})X. \quad (109)$$

Подставляя $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2 = d\mathbf{v}'$ в соотношения (98), (99), в первом приближении по $d\mathbf{v}'$ имеем

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}'], \quad (110)$$

где учтено, что $\gamma_2 \approx 1$ и $\gamma_w \approx \gamma_1 = \gamma$. Итоговая скорость (99) равна

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}' + \mathbf{v}\gamma + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v}')}{\gamma(1 + \mathbf{v}d\mathbf{v}')} \approx \mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}'}{\gamma} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v}d\mathbf{v}')}{\gamma + 1}, \quad (111)$$

где приближенное равенство записано в первом порядке малости по dv' . Величина dv' является скоростью K'' относительно K' и имеет смысл изменения скорости НИСО относительно своего предыдущего мгновенного положения K' .

Скорость \mathbf{w} имеет смысл скорости системы K'' относительно K , поэтому Мёллер вводит изменение скорости НИСО относительно лабораторной системы:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{v}. \quad (112)$$

Умножая ее векторно на \mathbf{v} , несложно переписать (110) в виде

$$\mathbf{n} d\phi = -\frac{\gamma^2}{\gamma + 1} [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}], \quad (113)$$

что с точностью до знака совпадает с выражением (106) Джексона, однако имеет другой смысл, так как определяет поворот системы, полученной из лабораторной системы K в результате лоренцевского буста. Фактически в соотношении $\mathbb{L}(dv')\mathbb{L}(\mathbf{v}) = \mathbb{R}(\mathbf{n}, d\phi)\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ участвуют четыре ИСО. В левой части записан последовательный переход от K к K' , а затем к K'' . В правой части лоренцевское преобразование $\mathbb{L}(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$ осуществляет переход от K к системе \tilde{K}'' , из которой (в результате поворота) получается система K'' . Поэтому 3-мерное вращение осуществляется не относительно лабораторной системы K , а относительно \tilde{K}'' .

Приложение Б КООРДИНАТНЫЕ ОСИ ДВИЖУЩЕЙСЯ СО

Пусть начало инерциальной системы отсчета K' движется относительно «неподвижной» системы K со скоростью \mathbf{v} . Время и координаты некоторого события, наблюдаемого из системы K , обозначим как (t, \mathbf{r}) . Это же событие в системе K' имеет время и координаты со штрихами (t', \mathbf{r}') . Рассмотрим сначала одномерное движение вдоль оси x со скоростью v . Будем считать, что в момент времени $t = t' = 0$ начала систем отсчета совпадают: $x = x' = 0$. Чтобы связь между наблюдениями события имела смысл, необходимо согласовать единицы измерения длины и времени в обеих системах отсчета. *Единицы длины* можно согласовать при помощи «сравнения линеек» в перпендикулярном к относительной скорости направлении. Такими «линейками» может быть, например, расстояние между траекториями двух частиц, движущихся параллельно оси x .

Постулируется, что координаты y и y' будут одинаковыми в обеих системах отсчета: $y' = y$. *Единицы времени* выбираются в результате соглашения о значении относительной скорости систем отсчета. В частности, если начало

системы K' ($x' = 0$) имеет уравнение движения $x = vt$, то начало K ($x = 0$) относительно системы K' движется следующим образом: $x' = -vt'$. После такого согласования единиц измерения, используя аксиоматику Эйнштейна или групповой подход [9, 10], можно получить преобразования Лоренца в следующем виде:

$$t' = \gamma(t - vx), \quad x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad (114)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$ — фактор Лоренца.

При движении вдоль оси x координатные оси обеих систем отсчета предполагаются параллельными друг другу. Обратные преобразования получаются перестановкой «штрихованных» и «нештрихованных» величин и заменой $v \mapsto -v$.

