

## КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

*М. В. Алтайский*<sup>1, \*</sup>, *Н. Е. Капуткина*<sup>2, \*\*</sup>, *В. А. Крылов*<sup>3, \*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Институт космических исследований РАН, Москва

<sup>2</sup> Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва

<sup>3</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	1825
КЛАССИЧЕСКИЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ	1825
Идея нейронной сети	1825
Математическая модель нейрона	1827
Задачи, решаемые нейронными сетями	1828
Типы нейронных сетей	1829
ПАРАДИГМА КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ	1831
КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ С УЧИТЕЛЕМ	1835
КВАНТОВО-ИНСПИРИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ	1840
АССОЦИАТИВНАЯ ПАМЯТЬ И ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СЕТИ	1842
КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССОРЫ D-WAVE SYSTEMS INC	1843
МОДЕЛИРОВАНИЕ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА	1847
КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ НА КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ	1851
Сеть с фононной нелинейностью	1851
Сеть с диполь-дипольным взаимодействием	1853
Матрица плотности для сети на квантовых точках	1856

---

\*E-mail: [altaisky@mx.iki.rssi.ru](mailto:altaisky@mx.iki.rssi.ru)

\*\*E-mail: [nataly@isis.ru](mailto:nataly@isis.ru)

\*\*\*E-mail: [kryman@jinr.ru](mailto:kryman@jinr.ru)

ОПИСАНИЕ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИМИ И СОЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ В РАМКАХ МОДЕЛИ ИЗИНГА	1857
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	1858
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	1860

## КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ: СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ

*М. В. Алтайский*<sup>1, \*</sup>, *Н. Е. Капуткина*<sup>2, \*\*</sup>, *В. А. Крылов*<sup>3, \*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Институт космических исследований РАН, Москва

<sup>2</sup> Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС», Москва

<sup>3</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Идея искусственных квантовых нейронных сетей, впервые сформулированная в работе [34], представляет собой объединение концепции искусственной нейронной сети и парадигмы квантовых вычислений. Первое систематическое рассмотрение искусственных квантовых нейронных сетей было дано в диссертации Т. Меннера (1998). На основании работ Меннера, Нарайяна [42, 43], Коды, Матсуи, Нишимуры [35, 36], Алтайского, Чжоу и др. [2, 68, 67] были построены квантово-инспирированные алгоритмы обучения нейронной сети, используемые в настоящее время в различных обучающих программах и компьютерных играх [30, 29]. Первая масштабируемая аппаратно реализованная модель искусственной квантовой нейронной сети, годная к практическому использованию, была разработана компанией D-wave Systems Inc. [33] и представляет собой квантовую сеть Хопфилда, построенную на основе сверхпроводящих квантовых интерференционных устройств SQUID. В настоящей работе анализируются принципы и возможности альтернативной реализации квантовых нейронных сетей на основе квантовых точек. Рассматривается возможность использования квантовых нейросетевых алгоритмов в системах автоматизированного управления, в устройствах ассоциативной памяти, при моделировании биологических и социальных сетей.

The idea of quantum neural network first presented in [34] is a conjunction of the concept of artificial neural network and that of quantum computation. The first systematic study of artificial quantum neural networks was presented in T. Menner Ph.D. Thesis (1998). The works of Menner and Narayanan [42, 43], Kouda, Matsui and Nishimura [35, 36], Altaisky, Zhou and others [2, 68, 67] have laid the basis for the quantum-inspired learning algorithms, which are now in use in different teaching programs and computer games [29, 30]. The first scalable model of artificial quantum neural network suitable for practical applications has been implemented by D-Wave Systems Inc. [33]. It is a quantum Hopfield network implemented on superconducting quantum interference devices (SQUID). In present paper, we analyze the principles and possibilities of alternative implementation of quantum neural network on the basis of quantum dots and quantum wires. The prospectives of application of quantum neural networks to automatic control, associative memory devices, and simulation of biological and social networks are considered.

PACS: 87.19.lj

---

\*E-mail: [altaisky@mx.iki.rssi.ru](mailto:altaisky@mx.iki.rssi.ru)

\*\*E-mail: [nataly@misis.ru](mailto:nataly@misis.ru)

\*\*\*E-mail: [kryman@jinr.ru](mailto:kryman@jinr.ru)

## ВВЕДЕНИЕ

Идея квантовой нейронной сети (КНС) была впервые изложена в работе [34]. Она представляет собой объединение концепции обычной нейронной сети и парадигмы квантовых вычислений. В 1997 г. в работе А. Власова предложена гипотетическая модель квантовой нейронной сети, использующей оптическую интерференцию [62]. Первое систематическое рассмотрение искусственных квантовых нейронных сетей (ИКНС) дано в диссертации Т. Меннера [43]. После этого появилось значительное число работ, обобщающих хорошо развитый аппарат классических ИНС на квантовый случай. В 2000 г. Д. Вентура и Т. Мартинец предложили квантовую реализацию модели ассоциативной памяти [60], основанную на алгоритме Гровера, а Е. Берман с соавторами — идею физической реализации квантовой нейронной сети в виде массива квантовых точек [47].

К настоящему времени большинство предложенных квантовых нейронных сетей представляет собой *самоорганизующиеся* сети, т. е. сети, работающие без учителя, весовые множители в которых определяются параметрами решаемой задачи. Что касается сетей с учителем, то в 2001 г. М. Алтайским предложена модель квантового перцептрона [2]. Имплементация этого алгоритма обновления весов была дана в работах Р. Чжоу с соавторами [66, 67, 65]. В основу алгоритма легли кубитные нейронные сети [35, 49]. К необучающимся сетям следует отнести нейронные сети на квантовых гейтах [51], а также работающие в настоящее время квантовые процессоры компании D-wave Systems Inc. [54].

В данной работе мы представляем обзор основных моделей и алгоритмов, связанных с квантовыми нейронными сетями, предлагаем новую модель квантовой нейронной сети на квантовых точках, а также касаемся перспектив использования квантовых нейронных сетей для моделирования биологических и социальных явлений. Данная работа не претендует на полноту охвата всевозможных направлений исследований, связанных с квантовыми нейронными сетями: мы сконцентрировались лишь на тех моделях, которые, по мнению авторов, могут быть непосредственно использованы в системах искусственного интеллекта. Фактически не затронутым осталось целое направление работ, связанное с ролью квантовых процессов в функционировании биологического нейрона.

## 1. КЛАССИЧЕСКИЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

**1.1. Идея нейронной сети.** Искусственная нейронная сеть (ИНС), или просто *нейронная сеть*, представляет собой программную или (опто-)электронную систему, обеспечивающую принятие решений путем эволюции слож-

ной нелинейной системы, на вход которой подается вектор входных данных, а выходной сигнал (в общем случае многомерный) кодирует принимаемое решение. Идея нейронной сети, предложенная в 40-х–50-х годах прошлого века для объяснения принципов работы мозга [41, 25], является в известной степени альтернативой детерминистическим алгоритмам, основанным на булевой логике, используемым в современных вычислительных устройствах. По сути, искусственная нейронная сеть представляет собой некий черный ящик, способный (в зависимости от своего внутреннего состояния) отображать  $N$ -мерный вектор входных данных в  $M$ -мерный вектор выходных данных. При этом внутреннее состояние нейронной сети адаптивно, т. е. изменяется в процессе обучения. Обучение сети может осуществляться с учителем или без учителя. Обучение с учителем состоит в том, что на вход сети подается серия входных данных, для которых известен желаемый выход сети. Векторы данных последовательно подаются на вход сети, а изменение ее внутреннего состояния производится в зависимости от того, насколько близок выход сети, получаемый для данного вектора, к желаемому. Сеть обучена, когда для всех векторов из исходного обучающего набора выход сети достаточно близок к желаемому. Обученная сеть может быть использована для обработки новых входных данных. При обучении без учителя достаточно иметь только векторы входных данных: изменение состояния сети происходит по принципам самоорганизации и зависит от корреляций, имеющихся между векторами. Использование нейронных сетей эффективно в тех задачах, в которых размерность результата достаточно низка, в то время как сам процесс вычисления является ресурсоемким по времени и/или памяти. Простейшим элементом нейронных сетей является нейрон — преобразователь суммарного входного сигнала в выходной с использованием нелинейной переходной функции. Сеть представляет собой нелинейный параллельный процессор, основанный в общем случае на связи всех нейронов со всеми. В процессе обучения нейронной сети изменяются интенсивности связей (весов), соединяющих различные нейроны. В результате обучения существенно отличными от нуля остаются лишь те связи, которые приводят к правильным ответам для предъявленного множества обучающих векторов. Для искусственных нейронных сетей наличие множества связей является и достоинством, и недостатком. С одной стороны, когда сеть обучена, наличие сложной конфигурации весов позволяет решать сложные нелинейные задачи за время, ограниченное лишь скоростью распространения сигнала в сети, в частности, многопараметрические задачи классификации. С другой стороны, при добавлении к обучающему множеству новых элементов, как правило, требуется переобучение всей сети, что связано с большими затратами времени на пересчет всех весовых множителей. Очевидно, что в реальных биологических системах, моделью которых является нейронная сеть, последовательное переобучение всей сети вряд ли происходит.

Это заставляет искать более эффективные альтернативы традиционной модели ИНС. Одной из таких альтернатив являются квантовые нейронные сети, эффективность которых качественно возрастает за счет квантового параллелизма.

Существуют различные определения нейронной сети. Так, согласно [24], нейронная сеть представляет собой существенно параллельную распределенную систему обработки информации, состоящую из простых идентичных блоков, нейронов, обладающую способностью хранить информацию и предоставлять ее для использования.

Работа нейронной сети аналогична работе мозга в двух следующих аспектах:

1. Знание приобретается нейронной сетью посредством *процесса обучения*.

2. Для хранения полученных знаний используется интенсивность межнейронных связей, *синаптических весов*.

**1.2. Математическая модель нейрона.** Биологические нейроны — специальные клеточные образования микрометрового масштаба, формы и размеры которых варьируются в очень широких пределах, — представляют собой элементарные блоки, из которых строится нейронная сеть мозга. Мозг человека содержит порядка  $8,6 \cdot 10^{10}$  нейронов. Биологический нейрон состоит из *тела нейрона*, входных каналов — рецептивных зон, или *дендритов*, и выходного канала — аксона, оканчивающегося синаптическими терминалами, связывающими выход данного нейрона со входами других нейронов.

МакКаллош и Питс предложили следующую математическую модель нейрона [41]. Входные сигналы  $x_j$ , поступающие на вход нейрона  $k$ , суммируются с различными весами, а результат суммирования сдвигается на постоянную величину  $b_k$ , зависящую от номера нейрона:

$$u_k = \sum_{j=1}^N w_{kj} x_j + b_k. \quad (1)$$

Получающаяся таким образом величина  $u_k$  называется *активационным потенциалом* нейрона. Выходной сигнал нейрона, выдаваемый в аксон, определяется нелинейной *сигмоидной функцией*  $\phi(\cdot)$ , так что величина сигнала на выходе определяется выражением

$$y_k = \phi(u_k). \quad (2)$$

Блок-схема классической модели нейрона приведена на рис. 1. Активационная функция  $\phi(\cdot)$  часто формализуется в виде ступенчатой функции

$$\phi(u) = \theta(u),$$

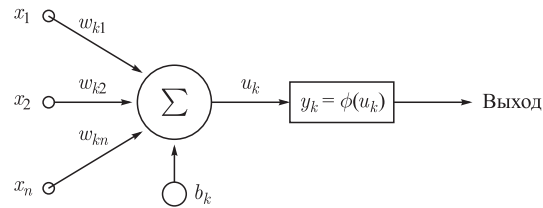


Рис. 1. Блок-схема классической модели нейрона

гиперболического тангенса

$$\phi(u) = \text{th}(au),$$

логистической функции

$$\phi(u) = \frac{1}{1 + \exp(-au)}$$

или других аналогичных функций.

В реальном биологическом нейроне кодирование выходного сигнала осуществляется по частоте, в ИНС же под  $\phi(u)$  понимают амплитуду сигнала.

Аксон каждого нейрона имеет многочисленные ответвления — синаптические терминалы, — с помощью которых выходной сигнал одного нейрона может быть подан на входы многих других нейронов. Так образуется нейронная сеть. С математической точки зрения такая сеть представляет собой *ориентированный граф*.

Если набор весов  $w_{kj}$  задан, то подача входного сигнала на  $N$  входов нейронной сети однозначно определяет выходной сигнал на  $M$  ее выходов. Таким образом нейронная сеть осуществляет отображение

$$(x_1^\alpha, \dots, x_N^\alpha) \rightarrow (y_1^\alpha, \dots, y_M^\alpha). \quad (3)$$

Настройку весов  $w_{kj}$ , так чтобы выход сети был максимально близок к желаемому для всех входных данных, называют обучением сети.

