

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ КОНТРАКЦИИ НА ДВУХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Г. С. Погосян^{1,2,3,*}, *А. Яхно*^{3,**}

¹ Ереванский государственный университет, Ереван

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

³ Гвадалахарский университет, Гвадалахара, Мексика

ВВЕДЕНИЕ	93
РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ НА ДВУХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ	97
Симметрии первого порядка и разделение переменных	99
Классификация симметрий второго порядка	106
Симметрии второго порядка и неподгрупповые системы координат на двухмерных гиперболоидах	111
Полугиперболическая система координат (SH)	115
Полуциркулярно-параболическая система координат (SCP)	118
Эллипτικο-параболическая система координат (EP)	118
Гиперболо-параболическая система координат (HP)	120
Эллиптическая система координат (E)	122
Повернутая эллиптическая система координат (\tilde{E})	126
Гиперболическая система координат (H)	126
Повернутая гиперболическая система координат (\tilde{H})	129
КОНТРАКЦИИ НА ДВУХПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ	129
Переход от псевдосферической системы координат к полярной	132
Переход от эквидистантной системы координат к декартовой	132
Переход от орициклических координат к декартовым	133
Контракции в неортогональных системах координат	134

*E-mail: pogosyan@theor.jinr.ru; pogosyan@ysu.am

**E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

Контракции эллиптической системы координат	135
Переход от гиперболической системы координат к декартовой	139
Контракции полугиперболической системы координат	140
Контракции эллиптико-параболической системы координат	142
Переход от гиперболо-параболической системы координат к декартовой	143
Контракция полуциркулярно-параболической системы координат к декартовой	144
КОНТРАКЦИИ НА ОДНОПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ	146
Контракция алгебры Ли $so(2, 1)$ к алгебре $e(1, 1)$	146
Контракции систем координат	147
Переход от эквидистантных координат типа Ia и Ib к псевдополярным	149
Контракции неортогональных систем	149
Переход от эквидистантной системы координат типа IIb к декартовой	150
Переход от псевдосферической системы координат к декартовой	151
Переход от орициклической системы координат к декартовой	152
Контракции эллиптической системы координат	153
Контракции гиперболической системы координат	155
Контракции полугиперболической системы координат	158
Контракции эллиптико-параболической системы координат	161
Контракции гиперболо-параболической системы координат	162
Переход от полуциркулярно-параболической системы координат к декартовой	166
ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ	167
ПРИЛОЖЕНИЕ	170
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	179

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ КОНТРАКЦИИ НА ДВУХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Г. С. Погосян^{1,2,3,*}, А. Яхно^{3,**}

¹ Ереванский государственный университет, Ереван

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

³ Гвадалахарский университет, Гвадалахара, Мексика

Представлены последние результаты в области аналитических контракций алгебр Ли для двухмерных гиперболических пространств. Дано полное геометрическое описание всех возможных ортогональных и неортогональных систем координат (связанных с симметриями первого порядка), которые допускают разделение переменных для двухмерных уравнений Лапласа–Бельтрами или Гельмгольца на двухполостном (верхняя полость) H_2 и на однополостном \tilde{H}_2 гиперboloидах. Осуществлен предельный переход между неподгрупповыми (главным образом, заданными параметрически) и подгрупповыми системами координат. Описаны аналитические контракции между различными системами координат на гиперboloидах H_2 и \tilde{H}_2 и евклидовым пространством E_2 и пространством Минковского $E_{1,1}$ соответственно.

In this review we present recent results in the field of analytical contraction of Lie algebra in two-dimensional hyperbolic space. A complete geometric description for all possible orthogonal and nonorthogonal (related to the first order symmetries) systems of coordinates, which allow separation of variables of two-dimensional Laplace–Beltrami or Helmholtz equation on the two-sheeted (upper sheet) H_2 and the one-sheeted \tilde{H}_2 hyperboloids is given. The limiting transition between non subgroup (mostly parametric) and subgroup systems is conducted. The analytic contractions between various systems of coordinates in two hyperbolic spaces and Euclidean E_2 and Minkowski $E_{1,1}$ spaces are presented.

PACS: 02.20.Tw; 03.65.Fd

ВВЕДЕНИЕ

Существует множество предельных переходов, связывающих глобальные физические теории, такие как релятивистская и нерелятивистская физика, включая квантовую и классическую механику. Сигал [1] был одним из первых

*E-mail: pogosyan@theor.jinr.ru; pogosyan@ysu.am

**E-mail: alexander.yakhno@cucei.udg.mx

математиков, кто отметил связь между такого типа предельными переходами и соответствующими алгебрами Ли. Два года спустя Инёню и Вигнер [2], используя идею Сигала, ввели понятие контракции (так называемые контракции Инёню–Вигнера), индуцирующей переход от алгебры Пуанкаре к алгебре Галилея при стремлении скорости света к бесконечности: $c \rightarrow \infty$.

Обычно под контракцией Инёню–Вигнера [2–4] понимается некая процедура предельного перехода от заданной группы Ли к другой, неизоморфной группе Ли. Рассмотрим некоторый базис $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ алгебры Ли L . Введем новый базис $\tilde{X}_i = u_{ik}(\varepsilon)X_k$ (здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам), в котором матрица $U(\varepsilon) = (u_{ik})$ отвечает за преобразование базиса и зависит от некоторого параметра ε . Матрица $U(\varepsilon)$ такова, что при $\varepsilon = 1$ имеем $u_{ik}(1) = \delta_{ik}$, при $\varepsilon \neq 0$ — $|U(\varepsilon)| \neq 0$, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ матрица $U(\varepsilon)$ становится вырожденной, т. е. $|U(0)| = 0$. В пределе (если такой предел существует) коммутационные соотношения алгебры Ли L непрерывно переходят в коммутаторы, определяющие неизоморфную алгебру Ли \tilde{L} .

Позже были введены обобщенные (или сингулярные) контракции Инёню–Вигнера. Эти контракции порождаются диагональной матрицей, содержащей целые степени параметра контракции ε [5–8] (см. также статьи [9–11]). В качестве примера таких контракций можно отметить контракцию группы $SU(2)$ в группу Гейзингера–Вейля [7, 8, 12, 13].

Последующее развитие понятия контракций Инёню–Вигнера связано с так называемыми градуированными контракциями, впервые введенными в статьях [14–16] и позднее исследованными в работах [17–20]. Эти контракции можно отнести к типу «дискретных» контракций. Идея градуированных контракций следующая: умножаем структурные константы градуируемой алгебры Ли L на некоторые параметры ε_i таким образом, чтобы структурные константы сохраняли прежнюю градуировку. После этого переходим к пределу $\varepsilon_i \rightarrow 0$. Заинтересованный читатель может найти описание различных свойств контракций в работах [21–30] и цитируемой в них литературе.

В недавних статьях [31–40, 45, 46] представлены некоторые новые аспекты теории контракций групп Ли и алгебр Ли в контексте разделения переменных в уравнениях Лапласа–Бельтрами на однородных пространствах, а именно связь между системами координат, допускающих разделение переменных в кривых и плоских пространствах, связанных контракциями их групп изометрий. Этот подход использует специальный вид контракций Инёню–Вигнера, называемых аналитическими, при которых параметр контракции имеет вид $\varepsilon = 1/R$, где R — радиус сферы (или псевдосферы). В рамках этого подхода становится возможным проследить предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) на таких уровнях, как инфинитезимальные операторы группы Ли (группы изометрии однородного пространства) и коммутационные соотношения алгебры Ли; оператор Лапласа–Бельтрами для пространств постоянной кривизны;

инвариантные операторы второго порядка, характеризующие разделяемую систему; ортогональная (или неортогональная) система координат; собственные функции инвариантных операторов; межбазисные разложения.

В частности, в статьях [32, 33] метод аналитических контракций представлен для двух простых однородных пространств — двумерной сферы $S_2 \sim O(3)/O(2)$ и двухполостного гиперboloида $H_2 \sim O(2, 1)/O(2)$, для которых рассмотрены все типы разделяемых координат. Также показано, что две системы на сфере S_2 (эллиптическая и полярная) и девять систем на гиперboloида H_2 в контракционном пределе $R \rightarrow \infty$ переходят в четыре системы на плоскости E_2 . В работе [31] аналогичным способом изучены комплексные контракции систем координат на двухполостном гиперboloида H_2 в системы на псевдоевклидовой плоскости (двухмерном пространстве Минковского) $E_{1,1}$. Случай действительных контракций из $\tilde{H}_2 \sim O(2, 1)/O(1, 1)$ проанализирован в работах [45, 46]. Детальное исследование всех возможных контракций в случае трехмерной сферы проведено в работе [40]. В статьях [34, 35], хотя размерность пространства рассматривалась произвольной, изучен только простейший тип координат, а именно подгрупповой. Используются аналитические контракции из группы вращения $O(n+1)$ в группу евклидовых движений $E(n)$ с целью получить связь между подгрупповыми системами координат, собственными функциями и собственными значениями оператора Лапласа–Бельтрами, инвариантными операторами, асимптотическими соотношениями для матричных операторов симметрии, межбазисными коэффициентами (так называемыми T -коэффициентами [47]) на гиперсфере S_n и в пространстве E_n . Детальное рассмотрение контракций неподгрупповых координат проведено в [36] и в недавней работе [37].

В настоящее время можно выделить два основных подхода к задаче о разделении переменных в уравнении Лапласа–Бельтрами на однородных пространствах с группами изометрий $SO(p, q)$ и $E(p, q)$. Исторически при первом подходе используются методы дифференциальной геометрии. Так, проблема разделения переменных для уравнений Гельмгольца, Гамильтона–Якоби и уравнения Шредингера для двух- и трехмерных пространств постоянной кривизны (включая сферу и двухполостный гиперboloида) впервые решена Олевским [48]. Аналогичная задача для двух- и трехмерных пространств Минковского детально обсуждалась Калнинсом в [49], для гиперboloида с группой изометрий $SO(2, 2)$, а также для комплексной сферы с группой $SO(4, C)$ — в работах Миллера и Калнинса [50, 51] (см. также [52]). Позже графическая процедура построения всевозможных (и не только подгрупповых) ортогональных систем координат на n -мерном евклидовом пространстве и на n -мерной сфере была разработана в [53] (см. также [54]). Каждая из разделяющих систем координат характеризуется полным набором взаимно коммутирующих операторов симметрии, лежащих в обертывающей алгебре группы изометрий пространства для уравнения Гельмгольца. Например, задача

классификации полных наборов операторов симметрии, соответствующих разделению переменных для уравнения Гельмгольца на двухполостном гиперboloиде с группой изометрий Лоренца $SO(3, 1)$, решена в работе [55]. Подобная задача для уравнения Гельмгольца в случае других пространств постоянной кривизны (двух- и трехмерных) проанализирована в работах [56–63].