Пусть теперь относительная скорость \mathbf{v} двух систем отсчета направлена произвольным образом. Фиксирование значений компонент вектора $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (и с обратным знаком для K') означает также выбор определенной ориентации координатных осей в каждой системе отсчета. Пусть наблюдатели в системе K при данном выборе координатных осей получают, например, следующие компоненты относительной скорости: $\mathbf{v} = \{0,1, 0,3, 0,5\}$. Тогда наблюдатели в системе K' должны выбрать направление координатных осей таким образом, чтобы относительная скорость для них имела компоненты: $\mathbf{v}' = \{-0,1, -0,3, -0,5\}$. Такая процедура позволяет ориентировать координатные оси систем отсчета так, чтобы они были в некотором смысле «параллельны» друг другу.

В 3-мерном пространстве компоненты скорости не изменятся, если координатный базис повернуть вокруг вектора \mathbf{v} . Поэтому для однозначной фиксации осей, вообще говоря, требуется еще одно направление. Например, наблюдатели могут согласовать координаты двух параллельных «линеек», расположенных ортогонально к относительной скорости (аналогично параллельны оси y, y' и z, z' при движении вдоль оси x).

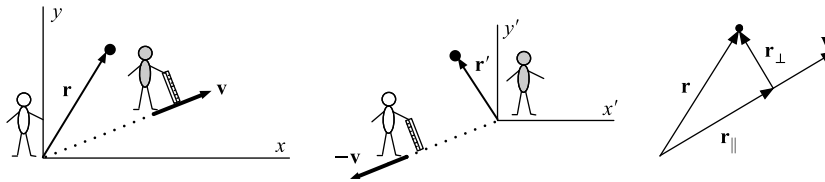


Рис. 9. Согласование единиц измерения двумя системами отсчета

Для вывода преобразований Лоренца в векторном виде радиус-вектор \mathbf{r} раскладывается по двум векторам $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$: параллельному скорости $\mathbf{r}_{\parallel} = (\mathbf{r}\mathbf{v})\mathbf{v}/v^2$ и перпендикулярному \mathbf{r}_{\perp} (рис.9). Для них выполняются

обычные преобразования Лоренца (114)

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}_{\parallel}), \quad \mathbf{r}'_{\parallel} = \gamma(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}. \quad (115)$$

Подставляя их в $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_{\parallel} + \mathbf{r}'_{\perp}$ и заменяя \mathbf{r}_{\perp} на $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\parallel}$, несложно записать преобразования Лоренца в векторном виде

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v}\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} - \gamma\mathbf{v}t + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}), \quad (116)$$

где кроме фактора $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, $v = |\mathbf{v}|$, введено обозначение для величины Γ , которая обладает следующими свойствами:

$$\Gamma = \frac{\gamma - 1}{v^2} = \frac{\gamma^2}{\gamma + 1}, \quad \gamma - \Gamma = \frac{\gamma}{\gamma + 1}. \quad (117)$$

Обратные преобразования Лоренца получаются заменой $\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$.

Преобразования Лоренца являются пассивными (см. приложение А), так как связывают результаты наблюдения одного и того же события относительно различных систем отсчета. Учитывая процедуру согласования «параллельности» координатных осей двух систем отсчета, соотношения (116) можно расписать по компонентам для $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$, $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$ и скорости $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ (компоненты которой заданы относительно K). В результате получится связь времени и координат одного и того же события, регистрируемого различными наблюдателями.

Пусть наблюдатели в системе K одновременно (по своим часам) фиксируют положение осей системы K' . Эти оси (в общем случае) оказываются не только не параллельными к осям системы K , но даже и не являются ортогональным базисом (с точки зрения неподвижных наблюдателей). Поэтому «параллельность» координатных осей в преобразованиях Лоренца (116) необходимо понимать только в том смысле, что наблюдатели выполнили описанную выше процедуру согласования единиц измерения и после этого независимо (по компонентам скорости \mathbf{v}) задали ориентацию координатных осей.