**1.3. Задачи, решаемые нейронными сетями.** Искусственные нейронные сети являются очень сильно упрощенной моделью мозга, поэтому их использование эффективно (по сравнению с использованием алгоритмического компьютера) в тех задачах, в которых размер входных данных и время вычислений, необходимое алгоритмическому компьютеру, велики, а размерность результата не велика. В этом случае в результате обучения нейронной сети строится отображение пространства входных данных на пространство выходных данных.

К таким задачам относятся:

- 1) распознавание образов, например лиц, объектов и т. п., — техническое зрение;
- 2) задачи ассоциативной памяти, когда нужно извлечь из памяти изображение, наиболее близкое к предъявляемому;
- 3) задачи управления автономными объектами, когда в зависимости от большого числа параметров, поступающих от внешних датчиков, нужно как можно быстрее принять решение о поведении объекта;
- 4) задачи обеспечения безопасности сложных технических систем;
- 5) задачи классификации объектов, как известных, так и неизвестных;
- 6) сложные задачи оптимизации, например в экономике и финансах;
- 7) задачи прогнозирования: предсказание поведения квазислучайных функций и несеточные методы решения дифференциальных уравнений;
- 8) задачи медицинской диагностики.

Нейронные сети широко применяются в системах автоматического мониторинга сложных технических объектов, в робототехнике, для автоматизации биржевых операций, в ядерной физике, в геофизических исследованиях и медицине [69, 24, 72, 73]. ИНС, как и биологические НС, осуществляют управление автономными системами по схеме, изображенной на рис. 2. При этом сети являются адаптивными: их состояние может меняться в зависимости как от действия эффектора, так и от изменения входной информации.



Рис. 2. Включение нейронной сети в систему интеллекта

**1.4. Типы нейронных сетей.** Обучение классических ИНС основано на аналогии с биологическими нейронными сетями, состоящими из нервных клеток — нейронов. Первая математическая модель таких сетей была основана на правиле Хебба [25], заметившего, что связь между двумя нейронами усиливается, если они активируются в один и тот же момент времени. Этому соответствует изменение межнейронных связей (весов) по правилу

$$\Delta w_{ij} = \eta y_j y_i, \quad (4)$$

где  $y_i$  — выходной сигнал  $i$ -го нейрона;  $y_j$  — его входной сигнал;  $0 < \eta \leq 1$  — коэффициент обучения.

В искусственных нейронных сетях возникают две возможности обучения: обучение без учителя и обучение с учителем. В первом случае работает



правило (4). Во втором случае вместо выходного сигнала  $i$ -го нейрона используется *желаемый* выходной сигнал  $d_i$  (desired):

$$\Delta w_{ij} = \eta y_j d_i. \quad (5)$$

Обучение сети происходит потактно:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \Delta w_{ij},$$

т. е. веса изменяются в дискретные моменты времени. Каждый нейрон представляет собой нелинейный сумматор, описываемый выражениями (1), (2). ИНС, как правило, состоят из отдельных слоев нейронов, так что выходы нейронов предыдущего слоя соединены со входами нейронов следующего слоя:

$$x_i^{n+1} = y_i^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом,  $k$ -слойная ИНС представляет собой сложную нелинейную функцию, отображающую  $N$ -мерный вектор входных данных  $\{x_i^1\}_{i=1, \dots, N}$  в  $M$ -мерный вектор выходных данных  $\{y_i^k\}_{i=1, \dots, M}$ . Параметрами этой функции являются межнейронные веса  $w_{ij}^n$ . На рис. 3 приведен пример прямооточной нейронной сети типа перцептрон, содержащей один скрытый слой. В данном случае  $N = 7$ ,  $M = 2$ . Когда обучение происходит с учителем, т. е. для каждого предъявляемого входного вектора из обучающей выборки известен желаемый вектор выходных значений, значения весов могут быть найдены путем минимизации по параметрам  $w_{ij}^n$  среднеквадратичной ошибки

$$E = \frac{1}{2} \left\langle \sum_{i=1}^M (y_i^k - d_i)^2 \right\rangle, \quad (6)$$

получаемой в выходном слое нейронной сети, с помощью различных численных методов, чаще всего — с помощью различных модификаций метода градиентного спуска [24]. Усреднение  $\langle \cdot \rangle$  в выражении (6) производится по всем предъявленным векторам обучающей выборки.

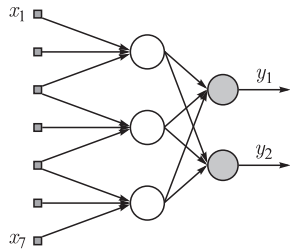


Рис. 3. Прямоточная нейронная сеть типа многослойный перцептрон, имеющая семь входов, один скрытый слой, состоящий из трех нейронов, и два выходных нейрона. В данном случае рецептивные зоны нейронов перекрываются лишь частично

Альтернативным классом ИНС являются искусственные нейронные сети без учителя, или нейронные сети с самоорганизацией. На вход такой сети последовательно подаются векторы данных из обучающей выборки. Сеть же при подаче на вход каждого следующего вектора подстраивает свои веса по правилу Хебба (4) или по его аналогам [73]. В результате обучения векторное пространство входных данных разбивается на классы.

## 2. ПАРАДИГМА КВАНТОВЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Классический компьютер работает с регистрами битов — физических систем, которые могут находиться в одном из двух взаимоисключающих состояний, обозначаемых для определенности 0 и 1. Физическая реализация этих состояний обычно подразумевает наличие или отсутствие тока в электронном устройстве. Регистр, состоящий из  $n$  битов, имеет  $2^n$  различных состояний.

Миниатюризация элементной базы вычислительных устройств привела к тому, что физическая система, содержащая один бит информации, имеет нанометровые размеры и уже не может быть описана классически. Для ее описания необходимо привлекать законы квантовой механики. Это означает, что система может находиться в состояниях 0 и 1 с ненулевыми, но отличными от единицы вероятностями. Для классических микропроцессоров, работающих по правилам булевой логики, отличие вероятности выходного состояния от единицы при заданном входном состоянии является паразитным эффектом. Архитектура микропроцессоров разрабатывается таким образом, чтобы это отличие было пренебрежимо мало.

Для процессоров, функционирование которых не сводится к правилам булевой алгебры, вероятность выходного состояния может существенно отличаться от единицы. Для строгого описания таких устройств следует учесть посредством матрицы плотности их взаимодействие с флуктуирующим окружением. Однако существует теоретическая абстракция, напрямую позволяющая расширить классическую теорию информации до теории квантовой информации. Эта абстракция состоит в том, что каждый бит может находиться в чистом состоянии — квантовой суперпозиции двух классически несовместимых состояний 0 и 1:

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle, \quad c_0, c_1 \in \mathbb{C}, \quad |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1. \quad (7)$$

Величины  $|c_0|^2$  и  $|c_1|^2$  определяют вероятность того, что в результате *измерения*, проведенного над квантовым битом, будет получено состояние 0 или 1 соответственно. Такую систему называют квантовым битом, или *кубитом*. Физической реализацией кубита может быть фермион со спином 1/2, двухуровневый атом, кольцевой ток в устройстве SQUID или другая квантовая система, для которой допустима суперпозиция двух различных состояний.

При этом существенным преимуществом спиновых кубитов, скажем ядерных спинов, является минимальное взаимодействие спина с окружением, что обеспечивает большое время декогерентности [45, 56].

Комплексность коэффициентов  $c_0, c_1$  приводит к тому, что количество информации, содержащееся в одном кубите, в континуальное число раз превосходит количество информации, содержащееся в одном классическом бите. Последнее не означает, что квантовый бит содержит бесконечное количество информации: после окончания вычислений считывание информации производится путем процедуры *измерения*, в результате которого происходит редукция квантовой суперпозиции до одного из двух состояний, так что на выходе получается один бит информации. Регистр из  $n$  кубитов как бы содержит одновременно все возможные  $2^n$ -состояния классического регистра

$$|\psi\rangle = c_0|0, \dots, 0, 0\rangle + c_1|0, \dots, 0, 1\rangle + c_2|0, \dots, 1, 0\rangle + \dots$$

Основным преимуществом квантовых вычислений перед классическими является квантовый параллелизм, позволяющий работать со всеми допустимыми состояниями одновременно. Критическим параметром для построения квантовых вычислительных устройств является время декогеренции, т. е. время, в течение которого может сохраняться когерентная суперпозиция квантовых состояний (7). Декогеренция — разрушение квантовой суперпозиции — происходит вследствие взаимодействия с окружением. По этой причине существующие квантовые вычислительные устройства работают при низких температурах, позволяющих сохранить когерентную суперпозицию на время, необходимое для проведения вычислений. Сам процесс квантовых вычислений является унитарным и, следовательно, обратимым. Необратимость, связанная с разрушением когерентной суперпозиции, происходит в момент вывода результата в классический канал путем проведения измерения над квантовым вычислительным устройством.

Для работы с квантовыми битами классические правила булевой алгебры расширяются до правил унитарной эволюции регистров квантовых битов. Оказывается, что любая логическая операция над кубитом может быть осуществлена путем комбинации двухкубитового гейта CNOT и однокубитовых спиновых вращений

$$|\theta, \phi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle \quad (0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \phi \leq 2\pi). \quad (8)$$

Для описания унитарной эволюции кубитов в квантовом регистре в терминах потокового графа принято вводить следующие гейты.

**Вращения:**  $P(\phi) = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 1|$ .

**NOT:**  $X = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$ .

**Гейт Controlled-NOT на паре спиновых кубитов.** Первый кубит является управляющим. Состояние второго кубита изменяется в случае, если первый кубит находится в состоянии «1» ( $\uparrow$ ), и остается неизменным, если первый кубит находится в состоянии «0» ( $\downarrow$ )

Управляющий кубит	Изменяемый кубит	Результирующее состояние
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle 0\rangle$

**Гейт Адамара:** 
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} [(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|].$$

Основные последовательности комбинаций гейтов для выполнения логических операций были предложены в работах [8, 58].

Алгоритмы, которые существенно опираются на такие сугубо квантовые явления, как суперпозиция и перепутанность квантовых состояний, называют квантовыми алгоритмами. Известны два квантовых алгоритма, эффективность которых качественно превосходит эффективность соответствующих классических алгоритмов.

Первый из них — это предложенный П.Шором алгоритм факторизации больших чисел, основанный на квантовом преобразовании Фурье [9]. Шор предложил алгоритм факторизации  $l$ -значных чисел за время, пропорциональное  $O(l^2 \log l \log \log l)$ , т. е. за время, *полиномиальное* по длине данных [53]. На классическом компьютере задача факторизации больших чисел является экспоненциально сложной — время вычислений пропорционально экспоненте от размера данных:  $\exp(ct^{1/3}(\log l)^{2/3})$  [10]. Практическая важность этих алгоритмов состоит в том, что факторизация больших чисел — это основа криптографии.

Вторым известным квантовым алгоритмом является алгоритм поиска записи в неупорядоченной базе данных, предложенный Л. Гровером [21]. Операция поиска в неупорядоченной базе данных длиной  $l$  определенной записи, например номера телефона, требует на классическом компьютере в среднем  $l/2$  шагов. Алгоритм Гровера, использующий квантовый компьютер, находит заданную запись за  $O(\sqrt{l})$  шагов. Алгоритм Гровера основан на применении спинорных вращений и инверсий к линейной квантовой суперпозиции всех имеющихся в базе записей, так что постепенно увеличивается амплитуда искомой записи.

Алгоритмам квантовых вычислений, основанных на квантовых схемах, или «квантовых сетях», состоящих из квантовых гейтов, посвящена обширная литература, см., например, [56] и ссылки там. Эти алгоритмы, однако, эффективны лишь для достаточно специального класса задач: ими не исчерпываются все возможности применения законов квантовой механики к обработке информации. Как было подчеркнуто еще Фейнманом, модельные квантовые системы можно напрямую использовать для моделирования поведения других квантовых систем [20]. В качестве моделирующей системы можно использовать, например, атомы, захваченные в оптических решетках, или спиновые стекла.

Преимущество такого моделирования состоит в том, что эволюция модельной квантовой системы является бездиссипативной и обратимой. Такие модели можно использовать для нахождения минимума достаточно сложной функции многих переменных: модельная квантовая система эволюционирует к искомому основному состоянию, обладающему минимальной энергией. При этом (в отличие от процедуры поиска минимума на классическом компьютере) возможно прямое квантовое туннелирование из начального состояния в состояние с минимальной энергией. Такой способ поиска минимума функции является, очевидно, не алгоритмическим. Одна из его реализаций — квантовые нейронные сети.

Введение в вычислительные устройства или, точнее, в системы искусственного интеллекта *неалгоритмических* методов требует расширения самого понятия квантовых вычислений. Обычное определение квантового вычисления как вычисления, требующего для своего выполнения квантового компьютера [56], неприменимо для квантовых вычислительных устройств нейросетевого типа. В работе [7] было предложено определение *не-суперпозиционных квантовых вычислений* как вычислений, использующих стандартную вычислительную архитектуру и реально создающих суперпозицию квантовых состояний, но не использующих ее для получения квантового параллелизма тем способом, которым используют ее существенно квантовые алгоритмы, например, алгоритм Шора.

