

О МОЛЬЕРОВСКОЙ ТЕОРИИ
МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (1947–1948 гг.)
И ЕЕ КРИТИКЕ В ПОСЛЕДУЮЩИЕ ГОДЫ

А. А. Бедняков *

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

I	1787
II	1788
III	1788
IV	1791
V	1791
VI	1794
VII	1795
VIII	1796
IX	1797
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1800

*E-mail: bedny@jinr.ru

О МОЛЬЕРОВСКОЙ ТЕОРИИ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ (1947–1948 гг.) И ЕЕ КРИТИКЕ В ПОСЛЕДУЮЩИЕ ГОДЫ

А. А. Бедняков *

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассмотрены некоторые «недоразумения», связанные с теорией многократного рассеяния быстрых заряженных частиц в веществе, разработанной Мольером в 1947–1948 гг., и ее применением для анализа экспериментальных результатов. Показано, что последовавшая критика этой теории основана на неверной интерпретации мольеровского метода определения поперечного сечения рассеяния частиц на атомах, экранирование полей ядер которых электронными оболочками может быть описано с помощью статистической модели Томаса–Ферми. Последовательное применение оригинального метода Мольера показывает, что определяемое с его помощью сечение рассеяния в общем согласуется с результатами более поздних классических расчетов Линдхарда с сотрудниками и других авторов.

Some misunderstandings concerning the theory of multiple scattering of fast charged particles in the matter, developed by Moliere in 1947–1948, and its application to experimental data analysis are discussed in the paper. It is demonstrated that criticism of this theory afterwards is based on a wrong interpretation of Moliere's method of definition of the scattering cross section on atom, when screening of its nuclear field by orbital electrons can be described by the Thomas–Fermi statistical model. The accurate usage of the original method of Moliere demonstrates that Moliere's cross section is in a general accordance with the results of the latest «classical» calculations of Lindhard with co-workers and with those by other authors.

PACS: 03.65.Sq; 03.65.Nk

I

К середине прошлого столетия (после окончания мировой войны) активизировались исследования, связанные с потоками быстрых заряженных частиц как космического происхождения, так и получаемых на выходе все увеличивающегося числа ускорителей со все возрастающими энергиями ускоряемых частиц. Эти потоки могли являться как объектом, так и инструментом во многих исследованиях не только фундаментального, но и прикладного характера, причем в большинстве случаев быстрые заряженные частицы должны были

*E-mail: bedny@jinr.ru

проходить через слои вещества конечной толщины, что неизбежно сопровождалось их многократным рассеянием на атомах среды, которое накладывалось на изучаемые явления. Поэтому, чтобы правильно учитывать влияние этого рассеяния на результаты исследований, необходимо было создать его адекватное теоретическое описание.

II

В 1940 г. были опубликованы две различные теории многократного рассеяния заряженных частиц [1,2]. В простой теории Вильямса [1] результат большого числа отклонений при столкновениях быстрых частиц с атомами среды рассчитывается на основе закона Резерфорда для взаимодействия незранированных кулоновских зарядов с распределением вероятностей отклонения на угол θ по закону Гаусса. При этом средний угол отклонений $\langle \theta^2 \rangle$ определяется для диапазона углов $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, где величины θ_{\min} и θ_{\max} находятся с использованием сечения рассеяния, полученного путем квантово-механических расчетов для случая $\alpha = Z_1 Z_2 / (137\beta) \ll 1$ (Z_1 и Z_2 — атомные номера сталкивающихся частиц, $\beta = v/c$ — скорость налетающей частицы v в единицах скорости света c).

Теория Гаудсмита и Саундерсона [2] имеет более общий характер; она является точной в предположении идентичности пути частицы в слое вещества и толщины этого слоя. Для получения результата n последовательных актов рассеяния в ней применена теорема сложения сферических гармоник и угловое распределение рассеянных частиц представлено в виде ряда — разложения по полиномам Лежандра $P_l(\cos \theta)$ с соответствующими коэффициентами, значения которых могут быть вычислены, если известно сечение рассеяния частиц на атомах с данным распределением электронов в их оболочках (т. е. угловое распределение рассеяния зависит от формы потенциала взаимодействия частицы с атомами среды). Теория справедлива для любых углов рассеяния; однако во многих важных случаях полные углы многократного рассеяния невелики и складываются из множества еще более малых отклонений. При этом ряд по полиномам $P_l(\cos \theta)$ сходится медленно, и его вычисление становится достаточно громоздким*.

III

В конце 1940-х — начале 1950-х гг. появляется еще ряд теоретических работ по многократному рассеянию быстрых заряженных частиц [3–9], математически близко связанных между собой и с теорией Гаудсмита–Саундерсона.

*Здесь стоит напомнить, что в те времена возможности вычислительной техники были далеки от сегодняшних.

При этом в работах [5–9] для учета экранирования полей ядер рассеивающих атомов (с зарядом Z_2) используется простейшая аппроксимация функции Томаса–Ферми (предложенная Бором [10]) экспонентой $\exp(-r/a)$, где r — расстояние от ядра атома, а «радиус экранирования» $a = a_{\text{T-F}} = 0,8853 a_0 Z_2^{-1/3}$, $a_0 = \hbar^2/(m_e e^2) = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см (либо $a = 0,8853 a_0 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{-1/2}$, если налетающая частица — тоже атом (ион) с зарядом ядра Z_1).