Другой, чисто алгебраический, подход к проблеме разделения переменных использует группу изометрий пространства. Классификация операторов второго порядка на неподобные классы позволяет построить все возможные ортогональные координатные системы, допускающие разделение переменных для уравнения Гельмгольца на пространствах постоянной кривизны. Однако в отличие от прямого подхода, при котором разделение переменных для данной координатной системы однозначно определяется полным набором операторов симметрии, обратная задача — задача построения координатной системы, в которой данные коммутирующие операторы могут быть диагонализированы, — не является тривиальной и полностью решена только для некоторых двух- и трехмерных пространств (см., например, работы [38, 52, 64, 65] и цитируемую в них литературу). Более того, существует хорошо известный пример на плоскости $E_{1,1}$, когда набор операторов симметрии не соответствует ни одной координатной системе.

Несмотря на достаточно большое количество работ, посвященных исследованию различных аспектов (разделение переменных, интегралы движения, волновые функции, спектр и т. п.) уравнения Гельмгольца на пространствах постоянной кривизны, случай однополостного гиперboloида или более общей транзитивной поверхности с группой $SO(p, q)$ ($p, q \geq 1$) описан недостаточно подробно. В действительности есть много особенностей, которые отличают эти две транзитивные поверхности группы Лоренца $SO(2, 1)$ в пространстве Минковского (см. работы [41–46, 66–69]). В то время как расстояние r между двумя фиксированными точками $x = (x_0, x_1, x_2)$ и $y = (y_0, y_1, y_2)$ двумерного двухполостного гиперboloида $[x, x] = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = R^2$, задаваемое формулой $\cosh kr = [x, y]/R^2 \geq 1$ ($k = 1/R$), является неотрицательным действительным числом, для однополостного гиперboloида имеем $\cosh kr = [x, y]/R^2 \geq 0$, где $[x, x] = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = -R^2$ и расстояние r является действительным неотрицательным числом для $\cosh kr \geq 1$ и мнимым при $0 \leq \cosh kr < 1$ (например, $[x, y] = 0$ для двух точек $x = (0, 0, R)$ и $y = (0, R, 0)$ на однополостном гиперboloиде). В результате многие системы координат для уравнения Гельмгольца являются кусочно-определенными, а некоторые из них даже не полностью покрывают поверхность \tilde{H}_2 .

При написании данного обзора мы преследовали три основные цели: во-первых, в рамках алгебраического подхода представить процесс разделения переменных для уравнения Лапласа–Бельтрами (или Гельмгольца) на двумерном пространстве одно- и двухполостного гиперboloидов; во-вторых, дать детальное описание как ортогональных, так и неортогональных разделяющих

систем координат, включая различные предельные переходы между ними; в-третьих, проанализировать всевозможные контракции к системам на евклидовой E_2 и псевдоевклидовой $E_{1,1}$ плоскостях. Данный обзор, главным образом, основывается на статьях [31, 33, 37, 38, 45, 46].

Среди всего многообразия применений алгебраических контракций в различных областях современной математической физики выделим следующие. В теории (супер)интегрируемых систем контракции устанавливают связь между системами координат, допускающими разделение переменных в уравнениях Гамильтона–Якоби или Шредингера в пространствах постоянной кривизны и плоских пространствах [70–74]. В теории специальных функций контракции помогают получать различные асимптотические формулы для собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами [75], межбазисных коэффициентов, таких как d -функции Вигнера (многочлены Кравчука), коэффициенты Клебша–Гордана (полиномы Хана), коэффициенты Рака (многочлены Вильсона–Рака) и т. д. [12, 13, 38].

Работа построена следующим образом. В разд. 1 кратко представлены некоторые известные аспекты разделения переменных для уравнения Гельмгольца на пространствах постоянной кривизны и дано описание теоретико-группового процесса классификации всех разделяющих систем координат для двумерного уравнения Гельмгольца по неподобным классам (орбитам) алгебры симметрий $so(2, 1)$. Там же рассмотрены подгрупповые системы, связанные с операторами симметрии второго порядка. Дается подробное описание этих систем, обсуждаются предельные переходы от параметрических систем к более простым. Даны различные эквивалентные формы записи разделяющих систем координат, которые представляются наиболее удобными для реализации контракций. Разд. 2 посвящен контракциям систем координат, допускающих разделение переменных в уравнении Гельмгольца, и операторам симметрии на двухполостном гиперboloиде H_2 . В разд. 3 описаны аналогичные контракции для однополостного гиперboloида \tilde{H}_2 . В разд. 4 обсуждаются представленные в данном обзоре результаты.

1. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ НА ДВУХМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛОИДАХ

Нас интересует двумерное гиперболическое пространство, описываемое уравнением

$$u \cdot u = G_{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 = -\epsilon R^2, \quad \epsilon = \pm 1, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \quad (1)$$

в котором R — псевдорadius. Значение $\epsilon = 1$ соответствует двухполостному гиперboloиду H_2 , а $\epsilon = -1$ — однополостному \tilde{H}_2 . Декартовы координаты u_μ и метрика $G_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ принадлежат трехмерному объемлющему пространству Минковского $E_{2,1}$. Как известно, группа Ли $SO(2, 1)$

является группой изометрий для пространства (1). Выпишем стандартный базис для алгебры Ли $so(2, 1)$

$$\begin{aligned} K_1 &= -(u_0 \partial_{u_2} + u_2 \partial_{u_0}), \\ K_2 &= -(u_0 \partial_{u_1} + u_1 \partial_{u_0}), \\ L &= u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}, \end{aligned} \quad (2)$$

подчиняющийся коммутационным соотношениям

$$[K_1, K_2] = -L, \quad [L, K_1] = K_2, \quad [K_2, L] = K_1. \quad (3)$$

Оператор Казимира алгебры $so(2, 1)$ определяется как

$$C = K_1^2 + K_2^2 - L^2 \quad (4)$$

и пропорционален оператору Лапласа–Бельтрами $\Delta_{LB} = \epsilon C/R^2$. В локальной системе координат $\xi = (\xi^1, \xi^2)$, заданной на гиперboloиде (1), оператор Лапласа–Бельтрами принимает вид

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \quad i, k = 1, 2, \quad (5)$$

где g_{ik} определяет двухмерную метрику

$$ds^2 = g_{ik} d\xi^i d\xi^k, \quad g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i, \quad g = |\det(g_{ik})|, \quad i, k = 1, 2. \quad (6)$$

Соотношение между метрическим тензором объемлющего пространства $G_{\mu\nu}$ $ds^2 = G_{\mu\nu} du^\mu du^\nu$ и компонентами $g_{ik}(\xi)$ описывается соотношением

$$g_{ik}(\xi) = \epsilon G_{\mu\nu} \frac{\partial u_\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial u_\nu}{\partial \xi^k}. \quad (7)$$

Уравнение Гельмгольца на многообразии (1) определяется как

$$\Delta_{LB} \Psi = \mathcal{E} \Psi, \quad (8)$$

где \mathcal{E} — ненулевая действительная или комплексная константа. Все известные ортогональные системы координат, допускающие разделение переменных в уравнении Гельмгольца на гиперboloидах (1), ассоциируются с операторами второго порядка $S_\alpha^{(2)}$ в обертывающей алгебре $so(2, 1)$ (где индекс α соответствует системе), коммутирующими с оператором Δ_{LB} . Напомним, что в случае ортогональной системы координат метрический тензор имеет диагональный вид $g_{ik} = \delta_{ik} H_k^2$, где H_k^2 — коэффициенты Ламэ [76].

В основе алгебраического подхода к построению разделяющих систем координат для уравнения Гельмгольца (8) лежит классификация по орбитам всех неподобных операторов $S_\alpha^{(2)}$ из множества полиномов второго порядка:

$$S_\alpha^{(2)} = m_{ik}^{(\alpha)} X_i X_k, \quad m_{ik}^{(\alpha)} = m_{ki}^{(\alpha)}, \quad m_{ik}^{(\alpha)} = \text{const}, \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (9)$$

($X_1 = K_1, X_2 = K_2, X_3 = L$) под действием группы $SO(2, 1)$. Данная задача сводится к классификации симметричных матриц $M = \left(m_{ki}^{(\alpha)} \right)$ на неподобные классы под действием преобразований вида $M' = \alpha_1 A^T M A + \alpha_2 A_C$, где A^T — транспонированная матрица; A — элемент группы внутренних автоморфизмов для $so(2, 1)$; $\alpha_1 \neq 0$, α_2 — действительные константы; A_C — матрица, соответствующая оператору Казимира (4).

Если оператор $S_\alpha^{(2)}$ является квадратом оператора первого порядка X_i (или квадратом суммы некоторых операторов X_i , как в случае орициклических координат), то они имеют подгрупповой вид [63]. Фактически подгрупповые координаты могут быть получены из операторов первого порядка алгебры $so(2, 1)$:

$$S^{(1)} = m_i X_i, \quad m_i = \text{const}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10)$$

Отметим, что такая классификация, основанная на операторах первого порядка, не является однозначной, так как при этом, вообще говоря, могут быть получены не только ортогональные системы координат. Тем не менее, как показано в п. 1.1.2, используя некий произвол при определении координатных систем, их можно привести к ортогональной форме.

1.1. Симметрии первого порядка и разделение переменных. *1.1.1. Классификация симметрий первого порядка.* Составим вектор $\mathbf{v} = (a, b, c)$ для произвольного элемента

$$S^{(1)}(a, b, c) = aK_1 + bK_2 + cL \quad (11)$$

алгебры Ли $so(2, 1)$. Под действием группы внутренних автоморфизмов A_3 ([77, гл.4]) этой алгебры координаты вектора \mathbf{v} преобразуются следующим образом:

$$K_1 : \bar{\mathbf{v}} = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh a_1 & \sinh a_1 \\ 0 & \sinh a_1 & \cosh a_1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot A_{K_1}, \quad (12)$$

$$K_2 : \bar{\mathbf{v}} = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} \cosh a_2 & 0 & \sinh a_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh a_2 & 0 & \cosh a_2 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot A_{K_2}, \quad (13)$$

$$L : \bar{\mathbf{v}} = (a, b, c) \cdot \begin{pmatrix} \cos a_3 & -\sin a_3 & 0 \\ \sin a_3 & \cos a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v} \cdot A_L, \quad (14)$$

где a_1, a_2, a_3 — групповые параметры; $\bar{\mathbf{v}} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ — преобразованный вектор. При классификации мы также учитываем три отражения:

$$\begin{aligned} R_0 &: (u_0, u_1, u_2) \rightarrow (-u_0, u_1, u_2), \\ R_1 &: (u_0, u_1, u_2) \rightarrow (u_0, -u_1, u_2), \\ R_2 &: (u_0, u_1, u_2) \rightarrow (u_0, u_1, -u_2), \end{aligned} \quad (15)$$

оставляющие инвариантным оператор Лапласа–Бельтрами Δ_{LB} .