По нашему мнению, такое определение хотя и верно по существу, но неудачно по форме. *Вполне достаточно было бы определить квантовые вычисления как вычисления, использующие суперпозицию квантовых состояний.* При этом нет необходимости указывать, как именно используется суперпозиция состояний и используется ли при вычислениях перепутывание состояний. Под такое определение попали бы и стандартные алгоритмы Гровера и Шора, и функционирование квантовых нейронных сетей, в которых существенно взаимодействие с окружением, а суперпозиция состояний может существовать лишь ограниченное время. Кроме того, данное определение, по-видимому, подходит и для обработки информации биологическими системами [23].

### 3. КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ С УЧИТЕЛЕМ

Ключевым элементом функционирования нейронных сетей, как классических, так и квантовых, является *процесс обучения*. Различают обучение с учителем и обучение путем самоорганизации. В основе обучения с учителем лежит *намеренное* сопоставление каждому входному вектору из обучающей выборки желаемого вектора результата. При этом производится настройка (весов) сети — последовательность действий, направленная на то, чтобы при каждом предъявлении сети вектора из обучающей выборки выходной вектор был максимально близок к вектору желаемого результата. В известных моделях квантовых нейронных сетей процедура настройки сети состоит из последовательности классических операций измерения и приготовления состояний. Вопрос о том, может ли настройка сети производиться на чисто квантовом уровне, связан с ролью сознания в квантовой механике и пока является открытым [23, 74].

Идея создания искусственной квантовой нейронной сети, впервые предложенная в работе [34], состоит в замене классических сигналов, поступающих на вход нейрона, на квантовые состояния, обладающие амплитудой и фазой. В этом смысле, т. е. без учета нелинейных эффектов, квантовые нейронные сети идентичны оптическим нейронным сетям [52]. При этом на выходе нейрона также должно формироваться квантовое состояние, зависящее от линейной суперпозиции входящих состояний. Веса в случае квантовой нейронной сети являются комплексными числами (которые изменяются в процессе обучения сети), так что каждое входное квантовое состояние не только взвешивается по амплитуде, но и сдвигается по фазе. Использование квантовых состояний для описания работы нейрона уже само по себе биологически мотивировано: процесс возбуждения биологического нейрона непосредственно связан с квантовым туннелированием ионов внутрь нейрона [5].

Использование фазы сигнала в нейросетевых моделях является красивой математической находкой и связано с обобщением метода обратного распространения ошибки, используемого для обучения обычного классического перцептрона, на нейронные сети с комплексными весовыми коэффициентами [46]. Тем не менее фазовый множитель может влиять и на вероятность подбарьерного туннелирования ионов в некоторых моделях биологических нейронов [3]. Следует отметить, что идея того, что именно фазовые соотношения между квантово-механическими волновыми функциями отдельных элементов нервных волокон лежат в основе работы мозга человека, была впервые высказана в работах В. Чавчанидзе [75], задолго до появления самой концепции квантовых вычислений.

В отсутствие взаимодействия с окружением отличие квантовой модели нейрона от классической состоит в отсутствии нелинейной сигмоидной функции на выходе нейрона (2): в силу линейности квантовой механики линейная

суперпозиция входных сигналов может быть подвергнута лишь *линейному* преобразованию

$$|u_k\rangle = \sum_{j=1}^N \hat{w}_{kj} |x_j\rangle, \quad |y_k\rangle = \hat{F}|u_k\rangle. \quad (9)$$

Строго говоря, дело обстоит более сложным образом: появление конкретного выходного состояния связано не только с унитарной эволюцией внутри сети, но и с *актом измерения*, в результате которого происходит редукция квантовой суперпозиции состояний к одному конкретному состоянию. В общем случае следует также принять во внимание неконтролируемое взаимодействие сети с флуктуирующим окружением. Без процессов приготовления/измерения состояний и процесса воздействия окружения на весовые множители нарушение унитарности в квантовой сети с учителем невозможно. Нелинейность же вызывается именно этими процессами. По этой причине квантовые нейронные сети часто называют *квантово-инспирированными* сетями [42] — это отличает их от сетей Дейча, представляющих собой сети квантовых гейтов [14].

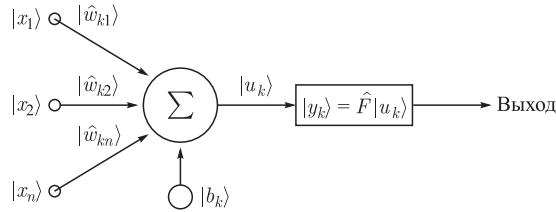


Рис. 4. Блок-схема квантового нейрона

Рассмотрим процесс обучения нейронной сети, состоящей из одного квантового нейрона, изображенного на рис. 4. Пусть фиксирован нейрон с номером  $k = 1$ . Предположим также, что отсутствует модификация выходного сигнала:  $\hat{F} = \hat{1}$ . Тогда при подаче на  $n$  входов нейрона вектора  $\{|x_j\rangle\}_{0 < j \leq n}$ , состоящего из  $n$  квантовых состояний, на выходе нейрона в дискретный момент времени  $t$  сформируется состояние

$$|y(t)\rangle = \sum_{j=1}^n \hat{w}_j |x_j\rangle.$$

По аналогии с классическим перцептроном используем для обучения квантового нейрона сигнал ошибки

$$|e(t)\rangle = |d\rangle - |y(t)\rangle,$$

где  $|d\rangle$  — желаемое выходное состояние для входного вектора  $\{|x_j\rangle\}_{0 < j \leq n}$ . Тогда изменение весов к следующей  $(t + 1)$  эпохе обучения, согласно правилу

Видроу–Хоффа, составит [2]

$$\hat{w}_j(t+1) = \hat{w}_j(t) + \eta (|d\rangle - |y(t)\rangle) \langle x_j|. \quad (10)$$

Если скорость обучения достаточно мала:

$$0 < \eta < \frac{1}{n},$$

то правило обучения (10) в пределе продолжающихся итераций  $t \rightarrow t+1$  приводит к сходимости выходного состояния  $|y(t \rightarrow \infty)\rangle$  и желаемому результату

$$\| |d\rangle - |y(t+1)\rangle \|^2 = \left\| |d\rangle - \sum_{j=1}^n \hat{w}_j(t+1) |x_j\rangle \right\|^2 = (1 - n\eta)^2 \| |d\rangle - |y(t)\rangle \|^2. \quad (11)$$

Входящие состояния предполагаются нормированными  $\langle x_j | x_j \rangle = 1$ .

Таким образом, процесс обучения квантового нейрона (9), как и его классического прототипа, сводится к следующей последовательности операций:

1) задается обучающая выборка из  $M$  векторов, т.е. набор, состоящий из векторов  $(|x_1^j\rangle, \dots, |x_n^j\rangle)$ , и соответствующее ему состояние желаемого результата  $|d^j\rangle$ ,  $j = \overline{1, M}$ ;

2) случайным образом генерируются матрицы весов  $\hat{w}_k$ ;

3) проводится цикл обучения:

```

for j = 1 to M do
  for t = 0 to Tmax do
    получение выходного состояния
    y(t) = F sum_k w_k(t) | x_k >
    вычисление ошибки для каждого из векторов обучающей
    выборки
    |e(t)> = |y(t)> - |d>
    коррекция весов
    w_k(t+1) = w_k(t) + eta * |e(t)><x_k|
  end do;
  переход к следующему вектору обучающей выборки
end do;

```

К сожалению, в силу линейности оператора  $\hat{F}$  сама по себе данная схема не является эффективной. Для обучения квантового перцептрона приходится использовать ее модификации, включающие модель измерительной процедуры.



Простейшая модель такого типа была предложена в работе [67]. Модель основана на так называемой кубитовой нейронной сети [49]. С каждым кубитом  $|x\rangle$ , изображаемым на сфере Блоха (8) парой углов  $(\theta, \phi)$ , связывается фазовая функция

$$f(\phi) = e^{i\phi},$$

так что интерференция между двумя состояниями кубита определяется лишь одним фазовым углом

$$|\psi\rangle = \cos \phi |0\rangle + i \sin \phi |1\rangle.$$

Действие весовых множителей  $\hat{w}_k$  сводится к сдвигу фазы  $\hat{w}_k = e^{i\theta_k}$ , а нелинейная сигмоидная функция используется для стабилизации фазы вблизи некоторого значения. Сети такого типа превосходят по эффективности обычные классические нейронные сети для целого ряда тестовых задач [36, 49].

Для численного моделирования на классическом компьютере фазы входных сигналов удобно выбрать на интервале  $(0, \pi/2)$ . Тогда на выходе квантового нейрона имеем

$$u = \sum_{k=1}^n e^{i\frac{\pi}{2}x_k} e^{i\theta_k} - e^{i\lambda}, \quad (12)$$

где  $0 \leq x_k < 1$ .

Нелинейность отклика нейрона на линейную суперпозицию входных сигналов вводится посредством выделения фазового множителя из комплексной амплитуды  $u$  [35, 49]:

$$y = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + e^{-\sigma}} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(u)}{\operatorname{Re}(u)}, \quad (13)$$

где весовой множитель  $\sigma$ , как и фазовые множители  $\theta_k$  и  $\lambda$ , генерируется случайным образом перед началом обучения. Вещественная фаза  $y$  используется для генерации одного из двух возможных квантовых состояний на выходе нейрона. В соответствии со значением  $y$  с вероятностью  $\cos^2 y$  генерируется состояние  $|0\rangle$ , а с вероятностью  $\sin^2 y$  — состояние  $|1\rangle$ . Блок-схема обучения квантового нейрона приведена на рис. 5.

Подстройка весов при обучении квантового нейрона в работе [67] производится по правилу

$$\begin{aligned} \theta_k^{(t+1)} &= \theta_k^{(t)} + \eta \cdot \operatorname{error} \cdot x_k, \\ \lambda^{(t+1)} &= \lambda^{(t)} + \eta \cdot \operatorname{error} \cdot \|x\|, \\ \sigma^{(t+1)} &= \sigma^{(t)} + \eta \cdot \operatorname{error} \cdot \|x\|, \end{aligned} \quad (14)$$

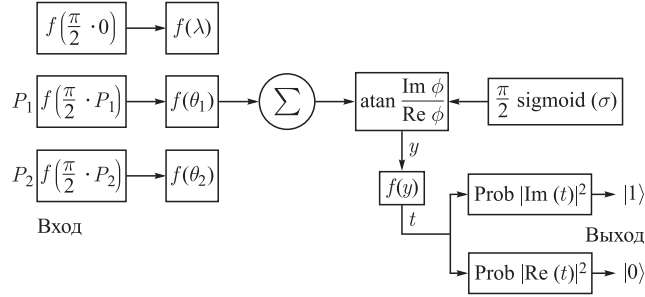


Рис. 5. Схема обучения квантового перцептрона с вероятностным выходом, приведенного в работе [67]

где  $\|x\|$  — подходящая норма вектора входных состояний, например евклидова норма  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$ , или  $\|x\| = \max_k |x_k|$ .