Из упомянутых работ существенно выделяется работа Мольера «Theorie Der Streuung schneller geladener Teilchen. I und II» [3, 4], отличающаяся своей «теоретической законченностью». В ней отсутствуют какие-либо подгоночные («свободные») параметры и специальные предположения о форме сечения однократного рассеяния (кроме очевидного: его величина должна изменяться от нуля — при движении частицы вне пределов рассеивающего атома до сечения Резерфорда — при прохождении ее через все электронные оболочки в непосредственную близость к атомному ядру). Благодаря удачному выбору аналитического представления «функции экранирования» Томаса–Ферми, а также ряду математических аппроксимаций в ходе рассмотрения, теория остается аналитической до конца, а ее результаты имеют достаточно общий характер и удобны для применения в конкретных расчетах.

Теория разработана для случаев многократного рассеяния быстрых заряженных частиц в пределах малых углов в неупорядоченной среде, состоящей из атомов, описываемых статистической моделью Томаса–Ферми, т. е. предполагается, что $\sin \theta = \theta$, $\cos \theta = 1$ и столкновения происходят с изолированными атомами, заряды ядер которых $Z_2 \geq 10$. Для расчетов результата n последовательных актов рассеяния применен (и развит) метод суммирования отклонений Вентцеля [11] и используются преобразования Фурье–Бесселя.

В процессе преобразований, приводящих в конечном счете к выражению для функции углового распределения многократно рассеянных частиц, выяснилось, что вся специфика их взаимодействия с атомами среды отражается в комбинации

$$\ln \chi_d - \int_0^{\chi_d} q(\chi) \left(\frac{d\chi}{\chi} \right), \quad (1)$$

в которой $q(\chi)$ — сечение однократного рассеяния $\sigma(\chi)$ в «единицах Резерфорда»: $q(\chi) = \sigma(\chi)/\sigma_{\text{Ruth}}(\chi)$, а угол χ_d находится в области, где $q(\chi)$ близко к 1. Видно, что соотношение (1) представляет собой логарифм некоторого угла, величина которого зависит от характера экранирования полей ядер рассеивающих атомов.

Эта комбинация положена Мольером в основу определения «угла экранирования» χ_a (минимального угла рассеяния, дающего заметный вклад в общее

угловое распределение рассеянных частиц):

$$\ln \chi_a = - \lim_{\chi_d \rightarrow \infty} \left[\int_0^{\chi_d} q(\chi) \frac{d\chi}{\chi} + \frac{1}{2} - \ln \chi_d \right]. \quad (2)$$

Здесь $1/2$ добавлена для того, чтобы в случае использования экспоненциального экранирования и борновского приближения угол χ_a становился точно равным $\chi_0 = \lambda/(2\pi a)$, где λ — длина волны частицы, а «радиус экранирования» a берется обычно равным радиусу Томаса–Ферми $a = 0,8853 a_0 Z_2^{-1/3}$, где $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см.

Общий результат многократного рассеяния определяется двумя угловыми параметрами χ_c и χ_a , из которых первый характеризует основные параметры среды и частицы:

$$\chi_c^2 = \pi N l (2Z_1 Z_2 e^2 / m_1 v^2)^2, \quad (3)$$

где N — число атомов-рассеивателей в единице объема среды; l — толщина слоя рассеивателя и m_1 — масса частиц, а «угол экранирования» χ_a отражает влияние электронных оболочек атомов на потенциал взаимодействия сталкивающихся частиц и является фактически «углом обрезания» снизу, отсекающим углы, не дающие практического вклада в общее угловое распределение рассеянных частиц (аналогично углу θ_{\min} в теории Вильямса [1]). Этот угол является единственным параметром, полностью определяющим результат многократного рассеяния частиц в данной среде и форму их углового распределения через отношение

$$\Omega_b = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2}, \quad (4)$$

характеризующее число «эффективных соударений» («эффективное» число соударений).

Функция углового распределения рассеянных частиц дается рядом

$$F(\theta)\theta d\theta = \left(\frac{\theta^* d\theta^*}{2\pi} \right) \left[f^{(0)}(\theta^*) + \frac{1}{B} f^{(1)}(\theta^*) + \frac{1}{B^2} f^{(2)}(\theta^*) + \dots \right], \quad (5)$$

в котором параметр разложения B находится из соотношения

$$B - \ln B = \ln \Omega_b + 1 - 2C, \quad (6)$$

«условный» («приведенный») угол

$$\theta^* = \frac{\theta}{\chi_c B^{1/2}}, \quad (7)$$

$C = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера, функция $f^{(0)}(\theta^*) = 2 \exp[-(\theta^*)^2]$, а $f^{(1)}(\theta^*)$ и $f^{(2)}(\theta^*)$ рассчитаны и табулированы в достаточно широком диапазоне θ^* .

IV

В других упомянутых работах [5–9] использованы различные способы подсчетов итогов многочисленных соударений частиц с атомами среды, но результаты их во многом сходны и с помощью некоторых преобразований могут быть приведены к близким — или практически совпадающим — с полученными Мольером [6, 8, 9]. Таким образом, вся проблема многократного рассеяния сосредоточивается на задаче определения сечения одиночного рассеяния быстрой частицы на атоме среды.