Задавая координаты \mathbf{r}' точек в системе отсчета K' , связанной с телом, при помощи преобразований Лоренца можно получить координаты точек \mathbf{r} в неподвижной системе K . Нас интересует мгновенная форма движущегося тела в момент времени t в системе K . Поэтому необходимо так переписать преобразования Лоренца, чтобы радиус-вектор \mathbf{r} зависел от t и \mathbf{r}' . Для этого запишем обратные преобразования Лоренца ($\mathbf{v} \mapsto -\mathbf{v}$)

$$t = \gamma(t' + \mathbf{v}\mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \gamma\mathbf{v}t' + \Gamma\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}') \quad (118)$$

и исключим из них время t' :

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}t + \mathbf{r}' - \frac{\gamma}{\gamma + 1}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{r}'). \quad (119)$$

Это соотношение позволяет вычислять положение точек движущегося тела в данный момент времени t в системе K .

Первое слагаемое $\mathbf{v}t$ в (119) указывает на то, что все точки движутся параллельно с постоянной скоростью \mathbf{v} . Когда $t = 0$, начала систем отсчета совпадают и форма движущегося тела определяется вторым и третьим слагаемыми (119). При $t = 0$ из (119) следует, что

$$\mathbf{v}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{v}\mathbf{r}'}{\gamma}, \quad \mathbf{r}^2 = \mathbf{r}'^2 - (\mathbf{v}\mathbf{r}')^2, \quad (120)$$

т. е. продольные размеры испытывают лоренцевское сокращение, а поперечные (если $\mathbf{v}\mathbf{r}' = 0$) остаются неизменными. Рассмотрим две фиксированные точки тела. Для радиусов-векторов к каждой из них запишем соотношение (119). Их скалярные произведения в двух системах отсчета связаны следующим образом:

$$\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2 - (\mathbf{v}\mathbf{r}'_1)(\mathbf{v}\mathbf{r}'_2). \quad (121)$$

Если в системе K' векторы перпендикулярны ($\mathbf{r}'_1\mathbf{r}'_2 = 0$), то они будут перпендикулярными и в K , если они перпендикулярны к относительной скорости \mathbf{v} .

Пусть движение происходит в плоскости (x, y) . Выберем одну точку на оси x' , а вторую — на оси y' (рис. 10).

В системе K' их координаты $\mathbf{r}'_1 = \{1, 0\}$, $\mathbf{r}'_2 = \{0, 1\}$. Координаты $\mathbf{r}_i = \{x_i, y_i\}$ этих же точек в неподвижной системе отсчета получаются из уравнения (119):

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \frac{\gamma v_x^2}{\gamma + 1}, & y_1 &= -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}, \\ x_2 &= -\frac{\gamma v_x v_y}{\gamma + 1}, & y_2 &= 1 - \frac{\gamma v_y^2}{\gamma + 1}, \end{aligned} \quad (122)$$

Рис. 10. Определение трех углов осей движущейся системы отсчета относительно неподвижной: $\alpha = \alpha_x + \alpha_y + \pi/2$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{v}^2} = 1/\sqrt{1 - v_x^2 - v_y^2}$. В результате синус угла α_x между осями x' и x и аналогично для α_y между осями y' и y (см. рис. 10) равны

$$\sin \alpha_x = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_x^2}}, \quad \sin \alpha_y = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{v_x v_y}{\sqrt{1 - v_y^2}}, \quad (123)$$

где модули \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 найдены при помощи второго соотношения (120).

Косинус угла между осями движущейся системы отсчета находится из соотношения (121):

$$\cos \alpha = -\frac{v_x v_y}{\sqrt{(1 - v_x^2)(1 - v_y^2)}}. \quad (124)$$

Таким образом, координатные оси системы K' будут ортогональными для наблюдателей в K , только если одна из компонент скорости равна нулю. Это происходит при движении вдоль одной из координатных осей.

Приложение В ТЕНЗОР СПИНА

Тензор суммарного момента импульса системы частиц (гироскопа)

$$L^{\mu\nu} = \sum (x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu) \quad (125)$$

неинвариантен при трансляционных преобразованиях $x^\nu \mapsto x^\nu + a^\nu$:

$$L^{\mu\nu} \mapsto L^{\mu\nu} + a^\mu P^\nu - a^\nu P^\mu, \quad (126)$$

где $P^\nu = \sum p^\mu$ — суммарный 4-импульс гироскопа. Собственный момент импульса (классический спин) не должен меняться при таком преобразовании. Этому требованию удовлетворяет 4-вектор спина

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} L^{\alpha\beta} U^\gamma, \quad (127)$$

где $U^\gamma = P^\gamma/M$ — 4-скорость, а M — масса гироскопа. Заметим, что 4-спин и 4-скорость ортогональны: $S \cdot U \equiv S^\nu U_\nu = 0$.