Правило обучения (14), по-видимому, не является оптимальным. Хотя вероятность генерации квантовых состояний на выходе нейрона не является непосредственно наблюдаемой величиной, значение выходной переменной  $z = \text{Im } t$  может рассматриваться как выход комплекснозначной классической сети, к которой применим метод обратного распространения ошибки. Поскольку переменная  $|z|$  принимает значения в интервале  $(0, 1)$ , такой метод подходит, например, для обработки черно-белых изображений [36]. Процесс обучения нейрона при этом сводится к изменению параметров  $(\theta_1, \dots, \theta_m, \lambda)$  против градиента энергии ошибки:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{samples}}} (z_k - d_k)^2, \quad (15)$$

так что

$$\begin{aligned} \theta_k^{(n+1)} &= \theta_k^{(n)} - \eta \frac{\partial E}{\partial \theta_k}, \\ \lambda^{(n+1)} &= \lambda^{(n)} - \eta \frac{\partial E}{\partial \lambda}, \\ \sigma^{(n+1)} &= \sigma^{(n)} - \eta \frac{\partial E}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (16)$$

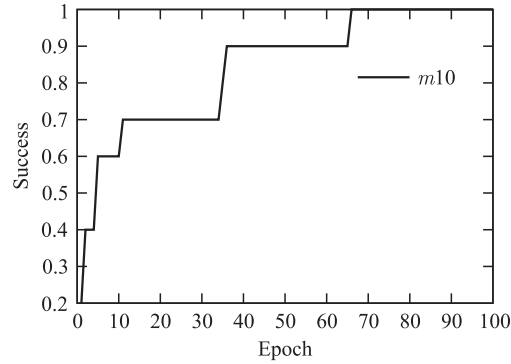


Рис. 6. Обучение нейрона (13) в задаче разделения точек квадрата  $[0, 1]^2$  на два класса относительно диагонали  $x = y$ . Скорость обучения  $\eta = 0,1$ . Начальные значения фаз  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ ,  $\lambda = 1,7$ ,  $\sigma = 0,2$ . Использована обучающая выборка из 10 случайных векторов

где зависимость  $z = z(\theta_k, \lambda, \dots)$  определяется формулами (12) и (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \theta_k} &= - \sum_{m=1}^{N_{\text{samples}}} (\sin(y_m) - d_m) \cos(y_m) \frac{1}{\xi^2 + 1} \frac{\partial \xi_m}{\partial \theta_k}, \\ \frac{\partial E}{\partial \lambda} &= - \sum_{m=1}^{N_{\text{samples}}} (\sin(y_m) - d_m) \cos(y_m) \frac{1}{\xi^2 + 1} \frac{\partial \xi_m}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial E}{\partial \sigma} &= \sum_{m=1}^{N_{\text{samples}}} (\sin(y_m) - d_m) \cos(y_m) \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\sigma}}{(1 + e^{-\sigma})^2}, \\ \xi_m &= \frac{\text{Im } u_m}{\text{Re } u_m} = \frac{\sum_k \sin\left(\frac{\pi}{2} x_k^m + \theta_k\right) - \sin \lambda}{\sum_k \cos\left(\frac{\pi}{2} x_k^m + \theta_k\right) - \cos \lambda}. \end{aligned} \quad (17)$$

График эффективности обучения одного нейрона в задаче линейного разделения квадрата  $(0, 1) \times (0, 1)$  на два класса относительно диагонали  $x = y$  на основе выборки из 10 случайных векторов приведен на рис. 6.

#### 4. КВАНТОВО-ИНСПИРИРОВАННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

В 1995 г. Т. Меннер и А. Нарайанан предложили гипотетическую нейронную сеть, которую они назвали *квантово-инспирированной* нейронной сетью [42]. Идея Меннера и Нарайанана, основанная на многомировой интерпретации квантовой механики [17], состояла в том, что вместо обучения

одной и той же нейронной сети на наборе векторов обучающей выборки можно рассмотреть ансамбль нейронных сетей, равный по мощности обучающей выборке. При этом каждая ИНС в ансамбле обучается только на одном векторе из обучающей выборки. Результирующая нейронная сеть строится таким образом, что все ее веса представляют собой квантовую суперпозицию весов отдельных сетей. Все нейронные сети, входящие в ансамбль, имеют одинаковую топологию и отличаются друг от друга лишь значениями весов [42].

На основе представления о квантовой нейронной сети как о квантовой суперпозиции нескольких классических сетей Д. Вентура и Т. Мартинец [59] предложили модель квантового нейрона для ИКНС со ступенчатой активационной функцией

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \sum_{j=1}^n w_j x_j > \theta, \\ -1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

веса которого,  $w_j$ , определяются квантово-механической волновой функцией  $\Psi(w)$ , так что плотность вероятности значений весов определяется квадратом модуля волновой функции  $p(w_1, \dots, w_n) = |\psi(w_1, \dots, w_n)|^2$ . Настройку весов такого гипотетического нейрона можно было бы производить, подбирая потенциал  $U(w)$  для уравнения Шредингера в  $n$ -мерном потенциальном ящике

$$\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(w) = (U(w) - E) \Psi(w), \quad -\pi \leq w_j \leq \pi.$$

К квантово-инспирированным нейронным сетям, являющимся в то же время квантовыми вычислительными сетями в смысле Дейча, следует отнести также безвесовые квантовые сети [11], представляющие собой сеть из квантовых гейтов, в каждом из которых введен дополнительный вход — селектор, от квантового состояния которого зависит выходное состояние гейта. Простейшим примером гейта с селектором является CNOT. Обучаемыми параметрами в безвесовой сети являются состояния селекторов — веса в обычном смысле отсутствуют. Безвесовая сеть таким образом является линейной. Варианты безвесовой сети предлагались в качестве элементов квантовой памяти [12].

Гейты с селектором могут также использоваться в других квантовых нейронных сетях, как унитарных [22], так и взаимодействующих с окружением. Утверждается [27], что моделирование последних даже на классическом компьютере приводит к большей производительности, чем у классической искусственной нейронной сети.

К сожалению, в данном обзоре мы не смогли отразить все аспекты бурно развивающейся тематики квантовых нейронных сетей. Полезным в этом отношении является библиографический обзор [39].

## 5. АССОЦИАТИВНАЯ ПАМЯТЬ И ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЕ СЕТИ

Ассоциативная память — существенная часть теории нейронных сетей. Задачей ассоциативной памяти является запись информации в нейронную сеть с помощью модификации весов. При подаче на вход нового вектора (изображения), не предъявлявшегося сети ранее, выдается вектор из обучающей выборки, наиболее близкий к предъявляемому. Для построения ассоциативной памяти часто используют сети Хопфилда [73].

Ассоциативная память может быть использована, например, для хранения и классификации изображений. Изображение размером  $m \times n$  может быть представлено в виде строки из  $m \times n$  изинговских спинов, каждый из которых может находиться в одном из двух состояний  $\xi = \pm 1$ . Тогда каждому изображению можно сопоставить матрицу связей  $J_{ij}$ , реализующую минимум функционала энергии

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \xi_i \xi_j$$

именно для этого конкретного изображения. Это так называемая сеть Хопфилда [26].

При необходимости запомнить  $n$  изображений в качестве матрицы Хебба можно выбрать корреляционную функцию

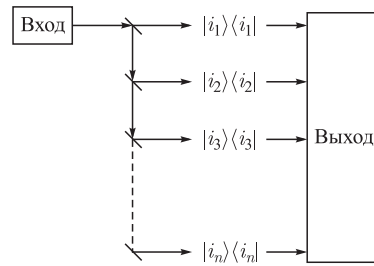
$$J_{ij} = \sum_{l=1}^n \xi_i^{(l)} \xi_j^{(l)}. \quad (18)$$

Переход от классических битов к квантовым битам превращает матрицу Хебба в проекционный оператор

$$\hat{J} = \sum_{i=1}^n |i\rangle \langle i|. \quad (19)$$

Использование квантовой интерференции открывает огромные возможности для хранения информации в виде состояний квантовой нейронной сети, подобно тому как квантовая интерференция позволяет осуществить аппаратную реализацию поиска в неупорядоченной базе данных согласно алгоритму Гровера [21, 57]. Идея использовать квантовую интерференцию для создания устройств квантовой памяти была предложена в работе А. Власова [62]. Согласно [62], для того чтобы неизвестное изображение  $|\chi\rangle$  могло быть отнесено к одному из имеющихся  $n$  классов изображений, достаточно ввести набор проекционных операторов  $P_i = |i\rangle \langle i|$ , отвечающих этим изображениям. Неизвестное изображение  $|\chi\rangle$  должно быть отнесено к тому классу, для которого величина проекции  $|\langle i|\chi\rangle|^2$  максимальна. Такая база данных может

Рис. 7. Реализация квантовой ассоциативной памяти на основе оптической интерференции (схема из работы [62]). Входной сигнал — квантовое состояние  $|\chi\rangle$ , которое необходимо отнести к одному из  $n$  классов, — расщепляется с помощью системы полупрозрачных зеркал на  $n$  каналов, в которых установлены проекционные фильтры  $P_i = |i\rangle\langle i|$ . Отнесение изображения к одному из классов производится по максимуму выходной интенсивности светового потока  $I_i = (I_0/n)|\langle\chi|i\rangle|^2$



быть реализована, например, в виде набора оптических фильтров, см. рис. 7. В 2000 г. Д. Вентура и Т. Мартинец использовали квантовую нейронную сеть в качестве устройства ассоциативной памяти [60], а А.Ежов с соавторами предложили модель ассоциативной квантовой памяти с распределенными запросами [18].

К идеям А. Власова достаточно близко примыкает другая модель квантовой нейронной сети — прямоточная квантовая нейронная сеть, предложенная в работе Крисли [7]. Каждый слой нейронной сети Крисли представляет собой управляемую дифракционную решетку. Комплексные коэффициенты пропускания каждой щели играют роль весов в такой сети. Выходным сигналом является интерференционная картина, создаваемая на экране выходным слоем сети.

## 6. КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССОРЫ D-WAVE SYSTEMS INC.

Основной проблемой, стоящей на пути создания практически приемлемого квантового компьютера с регистром более чем в сотни кубитов, является декогерентность. Архитектура квантового компьютера, основанного на сетевых идеях Дейча и Джозса [14, 16] и пригодного для практического воплощения, должна допускать *масштабируемость*. Созданию масштабируемого квантового компьютера мешает неконтролируемое взаимодействие кубитов с окружением, а в случае твердотельного исполнения вследствие малых размеров элементной базы — и практическая невозможность адресации к отдельным кубитам без возмущения соседних. В качестве физической реализации кубитов в различных экспериментах использовались различные элементы: атомы и ионы в ловушках, квантовые точки, ядерный магнитный резонанс в жидкости, оптические сети [56]. Во всех случаях время декогеренции уменьшалось с увеличением числа кубитов.

Решение проблемы декогерентности для создания масштабируемого квантового процессора было найдено компанией D-wave Systems Inc. за счет ограничения класса задач, доступных данному процессору. Вместо произвольной квантовой схемы, отображающей состояние  $N$  входных кубитов в состояние  $M$  выходных кубитов через сеть квантовых гейтов, было предложено ограничить класс решаемых задач задачей минимизации энергии системы  $N$  спинов в модели Изинга с гамильтонианом

$$H_P = - \sum_{i=1}^N h_i \sigma_i^z + \sum_{i,j=1}^n J_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (20)$$

где  $\sigma_i^z$  — матрица Паули, задающая проекцию  $i$ -го «спина» — магнитного потока в SQUID — на ось  $z$ , а  $J_{ij}$  — матрица констант связи, задаваемая пользователем [33]. Построенный для этой цели процессор не является квантовым компьютером в смысле Черча–Тьюринга–Дойча [15], но позволяет эффективно решать задачи минимизации за счет квантового параллелизма, а это весьма существенно для систем искусственного интеллекта [54].

В классическом пределе система спинов с гамильтонианом (20) представляет собой нейронную сеть Хопфилда. Время, необходимое для приведения такой системы в состояние с минимальной энергией с помощью различных методов (Монте-Карло, отжига или градиентного спуска), для произвольной матрицы  $J_{ij}$  экспоненциально растет с размером данных.

Для квантовой системы спинов существует альтернативный способ перехода системы в состояние с минимальной энергией — это прямое квантовое туннелирование. Сложность технической реализации такого перехода для больших квантовых систем ( $N \gg 2$ ) связана со сложностью рельефа функции (20) и небольшим временем жизни когерентных состояний, будь они реализованы на электронных или ядерных спинах.

Решением проблемы декогерентности стало использование сверхпроводящих потоковых кубитов на основе SQUID [38,64]. Кольцевой ток в сверхпроводящей петле, разделенной джозефсоновским контактом, порождает существование квантованного магнитного потока в направлении вверх или вниз, в зависимости от направления тока. Квантовые состояния магнитного потока описываются теми же правилами суперпозиции  $|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ , что и состояния отдельных спинов, а время жизни когерентных состояний существенно выше. Константы связи  $J_{ij}$  могут быть подобраны с помощью организации индуктивных связей между отдельными кубитами [33].

Поскольку сверхпроводящий кубит на основе SQUID имеет классические размеры (от микрометров до миллиметров), а вероятность самопроизвольного изменения направления магнитного потока на противоположное исчезающе мала, система кубитов на основе SQUID с индуктивными связями является надежной реализацией масштабируемого квантового регистра. Для приведения

такого регистра в основное состояние используют метод квантового отжига, сочетающий в себе обычный метод отжига и квантовое туннелирование [40].

Если вероятность перехода через потенциальный барьер высотой  $\Delta E$  для классического метода отжига пропорциональна  $e^{-\Delta E/T}$ , то для квантового отжига вероятность прохождения барьера высотой  $\Delta E$  и шириной  $L$  пропорциональна  $e^{-L\sqrt{\Delta E}/\Gamma}$ , где  $\Gamma$  — постоянная квантового отжига. Это означает, что алгоритм квантового отжига будет превосходить по эффективности алгоритм классического отжига для барьеров, обладающих большой высотой, но малой шириной [13]. Доказательство фактической эквивалентности метода квантового отжига и обычного сетевого квантового компьютеринга было дано в работе [44].