Для легких частиц (электронов, мезонов) и в случаях, когда величина параметра Борна

$$\alpha = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2}{137\beta} < 1, \quad (8)$$

а в качестве потенциала взаимодействия частицы с атомом используется потенциал типа Вентцеля–Юкавы

$$V(r) = \omega \left(\frac{r}{a} \right) \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} \quad (9)$$

с экспоненциальным экранированием

$$\omega \left(\frac{r}{a} \right) = \exp \left(-\frac{r}{a} \right) \quad (10)$$

($a = 0,885 a_0 Z_2^{-1/3}$), сечение рассеяния может быть рассчитано квантовомеханическим методом в первом приближении Борна и отношение этого сечения к резерфордскому будет иметь вид

$$q(\theta) = \frac{\theta^4}{\theta^2 + \theta_0^2}, \quad \theta_0 = \frac{\lambda}{2\pi a}. \quad (11)$$

V

Для определения сечения однократного рассеяния и угла экранирования χ_a без ограничения на величину α Мольер применил оригинальное решение. Он предложил свою аппроксимацию функции Томаса–Ферми (существенно лучшую, чем просто экспонента) [3], позволившую ему произвести вычисление экранирующего множителя $q(\chi)$ для различных значений α (и найти зависимость угла χ_a от α):

$$\begin{aligned} \omega_M(x) &= \sum_{i=1}^3 a_i \exp(-b_i x), \quad x = \frac{r}{a}, \\ a_1 &= 0,10, \quad a_2 = 0,55, \quad a_3 = 0,35; \\ b_1 &= 6,0, \quad b_2 = 1,2, \quad b_3 = 0,3. \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно Мольеру эта $\omega_M(x)$ представляет функцию Томаса–Ферми в пределах $0 \leq x \leq 6$ с точностью 0,002. Расчеты с использованием этой аналитической аппроксимации были выполнены без приближения Борна с помощью комбинации WKB-метода линейной оптики (для области рассеивающего атома) и волновой оптики (после прохождения этой области). Получена общая интегральная формула для сечения рассеяния, из которой после ряда математических преобразований и уточнений найдено выражение для малых углов рассеяния:

$$q(\chi) = \frac{(k\chi)^4}{4\alpha^2} \left| \int_0^\infty \rho d\rho J_0(k\chi\rho) \left[e^{i\Phi(\rho)} \right] - 1 \right|^2, \quad (13)$$

в котором k — первоначальное значение волнового числа; ρ — «прицельный параметр» траектории луча; J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, а фазовая функция

$$\Phi(\rho) = \mp 2\alpha \sum_{i=1}^3 a_i K_0(b_i y), \quad y = \frac{\rho}{a}, \quad (14)$$

где a_i и b_i — коэффициенты из формулы (12), а K_0 — функция Бесселя третьего рода.

Анализируя поведение подынтегрального выражения в (13) в различных областях изменения переменных, Мольер нашел разумные аппроксимации для крайних случаев и получил соответствующие асимптотические формулы:

а) для малых величин α :

$$q(\chi) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\simeq} \left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^4 \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\alpha_i}{(\chi/\chi_0)^2 + b_i} \right]^2; \quad (15)$$

б) для больших величин α :

$$q(\chi) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{y}{4\phi''(y)} \left(\frac{\chi}{\alpha\chi_0} \right)^3, \quad |\phi'(y)| = \frac{\chi}{\alpha\chi_0}, \quad (16)$$

где

$$\phi(y) = 2 \sum_{i=1}^3 a_i K_0(b_i y);$$

в) для любых значений α при $q(\chi) > 0,9$ (т.е. для области перехода к резерфордовскому рассеянию)*:

$$q(\chi) \underset{\geq 0,9}{\simeq} 1 - \frac{8,85}{(\chi/\chi_0)^2} \left[1 + \alpha^2 \ln \frac{7,1 \cdot 10^{-4} (\chi/\chi_0)^2}{(\alpha^4 + (\alpha^3/3) + 0,13)} \right]. \quad (17)$$

С помощью этих формул были рассчитаны (и построены) полные зависимости $q(\chi)$ для значений $\alpha = 0$ и $\alpha = 9,6$, а также $q(\chi)$ в области $q > 0,9$ для $\alpha = 0,6; 1,2; 2,4$ и $4,8$, а чтобы продолжить их в область $q < 0,9$, предложена интерполяционная формула

$$\left(\frac{\chi}{\chi_0} \right)^2 = A_q + B_q \alpha^2 \quad \text{при} \quad q = \text{const}, \quad (18)$$

в которой коэффициенты A_q и B_q найдены исходя из зависимостей $q(\chi)$ в области $q > 0,9$. Результаты этих расчетов приведены на рис. 1. На этом