При помощи 4-вектора спина определим 4-тензор спина:

$$S^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu} U_\mu S_\nu. \quad (128)$$

Очевидно, что он так же, как и S^ν , не изменяется при трансляционных преобразованиях. Дуальный к нему тензор имеет вид

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} S^{\mu\nu} = S_\alpha U_\beta - S_\beta U_\alpha. \quad (129)$$

Учитывая, что $U^2 = 1$, а $S \cdot U = 0$, имеем

$$S_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\nu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} U^\gamma. \quad (130)$$

Таким образом, 4-вектор спина выражается через 4-тензор спина так же, как и через полный момент импульса (127).

Подставляя (127) в (128) и проводя свертку символов Леви-Чевиты, можно выразить тензор спина через тензор полного момента импульса:

$$S^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} - (L^{\alpha\gamma} U^\beta - L^{\beta\gamma} U^\alpha) U_\gamma. \quad (131)$$

Сворачивая определение 4-вектора спина (127) с символом Леви-Чевиты, можно получить еще одно соотношение между введенными величинами:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\nu} S^\nu = L_{\alpha\beta} U_\gamma + L_{\gamma\alpha} U_\beta + L_{\beta\gamma} U_\alpha = S_{\alpha\beta} U_\gamma + S_{\gamma\alpha} U_\beta + S_{\beta\gamma} U_\alpha, \quad (132)$$

где второе равенство проверяется подстановкой вместо тензора спина $S_{\alpha\beta}$ его выражения (131) через тензор полного момента $L_{\alpha\beta}$. Заметим, что в (132) по индексам α, β, γ проводится циклическая перестановка.

Представим тензор спина еще в одном виде. Соотношение (131) можно переписать следующим образом:

$$S^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta} - (X^\alpha P^\beta - X^\beta P^\alpha), \quad (133)$$

где

$$X^\alpha = \lambda U^\alpha + \frac{1}{M} L^{\alpha\beta} U_\beta, \quad (134)$$

а λ — некоторый скаляр. Этот 4-вектор имеет смысл эффективной траектории гироскопа, относительно которой определяется тензор спина, характеризующий собственный момент вращения:

$$S^{\alpha\beta} = \sum [(x^\alpha - X^\alpha) p^\beta - (x^\beta - X^\beta) p^\alpha],$$

откуда следует (133).

Введем четверку величин $\mathbf{R} = \{t, \mathbf{R}\}$, где t — время, а \mathbf{R} — центр энергии системы частиц (31). Тензор полного момента импульса $L^{\alpha\beta}$ определяется двумя 3-векторами $\mathbf{G} = \{L^{10}, L^{20}, L^{30}\}$ и $\mathbf{L} = \{L^{23}, L^{31}, L^{12}\}$, где $\mathbf{G} = \mathcal{E}\mathbf{R} - \mathbf{P}t$, а $\mathbf{P}^\alpha = \{\mathcal{E}, \mathbf{P}\}$ — полный 4-импульс гироскопа. Для фиксирования значения λ в (134) потребуем, чтобы нулевая компонента 4-вектора X^α была временем:

$$X^0 = \lambda\gamma + \frac{\gamma}{M} \mathbf{G}\mathbf{u} = \lambda\gamma + \gamma^2 (\mathbf{R}\mathbf{u}) - \gamma^2 \mathbf{u}^2 t = t, \quad (135)$$

где учтено, что 4-скорость имеет компоненты $U^\alpha = \{\gamma, \gamma\mathbf{u}\}$. В результате $\lambda = \gamma t - \gamma \mathbf{R}\mathbf{u} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ и 4-вектор эффективной траектории имеет вид

$$X^\alpha = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) U^\alpha + \frac{1}{M} L^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (136)$$