Практическая реализация метода квантового отжига для гамильтониана (20) заключается в следующем. Перпендикулярно к магнитному полю  $h_z$ , в направлении которого производится измерение проекций спинов в конечном состоянии, включается дополнительное магнитное поле в направлении  $x$ , величина которого монотонно убывает со временем. Результирующий гамильтониан системы взаимодействующих спинов в магнитном поле приобретает вид

$$\mathcal{H}(t) = -\Gamma(t) \sum_{i=1}^n \Delta_i \sigma_i^x + \Lambda(t) H_P, \quad (21)$$

где  $\Gamma(t)$  монотонно убывает со временем от 1 до 0, а  $\Lambda(t)$  возрастает от 0 до 1. В начальный момент времени  $t = 0$ ,  $\Lambda(0) = 0$ , основным состоянием системы является ориентация всех спинов вдоль оси  $X$ . При достаточно медленном уменьшении  $\Gamma(t)$  с одновременным увеличением  $\Lambda(t)$  система спинов адиабатически переходит в основное состояние гамильтониана  $H_P$  [19].

Минимизация энергии в системе из  $N$  спинов с гамильтонианом (21) с квантово-механической точки зрения означает решение уравнение Шредингера в базисе

$$|z\rangle = |z_1\rangle \otimes \dots \otimes |z_N\rangle, \quad z_i = \{0, 1\}, \quad (22)$$

имеющем размерность  $2^N$ . Так, для пары кубитов матричные элементы гамильтониана (21) имеют вид

$$H_2 = \begin{pmatrix} \Lambda(t)(-h_1 + h_2 + J_{12}) & -\Gamma(t)\Delta_2 & -\Gamma(t)\Delta_1 & 0 \\ -\Gamma(t)\Delta_2 & \Lambda(t)(-h_1 + h_2 - J_{12}) & 0 & -\Gamma(t)\Delta_1 \\ -\Gamma(t)\Delta_1 & 0 & \Lambda(t)(h_1 - h_2 - J_{12}) & -\Gamma(t)\Delta_2 \\ 0 & -\Gamma(t)\Delta_1 & -\Gamma(t)\Delta_2 & \Lambda(t)(h_1 + h_2 + J_{12}) \end{pmatrix}$$



в базисе

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Если в начальный момент времени  $t = 0$  гамильтониан (21) обладал системой из  $2^N$  собственных функций  $|\Phi_n(0)\rangle$ , отвечающих набору собственных значений  $\lambda_n(0)$ , то при адиабатической эволюции можно говорить о диффеоморфизме начального гамильтониана  $H(0)$  в мгновенный гамильтониан  $H(t)$  и о соответствующей деформации собственных функций

$$H(t)|\Phi_n(t)\rangle = \lambda_n(t)|\Phi_n(t)\rangle, \quad n = \overline{0, 2^N - 1}. \quad (23)$$

Условием адиабатичности является малость скорости изменения гамильтониана по сравнению с разностью энергий основного и первого возбужденного состояний

$$|\langle \Phi_0(t) | \dot{H}(t) | \Phi_1(t) \rangle| \ll \frac{|\lambda_1(t) - \lambda_0(t)|}{\hbar}. \quad (24)$$

Таким образом, критическим параметром, определяющим время решения задачи методом квантового отжига, является разность энергий основного и первого возбужденного состояния системы. В силу того, что размерность матрицы гамильтониана растет как  $2^N$  с ростом числа кубитов, проверить эффективность квантового отжига на классическом компьютере удастся лишь для регистра из нескольких квантовых битов. Теоретический анализ вычислительной сложности таких задач для больших значений  $N$  до сих пор не выполнен. Экспериментальные оценки показывают, что алгоритм квантового отжига может на один-три порядка превосходить по скорости алгоритм классического отжига [1].

Условие адиабатичности (24) накладывает ограничение на полное время вычислений, т. е. время  $T$ , за которое основное состояние гамильтониана  $H_D = \sum_{i=1}^N \Delta_i \sigma_i^x$  перейдет в искомое основное состояние гамильтониана  $H_P$  [54]:

$$T \gg \tau_{\max} = \frac{\hbar V}{g_{\min}^2}, \quad g_{\min} = \min_{t \in (0, T)} |\lambda_1(t) - \lambda_0(t)|, \quad V = \max_{t \in (0, T)} |\langle \Phi_0 | H_D | \Phi_1 \rangle|. \quad (25)$$

Величина  $V$  в числителе (25) растет линейно с ростом числа кубитов. Таким образом, вычислительная сложность задачи определяется обратным квадратом разности энергий основного состояния и энергии первого возбужденного состояния.

К настоящему времени компанией D-wave Systems Inc. выпущены две модели квантовых компьютеров, работающих по методу квантового отжига. Это 128-кубитовый компьютер D-wave One («Rainier») и 512-кубитовый компьютер D-wave Two («Vesuvius»). Массивы кубитов выполнены по стандартной полупроводниковой технологии. Микросхемы охлаждаются до температуры 20 мК, при которой работают эффекты квантового туннелирования, с помощью системы жидкостного охлаждения. Регистр кубитов компьютера D-wave One реализован в виде массива из  $4 \times 4$  ячеек, каждая из которых содержит 8 кубитов на SQUID. Компьютер D-wave Two, соответственно, содержит в четыре раза больше ячеек.

Процессоры D-wave One и D-wave Two выполнены по стандартной технологии на основе контуров из сверхпроводящего металла. Отличительной чертой таких контуров является полное отсутствие электрического сопротивления при работе в штатном режиме ниже критической температуры сверхпроводящего перехода. Для максимального исключения различных потерь и источников декогерентности все возможные детали интегральных схем и соединения между ними также выполнены из сверхпроводника. Практически все потребление энергии ( $\sim 7,5$  кВт) приходится на систему охлаждения. В процессоре D-wave One на плате имеются резисторы, суммарные тепловые потери которых составляют не более 1 нВт. Процессор D-wave Two резисторов не содержит, и суммарные потери на плате составляют несколько фемтоватт, а на потери, связанные с квантово-электродинамическими эффектами (фотонный обмен между сверхпроводящими кубитами и с окружающей средой), приходится порядка 4 аВт.

Результаты сравнения эффективности квантовых процессоров D-wave по отношению к расчетам на классическом компьютере приведены в работе [28]. Некоторые последние данные и результаты сравнения вычислений, проведенных на процессоре D-wave Two, приведены в работе [50].

## 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ САМООРГАНИЗУЮЩИХСЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫМ УРАВНЕНИЕМ ШРЕДИНГЕРА

Связь квантово-механического уравнения Шредингера с классическим уравнением диффузии (последнее получается из первого заменой  $t \rightarrow it$ ) давно и широко используется в различных областях физики. Относительно недавно эта идея была также использована для построения *континуальной* модели нейронной сети [6]. Континуальная модель нейронной сети привлекательна в тех случаях, когда и число нейронов, и число связей между ними достаточно велики, так что вместо номера нейрона можно использовать его координаты на некотором непрерывном многообразии, а весовые множители определяют корреляции между функциями поля в различных точках этого

многообразия. Такая модель, например, может быть использована для описания поведения толпы, когда поведение каждого индивида определяется как его локальным окружением, так и историей персонального обучения [30,31].

С другой стороны, использование нелинейного уравнения Шредингера привлекательно и для описания динамики мозга как такового [75,61]. Число нейронов мозга человека составляет  $\sim 8,6 \cdot 10^{10}$ , так что при характерном размере порядка нескольких сантиметров можно считать, что каждый нейрон находится в эффективном поле других нейронов, а динамика его возбуждения определяется процессами квантового туннелирования [5,4].

Непосредственный толчок к использованию нелинейного уравнения Шредингера для описания реальной нейронной сети дала работа [6], представившая модель коллективного отклика нейронов зрительной коры головного мозга на движение видимого объекта. Уравнение Шредингера, выписанное в этой работе, предполагает, что на пространственно распределенной нейронной сети мозга происходит эмуляция реально наблюдаемой траектории объекта  $y(t)$  квантовым волновым пакетом, описываемым волновой функцией  $\psi(t, x)$ , так что предсказываемое нейронной сетью положение центра масс волнового пакета

$$\hat{y}(t) = \int x |\psi(t, x)|^2 d^d x$$

должно оптимальным образом приближаться к реально наблюдаемому решению  $y(t)$ . Для случая непрерывно распределенной нейронной сети это обеспечивается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) + \zeta G(y(t) - \hat{y}(t)) \psi(t, x), \quad (26)$$

где  $G(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) / (2\pi)^{d/2} \sigma$ ;  $\sigma, \zeta$  — оптимизируемые параметры.

В наиболее общем виде построение континуальной нейронной сети на основе нелинейного уравнения Шредингера состоит в следующем [30]. Предположим, что в одной и той же области пространства  $M \subset \mathbb{R}^d$  действуют  $n$  видов различных агентов, поведение которых описывается волновыми функциями  $\psi_i(x)$ , так что плотность вероятности появления агента типа  $i$  в окрестности точки  $x \in M$  есть  $|\psi_i(x)|^2$ .

В терминах теории игр  $i \in \{\text{RED}, \text{BLUE}, \dots, n\}$ , так что при  $n = 2$  имеем игру между красными и голубыми.

Взаимодействие всех видов агентов между собой описывается системой нелинейных уравнений Шредингера

$$i \frac{\partial \psi_i(t, x)}{\partial t} = -D[\psi] \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + V U_i[\psi] \psi_i(t, x), \quad (27)$$

где в существующих моделях [30, 31]

$$U_i[\psi] = |\psi_i(t, x)|^2,$$

$D[\psi]$  — зависящий от амплитуды  $\psi$  коэффициент диффузии. С каждым видом агентов связана его игровая память  $\omega_i$ , подчиняющаяся правилу обучения Хебба [30]

$$\dot{\omega}_i = -\omega_i + c_H \max_{x, k \neq i} |\psi_k(t, x)| g_i(x) |\psi_l(t, x)|, \quad (28)$$

где

$$g_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left[ -\frac{(x - \bar{x}_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

— набор базисных гауссианов, центрированных вокруг центра масс распределения агента  $i$ -го типа

$$\bar{x}_i = \frac{\int \bar{\psi}_i(t, x) x \psi_i(t, x) dx}{\int \bar{\psi}_i(t, x) \psi_i(t, x) dx}. \quad (29)$$

Нелинейный потенциал взаимодействия определяется памятью агентов

$$V(t, x, \omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i g_i(x). \quad (30)$$

Параметр  $c_H$  задает скорость обучения сети. Параметры  $\sigma_i$  задают характерные масштабы длин.

Простейшим примером такой системы является моделирование бинарной системы  $n = 2$ , т.е. системы, состоящей из агентов двух типов, например голубых (B) и красных (R), когда рассеяние определяется концентрацией агентов противоположного типа, а нелинейное взаимодействие растет как произведение куба модуля волновой функции агентов своего типа на потенциал (30), определяемый памятью системы. Дифференциальные уравнения, описывающие динамику такой системы, имеют вид [30]

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi_B(t, x)}{\partial t} &= -\frac{a_B}{2} |\psi_R|^2 \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial x^2} + V |\psi_B|^2 \psi_B(t, x), \\ i \frac{\partial \psi_R(t, x)}{\partial t} &= -\frac{a_R}{2} |\psi_B|^2 \frac{\partial^2 \psi_R}{\partial x^2} + V |\psi_R|^2 \psi_R(t, x), \\ \dot{\omega}_i &= -\omega_i + c_H \max_x |\psi_R| g_i |\psi_B|, \quad i = B, R. \end{aligned} \quad (31)$$

Константа взаимодействия  $V$ , зависящая от памяти агентов, по-прежнему определяется правилом (30).

Бинарные модели этого типа, предложенные в работе [30], описывают конкуренцию между двумя видами агентов в борьбе за какую-либо территорию и по смыслу напоминают уравнения типа жертва–хищник.