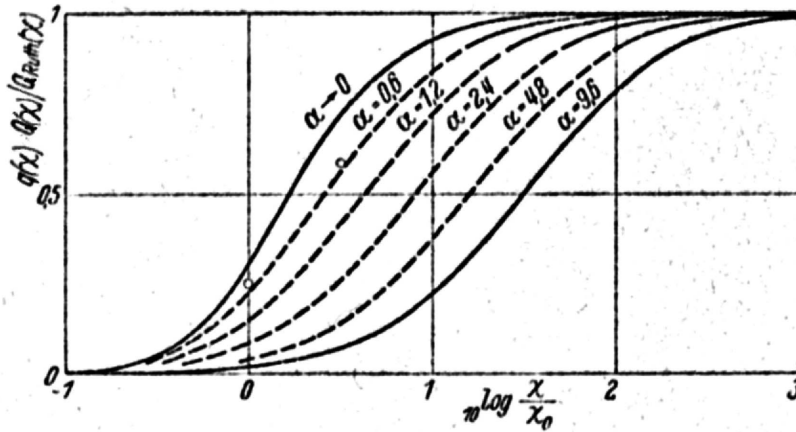


Abb. 2. Einfluß der Abschirmung auf den Streuquerschnitt $Q(\chi)$ für verschiedene Werte des Parameters α .

Рис. 1. (Из статьи Мольера.) Относительные величины сечений рассеяния («экранирующие множители») $q(\chi) = Q(\chi)/Q_{\text{Ruth}}(\chi)$ для различных значений α . Результаты численных (контрольных) расчетов даны кружками

*Ранее Розенталем [12] была предложена аппроксимация типа (12) (для области $1 \leq x \leq 10$) с иными значениями a_i и b_i , использование которых приводит в (17) к коэффициенту 7,32 вместо 8,85 [14].

же рисунке представлены результаты контрольных численных расчетов величин $q(\chi)$ непосредственно по интегральной формуле (13) для случаев $\alpha = 0,6$ в двух точках при $\lg(\chi/\chi_0) = 0$ и $0,5$; они отстоят от соответствующей кривой менее чем на 10% (см. рис. 1). Исходя из полученных таким образом зависимостей $q(\chi)$ для разных α было найдено следующее выражение для «угла экранирования»:

$$\chi_\alpha = \chi_0 \sqrt{1,13 + 3,76\alpha^2}. \quad (19)$$

VI

В 1953 г. вышла большая статья Бете [13], специально посвященная анализу теории Мольера. В ней предложен более простой вывод мольеровских соотношений, отмечена обоснованность аппроксимаций, использованных в процессе их вывода, сделаны некоторые уточнения и несколько расширена таблица функций $f^{(i)}(\theta^*)$, входящих в формулу (5) для углового распределения рассеянных частиц. При этом отмечено, что вычисление «угла экранирования» (19) проведено без приближения Борна (с помощью WKB-метода) и в выражении (19) «член с α^2 учитывает отклонение от этого приближения». Проведено также сопоставление с другими теориями, и продемонстрирована

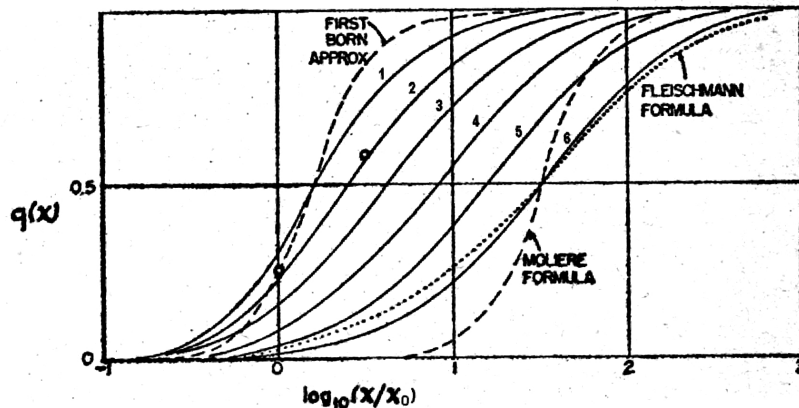


FIG. 6. The screening factor $q(\chi)$ as a function of $\log_{10}(\chi/\chi_0)$. Solid lines represent the calculations of Molière as described in the text. The two circles represent Molière's two numerical checks.

Рис. 2. (Из работы Скотта.) Экранирующий множитель $q(\chi)$ в зависимости от $\lg(\chi/\chi_0)$. Сплошные линии — результаты расчетов Мольера для $\alpha = 0$ (1); 0,6 (2); 1,2 (3); 2,4 (4); 4,8 (5) и 9,6 (6) (см. рис. 1)

количественная близость теорий Мольера [3, 4] и Гаудсмита–Саундерсона. (Таким образом, теория Мольера вполне оправданно может называться «теорией Мольера–Бете».)

Несколько позже выходит обширная обзорная работа Скотта [14] по многократному рассеянию быстрых заряженных частиц на малые углы, в которой вновь подробно обсуждается и теория Мольера, снова подтверждаются (и уточняются) ее выводы и еще раз подчеркивается, что в основе своего рассмотрения Мольер не ограничивался приближением Борна (хотя «вопрос о поправках к нему остается открытым»). На рис. 2, взятом из работы Скотта, представлены экранирующие факторы $q(\chi)$ для различных значений α ; кроме полученных Мольером даны также результаты расчетов в первом борновском приближении и по упрощенным формулам Мольера и Флейшмана (см. ниже).

Тем временем теория Мольера стала с успехом применяться к анализу результатов экспериментов по многократному рассеянию различных заряженных частиц в сравнительно широком диапазоне масс и скоростей. Было показано, что имеющиеся экспериментальные данные в общем согласуются с результатами расчетов «по Мольеру» [15], а их довольно большой разброс не имеет систематического характера и может быть обусловлен различной (и недостаточной) точностью измерений.