Отметим соответствие между преобразованиями операторов и преобразованиями координат (u_0, u_1, u_2) :

$$\begin{aligned} (K'_1, K'_2, L')^T &= A_{K_1}^{-1}(K_1, K_2, L)^T \sim (u'_0, u'_1, u'_2)^T = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh a_1 & 0 & -\sinh a_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sinh a_1 & 0 & \cosh a_1 \end{pmatrix} (u_0, u_1, u_2)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (K'_1, K'_2, L')^T &= A_{K_2}^{-1}(K_1, K_2, L)^T \sim (u'_0, u'_1, u'_2)^T = \\ &= \begin{pmatrix} \cosh a_2 & \sinh a_2 & 0 \\ \sinh a_2 & \cosh a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (u_0, u_1, u_2)^T, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (K'_1, K'_2, L')^T &= A_L^{-1}(K_1, K_2, L)^T \sim (u'_0, u'_1, u'_2)^T = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a_3 & -\sin a_3 \\ 0 & \sin a_3 & \cos a_3 \end{pmatrix} (u_0, u_1, u_2)^T. \end{aligned}$$

Композиция тригонометрического вращения по часовой стрелке на угол $a_3 = \pi/2$ вдоль оси u_0 с отражением R_1 соответствует перестановке u_1 и u_2 : $u_1 \leftrightarrow u_2$. Такая перестановка соответствует преобразованию операторов $K'_1 = K_2, K'_2 = K_1, L' = -L$.

Общий инвариант преобразований (12)–(14) имеет вид

$$I = a^2 + b^2 - c^2, \quad (17)$$

и для классификации всех подалгебр по классам неэквивалентности необходимо рассмотреть следующие три случая.

А. $I = 0$ или $c^2 = a^2 + b^2$. Если $a \neq 0$, то $c^2 > b^2$. Действуя A_{K_1} на \mathbf{v} с $a_1 = -\operatorname{arctanh}(b/c)$ и принимая во внимание, что $I = 0$, мы можем свести координату b к нулю и получить вектор $(a, 0, |a|)$. Разделив $(a, 0, |a|)$ на a , окончательно получим вектор $(1, 0, \pm 1)$, соответствующий симметрии

$$S^{(1)}(1, 0, \pm 1) = K_1 \pm L. \quad (18)$$

Если $a = 0$, то $|c| = |b| \neq 0$, и, деля $(0, b, c)$ на b , получаем $(0, 1, \pm 1)$ или

$$S^{(1)}(0, 1, \pm 1) = K_2 \pm L. \quad (19)$$

Отметим, что эти две симметрии связаны между собой вращением A_L (получаем $\bar{a} \neq 0$) и что знак в (18) может быть взят положительным при использовании дискретной симметрии R_2 (15).

Б. $I > 0$ или $c^2 < a^2 + b^2$. В этом случае $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Если $a \neq 0$, то, используя A_L с $a_3 = -\operatorname{arccot}(b/a)$, получаем $\bar{a} = 0$, так что $\bar{c}^2 < \bar{b}^2$, и, выбирая a_1 такой, что при помощи A_{K_1} можно обнулить c , окончательно получаем вектор $(0, 1, 0)$, соответствующий симметрии

$$S^{(1)}(0, 1, 0) = K_2. \quad (20)$$

По аналогии можно построить вектор $(1, 0, 0)$, который дает

$$S^{(1)}(1, 0, 0) = K_1. \quad (21)$$

В. $I < 0$. В этом случае $c^2 > a^2 + b^2$. При $b \neq 0$ и $a \neq 0$, используя A_L , получаем $\bar{a} = 0$, так что $\bar{c}^2 > \bar{b}^2$. После, используя A_{K_1} , обнуляем \bar{b} и получаем вектор $(0, 0, 1)$. Если $b = 0$ и $a \neq 0$, используя A_{K_2} , обнуляем \bar{a} и получаем тот же вектор $(0, 0, 1)$, соответствующий оператору

$$S^{(1)}(0, 0, 1) = L. \quad (22)$$

Таким образом, операторы $S^{(1)}(a, b, c)$ (11) были преобразованы в три неподобных класса, каждый из которых соответствует подгрупповой системе координат. Это является следствием существования трех одномерных подалгебр — $o(2)$, $o(1, 1)$ и $e(1)$ — алгебры $so(2, 1)$ [63]. Отметим, что операторы (18) и (19), а также (20) и (21) описывают эквивалентные системы координат.

1.1.2. Подгрупповые системы координат. Построим подгрупповые координатные системы, допускающие разделение переменных для каждого оператора симметрии первого порядка $S^{(1)}$, полученного в предыдущем пункте. Потребуем, чтобы оператор $S^{(1)}$, представленный в виде (18)–(22) или

$$S^{(1)} = \xi_0 \partial_{u_0} + \xi_1 \partial_{u_1} + \xi_2 \partial_{u_2}, \quad \xi_i \equiv \xi_i(u_0, u_1, u_2), \quad (23)$$

в некоторых локальных криволинейных координатах $\xi(u_0, u_1, u_2)$, $\eta(u_0, u_1, u_2)$ принимал каноническую или диагональную форму:

$$S^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (24)$$

Решение этой задачи эквивалентно поиску решения двух уравнений первого порядка в частных производных

$$\xi_0 \frac{\partial \xi}{\partial u_0} + \xi_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_2} = 0, \quad \xi_0 \frac{\partial \eta}{\partial u_0} + \xi_1 \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial \eta}{\partial u_2} = 1 \quad (25)$$

с учетом соотношения (1). Рассмотрим каждый случай отдельно.

1. $S^{(1)} = L$. Для приведения оператора симметрии $L = u_1 \partial_{u_2} - u_2 \partial_{u_1}$ к каноническому виду $L = \partial_\eta$ необходимо решить систему уравнений

$$u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = 0, \quad u_1 \frac{\partial \eta}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \eta}{\partial u_1} = 1. \quad (26)$$

Выписывая уравнения характеристик

$$\frac{du_1}{u_2} = -\frac{du_2}{u_1} = \frac{d\xi}{0}, \quad \frac{du_1}{u_2} = -\frac{du_2}{u_1} = \frac{d\eta}{1} \quad (27)$$

и решая их, найдем

$$f^2(\xi, R) = u_1^2 + u_2^2, \quad \eta = \arcsin \frac{u_2}{f(\xi)} + g(\xi, R), \quad (28)$$

откуда $u_2 = f(\xi, R) \sin(\eta - g(\xi, R))$. Соотношение (28) дает $u_1 = \sqrt{f^2(\xi, R) - u_2^2} = f(\xi, R) \cos(\eta - g(\xi, R))$. Третья координата u_0 определяется из (1).

1а. Для двухполостного гиперboloида $\epsilon = 1$ имеем $u_0 = \sqrt{f^2(\xi, R) + R^2} > 0$. Выбирая $f(\xi, R) = R \sinh \xi$ и $g(\xi, R) = 0$ и обозначая новые координаты (τ, φ) вместо (ξ, η) , получаем ортогональную псевдосферическую систему координат для верхней полости H_2 :

$$u_0 = R \cosh \tau, \quad u_1 = R \sinh \tau \cos \varphi, \quad u_2 = R \sinh \tau \sin \varphi, \quad (29)$$

где $\tau \geq 0$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$ (см. рис. 2 и табл. 1 в приложении).

Отметим, что если взять $g(\xi, R)$, так что $g'_\xi \neq 0$, то получим неортогональную сферическую систему координат, которая также допускает разделение переменных. В частности, можно определить неортогональную сферическую систему координат в виде ($g = -R\xi/\alpha$, α — ненулевая константа):

$$\begin{aligned} u_0 &= R \cosh \tau, \\ u_1 &= R \sinh \tau \cos(\varphi + R\tau/\alpha), \\ u_2 &= R \sinh \tau \sin(\varphi + R\tau/\alpha), \end{aligned} \quad (30)$$

которая стремится к ортогональной системе при $\alpha \rightarrow \infty$.

1б. В случае однополостного гиперboloида $\epsilon = -1$ из (28) следует, что $u_0 = \pm \sqrt{f^2(\xi, R) - R^2}$. Полагая $f(\xi, R) = R \cosh \xi$, $g(\xi, R) = 0$ и вводя

$\xi = \tau$, $\eta = \varphi$, получаем ортогональную псевдосферическую систему на \tilde{H}_2 (см. рис. 26 и табл. 2 в приложении):

$$u_0 = R \sinh \tau, \quad u_1 = R \cosh \tau \cos \varphi, \quad u_2 = R \cosh \tau \sin \varphi, \quad (31)$$

где $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Аналогично, взяв $g(\xi, R) = -R\xi/\alpha - \pi/2$, получим неортогональную систему координат:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \sinh \tau, \\ u_1 &= -R \cosh \tau \sin(\varphi + R\tau/\alpha), \\ u_2 &= R \cosh \tau \cos(\varphi + R\tau/\alpha). \end{aligned} \quad (32)$$

Отметим, что псевдосферические системы координат полностью покрывают однополостный гиперболоид и верхнюю полость двухполостного.

2. $S^{(1)} = K_2$. Запишем оператор K_2 в терминах локальных переменных (ξ, η)

$$\begin{aligned} -K_2 = u_0 \frac{\partial}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial}{\partial u_0} &= \left(u_0 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_0} \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \\ &+ \left(u_0 \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial u_0} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (33)$$

и преобразуем его к каноническому виду (24). Имеем

$$u_0 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial \xi}{\partial u_0} = 0, \quad u_0 \frac{\partial \eta}{\partial u_1} + u_1 \frac{\partial \eta}{\partial u_0} = 1. \quad (34)$$

Характеристические уравнения запишем в виде

$$\frac{du_1}{u_0} = \frac{du_0}{u_1} = \frac{d\xi}{0}, \quad \frac{du_1}{u_0} = \frac{du_0}{u_1} = \frac{d\eta}{1}. \quad (35)$$

Из (34) следует

$$f(\xi, R) = u_0^2 - u_1^2, \quad \eta = \operatorname{arcsch} \frac{u_1}{\sqrt{f(\xi, R)}} + g(\xi, R). \quad (36)$$

2а. В случае двухполостного гиперболоида $f(\xi, R) > 0$ и получаем

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{f(\xi, R)} \sinh(\eta - g(\xi, R)), \\ u_0 &= \sqrt{f(\xi, R) + u_1^2} = \sqrt{f(\xi, R)} \cosh(\eta - g(\xi, R)). \end{aligned}$$

Третья координата принимает вид $u_2 = \pm \sqrt{f^2(\xi, R) - R^2}$. Выбирая $f(\xi, R) = R^2 \cosh^2 \xi$, далее полагая $g(\xi, R) = 0$ и вводя обозначения τ_1 и τ_2 вместо ξ и η , получаем ортогональную эквидистантную систему:

$$u_0 = R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2, \quad u_1 = R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2, \quad u_2 = R \sinh \tau_1, \quad (37)$$

где $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ (см. рис. 4).

Выбирая $g(\xi, R) = -\xi/\alpha$, получаем неортогональные эквидистантные координаты:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \cosh \tau_1 \cosh(\tau_2 + R\tau_1/\alpha), \\ u_1 &= R \cosh \tau_1 \sinh(\tau_2 + R\tau_1/\alpha), \\ u_2 &= R \sinh \tau_1. \end{aligned} \quad (38)$$

26. На однополостном гиперboloиде \tilde{H}_2 функция $f(\xi, R)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При $f(\xi, R) > 0$ ($|u_2| \geq R$) имеем $u_0 = \sqrt{f(\xi, R)} \cosh(\eta - g(\xi, R))$, но теперь $u_2 = \pm \sqrt{f(\xi, R) + R^2}$.