Ниже мы приводим результаты моделирования бинарной системы (31), проведенное по явной разностной схеме с нулевыми граничными условиями в области  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  при следующих значениях параметров:

$$a_B = a_R = 0,1, \quad c_H = 0,05,$$

на решетке  $N_x = N_y = 128$  с шагом интегрирования по времени  $\tau = 0,001$ . Начальные веса  $\omega_i(0)$  выбирались случайным образом в интервале

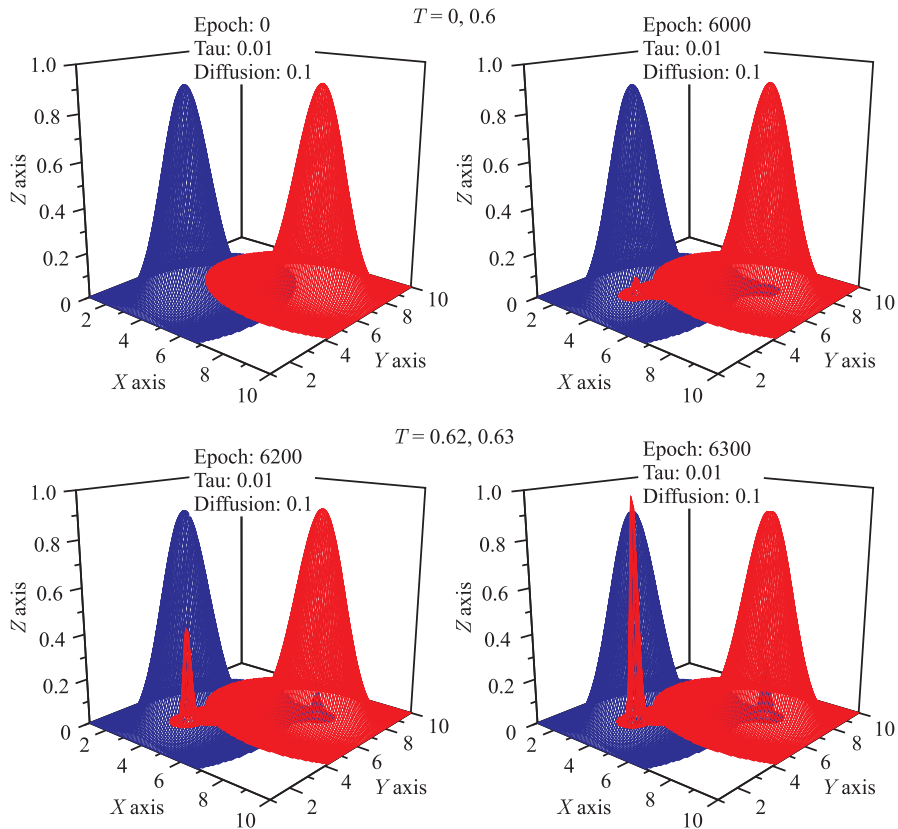


Рис. 8. Взаимное проникновение агентов двух типов. Начальное распределение агентов представляет собой гауссианы с одинаковой шириной  $(\sigma_x, \sigma_y) = (0,38, 0,50)$  и начальным положением  $(1,88, 1,88)$  и  $(4,4, 4,4)$ . При моделировании были использованы нулевые граничные условия на решетке с шагом  $\Delta x = \Delta y = 2\pi/128$

$[0, 1)$ . Поскольку система (31) имеет вид уравнений Гросса–Питаевского, в описываемой этими уравнениями динамической системе, например в динамике рассеяния толпы, можно ожидать эффектов фазового перехода типа бозе-эйнштейновской конденсации. Это характерно при описании поведения толпы при различных катастрофах [31]. Наряду с этим система нелинейных уравнений Шредингера может иметь различные солитоноподобные решения.

На рис. 8 видно, как эволюционирует начальная конфигурация из двух перекрывающихся гауссианов. За счет потенциала взаимодействия происходит эффект туннелирования волновой функции агента в область максимальной концентрации его партнера. Поскольку  $\psi_i$  представляет собой волновую функцию, модуль квадрата которой описывает распределение популяции агентов, то эффект туннелирования в такой системе — некий способ самоорганизации, направленный на получение превосходства в игре. Конечное распределение агентов в такой ситуации зависит как от случайных начальных весов  $\omega_i$ , выбранных при обучении, так и от граничных условий и начальной формы распределения. В силу нелинейности модели такого типа могут испытывать стохастическое поведение [31]. Для моделирования динамики коллектива агентов, подчиняющихся системе уравнений (31), следует провести усреднение по различным историям обучения.

## 8. КВАНТОВЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ НА КВАНТОВЫХ ТОЧКАХ

**8.1. Сеть с фононной нелинейностью.** Использование массива квантовых точек (КТ) на подложке GaAs [37, 55] в качестве квантовой нейронной сети было впервые предложено в работе Е. Берман с соавторами [47]. Идея этой работы состояла в использовании квантовых состояний одномерного массива КТ в разные моменты времени в качестве слоев квантовой нейронной сети типа перцептрон. Это фактически представляет собой дискретное отображение фейнмановского интеграла по путям в нейронную сеть. Идею можно распространить и на двумерные массивы КТ, включающие корреляционные связи между пространственно разделенными КТ. В работе [47] в качестве переключающего элемента — кубита — были предложены «молекулы», состоящие из пяти КТ, см. рис. 9. Основное состояние такой «молекулы», определяемое кулоновским отталкиванием электронов, является двукратно вырожденным вследствие дискретной симметрии. Нелинейность данной нейронной сети обеспечивается за счет взаимодействия электронов КТ с фононами подложки GaAs — тепловым резервуаром.

Такая модель, несмотря на свою элегантность, имеет ряд очевидных недостатков: (i) управление весами сети возможно только путем изменения спек-

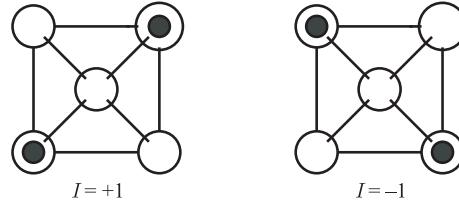


Рис. 9. Кубит на основе планарной «молекулы» из пяти квантовых точек, расположенных на подложке GaAs. Квантовые точки находятся достаточно близко друг к другу, так что возможно туннелирование электронов между соседними КТ внутри «молекулы». Кулоновское отталкивание двух избыточных электронов в симметричной «молекуле» приводит к существованию двух энергетически эквивалентных состояний, обладающих одной и той же минимальной энергией. Эти состояния, изображенные слева и справа на рисунке, можно считать состояниями кубита. Для определенности им приписаны состояния «изоспина»  $I = +1$  и  $I = -1$  соответственно. Темные кружки указывают положение избыточных электронов. Схема из статьи [47]

тра фононов в подложке, что не является устойчивым по отношению к тепловым флуктуациям; (ii) каждый слой содержит одно и то же число нейронов; (iii) различные веса в системе не являются независимыми.

Электронные состояния конфигураций, изображенных на рис. 9 слева и справа, обладают одинаковой энергией. Их можно считать двумя квантовыми состояниями кубита, связав с ними собственные значения матрицы Паули  $\sigma_z$ ,  $I = +1$  и  $I = -1$  соответственно. Нейронная сеть Берман с соавторами фактически является вариантом фейнмановской квантовой модели [20] на основе массива «молекул» КТ. Временная эволюция массива определяется взаимодействием КТ с внешними электромагнитными полями и с фононами подложки. В упрощенной модели [47], по аналогии с методом квантового отжига, предполагается, что взаимодействие с внешним электромагнитным полем зависит лишь от собственного значения оператора  $\sigma_z$ , а временная эволюция определяется оператором  $\sigma_x$ , действующим на компоненты, ортогональные к  $\sigma_z$ . Это эквивалентно модели Изинга, взаимодействующей с термостатом [40].

Если в начальный момент времени  $t = 0$  система находилась в состоянии  $|\psi_{1,\dots,N}(0)\rangle$ , то ее состояние к моменту окончания квантовой эволюции  $T$  представляется суммой по всем возможным траекториям эволюции

$$|\psi_{1,\dots,N}(T)\rangle = \sum_{\text{traject}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_j [K_i \sigma_x^i(j\Delta t) + E_i(j\Delta t) \sigma_z^i(j\Delta t)]\right) \times I[\sigma_z(t)] |\psi_{1,\dots,N}(0)\rangle, \quad (32)$$

где взаимодействие с окружением описывается членом

$$I[\sigma_z(t)] = \int \prod_k D[\alpha_k(t)] \exp \times \\ \times \left( \frac{i}{\hbar} \int_0^T d\tau \sum_k \left[ \frac{m_k \dot{\alpha}_k^2}{2} + \frac{m_k \omega_k^2 \alpha_k^2(\tau)}{2} + \lambda_k^i \alpha_k(\tau) \sigma_z^i(\tau) \right] \right),$$

в котором параметры  $\omega_k, m_k$  — частота и масса  $k$ -го осциллятора;  $\lambda_k^i$  — настраиваемая константа взаимодействия  $i$ -й «молекулы» с  $k$ -м осциллятором. Управлять такой системой, по мнению авторов работы [47], можно, изменяя плотность распределения фононов в различных диапазонах частот. Таким образом, управление потенциалом является полностью нелокальным и не может быть направлено на конкретный нейрон — «молекулу» КТ, если только не использовать внешнее электромагнитное поле  $\Delta_i(t)$ , локализованное вблизи конкретной КТ. Предполагается, что «молекулы» КТ в массиве расположены на расстоянии 20–50 нм друг от друга на подложке GaAs, когда эффекты туннелирования и кулоновского отталкивания имеют одинаковый порядок, а константа электрон-фононного взаимодействия достаточно мала:  $\lambda_{e-ph} \approx 0,08$ , что позволяет применять теорию с линейным взаимодействием КТ с их флуктуирующим окружением [63].

После интегрирования по фононным модам  $x(t)$  в данной модели мы приходим к гамильтониану того же типа, что описывает квантовый отжиг нейронной сети на SQUID, с той разницей, что матрица межнейронных связей  $\chi_{ij}$  определяется электрон-фононным взаимодействием, а следовательно, зависит от тепловых флуктуаций, и ее значения не являются стабильными.

**8.2. Сеть с диполь-дипольным взаимодействием.** По нашему мнению, для обеспечения стабильности, т. е. повторяемости результатов при подаче на вход сети одних и тех же данных, следовало бы использовать двумерный массив КТ (необходимость агрегации отдельных КТ в «молекулы» не является очевидной). Управление корреляциями между состояниями КТ в массиве может осуществляться за счет взаимодействия с плазмонами, а не только с фононами подложки. Плазмонами, в отличие от фононов, можно управлять, расположив канавки волноводов между слоями нейронов. Схематическое изображение такого массива представлено на рис. 10. Вектор входных данных подается на слой 1 путем оптической накачки. Зависящий от времени гамильтониан сети может быть записан в виде

$$\hat{H}(t) = \sum_i K \sigma_i^x + \sum_i \Delta_i(t) \sigma_i^z + \sum_{i,\alpha} \lambda_i^\alpha x_\alpha(t) \sigma_i^z + \\ + \sum_\alpha \frac{m \dot{x}_\alpha^2(t)}{2} + \sum_\alpha \frac{m \omega_\alpha^2 x_\alpha^2(t)}{2} + \sum_{m \neq j} \frac{\mathbf{d}_m \cdot \boldsymbol{\sigma}_m^\dagger \otimes \mathbf{d}_j \cdot \boldsymbol{\sigma}_j}{\varepsilon_{mj}(t) R_{mj}^3}. \quad (33)$$



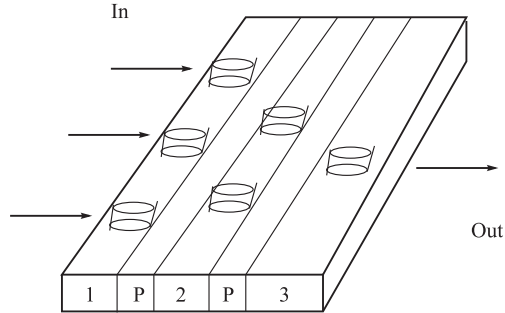


Рис. 10. Схематическое изображение квантовой нейронной сети типа перцептрон. На схеме изображен трехслойный перцептрон. Квантовые точки установлены на дорожках из GaAs или другого приемлемого материала. Входной слой сети обозначен цифрой 1, выходной — цифрой 3. Входной сигнал подается на первый слой путем оптической накачки. Дорожки между слоями квантовых точек представляют собой волноводы для плазмонов, обозначенные на схеме буквой P. Они могут быть выполнены как геометрически (в виде углубления или нанопроволоки), так и с использованием метаматериалов с подходящими свойствами диэлектрической проницаемости [70]. Оси  $z$  соответствует направление вверх на рисунке

Латинские индексы в гамильтониане (33) задают суммирование по всем КТ массива (независимо от номера слоя). Греческие индексы задают суммирование по всем фоновым модам подложки GaAs, линейно взаимодействующим с одноэлектронными КТ (последний член в первой строчке гамильтониана);  $\lambda_i^\alpha$  — константа взаимодействия избыточного электрона  $i$ -й КТ с  $\alpha$ -й фоновой модой теплового резервуара GaAs;  $\Delta_i$  — локальное магнитное поле, действующее перпендикулярно поверхности массива;  $K$  — общее магнитное поле, действующее в плоскости массива и вызывающее туннельные переходы между различными состояниями «спинов». Все члены такого вида, кроме последнего, уже использовались в различных моделях квантовых нейронных сетей [47, 33].