VII

В то же время разворачивается и активная критика мольеровской теории, основанная, главным образом, на том, что она является «неправильным приближением» Борна и не может (не должна!) быть применима для тяжелых частиц невысоких энергий, когда величина параметра α превосходит — тем более намного — 1. Это при том, что в ряде экспериментов была показана возможность использования теории Мольера для анализа результатов, полученных именно с тяжелыми частицами при $\alpha > 1$ и $\alpha \gg 1$ (см., например, [15–19]).

Наиболее последовательной в этом смысле следует считать опубликованную в 1959 г. работу Нигэма, Сундаресана и Ву [20]. В ней точные расчеты выполнены во втором приближении Борна с использованием сечения рассеяния по Далитцу [21] (для релятивистских частиц) и сделана попытка «исправления» экспоненциального экранирования поля ядра рассеивающего атома путем введения в показатель экспоненты «свободного» параметра μ : $\omega = \exp(-r/\mu a)$ (см. уравнение (10)), величина которого — $\mu = 1,80$ — определена из сравнения с результатами эксперимента по рассеянию быстрых электронов (хотя теоретические оценки [14] дают значение $\mu \approx 1,12$). Однако в работе Симона [18], осуществленной специально

для проверки возможностей теории Мольера при анализе результатов измерений с тяжелыми частицами (рассеяние ионов ^{16}O и ^{40}Ag с энергиями ≈ 10 МэВ/нуклон ($\alpha = 2,9-30,8$) в металлических фольгах), показано, что рассчитанные «по Мольеру» ширины угловых распределений рассеянных частиц «отлично согласуются» с экспериментальными (в пределах $\pm 2\%$), тогда как расчеты по [20] приводят к завышению этих ширин на $\approx 25-60\%$.

VIII

В 1968 г. появляется основательная работа Линдхарда, Нильсена и Шарфа (LNS) «Приближенный метод в классическом рассеянии экранированным кулоновским полем» [22]; ее «главный тезис» — столкновения между ионами и атомами «могут быть приближенно описаны в терминах подобия свойств, когда только один параметр достаточен для описания всех процессов рассеяния». И одним из основных результатов работы явилась «универсальная зависимость, связывающая сечение рассеяния с энергией частиц» (в условных — приведенных — переменных):

$$f_{\text{LNS}}(\eta) = \frac{d\sigma}{d\eta} \frac{\eta^2}{\pi a^2}, \quad (20)$$

в которой $\eta = \varepsilon \sin(\theta/2)$; $\varepsilon = a/b$; $a = 0,885a_0/(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}$ и $b = 2Z_1Z_2e^2(m_1 + m_2)/(m_1m_2v^2)$; $a_0 = 0,885 \cdot 10^{-8}$ см; m_1 и m_2 — массы сталкивающихся частиц.

Эта работа приобретает широкую известность и получает дальнейшее развитие в ряде последующих статей ([23, 24] и т. д.). Но при этом читатель вводится в заблуждение относительно теории Мольера (о которой, кстати, нет ни слова у LNS) с помощью наглядно-графического «подтверждения» ее «неверности» демонстрацией рисунка, где поведение «сечения Мольера» сильно отличается от хода универсальной кривой $f_{\text{LNS}}(\eta)$ (20). Так, в работе Мейера [23] выполнены расчеты для случаев $\alpha > 1$ с использованием сечения рассеяния, «полученного с помощью классической механики» и функции экранирования Томаса–Ферми с «приближенным значением параметра a »: $a = 0,885a_0/(Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{1/2}$.

Результаты этих расчетов приведены на рис. 3, где дана уточненная универсальная функция LNS — $f_{\text{Me}}(\eta)$ (как огибающая кривых, рассчитанных для разных величин ε); там же изображены функции Резерфорда $f_{\text{Ruth}}(\eta)$ и Мольера–Мейера $f_{\text{Mo-Me}}(\eta)$ (из «хорошо известной теории» [3, 4]):

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi b^2 \frac{\theta^4}{(\theta^2 + \theta_a^2)^2}, \quad (21)$$

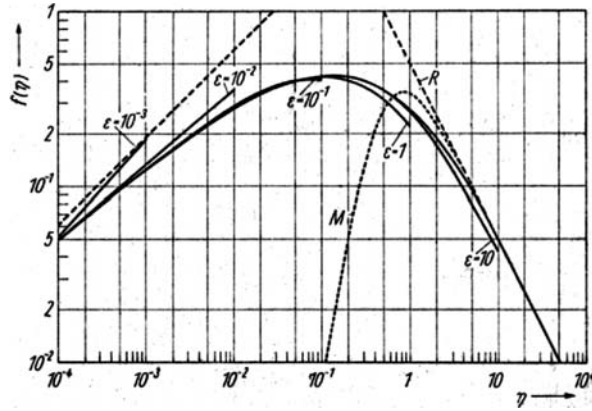


Fig. 1. Scattering cross sections represented by $f(\eta) = (\eta^2/\pi a^2) \times (d\sigma/d\eta)$ as functions of $\eta = \epsilon \sin(\theta/2)$. The solid curves were computed exactly from classical mechanics for different values of ϵ . The curve designated by "M" represents the cross section used by Mollère [4]. The Rutherford cross section is designated by "R". The dashed line on the left is approached by $f(\eta)$ for low values of η .