Выбирая $f(\xi, R) = R^2 \sinh^2 \xi$ и $g(\xi, R) = 0$, переименовывая (ξ, η) на (τ_1, τ_2) , получаем ортогональные координаты типа Ia, которые покрывают область $|u_2| \geq R$ на \tilde{H}_2 (см. рис. 23):

$$\begin{aligned} u_0 &= R \sinh \tau_1 \cosh \tau_2, \\ u_1 &= R \sinh \tau_1 \sinh \tau_2, \\ u_2 &= \pm R \cosh \tau_1, \end{aligned} \quad (39)$$

где $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$.

Аналогично, полагая $g(\xi, R) = \ln [R\xi/\alpha]$, получаем неортогональную систему типа Ia ($\tau_1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} u_0 &= R \sinh \tau_1 \cosh(\tau_2 - \ln [R\tau_1/\alpha]), \\ u_1 &= R \sinh \tau_1 \sinh(\tau_2 - \ln [R\tau_1/\alpha]), \\ u_2 &= \pm R \cosh \tau_1. \end{aligned} \quad (40)$$

В случае, когда $u_0^2 - u_1^2 \leq 0$ или $|u_2| \leq R$, соотношения в (36) принимают вид

$$f(\xi, R) = u_1^2 - u_0^2 > 0, \quad \eta = \cosh^{-1} \frac{u_1}{\sqrt{f(\xi, R)}} + g(\xi, R). \quad (41)$$

По аналогии с предыдущим случаем, полагая $f(\xi, R) = R^2 \sin^2 \xi$, приходим к эквидистантным координатам, покрывающим зону $|u_2| \leq R$ на \tilde{H}_2 (см. рис. 23):

$$u_0 = R \sin \varphi \sinh \tau, \quad u_1 = R \sin \varphi \cosh \tau, \quad u_2 = R \cos \varphi, \quad (42)$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Такую систему назовем эквидистантной системой типа Ib. Для неортогональных координат типа Ib выбираем $g(\xi, R) = \ln [R\xi/\alpha]$ и получаем ($\varphi \neq 0$):

$$\begin{aligned} u_0 &= R \sin \varphi \sinh (\tau - \ln [R\varphi/\alpha]), \\ u_1 &= R \sin \varphi \cosh (\tau - \ln [R\varphi/\alpha]), \\ u_2 &= R \cos \varphi. \end{aligned} \tag{43}$$

Отметим, что система (42) может быть получена из (39) заменой $\tau_1 = -i\varphi$, $\tau_2 = \tau + i\pi/2$. Кроме того, разница между системами типа Ia и Ib проявляется в разных контракциях, показанных ниже.

Вместе с эквидистантными координатами типа Ia и Ib можно ввести системы типа Па ($|u_1| \geq R$) и Пб ($|u_1| \leq R$), в которых диагоналізується оператор $S^{(1)} = K_1$. В результате приходим к системам, подобным (39), (42), с точностью до перестановки $u_1 \leftrightarrow u_2$.

В качестве неортогональных координат типа Пб можно рассмотреть, например, следующие:

$$\begin{aligned} u_0 &= -R \cos \varphi \sinh (\tau + R\varphi/\alpha), \\ u_1 &= R \sin \varphi, \\ u_2 &= -R \cos \varphi \cosh (\tau + R\varphi/\alpha). \end{aligned} \tag{44}$$

3. $S^{(1)} = K_1 + L$. Рассмотрим оператор $K_1 + L = (u_1 - u_0)\partial_{u_2} - u_2\partial_{u_0} - u_2\partial_{u_1}$. Для приведения его к канонической форме ∂_η необходимо решить уравнения

$$\begin{aligned} (u_1 - u_0) \frac{\partial \xi}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_0} - u_2 \frac{\partial \xi}{\partial u_1} &= 0, \\ (u_1 - u_0) \frac{\partial \eta}{\partial u_2} - u_2 \frac{\partial \eta}{\partial u_0} - u_2 \frac{\partial \eta}{\partial u_1} &= 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Отсюда находим, что

$$f(\xi, R) = u_0 - u_1, \quad u_2 = g(\xi, R) - \eta f(\xi, R). \tag{46}$$

3а. Для верхней полости на H_2 имеем ортогональные разделяющие координаты (ξ, η) (полагаем $g = 0$):

$$\xi = u_0 - u_1 > 0, \quad \eta = \frac{u_2}{u_1 - u_0}. \tag{47}$$

Принимая во внимание (1) с $\epsilon = 1$ и полагая $\eta = -\tilde{x}$, $\xi = R/\tilde{y}$, получаем ортогональную орициклическую систему координат (см. рис. 6):

$$u_0 = R \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2\tilde{y}}, \quad u_1 = R \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1}{2\tilde{y}}, \quad u_2 = R \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}, \tag{48}$$

где $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{y} > 0$.

Для неортогональной системы координат берем $f(\xi, R) = R/\xi$, $g(\xi, R) = R(1 - 1/\xi)$. Обозначая $\xi = \tilde{y}$, $\eta = -\tilde{x}$, получаем

$$\begin{aligned} u_0 &= R \frac{(\tilde{x} + \tilde{y} - 1)^2 + \tilde{y}^2 + 1}{2\tilde{y}}, \\ u_1 &= R \frac{(\tilde{x} + \tilde{y} - 1)^2 + \tilde{y}^2 - 1}{2\tilde{y}}, \\ u_2 &= R \frac{\tilde{x} + \tilde{y} - 1}{\tilde{y}}. \end{aligned} \quad (49)$$

36. В случае однополостного гиперболоида ($\epsilon = -1$) получаем следующие орициклические координаты (см. рис. 28):

$$u_0 = R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1}{2\tilde{y}}, \quad u_1 = R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 1}{2\tilde{y}}, \quad u_2 = R \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}, \quad (50)$$

где $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $\tilde{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Неортогональная система координат при $f(\xi, R) = R\xi/2$, $g(\xi, R) = R$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{4} (\xi\eta^2 - 4\eta + \xi), \\ u_1 &= \frac{R}{4} (\xi\eta^2 - 4\eta - \xi), \\ u_2 &= R(1 - \xi\eta/2). \end{aligned} \quad (51)$$

Ясно, что можно ввести эквивалентные системам (48), (50), (51) координаты, в которых оператор $S^{(1)} = K_2 - L$ принимает диагональный вид. Эти системы получаются перестановкой координат u_1 и u_2 .

1.2. Классификация симметрий второго порядка. Теперь обратимся к операторам второго порядка $S \equiv S^{(2)}$ (9) из обертывающей алгебры для $so(2, 1)$:

$$S = aK_1^2 + b\{K_1, K_2\} + cK_2^2 + d\{K_1, L\} + e\{K_2, L\} + fL^2 \quad (52)$$

($\{X, Y\} = XY + YX$) с соответствующей квадратичной формой

$$M = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Под действием группы автоморфизмов A_3 элементы формы M преобразуются следующим образом:

$$M'_{K_1} = A_{K_1}^T M A_{K_1} = \tag{54}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \cosh a_1 + d \sinh a_1 & b \sinh a_1 + d \cosh a_1 \\ b \cosh a_1 + d \sinh a_1 & c \cosh^2 a_1 + e \sinh 2a_1 + f \sinh^2 a_1 & \frac{c+f}{2} \sinh 2a_1 + e \cosh 2a_1 \\ b \sinh a_1 + d \cosh a_1 & \frac{c+f}{2} \sinh 2a_1 + e \cosh 2a_1 & c \sinh^2 a_1 + e \sinh 2a_1 + f \cosh^2 a_1 \end{pmatrix},$$

$$M'_{K_2} = A_{K_2}^T M A_{K_2}, \tag{55}$$

$$M'_L = A_L^T M A_L, \tag{56}$$

где A^T — транспонированная матрица. Имеем два гиперболических (54), (55) и одно обычное (56) вращения.

Таким образом, задача сводится к классификации матриц M относительно действий (54)–(56) и линейной комбинации с оператором Казимира $C = K_1^2 + K_2^2 - L^2$:

$$M'_C = \alpha_1 M + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 M + \alpha_2 A_C, \tag{57}$$

где α_1 — ненулевая постоянная.

Инвариантами преобразований (54)–(56) являются следующие величины:

$$I_1 = a + c - f, \quad I_2 = A + C - F, \quad I_3 = \det M,$$

где A, B, C, \dots, F — миноры элементов a, b, c, \dots, f матрицы M соответственно.

Рассмотрим случай, когда $I_3 = 0$. Если это не так, то, используя преобразование (57), а именно $M'_C = M - \mu A_C$, где μ — это действительный корень уравнения $\det(M - \mu A_C) = 0$, сведем I_3 к нулю. При условии, что $\det M = 0$, для миноров матрицы M верны следующие соотношения:

$$CF = E^2, \quad AF = D^2, \quad AC = B^2 \tag{58}$$

и

$$aA - bB + dD = 0, \tag{59}$$

$$-bB + cC - eE = 0, \tag{60}$$

$$dD - eE + fF = 0. \tag{61}$$

Легко заметить, что преобразования (54)–(56) действуют на миноры так же, как на элементы матрицы M , т. е., если заменить a, b, c, \dots в (54)–(56) на

соответствующие миноры A, B, C, \dots , получим те же самые преобразования миноров.

Действуя вращением A_L на минор B , сведем его к нулю. Так как I_3 — инвариант группы A_3 , соотношения (58)–(61) верны и для преобразованных миноров. Тогда из (58) следует, что $AC = 0$. Рассмотрим возможные варианты.

Случай 1. Если $A = 0$, то $D = 0$ из (58). Есть два варианта.

1. $I_2 \neq 0$, т. е. $C - F \neq 0$, тогда, выбрав подходящий параметр $a_1 = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{F + C - 2E}{F + C + 2E} \right)$, минор E можно свести к нулю, а миноры A, B, D останутся нулевыми. Такое значение параметра существует, так как $(F + C - 2E)(F + C + 2E) = (C - F)^2 > 0$. Далее, из (58) получаем $CF = 0$. Тогда:

• либо $C = 0, F \neq 0$ и $f = 0$ из (61), так что $e = 0$ из $A = 0$ и $d = 0$ из $C = 0$. Далее обнуляем b вращением A_L и окончательно получаем

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{F=ac \neq 0};$$

• либо $C \neq 0, F = 0$, тогда $c = 0$ из (60), так что $e = 0$ из $A = 0$ и $b = 0$ из $F = 0$. Получаем

$$M_2 = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \end{pmatrix} \Bigg|_{C=af-d^2 \neq 0}.$$

2. Пусть $I_2 = 0$, т. е. $C = F$.