Последний член в гамильтониане (33) описывает диполь-дипольное взаимодействие между  $m$ -й и  $j$ -й КТ массива;  $\mathbf{d}_m$  — матричный элемент оператора дипольного момента  $m$ -й одноэлектронной КТ между основным и возбужденным состояниями;  $\varepsilon_{mj}$  — средняя диэлектрическая проницаемость среды на линии, соединяющей  $m$ -ю и  $j$ -ю КТ. Диполь-дипольный член такого типа используется при описании взаимодействия атомов [32]. Последний член в (33) ранее при описании КНС не учитывался. Он описывает диполь-дипольное взаимодействие между  $m$ -й и  $j$ -й КТ, находящимися на расстоянии  $R_{ij}$  друг от друга. Для двумерной геометрии сети, изображенной на рис. 10, достаточно учитывать диполь-дипольное взаимодействие между ближайшими

соседями и соседними слоями. Усиление или ослабление корреляций между КТ может осуществляться за счет изменения диэлектрической проницаемости подложки на пути  $R_{ij}$ , соединяющем  $i$ -ю и  $j$ -ю КТ. Локальное изменение диэлектрической проницаемости может быть индуцировано с помощью возбуждения плазмонов в подложке GaAs.

Влияние плазмонов, распространяющихся в волноводах между слоями нейронов (квантовых точек), на их диполь-дипольное взаимодействие можно оценить в классической теории исходя из кинетического уравнения для функции распределения электронов  $f(r, v, t)$  [71]

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = -\nu f, \quad (34)$$

где  $\nu$  — частота столкновений. Функцию распределения ищем в виде возмущения равновесной плотности:

$$f = f_0 + f',$$

где  $f_0$  — равновесная функция распределения электронов;  $f'$  — малая неравновесная добавка к плотности, связанная с распространением локализованного возмущения. В силу стационарности и однородности  $f_0$  имеем уравнение

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + v \frac{\partial f'}{\partial r} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} = -\nu f'(x - vt, v). \quad (35)$$

Если электрическое поле представляет собой бегущую волну  $E = E(x - ut)$ , то в импульсном представлении образ волнового пакета имеет вид  $\tilde{E} = 2\pi\delta(\omega - ku)E_{\omega k}$ . Кинетическое уравнение (35) приводит для возмущения плотности  $f'$  к выражению

$$f'_{\omega k} = -\frac{e}{m} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v} 2\pi\delta(\omega - ku)E_{\omega k}}{-i\omega + vk + \nu}. \quad (36)$$

При этом использовано то, что равновесная функция распределения  $f_0$  зависит только от скоростей, но не от координат.

Неравновесная добавка (36) существенно возрастает в месте нахождения волнового пакета в области скоростей, близких к скорости  $u$  распространяющегося пакета. Кратковременное локальное изменение плотности электронов  $f_0 \rightarrow f_0 + f'$  может приводить к локальному изменению плазменной частоты, а следовательно, к локальному изменению диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(x, \omega) = 1 - \omega_{\text{pl}}^2(x)/\omega^2.$$

Для более точного расчета нелинейных эффектов необходимо использовать зонную структуру подложки.

**8.3. Матрица плотности для сети на квантовых точках.** Кластер или «молекула» КТ, взаимодействующих между собой и с общим термостатом, представляет собой открытую квантовую систему, сочетающую в себе идеи Фейнмана о квантовой модели с парадигмой минимизации сложной функции (функционала энергии) нейронной сетью. Описывать такую сеть, как и всякую открытую квантовую систему, удобно в терминах матрицы плотности.

Пусть  $H = \sum_i K \sigma_{i,x} - \sum_i \Delta_i \sigma_{i,z} + \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_{i,z} \sigma_{j,z}$  — гамильтониан системы квантовых точек во внешних полях, где матрица Паули  $\sigma_{i,z} = \text{diag}(1, -1)$  различает возбужденное и невозбужденное состояния  $i$ -й квантовой точки. Пусть  $\{x_\alpha(t)\}_\alpha$  — набор фононных мод подложки, на которой расположен массив КТ.

Гамильтониан системы КТ + фононы может быть записан в виде

$$H = \sum_i K \sigma_{i,x} - \sum_i \Delta_i \sigma_{i,z} + \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_{i,z} \sigma_{j,z} + \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha^2}{2} + \frac{m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2}{2} + \lambda_\alpha^i x_\alpha \sigma_{i,z}. \quad (37)$$

Статистическая сумма, отвечающая гамильтониану (37), выражается интегралом по траекториям

$$\rho(\{\sigma_{i,z}\}, \{x_\alpha\}, T) = \int \mathcal{D}\sigma_z(\tau) \mathcal{D}x(\tau) \exp \left[ - \int_0^T d\tau \left( \sum_i K \sigma_{i,x} - \sum_i \Delta_i \sigma_{i,z} + \sum_{i \neq j} J_{ij} \sigma_{i,z} \sigma_{j,z} + \frac{m_\alpha \dot{x}_\alpha^2}{2} + \frac{m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2}{2} + \lambda_\alpha^i x_\alpha \sigma_{i,z} \right) \right], \quad (38)$$

где  $\mathcal{D}x(\tau) \equiv \prod_\alpha dx_\alpha(\tau)$ ,  $\mathcal{D}\sigma_z(\tau) = \prod_i d\sigma_{i,z}(\tau)$  — в случае дискретной переменной  $\sigma_z$  под интегрированием понимается суммирование. При этом фононные моды подчинены периодическим граничным условиям по мнимому времени  $x_\alpha(0) = x_\alpha(T)$ .

Вычислительная часть квантовой сети, т. е. набор состояний массива КТ, определяется следом статистической суммы  $\rho$  по состояниям термостата, т. е. интегралом  $K(\sigma_{i,z}, T) = \int dx_\alpha \rho(\{\sigma_{i,z}\}, \{x_\alpha\}, T)$ , и может быть записана в виде

$$K(\sigma_{i,z}, T) = \int \prod_j d\sigma_{j,z}(\tau) \exp \left[ - \int_0^T d\tau \sum K \sigma_{j,x} + \int_0^T d\tau \sum \Delta_j \sigma_{j,z} + \int_0^T d\tau \int_0^T d\tau' \chi_{jj'}(\tau - \tau') \sigma_{j,z}(\tau) \sigma_{j',z}(\tau') \right], \quad (39)$$

где  $\chi_{ij}$  определяется распределением фотонных мод и константами электрон-фононного взаимодействия [47]. Статистическая сумма (39) описывает квантовую сеть Хопфилда с нелокальным взаимодействием спинов между собой.

### 9. ОПИСАНИЕ ОБРАБОТКИ ИНФОРМАЦИИ БИОЛОГИЧЕСКИМИ И СОЦИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ В РАМКАХ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Биологическая популяция или социальная сеть представляют собой набор индивидов (actors) вместе с системой связей между ними. Структуры, возникающие в таких сетях, описываются с помощью графов, в вершинах которых находятся индивиды (или их группы), а ребра изображают связи между ними. Метод социальных сетей используется для статистического моделирования общественных явлений. Наиболее распространенной задачей здесь является исследование реакции общества или его отдельных групп на некоторое информационное воздействие. При этом предполагается, что состояние каждого индивида описывается бинарной переменной yes/no (скажем, поддерживаю/не поддерживаю). Состояния отдельных индивидов воздействуют на состояния других индивидов посредством имеющихся связей. Связи могут быть как постоянными, так и меняющимися в зависимости от состояния индивида.

Поскольку мышление отдельного индивида представляет собой квантовый процесс [4], вполне логично для моделирования динамики социальной группы использовать статистические модели, в которых состояние отдельных индивидов меняется согласно законам квантовой механики. Модель такого типа была недавно рассмотрена в работе [48].

Мы модифицируем эту модель следующим образом. Состояние каждого  $i$ -го индивида описывается бинарной переменной  $S_i$ , значениям которой («да» и «нет») отвечают состояния абстрактного спина  $S_i = \pm 1$  (спин-вверх и спин-вниз). Среднее по сообществу значение этой переменной, получающееся в результате квантово-механической эволюции сети

$$\bar{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n S_i, \quad (40)$$

и является объектом исследования.

Наряду с переменной  $S_i$  состояние каждого  $i$ -го индивида описывается некоторым набором параметров  $(\alpha_1^i, \dots, \alpha_K^i)$ , которые можно считать постоянными в течение времени квантово-механической эволюции сети и которые непосредственно не связаны с исследуемой переменной  $S_i$ . Так,  $i$ -й индивид может любить или не любить играть в теннис ( $\alpha_1^i = \pm 1$ ), любить или

не любить джаз ( $\alpha_2^i = \pm 1$ ), заниматься или не заниматься йогой ( $\alpha_3^i = \pm 1$ ) и т. п. Значения таких параметров обычно получают путем социологического опроса, причем повторный опрос (измерение) не меняет значения параметров.

Таким образом, состояние  $i$ -го индивида может быть описано  $(K + 1)$ -мерным вектором спиновых переменных

$$|\psi_i\rangle = |S_i, \alpha_1^i, \dots, \alpha_K^i\rangle.$$

Считается, что связи в такой системе имеются между теми индивидами, которые имеют общие интересы. Так, индивиды  $i$  и  $j$ , обозначаемые вершинами графа, связаны только в том случае, если

$$\exists k_1, k_2 : \alpha_{k_1}^i = \alpha_{k_2}^j.$$

Значение переменной  $S_i$  можно считать собственным значением матрицы Паули  $\sigma_z^i$ , действующей на  $z$ -компоненту спина  $i$ -го индивида. Если рассматривается вопрос о голосовании, проводимом данной социальной сетью, то можно считать, что информационное воздействие является общим для всех индивидов. Оно может быть описано членом  $B \sum_{i=1}^N S_i$ . Флуктуационная динамика системы определяется внешним воздействием на спиновые переменные, ортогональные  $S_i$ . Соответствующий член гамильтониана имеет вид  $K \sum_{i=1}^N \sigma_x^i$ . В итоге для определения результата эволюции социальной сети под действием информационного потока  $B$ , общего для всех индивидов, имеем задачу квантового отжига спиновой сети с гамильтонианом

$$H_{SN} = K \sum_{i=1}^N \sigma_x^i - B \sum_{i=1}^N \sigma_z^i + \sum_{i \neq j} C_{ij} \sigma_z^i \sigma_z^j + \sum_{i=1}^N M_{ab}^i \psi_a^i \psi_b^i. \quad (41)$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идеи применения квантовой механики для проведения вычислений имеют достаточно давнюю историю. Однако до конца прошлого века под квантовыми вычислениями или квантовыми алгоритмами практически однозначно понималась унитарная эволюция той или иной системы квантовых битов. Это означает, что взаимодействие с окружением рассматривалось лишь как помеха (источник декогеренции) или как способ считывания результата, уже полученного путем унитарной эволюции.

В этом смысле совершенно отдельно стоят работы, посвященные нейрофизиологии биологических процессов, почти не затронутые в данной работе,

посвященной в основном искусственным квантовым нейронным сетям. Однако, как в случае с классическими искусственными нейронными сетями, физиологические исследования Хебба [25] привели к математическим моделям искусственных нейронных сетей, так и исследования Бека, Эклза [5, 61, 23, 4] и других авторов, работавших в области нейрофизиологии, привели к пониманию того, что взаимодействие с окружением является не только источником декогеренции, но и неотъемлемой частью достаточно сложных квантовых вычислительных устройств как естественного, так и искусственного происхождения.

Прорыв в технологическом отношении произошел тогда, когда в качестве квантового процессора компанией D-wave Systems Inc. была создана система кубитов с настраиваемыми индуктивными связями на основе SQUID, в которой был аппаратным образом реализован метод квантового отжига [33]. Подобные системы сейчас находятся в разработке различных компаний и исследовательских центров, планирующих создание за счет квантового параллелизма сверхпроизводительных вычислительных устройств — прежде всего для систем искусственного интеллекта. Существующие образцы таких устройств, основанные на SQUID, работают при низких температурах. Практически все их энергопотребление затрачивается системой охлаждения. Именно поэтому данную технологию невозможно непосредственно использовать для создания бортовых систем искусственного интеллекта. В данной работе нами развивается альтернативная гипотеза: использование в качестве квантовых регистров массивов квантовых точек. Хотя у авторов нет прямых доказательств того, что предложенная модель может быть непосредственно использована при достаточно высоких температурах (десятки кельвин) и в этом смысле превосходит существующие системы, использование локализованных возмущений в низкоразмерных квантовых системах очень похоже на описание нейрофизиологических процессов на квантовом уровне [75, 61, 23, 3]. Это позволяет надеяться на создание подобных искусственных систем, устойчивость которых достигается за счет локализации возмущений в одном или двух измерениях.