Рис. 3. (Из работы Мейера [23].) Функции $f(\eta)$ для различных сечений рассеяния. Сплошные линии — результаты расчетов Мейера по классической механике для разных величин ϵ ; M — расчет для «сечения Мольера» (21) и R — для сечения Резерфорда

где (в данном случае) θ и θ_a тождественны мольеровским χ и χ_a . Это сечение, аналогичное (11), было предложено Мольером как упрощенное для больших α ; оно удовлетворяет уравнению (2) и может быть использовано для выполнения ряда оценок [14]. На основании того, что соответствующая этому сечению функция $f_{\text{Мо-Ме}}(\eta)$ при $\eta < 1$ «уходит» круто вниз по сравнению с универсальной зависимостью $f(\eta)$ Мейера–Линдхарда (и «сильно недооценивает вклад малых углов» [25]), делается вывод, что теория Мольера может использоваться лишь при $\alpha \leq 1$ и неприменима при $\alpha > 1$ и $\alpha \gg 1$. Рисунок, подобный мейеровскому рис. 3, стал «кочевать» из статьи в статью (см., например, [25, 26] и другие того же времени) и приводится в монографии [27].

(Таким образом, создалась несколько парадоксальная ситуация: в теоретических работах (кроме [13, 14]) утверждается, что теория Мольера «неправильная» и не может (не должна) применяться к описанию рассеяния тяжелых частиц при $\alpha > 1$ [20, 23], тогда как экспериментаторы [15–19] говорят, что она неплохо описывает результаты измерений и при таких условиях (естественно, в границах своей применимости).)

IX

Поэтому стоит, видимо, вернуться к «истокам» и вновь посмотреть на приведенные выше рисунки. Мольер чисто математически получил зависимости $q(\chi/\chi_0)$ от $\lg(\chi/\chi_0)$ для $\alpha = 0$ и 9,6, а также $q(\chi) > 0,9$ для $\alpha = 0,6; 1,2; 2,4$ и 4,8 (см. рис. 1) и исходя из них нашел зависимость угла экранирования χ_a от величины α в виде формулы (19), которая у Мейера «скромно» на-

звана «допущением» для расширения теории на случаи $\alpha > 1$ [23]. У Скотта аналогичный рисунок (рис. 2) дополнен результатами расчетов в борновском приближении, а также по формуле Мольера (21) и формуле Флейшмана [28]:

$$q(\chi) \simeq \chi / (\chi + \chi_a e^{1/2}), \quad (22)$$

которая, по мнению автора, должна лучше мольеровской (21) отражать реальность при больших значениях α . Скотт [14] на основании собственных расчетов подтвердил правильность выражения (19) для χ_a , заметив при этом, что вопрос о точности мольеровской поправки к борновскому приближению «остается открытым», и еще раз напомнил, что расчеты Мольера не связаны прямо с приближением Борна.

Поскольку в наших экспериментах 1950–1970-х гг. теория Мольера и ее модификации с успехом использовались при описании результатов именно для случаев $\alpha > 1$ и $\alpha \gg 1$ [29–31], то был произведен ряд пересчетов величин χ_a и $q(\chi)$ — в частности, зависимости $q(\chi/\chi_0)$ для $\alpha = 10$ по формуле (16). Из найденной таким образом зависимости $q(\chi) = \sigma(\chi)/\sigma_{\text{Ruth}}(\chi)$ была получена «универсальная кривая» $f_{\text{Mol}}(\eta)$ по Линдхарду–Мейеру [23]. Результаты этих расчетов даны в таблице и на рис. 4 вместе с функциями (в тех же переменных) Линдхарда–Мейера (1) — $f_{\text{Li-Me}}(\eta)$, Мольера «по Мейеру» (2) — $f_{\text{Mo-Me}}(\eta)$, Резерфорда (3) — $f_{\text{Ruth}}(\eta)$; там же приведены результаты расчетов по формуле Флейшмана (28) — $f_{\text{Fle}}(\eta)$ (кривая 5).

Видно, что $f_{\text{Mol}}(\eta)$, полученная исходя из формулы Мольера (16) (4 на рис. 4) при больших значениях η (от $\sim 0,007$ и более) почти совпадает с результатами классических расчетов Линдхарда–Мейера, а при меньших

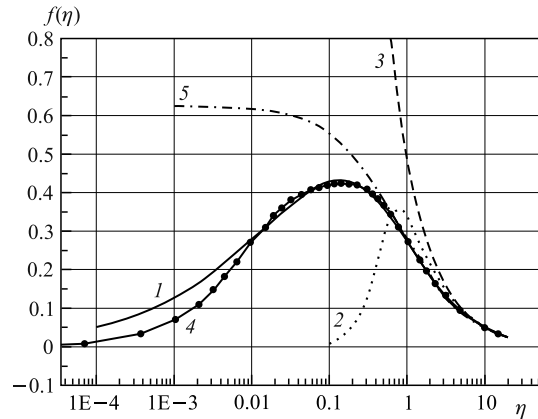


Рис. 4. Функции $f(\eta)$ для различных сечений рассеяния: 1 — универсальная функция Линдхарда–Мейера $f_{\text{Li-Me}}(\eta)$; 2 — функция Мольера «по Мейеру» $f_{\text{Mo-Me}}(\eta)$ и 3 — функция для сечения Резерфорда $f_{\text{Ruth}}(\eta)$ — взяты из работы [23]; 4 и 5 — $f_{\text{Mol}}(\eta)$ и $f_{\text{Fle}}(\eta)$ соответственно рассчитаны исходя из формул (16) и (22) для величины $\alpha = 10$