• Если $C = F = 0$, то $E = 0$ из (58) и все миноры равны нулю. В этом случае автоморфизмы не могут изменить ни один минор, но все еще действуют на элементы матрицы M . Подходящим вращением A_L элемент b сводится к нулю. Если $a \neq 0$, то $c = 0$ из $F = 0$, $e = 0$ из $E = 0$, и получаем форму M_2 с условием $C = 0$. Если $a = 0$, то $d = 0$ из $C = 0$, и вращением A_L с $a_3 = \pi/2$ получим ту же самую форму M_2 .

• Если $C = F \neq 0$, то $f = c$ из (60), (61), так что $e = \pm c$ из $A = 0$ и $d = \pm b$ из $C = F$. Используя отражения, сводим элементы с верхним знаком к элементам с нижним знаком и получаем форму

$$M_3 = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ b & c & -c \\ -b & -c & c \end{pmatrix} \Bigg|_{ac \neq b^2}.$$

Случай 2. При $A \neq 0$ имеем $C = 0$ из (58), так как $B = 0$, а минор $E = 0$ в силу (58). Тогда:

• либо $I_2 \neq 0$, т.е. $A - F \neq 0$. Выбирая $a_2 = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{A + F - 2D}{A + F + 2D} \right)$, сводим минор D к нулю, а миноры C, B, E остаются нулевыми. Такой параметр a_2 в силу того, что $(A + F - 2D)(A + F + 2D) = (A - F)^2 > 0$. Тогда из (58) получаем $AF = 0$, так что $F = 0$. Все миноры, за исключением A , равны нулю, поэтому $a = 0$ из (59). Тогда $d = 0$ из $C = 0$, а $b = 0$ из $F = 0$. Полученная форма сводится вращением A_L с $a_3 = \pi/2$ к M_2 ;

• либо $I_2 = A - F = 0$, поэтому $A = F \neq 0$. Тогда $f = a$ из (59), (60), а $d = \pm a$ из $C = 0$ и $b = \pm e$ из $A = F$. Используя отражения, сводим элементы с верхним знаком к элементам с нижним знаком и получаем форму

$$M_4 = \left(\begin{array}{ccc} a & b & -a \\ b & c & -b \\ -a & -b & a \end{array} \right) \Big|_{ac \neq b^2}. \quad (62)$$

Отметим, что

- 1) вращением A_L с $a_3 = \pi/2$ форма M_3 приводится к форме M_4 ;
- 2) форма M_1 с помощью (57) с $\alpha_1 = 1/c, \alpha_2 = -1$ сводится к форме M_2 с $a \neq -1, d = 0, f = 1$, так что существуют только две неподобные формы — M_2 (без всякого условия) и M_4 .

Проанализируем, какие операторы получатся из каждой формы.

1. M_4

Если в (62) $I_1 = c \neq 0$, то композицией $A_L \circ A_{K_1} \circ A_L$ с параметрами $\sin a_3 = \sigma/\sqrt{\sigma^2 + 4}, \sinh a_1 = -\sigma\sqrt{\sigma^2 + 4}/2, \sigma = -b/c$ получаем

$$\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & -a \\ 0 & c & 0 \\ -a & 0 & a \end{array} \right) \Big|_{ac \neq 0},$$

а деля на a и используя отражения, получаем операторы ($\gamma > 0$):

$$S_{EP} = (K_1 + L)^2 + \gamma K_2^2 \quad \text{при } ac > 0; \quad (63)$$

$$S_{HP} = (K_1 + L)^2 - \gamma K_2^2 \quad \text{при } ac < 0. \quad (64)$$

Если в (62) $I_1 = c = 0$, то $b \neq 0$. Используя ту же самую композицию $A_L \circ A_{K_1} \circ A_L$ с $\sigma = -a/(2b)$, получаем $a = 0$, а после применения отражений и деления на b получаем оператор

$$S_{SCP} = \{K_1, K_2\} + \{K_2, L\}. \quad (65)$$

2. M_2

В этом случае форма выглядит так:

$$M_2 = \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \end{array} \right) \cong \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & e \\ 0 & e & f \end{array} \right) = \widetilde{M}_2. \quad (66)$$

Здесь необходимо рассмотреть значение инварианта преобразования (55), а именно $J = (a + f)^2 - 4d^2$ для M_2 (или инварианта A_{K_1} : $\tilde{J} = (c + f)^2 - 4e^2$ для \tilde{M}_2).

1. Пусть $\tilde{J} = (c + f)^2 - 4e^2 > 0$, тогда $c + f \neq 0$, и гиперболическим вращением (54) с $\tanh 2a_1 = -2e/(c + f)$ можно обнулить e в \tilde{M}_2 .

Если $f = 0$, получаем оператор

$$S_{EQ} = K_2^2. \quad (67)$$

Если $f \neq 0$, то, деля на f , получаем форму

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{c} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Bigg|_{\tilde{J}=(\bar{c}+1)^2>0, \bar{c}\neq-1}. \quad (68)$$

При $\bar{c} = 0$ в (68) имеем оператор

$$S_{SPH} = L^2. \quad (69)$$

При $\bar{c} \neq 0$ из соотношения $\tilde{J} = (\bar{c} + 1)^2 > 0$ получаем $\bar{c} \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, \infty)$.

а) Если $\bar{c} > 0$ в (68), то, полагая $\bar{c} = \sinh^2 \beta$, $\beta \neq 0$, получаем оператор

$$S_E = L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2, \quad \beta \neq 0. \quad (70)$$

б) Если $\bar{c} < -1$, то, полагая $\bar{c}^2 = -1/\sin^2 \alpha$, $\sin^2 \alpha \neq 0, 1$ и умножая на $-\sin^2 \alpha$, получаем оператор

$$S_H = K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2, \quad \sin^2 \alpha \neq 0, 1. \quad (71)$$

в) Окончательно для значений $-1 < \bar{c} < 0$ можем взять $\bar{c} = -\tanh^2 \gamma$, $\gamma \neq 0$, и вращением (56) с $a_3 = \pi/2$ получаем

$$\left(\begin{array}{ccc} -\tanh^2 \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (72)$$

Применяя (57) к (72) с $\alpha_1 = \cosh^2 \gamma$, $\alpha_2 = \sinh^2 \gamma$, сводим предыдущую форму к случаю S_E . И не получаем нового оператора.

Применяя гиперболическое вращение (55) с $a_2 = \beta$ к оператору S_E и используя (57) с $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \sinh^2 \beta$, получаем повернутый оператор

$$S_{\bar{E}} = \cosh 2\beta L^2 + \frac{1}{2} \sinh 2\beta \{K_1, L\}, \quad \beta \neq 0. \quad (73)$$

2. $J = 0$, тогда $(a + f)^2 = 4d^2$, $d \neq 0$ (если $d = 0$, то $a = -f$ и имеем оператор S_H с $\sin^2 \alpha = 1$, но в этом случае $S_H - \Delta = K_2^2 - L^2 - (K_1^2 + K_2^2 - L^2) = -K_1^2 \sim K_2^2 = S_{EQ}$). Так что $|a + f| = 2|d|$ или при делении на d $|a + f| = 2$.

а) Если $I_1 = 0$, т.е. $a = f$ и $a = f = \pm 1$, то, используя отражения, имеем

$$S_{HO} = (K_1 + L)^2. \tag{74}$$

б) Если $I_1 \neq 0$, т.е. $a \neq f$, то можно положить $f = 2 - a$. Если это не так, то с помощью отражения это можно сделать, поэтому приходим к

$$\left(\begin{array}{ccc} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 - a \end{array} \right) \Bigg|_{a \neq 1}. \tag{75}$$

Далее, применяя (57) с $\alpha_2 = 1 - a$, $\alpha_1 = 1$, можно свести (75) к форме

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \gamma & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \tag{76}$$

где $\gamma = 1 - a \neq 0$, которая соответствует оператору $\gamma K_2^2 + (K_1 + L)^2$ и эквивалентна форме M_4 с $b = 0$.

3. $J = (a + f)^2 - 4d^2 < 0$, $d \neq 0$, то с использованием (55) можно получить $a = -f$, тогда, применяя (57) с $\alpha_1 = 1/d$, $\alpha_2 = -a/d$, имеем

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

что соответствует оператору S_{SH} , если положить $c = \sinh 2\beta$:

$$S_{SH} = \sinh 2\beta K_2^2 + \{K_1, L\}. \tag{77}$$

Таким образом, мы получили девять операторов второго порядка $S_\alpha^{(2)}$, принадлежащих обертывающей алгебре для алгебры $so(2, 1)$. Каждый из них представляет неподобный класс относительно группы внешних автоморфизмов A_3 .

1.3. Симметрии второго порядка и неподгрупповые системы координат на двухмерных гиперлоидах. В этом пункте дадим краткое описание метода одновременной диагонализации двух операторов второго порядка: Δ_{LB} и $S_\alpha^{(2)}$ (см. также обзор [38]). Для упрощения изложения воспользуемся аналогией с классической механикой. Как известно, на пространствах постоянной

кривизны уравнения Шредингера и Гамильтона–Якоби одновременно допускают разделение переменных в одних и тех же системах координат. Выберем в гиперболическом пространстве (1) некоторую локальную систему координат $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ с заданной метрикой (6). В этой системе координат классический гамильтониан, описывающий свободное движение, имеет вид

$$\mathcal{H}(\xi, p) = g^{ik} p_i p_k, \quad i, k = 1, 2, \quad (78)$$

где p_i — моменты, классически сопряженные координатам ξ^i . Предположим, что существует дополнительный квадратичный интеграл движения $\mathcal{S}(\xi, p)$, находящийся в инволюции с гамильтонианом (78):

$$\mathcal{S}(\xi, p) = a^{ik}(\xi) p_i p_k, \quad a^{ik} = a^{ki}. \quad (79)$$

Аналогично свободное движение в квантовой механике описывается двумя коммутирующими операторами, а именно гамильтонианом и квадратичным интегралом движения:

$$H = \Delta_{LB} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g} a^{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \quad i, k = 1, 2. \quad (80)$$

Поставим задачу отыскания всех ортогональных систем координат (λ_1, λ_2) , допускающих в классической механике аддитивное разделение переменных, связанное с уравнениями $\mathcal{H}(\xi, p) = \mathcal{E}$ и $\mathcal{S}(\xi, p) = \mu$. Соответственно, в случае квантовой механики для уравнений $H\Psi = \mathcal{E}\Psi$ и $S\Psi = \mu\Psi$, где μ — некая постоянная разделения, имеет место мультипликативное разделение переменных.