Заметим, что в силу антисимметричности тензора полного момента $L^{\alpha\beta}$ и единичности 4-скорости $U^2 = 1$ имеет место равенство проекций 4-векторов \mathbf{R} и \mathbf{X} на 4-скорость: $\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{U}$. Пространственные компоненты вектора \mathbf{X} образуют модифицированный центр инерции

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - \frac{\gamma}{M} \mathbf{u} \times (\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P}) = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{S}}{M} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{s}}{\mathcal{E}}, \quad (137)$$

где $\mathbf{S} = \gamma(\mathbf{L} - \mathbf{R} \times \mathbf{P})$ — пространственные компоненты 4-вектора спина (127), вектор $\mathbf{s} = \{S^{23}, S^{31}, S^{12}\}$ является пространственными компонентами тензора спина (128):

$$\mathbf{s} = \gamma \mathbf{S} - \gamma(\mathbf{uS})\mathbf{u}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{u} \times \mathbf{s}, \quad (138)$$

где $\mathbf{g} = \{S^{10}, S^{20}, S^{30}\}$ и учтено определение (128). В системе покоя гироскопа временные компоненты 4-вектора и 4-тензора спина равны нулю, а пространственные совпадают с полным моментом \mathbf{L} .

Необходимость введения координаты гироскопа, отличной от его центра инерции, обсуждалась в [19, 20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Thomas L. H.* Motion of the Spinning Electron // *Nature*. 1926. V. 117. P. 514.
2. *Малькин Г. Б.* Прецессия Томаса: Корректные и некорректные решения // *УФН*. 2006. Т. 176, № 8. С. 865–882.
3. *Мёллер К.* Теория относительности. М.: Атомиздат, 1975. 400 с.
4. *Джексон Д.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 702 с.
5. *Ритус В. И.* О различии подходов Вигнера и Мёллера к описанию прецессии Томаса // *УФН*. 2007. Т. 177, № 8. С. 105–112.
6. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L.* Precession of the Polarization of Particles Moving in a Homogeneous Electromagnetic Field // *Phys. Rev. Lett.* 1959. V. 2. P. 435–436.
7. *Филд Дж., Пикассо Э., Комбли Ф.* Проверка фундаментальных физических теорий в опытах со свободными заряженными лептонами // *УФН*. 1979. Т. 127, № 4. С. 553–598.
8. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. М.: Мир, 1975.
9. *von Ignatowsky W. A.* Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip // *Archiv der Mathematik und Physik*. 1910. Bd. 17. P. 1 ff.
10. *Frank P., Rothe H.* Über die Transformation der Raumzeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme // *Ann. Phys.* 1911. V. 34. P. 825–853.
11. *Степанов С. С.* Релятивистский мир. <http://synset.com>. 2010.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Теория поля. Т. 2. М.: Наука, 1988.
13. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. С. 179–186.
14. *Фок В. А.* Теория пространства, времени и тяготения. § 29. М.: Гостехтеоретиздат, 1961.
15. *Wigner E. P.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // *Ann. Math.* 1939. V. 40. P. 149–204.

16. *Stapp H. P.* Relativistic Theory of Polarization Phenomena // *Phys. Rev.* 1956. V. 103, No. 2. P. 425–434.
17. *Obukhov Y. N., Silenko A. J., Teryaev O. V.* Spin Dynamics in Gravitational Fields of Rotating Bodies and Equivalence Principle // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. P. 064044.
18. *Воронов Н. А., Вагнер С. А.* Релятивистский формализм углового момента и прецессия Томаса. М.: Изд-во Моск. физ.-тех. ин-та, 2003.
19. *Померанский А. А., Сеньков Р. А., Хрилович И. Б.* Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях // *УФН.* 2000. Т. 170, № 10. С. 1129–1141.
20. *Rivas M.* Kinematial Theory of Spinning Particles: The Interaction Lagrangian for Two Spin 1/2 Dirac Particles. <http://arxiv.org/abs/physics/0608089v1>. 2006.