η_{Li-Me}	$f_{Me}(\eta)$	$f_{Fle}(\eta)$	Y_{Mol}	η_{Mol}	$f_{Mol}(\eta)$
1E-4	0,05				
1,5E-4	0,0596		20	7,06E-5	0,00861
2E-4	0,0668		15	3,72E-4	0,03299
3E-4	0,0795		12	0,00104	0,07156
4E-4	0,089		10	0,00211	0,1104
6E-4	0,103		8	0,00441	0,1862
8E-4	0,117		7	0,00648	0,2303
1E-3	0,127	0,6242	6	0,00971	0,2791
0,0015	0,148	0,6249	5	0,015	0,3282
0,002	0,162	0,6234	4,5	0,019	0,3505
0,003	0,19	0,6227	4	0,0245	0,3688
0,004	0,21	0,6219	3,5	0,0323	0,3861
0,006	0,241	0,6203	3	0,0442	0,401
0,008	0,264	0,6188	2,6	0,0585	0,412
0,01	0,28	0,6173	2,3	0,074	0,418
0,015	0,311	0,614	2	0,096	0,422
0,02	0,334	0,61	1,8	0,116	0,423
0,03	0,362	0,603	1,6	0,143	0,4237
0,04	0,382	0,595	1,4	0,179	0,4234
0,06	0,409	0,581	1,2	0,23	0,419
0,08	0,422	0,568	1	0,304	0,4076
0,1	0,43	0,556	0,9	0,355	0,3978
0,15	0,432	0,526	0,8	0,42	0,384
0,2	0,429	0,5	0,7	0,505	0,3658
0,3	0,408	0,455	0,6	0,619	0,3418
0,4	0,383	0,417	0,5	0,782	0,311
0,6	0,34	0,357	0,4	1,03	0,2723
0,8	0,302	0,313	0,3	1,448	0,2243
1	0,275	0,278	0,25	1,785	0,1978
1,5	0,221	0,218	0,2	2,293	0,1655
2	0,184	0,179	0,15	3,134	0,1306
3	0,137	0,132	0,1	4,83	0,0922
4	0,109	0,1042	0,05	9,84	0,0483
6	0,0775	0,0735	0,033	14,9	0,0327
8	0,0605	0,0568			
10	0,0495	0,0463			
15	0,0332	0,0317			
2	0,025				

значениях постепенно уходит все ниже от универсальной кривой и при $\eta \approx 0,7 \cdot 10^{-4}$ разница составляет уже $\approx 50\%$ от соответствующих величин $f_{\text{Li-Me}}(\eta)$.

Что же касается формулы Флейшмана (22), то рассчитанная для нее функция $f_{\text{Fle}}(\eta)$ (5 на рис. 4) оказывается близка к результатам классических расчетов (и к мольеровской $f_{\text{Mol}}(\eta)$) лишь в области $\eta \geq 5$, хотя $q_{\text{Fle}}(\chi)$ (22) неплохо согласуется с расчетами Мольера для $\alpha = 9,6$ (см. рис. 2). Это может свидетельствовать о том, что вид сечения однократного рассеяния не так уж слабо влияет на общий результат многократного рассеяния (особенно при его не слишком большой кратности), как это принято считать (например, [13, 27]).

Из рис. 4 видно также, что удивление некоторых авторов по поводу того, «что такие различные сечения» (как мольеровское и линдхардовское) при расчете угловых распределений «приводят к практически одинаковым результатам» [23, 27], основано на недоразумении.

Из вышеизложенного становится ясно, что теория многократного рассеяния быстрых заряженных частиц Мольера [3, 4] может применяться при любых значениях параметра α — тем более, что в нее сравнительно несложно могут быть внесены поправки, связанные, например, с учетом влияния неупругих процессов [29–31], а также мольеровских приближений, если станут необходимыми более точные значения параметров процесса многократного рассеяния [32].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Williams E. J.* Multiple Scattering of Fast Electrons and Alpha-Particles, and “Curvature” of Cloud Tracks Due to Scattering // *Phys. Rev.* 1940. V. 58. P. 292.
2. *Goudsmit S., Saunderson J. L.* Multiple Scattering of Electrons // *Ibid.* V. 57. P. 24; V. 58. P. 36.
3. *Moliere G.* Theorie der Streuung schneller geladener Teilhen. I // *Z. Naturforsch.* 1947. V. 2a. P. 133.
4. *Moliere G.* Theorie der Streuung schneller geladener Teilhen. II // *Z. Naturforsch.* 1948. V. 3a. P. 78.
5. *Snyder H. S., Scott W. T.* Multiple Scattering of Fast Charged Particles // *Phys. Rev.* 1949. V. 76. P. 220.
6. *Lewis H. W.* Multiple Scattering in an Infinite Medium // *Phys. Rev.* 1950. V. 78. P. 526.
7. *Wang M. G., Guth E.* On the Theory of Multiple Scattering, Particularly Charged Particles // *Phys. Rev.* 1951. V. 84. P. 1092.
8. *Scott W. T.* Mean-Value Calculations for Projected Multiple Scattering // *Phys. Rev.* 1952. V. 85. P. 245.