Вообще говоря, такая система координат может быть легко определена из условия одновременного сведения двух квадратичных форм \mathcal{H} и \mathcal{S} к каноническому виду, в котором матрицы g^{ik} и a^{ik} диагональные. Для этого, в соответствии с общей теорией, необходимо решить характеристическое уравнение

$$\det(a^{ik} - \lambda g^{ik}) = 0, \quad i, k = 1, 2. \quad (81)$$

В случае, когда одна из форм, например $\mathcal{H}(\xi, p)$, является положительно определенной, в силу известной теоремы из алгебры корни λ_1 и λ_2 являются действительными и различными. Кроме того, форма $\mathcal{H}(\xi, p)$ сводится к нормальному виду (все коэффициенты равны единице), а форма $\mathcal{S}(\xi, p)$ — к диагональному (или каноническому, см. [78, с. 219]). Таким образом, новые ортогональные координаты можно определить как функции корней λ_1 и λ_2 : $u = u(\lambda_1)$ и $v = v(\lambda_2)$. Если ни одна из квадратичных форм не является положительно определенной, то условие (81) не гарантирует существования действительных и различных собственных значений. Может случиться, что

$\lambda_1 = \lambda_2$ или λ_1 и λ_2 действительны только в некоторой области пространства и не параметризуют весь гиперboloид (1). Мы увидим, что такая ситуация складывается при классификации систем координат на однополостном гиперboloиде.

Выберем на двухполостном гиперboloиде (1) в качестве локальных координат $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ псевдосферические координаты (τ, φ) согласно (29). Компоненты метрического тензора g_{ik} в этой системе координат есть

$$\begin{aligned} g_{ik} &= R^2 \operatorname{diag}(1, \sinh^2 \tau), \\ g^{ik} &= R^{-2} \operatorname{diag}(1, 1/\sinh^2 \tau), \\ \sinh^2 \tau &= R^{-2}(u_1^2 + u_2^2). \end{aligned} \quad (82)$$

Тогда классический гамильтониан (78) принимает вид

$$\mathcal{H} = g^{ik} p_i p_k = \frac{1}{R^2} \left(p_\tau^2 + \frac{1}{\sinh^2 \tau} p_\varphi^2 \right) = \frac{1}{R^2} \left(p_\tau^2 + \frac{R^2}{u_1^2 + u_2^2} p_\varphi^2 \right), \quad (83)$$

а симметрии K_1, K_2, L в координатах объемлющего пространства выражаются как

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} p_\tau - \frac{u_0 u_1}{u_1^2 + u_2^2} p_\varphi, \\ K_2 &= -\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} p_\tau + \frac{u_0 u_2}{u_1^2 + u_2^2} p_\varphi, \quad L = p_\varphi, \end{aligned} \quad (84)$$

где импульсы p_τ, p_φ классически сопряжены координатам (τ, φ) .

В случае однополостного гиперboloида $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = -R^2$ используем псевдосферические координаты, определенные формулами (31). Компоненты метрического тензора определяются соотношениями

$$g_{ik} = R^2 \operatorname{diag}(1, -\cosh^2 \tau), \quad g^{ik} = R^{-2} \operatorname{diag}(1, -1/\cosh^2 \tau). \quad (85)$$

Операторы K_1, K_2, L формально определяются формулами (84), однако классический гамильтониан (78) приобретает другой вид:

$$\mathcal{H} = g^{ik} p_i p_k = \frac{1}{R^2} \left(p_\tau^2 - \frac{1}{\cosh^2 \tau} p_\varphi^2 \right) = \frac{1}{R^2} \left(p_\tau^2 - \frac{R^2}{u_1^2 + u_2^2} p_\varphi^2 \right). \quad (86)$$

Используя выражения (84), запишем полином $S_\alpha^{(2)}$ в виде квадратичной формы относительно импульсов (p_τ, p_φ) :

$$S_\alpha^{(2)} = A p_\tau^2 + 2B p_\tau p_\varphi + C p_\varphi^2, \quad (87)$$

в котором коэффициенты A , B , C являются функциями переменных (τ, φ) или переменных объемлющего пространства (u_0, u_1, u_2) . Далее будем работать в координатной системе пространства (u_0, u_1, u_2) как наиболее универсальной.

Таким образом, необходимо диагонализировать матрицу, соответствующую квадратичной форме (87), определяя собственные значения из уравнения (81)

$$\det(a^{ik} - \lambda g^{ik}) = \begin{vmatrix} A - \frac{\lambda}{g_{11}} & B \\ B & C - \frac{\lambda}{g_{22}} \end{vmatrix} = 0, \quad (88)$$

которое соответствует системе двух алгебраических уравнений

$$\lambda_1 + \lambda_2 = Ag_{11} + Cg_{22}, \quad \lambda_1 \lambda_2 = (AC - B^2) g_{11} g_{22} \quad (89)$$

и имеет два действительных различных корня при выполнении условия

$$(Ag_{11} - Cg_{22})^2 + 4B^2 g_{11} g_{22} > 0. \quad (90)$$

Решая систему (89) с учетом соотношения $u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = \epsilon R^2$, $\epsilon = \pm 1$, можно найти ортогональную систему координат, допускающую разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби или Гельмгольца на гиперboloидах и соответствующую одному из операторов, определенному в п. 1.2. Отметим, что для двухполостного гиперboloида имеем $g_{11} g_{22} > 0$ и неравенство (90) выполняется автоматически. Таким образом, существуют два действительных различных корня: λ_1 и λ_2 . Соответствующая проблема для однополостного гиперboloида более сложная. Может случиться, что λ_1 и λ_2 не будут являться действительными на всем гиперboloиде \tilde{H}_2 , поэтому координатная сетка не будет покрывать все пространство. Ниже подробно опишем все возможные системы координат, индуцируемые операторами второго порядка $S_\alpha^{(2)}$. Для каждого отдельного оператора $S_\alpha^{(2)}$ будем следовать обозначениям, принятым в работе [65]: эквидистантным координатам $S_{EQ} = K_2^2$, сферическим $S_{SPH} = L^2$, орициклическим $S_{HO} = (K_1 + L)^2$, полуциркулярно-параболическим S_{SCP} , эллиптико-параболическим S_{EP} , гиперbolo-параболическим S_{HP} , эллиптическим S_E ($S_{\bar{E}}$ для повернутых эллиптических координат), гиперболическим S_H и S_{SH} для полугиперболических координат. Три оператора (S_{EQ} , S_{SPH} и S_{HO}) являются квадратами операторов первого порядка и определяют подгрупповые системы. Остальные шесть операторов соответствуют неподгрупповым системам координат.

Пять операторов (S_{EP} , S_{HP} , S_E ($S_{\bar{E}}$), S_H и S_{SH}) содержат некий параметр, входящий в определение системы координат, который обозначим как γ . В пределе $\gamma \rightarrow 0$ или $\gamma \rightarrow \infty$ оператор $S_\alpha^{(2)}$ существенно упрощается

и система координат обычно вырождается в более простую подгрупповую систему*. Исключением является система координат, связанная с оператором $S_{\text{СФР}}$.

1.4. Полугиперболическая система координат (SH)

1. Вначале рассмотрим двухполостный гиперboloид. Запишем оператор $S_{\text{SH}} = \sinh 2\beta K_2^2 + \{K_1, L\}$ в виде (87). Используя (82), получим систему (89)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2u_0u_1 + c(u_1^2 - u_0^2), \quad \lambda_1\lambda_2 = -R^2(u_2^2 + 2cu_0u_1) \quad (91)$$

с $c = \sinh 2\beta$. Решение (91) дает алгебраическую форму полугиперболической системы координат в терминах независимых переменных λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} u_0^2 &= \frac{R^2}{2(c^2 + 1)} \left\{ \sqrt{(c^2 + 1) \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{R^4}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2^2}{R^4}\right)} + \right. \\ &\quad \left. + 1 - \frac{\lambda_1}{R^2} \frac{\lambda_2}{R^2} - c \left(\frac{\lambda_1}{R^2} + \frac{\lambda_2}{R^2}\right) \right\}, \\ u_1^2 &= \frac{R^2}{2(c^2 + 1)} \left\{ \sqrt{(c^2 + 1) \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{R^4}\right) \left(1 + \frac{\lambda_2^2}{R^4}\right)} - \right. \\ &\quad \left. - 1 + \frac{\lambda_1}{R^2} \frac{\lambda_2}{R^2} + c \left(\frac{\lambda_1}{R^2} + \frac{\lambda_2}{R^2}\right) \right\}, \\ u_2^2 &= -\frac{R^2}{c^2 + 1} \left(\frac{\lambda_1}{R^2} + c\right) \left(\frac{\lambda_2}{R^2} + c\right), \end{aligned} \quad (92)$$

где полагаем $\lambda_2/R^2 < -c < \lambda_1/R^2$. Из (92) очевидно, что связь между координатами (λ_1, λ_2) и декартовыми координатами (u_0, u_1, u_2) не является взаимно-однозначной. Каждому значению λ_1, λ_2 соответствует восемь точек $(\pm u_0, \pm u_1, \pm u_2)$ в объемлющем пространстве $E_{2,1}$.

Геометрически полугиперболическая система (92) состоит из двух семейств софокусных полугипербол (названия координатных кривых взяты из книги [79]). Расстояние между фокусами и базисом их эквидистант равно $2\beta R$. Безразмерный параметр $c = \sinh 2\beta$ определяет положение фокуса полугипербол на верхней полости гиперboloида (см. рис. 14). Можно получить его координаты, полагая $\lambda_1/R^2 \rightarrow -c$ и $\lambda_2/R^2 \rightarrow -c$, тогда $F(u_0, u_1, u_2) \equiv$

$$F \left(R \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + 1} + 1}}{\sqrt{2}}, -R \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + 1} - 1}}{\sqrt{2}}, 0 \right).$$

*Такого рода предельные переходы по сути не являются контракцией, так как описывают переходы внутри самого набора систем координат или, что то же самое, соответствуют предельным переходам в обертывающей алгебре $so(2, 1)$ (при операторах симметрии $S_\alpha^{(2)}$) и не затрагивают оператор Казимира группы $SO(2, 1)$.

Существуют два простых частных случая системы S_{SH} : $c = 0$ и $c = 1$. В первом случае фокус имеет координаты $F(R, 0, 0)$ и оператор симметрии принимает простой вид: $S_{\text{SH}} = \{K_1, L\}$. Такая система координат (92) может быть записана в новых переменных $\lambda_1/R^2 = \mu_1$ и $\lambda_2/R^2 = -\mu_2$:

$$\begin{aligned} u_0^2 &= \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2) + \mu_1\mu_2 + 1} \right\} = \\ &= \frac{R^2}{4} \left\{ \sqrt{(1 - i\mu_1)(1 + i\mu_2)} + \sqrt{(1 + i\mu_1)(1 - i\mu_2)} \right\}^2, \\ u_1^2 &= \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2) - \mu_1\mu_2 - 1} \right\} = \\ &= -\frac{R^2}{4} \left\{ \sqrt{(1 - i\mu_1)(1 + i\mu_2)} - \sqrt{(1 + i\mu_1)(1 - i\mu_2)} \right\}^2, \\ u_2^2 &= R^2\mu_1\mu_2, \end{aligned} \quad (93)$$

где $\mu_1, \mu_2 \geq 0$. Во втором случае $c = 1$ и $S_{\text{SH}} = K_2^2 + \{K_1, L\}$. Вводя безразмерные переменные $\lambda_1/R^2 = \sinh \tau_1$ и $\lambda_2/R^2 = \sinh \tau_2$ ($\sinh \tau_2 < -1 < \sinh \tau_1$), получаем тригонометрическую форму записи для системы координат S_{SH} :

$$\begin{aligned} u_0^2 &= \frac{R^2}{4} \left[\sqrt{2} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 - (\sinh \tau_1 + 1)(\sinh \tau_2 + 1) + 2 \right], \\ u_1^2 &= \frac{R^2}{4} \left[\sqrt{2} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 + (\sinh \tau_1 + 1)(\sinh \tau_2 + 1) - 2 \right], \\ u_2^2 &= -\frac{R^2}{2} (\sinh \tau_1 + 1)(\sinh \tau_2 + 1). \end{aligned} \quad (94)$$

Если положить $c = (a - \gamma)/\delta$, где α, δ, γ — некоторые постоянные, и ввести новые переменные $\lambda_1 = R^2((a - \rho_1)/\delta - c)$ и $\lambda_2 = R^2((a - \rho_2)/\delta - c)$, полугиперболическая система координат (92) примет известную форму, указанную, например, в работах [48, 65].