С алгоритмической точки зрения «вычисления», производимые квантовыми диссипативными системами, уже используются при построении различных компьютерных программ: систем искусственного интеллекта, игр и тренажеров [35, 30, 29]. Работа классической искусственной нейронной сети фактически сводится к минимизации некоторой функции многих переменных. Работа квантовой ИНС, по-видимому, сложнее, и может быть связана как со стационарными, так и с нестационарными квантовыми процессами. По-видимому, в связи с активными исследованиями в области открытых квантовых систем и квантового управления, а также существенным финансированием (прежде всего со стороны NASA, Google и других компаний) данные исследования, направленные на создание высокотехнологических систем ис-

куственного интеллекта, должны в скором времени привести к созданию высокоэффективных систем автоматического управления.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-07-00409) и Министерства образования и науки РФ по программе повышения конкурентоспособности НИТУ «МИСИС» среди ведущих мировых образовательных центров на 2013–2020 гг. Авторы признательны Н. Н. Зольниковой, О. А. Морневу и Г. А. Ососкову за полезные обсуждения и ссылки, а также анонимному рецензенту, сделавшему ряд полезных замечаний и указавшему ряд неточностей в работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aeppli G., Rosenbaum T.* Quantum Annealing and Related Optimization Methods / Ed. by A. Das, K. Chakrabarti. Lecture Notes in Physics. Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. V. 679. P. 159–169.
2. *Altaisky M.* Quantum Neural Network: Tech. Report. arxiv.org:quant-ph/0107012. 2001.
3. *Altaisky M., Rao V.* Inverted Mexican Hat Potential in Activation of Receptor Cells // *Nonlin. Analysis B.* 2009. V. 10, No. 5. P. 2961–2970.
4. *Beck F.* Synaptic Quantum Tunnelling in Brain Activity // *Neuroquantology.* 2008. V. 6, No. 2. P. 140–151.
5. *Beck F., Eccles J.* Quantum Aspects of Brain Activity and the Role of Consciousness // *PNAS.* 1992. V. 89. P. 11357–11361.
6. *Behera L., Kar I., Elitzur A.* A Recurrent Quantum Neural Network Model to Describe Eye Tracking of Moving Targets // *Found. Phys. Lett.* 2005. V. 18, No. 4. P. 357–370.
7. *Chrisley R.* Learning in Non-Superpositional Quantum Neurocomputers // *Brain, Mind and Physics* / Ed. by Pylkkänen, P. Pylkkö. IOS Press, 1997.
8. *Barenco A. et al.* Conditional Quantum Dynamics and Quantum Gates // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74. P. 4083–4086.
9. *Coopersmith D.* An Approximate Fourier Transform Useful in Quantum Factoring. Research Report RC19642. IBM, 1994.
10. *Crandall R., Pomerance C.* Prime Numbers: A Computational Perspective. Springer, 2001.
11. *da Silva A., de Oliveira W., Ludermir T.* Classical and Superposed Learning for Quantum Weightless Neural Networks // *Neurocomputing.* 2012. V. 75. P. 52–60.
12. *da Silva A. J., de Oliveira W. R., Ludermir T. B.* A Weightless Neural Node Based on a Probabilistic Quantum Memory // *SBRN* / Ed. by T. B. Ludermir, K. Figueiredo, C. E. Thomaz. IEEE, 2010. P. 259–264.
13. *Das A., Chakrabarti B.* Colloquium: Quantum Annealing and Analog Quantum Computation // *Rev. Mod. Phys.* 2008. V. 80. P. 1061–1081.

14. *Deutsch D.* Quantum Computational Networks // Proc. Roy. Soc. London A. 1989. V.425. P. 73–90.
15. *Deutsch D.* Quantum Theory, the Church-Turing Principle and the Universal Quantum Computer // Ibid. V. 400. P. 97–117.
16. *Deutsch D., Jozsa R.* Rapid Solution of Problems by Quantum Computation // Proc. Roy. Soc. London A. 1992. V. 439. P. 553.
17. *Everett H.* «Relative State» Formulation of Quantum Mechanics // Rev. Mod. Phys. 1957. V. 29. P. 454–462.
18. *Ezhov A., Nifanova A., Ventura D.* Quantum Associative Memory with Distributed Quiries // Inf. Sci. 2000. V. 128, No. 3–4. P. 271–293.
19. *Fahri E.* A Quantum Adiabatic Evolution Algorithm Applied to Random Instances of NP-Complete Problem // Science. 2001. V. 292. P. 472–475.
20. *Feynman R.* Simulating Physics with Computers // Intern. J. Theor. Phys. 1982. V. 21. P. 467–488.
21. *Grover L.* Quantum Mechanics Helps in Searching for a Needle in a Haystack // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 325–328.
22. *Gupta S., Zia R.* Quantum Neural Networks // J. Comp. Syst. Sci. 2002. V. 63, No. 3. P. 355–383; arxiv.org:quant-ph/0201144.
23. *Hagan S., Hameroff S.R., Tuszynski J.A.* Quantum Computation in Brain Microtubules: Decoherence and Biological Feasibility // Phys. Rev. E. 2002. V. 65. P. 061901.
24. *Haykin S.* Neural Networks. Pearson Education, 1999.
25. *Hebb D.* Organization of Behavior. N. Y.: Willey, 1949.
26. *Hopfield J.J.* Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computation Abilities // PNAS. 1982. V. 79, No. 8. P. 2554–2558.
27. *Li P. et al.* A Hybrid Quantum-Inspired Neural Networks with Sequence Inputs // Neurocomputing. 2013. V. 117, No. 0. P. 81–90.
28. *Karimi K. et al.* Investigating the Performance of an Adiabatic Quantum Optimization Processor // Quant. Inform. Proc. 2012. V. 11, No. 1. P. 77–88; <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-011-0235-0>.
29. *Ivancevic V.* Quantum Neural Computation. Springer, 2009.
30. *Ivancevic V., Reid D.* Dynamics of Confined Crowds Modelled Using Entropic Stochastic Resonance and Quantum Neural Networks // Intern. J. of Intelligent Defence Support Systems. 2009. V. 2, No. 4. P. 269–289.
31. *Ivancevic V., Reid D.* Turbulence and Shock-Waves in Crowd Dynamics // Nonlin. Dyn. 2012. V. 68. P. 285–304.
32. *John S., Quang T.* Photon-Hopping Conduction and Collectively Induced Transparency in a Photonic Band Gap // Phys. Rev. A. 1995. V. 52, No. 5. P. 4083–4088.



33. *Johnson M.* Quantum Annealing with Manufactured Spins // *Nature*. 2011. V. 473. P. 194–198.
34. *Kak S.* On Quantum Neural Computing // *Inf. Sci.* 1995. V. 83. P. 143–160.
35. *Kouda N., Matsui N., Nishimura H.* Learning Performance of Neuron Model Based on Quantum Superposition // *Proc. of the 2000 IEEE Intern. Workshop on Robot and Human Interactive Communication*. Osaka: IEEE, 2000. P. 112–117.
36. *Kouda N., Matsui N., Nishimura H.* Image Compression by Layered Quantum Neural Networks // *Neural Process. Lett.* 2002. V. 16, No. 1. P. 67–80.
37. *Braakman F. et al.* Long-Distance Coherent Coupling in a Quantum Dot Array // *Nature Nanotechn.* 2013. V. 8, No. 6. P. 432–437.
38. *Lupascu A.* Quantum Non-Demolishing Measurement of a Superconducting Two-Level System // *Nature Phys.* 2007. V. 3. P. 119–125.
39. *Manju A., Nigam M.* Applications of Quantum Inspired Computational Intelligence: A Survey // *Artificial Intelligence Rev.* 2012. P. 1–78.
40. *Martoňak R., Santoro G., Tosatti E.* Quantum Annealing by the Path-Integral Monte Carlo Method: The Two-Dimensional Random Ising Model // *Phys. Rev. B.* 2002. V. 66. P. 094203.
41. *McCulloch W., Pitts W.* A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity // *Bull. Math. Biophys.* 1943. V. 5. P. 115–133.
42. *Menneer T., Narayanan A.* Quantum-Inspired Neural Networks // *NIPS'95*. Denver, Colorado: 1995.
43. *Menner T.* Quantum Artificial Neural Networks: Ph.D. Thesis. Univ. of Exeter, UK, 1998.
44. *Mizel A., Lidar D.A., Mitchell M.* Simple Proof of Equivalence between Adiabatic Quantum Computation and the Circuit Model // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 070502.
45. *Nielsen M., Chuang I.* Quantum Computation and Quantum Information. N. Y.: Cambridge Univ. Press, 2000.
46. *Nitta T.* An Extension of the Back-Propagation Algorithm to Complex Numbers // *Neural Networks*. 1997. V. 10, No. 8. P. 1397–1415.
47. *Behrman E.* Quantum Dot Neural Networks // *Inf. Sci.* 2000. V. 128. P. 257.
48. *Cabello A. et al.* Quantum Social Networks // *J. Math. Phys. A.* 2012. V. 45. P. 285101.
49. *Kouda N. et al.* Qubit Neural Network and Its Learning Efficiency // *Neural Comp. Appl.* 2005. V. 14. P. 114–121.
50. *Ronnow T. et al.* Defining and Defeating Quantum Speedup. [arxiv.org:/quant-ph/1401.2910](https://arxiv.org/abs/1401.2910).
51. *Shafee F.* Neural Networks with Quantum Gated Nodes // *Engin. Appl. Artificial Intelligence*. 2007. V. 20, No. 4. P. 429–437.

52. *Shariv I., Friesem A. A.* All-Optical Neural Network with Inhibitory Neurons // *Opt. Lett.* 1989. V. 14, No. 10. P. 485–487.
53. *Shor P.* Polynomial-Time Algorithm for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer // *Proc. of the 35th Annual Symp. on Foundations of Computer Science.* Piscataway, NJ: IEEE Press, 1994.
54. *Smelianskiy V. et al.* A Near-Term Quantum Computing Approach for Hard Computational Problems in Space Exploration. [arxiv.org:1204.2821](https://arxiv.org/abs/1204.2821). 2012.
55. *Hanson R. et al.* Spins in Few-Electron Quantum Dots // *Rev. Mod. Phys.* 2007. V. 79. P. 1217–1265.
56. *Stolze J., Suter D.* Quantum Computing: A Short Course from Theory to Experiment. Wiley-VCH, 2008.
57. *Waseem M. et al.* Three-Qubit Grover's Algorithm Using Superconducting Quantum Interference Devices in Cavity-Qed // *Quant. Inform. Proc.* 2013. V. 12, No. 12. P. 3649–3664; <http://dx.doi.org/10.1007/s11128-013-0624-7>.
58. *Vedral V., Barenco A., Ekert A.* Quantum Network for Elementary Arithmetic Operations // *Phys. Rev. A.* 1996. V. 54. P. 147–153.
59. *Ventura D., Martinez T.* An Artificial Neuron with Quantum Mechanical Properties // *Proc. of the Intern. Conf. on Artificial Neural Networks and Genetic Algorithms.* 1997. P. 482–485.
60. *Ventura D., Martinez T.* Quantum Associative Memory // *Inf. Sci.* 2000. V. 124, No. 1–4. P. 273–296.
61. *Vitiello G.* Dissipation and Memory Capacity in the Quantum Brain Model // *Intern. J. Mod. Phys. B.* 1995. V. 9. P. 973–989.
62. *Vlasov A.* Quantum Computations and Images Recognition. [arxiv.org:quant-ph/9703010](https://arxiv.org/abs/quant-ph/9703010). 1997; <http://arxiv.org/abs/quant-ph/9703010>.
63. *Wan Y., Ortiz G., Phillips P.* Pair Tunneling in Semiconductor Quantum Dots // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. P. 2879–2882.
64. *Yoshihara F., Nakamura Y., Tsai J.* Correlated Flux Noise and Decoherence in Two Inductively Coupled Flux Qubits // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 81. P. 132502.
65. *Zhou R., Ding Q.* Quantum  $m$ - $p$  Neural Network // *Intern. J. Theor. Phys.* 2007. V. 46. P. 3209–3215.
66. *Zhou R., Jiang N., Ding Q.* Model and Training QNN with Weight // *Neural Process. Lett.* 2006. V. 23. P. 261–269.
67. *Zhou R., Qin L., Jiang N.* Quantum Perceptron Network // *Artificial Neural Networks: Proc. of Intern. Conf. ICANN 2006; Lecture Notes in Comp. Sci.* 2006. V. 4131. P. 651–657.
68. *Алтайский М., Бонюшкина А.* Квантовые нейронные сети // *Нелинейный мир.* 2006. Т. 4, № 4–5. С. 238–245.
69. *Кисель И., Нескоромный В., Ососков Г.* Применение нейронных сетей в экспериментальной физике // *ЭЧАЯ.* 1993. Т. 24, № 6. С. 1551–1595.

70. *Климов В.* Наноплазмоника. М.: Физматлит, 2009.
71. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Физическая кинетика // Теоретическая физика. М.: Физматлит, 2002. Т. 10.
72. *Никитюк Н.* Нейрочипы, нейрокомпьютеры и их применение в экспериментальной физике высоких и сверхвысоких энергий // ЭЧАЯ. 2001. Т. 32, № 2. С. 431–480.
73. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. М.: Финансы и статистика, 2004.
74. *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М.: УРСС, 2005.
75. *Чавчанидзе В.* К вопросу о пространственно-временных квантово-волновых процессах в нервных сетях // Сообщ. АН Грузинск. ССР. 1970. Т. 59, № 1. С. 37–40.