9. *Spenser L. V.* Penetration and Diffusion of X-Rays: Calculation of Spatial Distributions by Semi-Asymptotic Methods // *Phys. Rev.* 1952. V. 88. P. 793; Calculation of Peaked Angular Distributions from Legendre Polynomial Expansion and an Application to the Multiple Scattering of Charged Particles // *Phys. Rev.* 1953. V. 90. P. 146.
10. *Bohr N.* The Penetration of Atomic Particles from Matter // *Kgl. Dan. Vid. Selsk., Mat. Fys. Medd.* 1948. V. 18, No. 8 (Пер.: *Бор Н.* Прохождение атомных частиц через вещество. М.: Изд-во иностр. лит., 1950).
11. *Wentzel G.* Zur Theorie der Streuung von β -Strahlen // *Ann. Phys.* 1922. V. 374. P. 335–368.
12. *Rozental S.* Über eine Approximation der Fermischen Verteilungsfunktion // *Z. Phys.* 1936. V. 98. P. 742–745.
13. *Bethe H.* Moliere's Theory of Multiple Scattering // *Phys. Rev.* 1953. V. 89. P. 1256.
14. *Scott W. T.* The Theory of Small Angle Multiple Scattering of Fast Charged Particles // *Rev. Mod. Phys.* 1963. V. 35. P. 231–313.
15. *Ashmore A., Crewe A. W.* The Multiple Scattering of 7.5 MeV Deuterons in Metals // *Proc. Phys. Soc. (London) A.* 1953. V. 66. P. 1172.
16. *Bichsel H.* Multiple Scattering of Protons // *Phys. Rev.* 1958. V. 112. P. 182.
17. *Fleischman H.* Vielfachstreuung von 8 MeV- α -Teilchen am Blei // *Z. Naturforsch.* 1960. V. 15a. P. 1096.
18. *Simon W. G.* Verification of Moliere Theory of Multiple Scattering for Heavy Ions // *Phys. Rev.* 1964. V. 136. P. 410.
19. *Бедняков А. А. и др.* Многократное рассеяние протонов с энергией 75–200 кэВ в твердых мишенях // *ЖЭТФ.* 1964. Т. 46. С. 1901.
20. *Nigam B. P., Sundareshan M. K., Ta-You Wu.* Theory of Multiple Scattering: Second Born Approximation and Corrections to Moliere's Work // *Phys. Rev.* 1959. V. 115. P. 491.
21. *Dalitz R. H.* On Higher Born Approximations in Potential Scattering // *Proc. Roy. Soc. (London) A.* 1951. V. 206. P. 509.
22. *Lindhard J., Nielsen V., Scharff M.* Approximation Method in Classical Scattering by Screened Coulomb Fields // *Kgl. Dan. Vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* 1968. V. 36, No. 10.
23. *Meyer L.* Plural and Multiple Scattering of Low-Energy Heavy Particles in Solids // *Phys. Stat. Sol. b.* 1971. V. 44. P. 423.
24. *Sigmund P., Winterbon K. B.* Small-Angle Multiple Scattering of Ions in Screened Coulomb Region: I. Angular Distributions // *Nucl. Instr. Meth.* 1974. V. 119. P. 541.
25. *Yamazaki T., Takasaki M., Sakisaka M.* Multiple Scattering of Protons and Nitrogen Ions on Metal Foils // *J. Phys. Soc. Japan.* 1974. V. 36. P. 1643.
26. *Kumbartzki G. J., Neuberger H., Polster W.* Small-Angle Multiple Scattering of H_2 Molecular Ions and Light Particles at 14 MeV // *Nucl. Instr. Meth. B.* 1985. V. 12. P. 315.
27. *Кумахов М. А., Комаров Ф. Ф.* Энергетические потери и пробеги ионов в твердых телах. Минск, 1979.
28. *Fleischman H.* Zur Kleinwinkeltheorie der Vielfachstreuung // *Z. Naturforsch.* 1960. V. 15a. P. 1090.

29. *Бедняков А. А. и др.* Многократное рассеяние и потери энергии ионов гелия в алюминии при энергиях менее 300 кэВ // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. 1971. № 4. С. 402.
30. *Бедняков А. А., Тулинов А. Ф.* Об учете влияния перезарядки ионов на процесс их многократного рассеяния при низких энергиях // Вестн. МГУ. Физика, астрономия. 1973. № 4. С. 397.
31. *Бедняков А. А. и др.* Прохождение ионов ^{14}N и ^{16}O с энергиями 30–330 кэВ/нуклон через металлические пленки: потери энергии, многократное рассеяние, эффективные заряды. НИИЯФ МГУ. М., 1988. Деп. ВИНТИ № 5526-В88. С. 1–35.
32. *Tarasov A. V., Voskresenskaya O. O.* Moliere Multiple Scattering Theory Revisited. arXiv:1204.3675 [hep-ph]. 2012.