2. В случае однополостного гиперболоида вместо уравнений (91) имеем систему уравнений

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2u_0u_1 + c(u_1^2 - u_0^2), \quad \lambda_1\lambda_2 = R^2(u_2^2 + 2cu_0u_1). \quad (95)$$

На самом деле, уравнения (91) и (95) связаны преобразованием $R \rightarrow iR$. Поэтому корни λ_1, λ_2 действительны и различны, если выполняется неравенство (90)

$$|2u_0u_1 + c(u_1^2 - u_0^2)| > 2R\sqrt{u_2^2 + 2cu_0u_1}, \quad (96)$$

и комплексные в противном случае. Используя подстановку $\lambda_1/R^2 = \sinh \tau_1$ и $\lambda_2/R^2 = \sinh \tau_2$, получим аналог тригонометрической формы полугиперболических координат (см. рис. 37):

$$\begin{aligned}
 u_0^2 &= \frac{R^2}{2(c^2+1)} \left\{ \sqrt{c^2+1} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 + (\sinh \tau_1 - c)(\sinh \tau_2 - c) - c^2 - 1 \right\}, \\
 u_1^2 &= \frac{R^2}{2(c^2+1)} \left\{ \sqrt{c^2+1} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2 - (\sinh \tau_1 - c)(\sinh \tau_2 - c) + c^2 + 1 \right\}, \\
 u_2^2 &= \frac{R^2}{c^2+1} (\sinh \tau_1 - c)(\sinh \tau_2 - c),
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

где $\sinh \tau_1, \sinh \tau_2 \leq c$ (SH-система типа I) или $\sinh \tau_1, \sinh \tau_2 \geq c$ (SH-система типа II). Координатная сетка имеет две пары огибающих, заданных равенствами $|2u_0u_1 + c(u_1^2 - u_0^2)| = 2R\sqrt{u_2^2 + 2cu_0u_1}$. Точки их пересечения имеют координаты $\left(\pm R \frac{\sqrt{\sqrt{c^2+1}-1}}{\sqrt{2}}, \mp R \frac{\sqrt{\sqrt{c^2+1}+1}}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Данные огибающие определяют интервалы изменения параметров для координатных линий $\tau_i = \text{const}$. Например, если взять точки огибающей за начальные значения для семейства $\tau_1 = \text{const}$, то они будут конечными значениями для другого семейства: $\tau_2 = \text{const}$.

Отметим, что система (94) может быть получена из (97) простой заменой $R \rightarrow iR, \tau_1 \rightarrow \tau_1 - i\pi$ и $\tau_2 \rightarrow -\tau_2$.

В случае $c = 0$ неравенство (96) эквивалентно $|u_1| \geq R$. Замена переменных $\mu_1 = \sinh \tau_1, \mu_2 = \sinh \tau_2$ приводит к следующей параметризации:

$$\begin{aligned}
 u_0^2 &= \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} + \mu_1\mu_2 - 1 \right\}, \\
 u_1^2 &= \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} - \mu_1\mu_2 + 1 \right\}, \\
 u_2^2 &= R^2 \mu_1\mu_2,
 \end{aligned}
 \tag{98}$$

где $\mu_1, \mu_2 \geq 0$.

3. При больших значениях параметра $c \rightarrow \infty$ ($\beta \rightarrow \infty$) фокус стремится в бесконечность и SH-система вырождается в эквидистантную. Для оператора симметрии S_{SH} имеем $S_{SH}/\sinh 2\beta = K_2^2 + \{K_1, L\}/\sinh 2\beta \rightarrow K_2^2$. Так, при $\beta \rightarrow \infty$ переменная $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ и в то же время интервал для λ_1 расширяется до $\lambda_1 \in (-\infty, \infty)$. Полагая $-\lambda_2/\sinh 2\beta = R^2 \cosh^2 \tau_1, \lambda_1 = R^2 \sinh 2\tau_2$ в (92) и устремляя $\beta \rightarrow \infty$, приходим к эквидистантной системе координат в виде (37).

1.5. Полуциркулярно-параболическая система координат (SCP)

1. Система уравнений (89) для $S_{SCP} = \{K_1, K_2\} + \{K_2, L\}$ на двухполостном гиперboloиде имеет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2u_2(u_1 - u_0), \quad \lambda_1\lambda_2 = -R^2(u_1 - u_0)^2. \quad (99)$$

Решая уравнения (99) и полагая $\lambda_1 = -R^2/\xi^2$, $\lambda_2 = R^2/\eta^2$, приходим к полуциркулярно-параболической системе координат (см. рис. 20):

$$u_0 = R \frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 + 4}{8\xi\eta}, \quad u_1 = R \frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 - 4}{8\xi\eta}, \quad u_2 = R \frac{\eta^2 - \xi^2}{2\xi\eta}, \quad (100)$$

где $\xi, \eta > 0$.

2. Для однополостного гиперboloида имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2u_2(u_1 - u_0), \quad \lambda_1\lambda_2 = R^2(u_1 - u_0)^2. \quad (101)$$

В этом случае координатная сетка покрывает только часть гиперboloида $|u_2| > R$ (см. рис. 45) и задается системой

$$u_0 = R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 + 4}{8\xi\eta}, \quad u_1 = R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 - 4}{8\xi\eta}, \quad u_2 = \pm R \frac{\eta^2 + \xi^2}{2\xi\eta}, \quad (102)$$

где введены новые переменные: $\lambda_1 = R^2/\xi^2$, $\lambda_2 = R^2/\eta^2$; $\xi > 0$, $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Знак « \pm » перед u_2 соответствует случаю $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Отметим, что прямые $u_0 \pm u_1 = 0$, $|u_2| = R$ являются огибающими семейств координатных линий $\xi = \text{const}$ (или $\eta = \text{const}$). Для определения координат необходимо задать подходящий интервал. Так, точки огибающей могут быть взяты за начальные. Тогда, например, фиксируя кривую $\xi = \xi_0$, интервал для η будет $(-\infty, -\xi_0) \cup (\xi_0, +\infty)$.

1.6. Эллиптико-параболическая система координат (EP)

1. Рассмотрим оператор $S_{EP} = \gamma K_2^2 + (K_1 + L)^2$, $\gamma > 0$, для которого система (89) для двухполостного гиперboloида принимает вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (u_0 - u_1)^2 + \gamma(u_0^2 - u_1^2), \quad \lambda_1\lambda_2 = \gamma R^2(u_0 - u_1)^2 \quad (103)$$

и где предварительно поменяли знаки λ_i : $\lambda_i \rightarrow -\lambda_i$. Возьмем решение уравнений (103) в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma^3\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{\gamma-1}{R}\lambda_1\lambda_2 + \gamma R(\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\gamma^3\lambda_1\lambda_2}} \left(-\frac{\gamma+1}{R}\lambda_1\lambda_2 + \gamma R(\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_2^2 &= \frac{R^2}{\gamma^2} \left(\frac{\lambda_1}{R^2} - \gamma \right) \left(\gamma - \frac{\lambda_2}{R^2} \right), \end{aligned} \quad (104)$$

где $0 < \lambda_2/R^2 \leq \gamma \leq \lambda_1/R^2$. Полагая $\lambda_1 = R^2\gamma/\cos^2\theta$ и $\lambda_2 = R^2\gamma/\cosh^2 a$, $a \geq 0$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, получаем эллиптико-параболическую систему координат в тригонометрической форме (см. рис. 16):

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 a - \sin^2 \theta + \gamma}{2 \cos \theta \cosh a}, \\ u_1 &= \frac{R}{\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 a - \sin^2 \theta - \gamma}{2 \cos \theta \cosh a}, \\ u_2 &= R \tan \theta \tanh a. \end{aligned} \quad (105)$$

Геометрически безразмерный параметр γ определяет положение фокуса эллиптических парабол на H_2 . Можно получить его координаты, выбирая предел $\cos \theta \rightarrow 1$, $\cosh a \rightarrow 1$. Таким образом, получим

$$F(u_0, u_1, u_2) \equiv F\left(R\frac{\gamma+1}{2\sqrt{\gamma}}, R\frac{\gamma-1}{2\sqrt{\gamma}}, 0\right). \quad (106)$$

2. В случае однополостного гиперболоида вместо (103) имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (u_0 - u_1)^2 + \gamma(u_0^2 - u_1^2), \quad \lambda_1\lambda_2 = -\gamma R^2(u_0 - u_1)^2, \quad (107)$$

а соответствующая ей система координат принимает следующий вид (см. рис. 39):

$$\begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{1}{2\sqrt{-\gamma^3\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{1-\gamma}{R} \lambda_1\lambda_2 + \gamma R(\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_1 &= \pm \frac{1}{2\sqrt{-\gamma^3\lambda_1\lambda_2}} \left(\frac{1+\gamma}{R} \lambda_1\lambda_2 + \gamma R(\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_2^2 &= \frac{R^2}{\gamma^2} \left(\frac{\lambda_1}{R^2} + \gamma \right) \left(\frac{\lambda_2}{R^2} + \gamma \right), \end{aligned} \quad (108)$$

где $-\gamma \leq \lambda_2/R^2 < 0 < \lambda_1/R^2$ (или $-\gamma \leq \lambda_1/R^2 < 0 < \lambda_2/R^2$). Полагая $\lambda_2/(R^2\gamma) = -1/\cosh^2 \tau_1$ и $\lambda_1/(R^2\gamma) = 1/\sinh^2 \tau_2$, получаем эллиптико-параболическую систему координат в виде

$$u_{0,1} = \frac{R}{\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 \tau_1 - \cosh^2 \tau_2 \pm \gamma}{2 \cosh \tau_1 \sinh \tau_2}, \quad u_2 = R \tanh \tau_1 \coth \tau_2, \quad (109)$$

где $\tau_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Отметим, что в случае \tilde{H}_2 параметр γ является масштабным.

3. Эллиптико-параболическая система координат, являющаяся однопараметрической, включает два простых предельных случая: малое и большое значения параметра γ , когда координаты фокуса (106) на H_2 стремятся в бесконечность. При $\gamma \sim 0$ имеем $S_{EP} \sim (K_1 + L)^2$, в то время как при больших значениях γ — $S_{EP}/\gamma \sim K_2^2$. Поэтому EP-координаты вырождаются в орициклические и, соответственно, в эквидистантные. Так, из (103) имеем

$$\lambda_{1,2} = \frac{(u_0 - u_1)^2}{2} \times \left[1 + \gamma \frac{u_0 + u_1}{u_0 - u_1} \pm \sqrt{1 + 2\gamma \frac{u_2^2 - R^2}{(u_0 - u_1)^2} + \gamma^2 \frac{(u_0 + u_1)^2}{(u_0 - u_1)^2}} \right] \quad (110)$$

и в случае $\gamma \sim 0$ получаем $\cosh a \sim 1 + \gamma \tilde{x}^2/2$, $\cos \theta \sim \sqrt{\gamma} \tilde{y}$, а для больших значений $\gamma \sim \infty$ — $\cosh a \sim \sqrt{\gamma} e^{\tau_2}$, $\sin \theta \sim \tanh \tau_1$. Подставляя полученные результаты в (105), легко получить предельную орициклическую (48) и эквидистантную (37) системы координат. По аналогии можно показать, что EP-координаты на однополостном гиперboloиде вырождаются в те же системы координат.

Важно отметить, что EP-координаты, заданные с помощью формул (105) и (109), полностью покрывают гиперboloиды.

1.7. Гиперbolo-параболическая система координат (НР)

1. Для оператора $S_{НР} = -\gamma K_2^2 + (K_1 + L)^2$, $\gamma > 0$ (с точностью до замены $\gamma \rightarrow -\gamma$), получим те же уравнения, что и в (103). Решение имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{-1}{2\sqrt{-\gamma^3 \lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{1 + \gamma}{R} \lambda_1 \lambda_2 + \gamma R (\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_1 &= \frac{-1}{2\sqrt{-\gamma^3 \lambda_1 \lambda_2}} \left(\frac{1 - \gamma}{R} \lambda_1 \lambda_2 + \gamma R (\lambda_1 + \lambda_2) \right), \\ u_2^2 &= -\frac{R^2}{\gamma^2} \left(\frac{\lambda_1}{R^2} + \gamma \right) \left(\frac{\lambda_2}{R^2} + \gamma \right), \end{aligned} \quad (111)$$

где $\lambda_2/R^2 \leq -\gamma < 0 < \lambda_1/R^2$. Полагая $\lambda_1/R^2 = \gamma/\sinh^2 b$, $\lambda_2/R^2 = -\gamma/\sin^2 \theta$, можно записать гиперbolo-параболическую систему в тригонометрическом виде:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 b - \sin^2 \theta + \gamma}{2 \sin \theta \sinh b}, \\ u_1 &= \frac{R}{\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 b - \sin^2 \theta - \gamma}{2 \sin \theta \sinh b}, \\ u_2 &= R \cot \theta \coth b \end{aligned} \quad (112)$$

с $b > 0$, $\theta \in (0, \pi)$.

Геометрически координатная сетка для НР-системы координат образована софокальными гиперболическими параболой (см. рис.18). Однако в отличие от эллиптико-параболической системы координат фокус гиперболических парабол для НР мнимый. Формально это можно увидеть, сделав в формуле (106) простую замену: $\gamma \rightarrow -\gamma$. Таким образом, для НР-системы координат параметр γ является масштабным.

2. Легко заметить, что в случае однополостного гиперboloида НР-система координат не покрывает полностью \tilde{H}_2 , а только часть, задаваемую неравенством (90):

$$|u_0(1 - \gamma) - u_1(1 + \gamma)| > 2R\sqrt{\gamma}. \quad (113)$$

Решение уравнений

$$\lambda_1 + \lambda_2 = (u_0 - u_1)^2 - \gamma(u_0^2 - u_1^2), \quad \lambda_1 \lambda_2 = \gamma R^2 (u_0 - u_1)^2 \quad (114)$$

приводит к гипероло-параболической системе координат

$$\begin{aligned} u_0 &= \pm \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1+\gamma}{\gamma R} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - R \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right), \\ u_1 &= \pm \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \left(\frac{1-\gamma}{\gamma R} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} - R \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \right), \\ u_2^2 &= \frac{R^2}{\gamma^2} \left(\frac{\lambda_1}{R^2} - \gamma \right) \left(\frac{\lambda_2}{R^2} - \gamma \right). \end{aligned} \quad (115)$$

Система (115) делит покрываемую часть однополостного гиперboloида (113) на три непересекающиеся области: а) $0 < \gamma R^2 \leq \lambda_i$; б) $0 < \lambda_i \leq \gamma R^2$; в) $\lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$). В зависимости от области изменения значений λ_i НР-система координат может быть параметризована тремя различными способами.

а) $0 < \gamma R^2 \leq \lambda_i$. Переходя к новым переменным $\lambda_1 = \gamma R^2 / \sin^2 \theta$, $\lambda_2 = \gamma R^2 / \sin^2 \phi$, получаем

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \phi + \gamma}{\sin \theta \sin \phi}, \\ u_1 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \phi - \gamma}{\sin \theta \sin \phi}, \\ u_2 &= R \cot \theta \cot \phi, \end{aligned} \quad (116)$$

где $\theta \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$, $\phi \in (0, \pi)$. Назовем эту систему НР-системой типа I.

б) $0 < \lambda_i \leq \gamma R^2$. Полагая $\lambda_1 = \gamma R^2 \sin^2 \theta$, $\lambda_2 = \gamma R^2 \sin^2 \phi$, получаем систему типа II:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1 + \gamma \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin \theta \sin \phi}, \\ u_1 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1 - \gamma \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin \theta \sin \phi}, \\ u_2 &= R \cos \theta \cos \phi, \end{aligned} \quad (117)$$

где $\theta \in [-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$, $\phi \in (0, \pi)$.

в) $\lambda_i < 0$. Последняя система — НР-система типа III — имеет вид

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 \theta \cosh^2 \phi - 1 + \gamma \sinh^2 \theta \sinh^2 \phi}{\sinh \theta \sinh \phi}, \\ u_1 &= \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cosh^2 \theta \cosh^2 \phi - 1 - \gamma \sinh^2 \theta \sinh^2 \phi}{\sinh \theta \sinh \phi}, \\ u_2 &= \pm R \cosh \theta \cosh \phi, \end{aligned} \quad (118)$$

если выбрать $\lambda_1 = -\gamma R^2 \sinh^2 \theta$, $\lambda_2 = -\gamma R^2 \sinh^2 \phi$ и $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\phi > 0$.

Заметим, что если $(1 + \gamma)u_1 < u_0(1 - \gamma) - 2R\sqrt{\gamma}$, то система типа I определена в области $u_0 > -R(1 - \gamma)/(2\sqrt{\gamma})$, а координаты систем типа II и III описывают область $u_0 < -R(1 - \gamma)/(2\sqrt{\gamma})$. При $(1 + \gamma)u_1 > u_0(1 - \gamma) + 2R\sqrt{\gamma}$ для системы типа I имеем $u_0 < R(1 - \gamma)/(2\sqrt{\gamma})$, а для систем типа II, III выполняется $u_0 > R(1 - \gamma)/(2\sqrt{\gamma})$. Для избежания пересечения координатных линий одного семейства ($\theta = \text{const}$ или $\phi = \text{const}$) необходимо правильно определить интервалы изменения параметров. Например, можно взять точки предельной линии

$$|u_0(1 - \gamma) - u_1(1 + \gamma)| = 2R\sqrt{\gamma} \quad (119)$$

как начальные для ϕ и как конечные для θ (см. рис. 41).

Процесс вырождения НР-координат при $\gamma \sim 0$ или $\gamma \sim \infty$ подобен ЕР-системе. В предельных случаях получаем орициклическую и эквидистантную системы.

1.8. Эллиптическая система координат (Е)

1. Для оператора $S_E = L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2$ алгебраическая система (89) принимает вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -u_1^2 - u_2^2 \cosh^2 \beta - R^2 \sinh^2 \beta, \quad \lambda_1 \lambda_2 = R^2 u_1^2 \sinh^2 \beta. \quad (120)$$

Ее решение приводит к эллиптическим координатам

$$\begin{aligned} u_0^2 &= \frac{(\lambda_1 - R^2)(\lambda_2 - R^2)}{R^2 \cosh^2 \beta}, \\ u_1^2 &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{R^2 \sinh^2 \beta}, \\ u_2^2 &= -\frac{(\lambda_1 + R^2 \sinh^2 \beta)(\lambda_2 + R^2 \sinh^2 \beta)}{R^2 \sinh^2 \beta \cosh^2 \beta}, \end{aligned} \quad (121)$$

где $\lambda_1 \leq -R^2 \sinh^2 \beta \leq \lambda_2 \leq 0$. Для записи эллиптической системы координат в привычном виде можно использовать замену $\lambda_1/R^2 = (a_2 - \rho_1)/(a_2 - a_3)$, $\lambda_2/R^2 = (a_2 - \rho_2)/(a_2 - a_3)$ и $\sinh^2 \beta = (a_1 - a_2)/(a_2 - a_3)$, где a_i ($i = 1, 2, 3$) — некоторые постоянные, для которых выполняется $a_3 < a_2 < a_1$. В новых переменных эллиптическая система координат определяется как ($a_3 < a_2 \leq \rho_2 < a_1 \leq \rho_1$):

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \end{aligned} \quad (122)$$

и совпадает с известной в литературе алгебраической формой эллиптической системы координат на H_2 [38, 80]. Параметры a_i фиксируют области изменения эллиптических координат ρ_1 и ρ_2 и определяют положение фокусов для софокальных эллипсов и гипербол (см. рис. 8). Координаты фокусов можно легко получить, устремляя $\rho_1 \rightarrow a_1$ и $\rho_2 \rightarrow a_1$. Тогда $F_{1,2}(u_0, \pm u_1, u_2) \equiv F_{1,2}(R(1/k), \pm R(k'/k), 0)$, где

$$k'^2 = \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3}, \quad k^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}, \quad \sinh^2 \beta = \frac{k'^2}{k^2}, \quad (123)$$

а расстояние между фокусами равно $2\beta R$.

Наряду с алгебраической формой (122) возможно также определить эллиптическую систему координат в терминах функций Якоби. Такое определение освобождает нас от двузначности при описании положения точки на гиперboloиде H_2 , обусловленной наличием квадратов в (122).

Подставляя [38, 80]

$$\rho_1 = a_1 - (a_1 - a_3) \operatorname{dn}^2(a, k), \quad \rho_2 = a_1 - (a_1 - a_2) \operatorname{sn}^2(b, k') \quad (124)$$

в (122), где функции $\operatorname{sn}(a, k)$, $\operatorname{cn}(a, k)$ и $\operatorname{dn}(a, k)$ — эллиптические функции Якоби, связанные соотношениями $\operatorname{sn}^2(a, k) + \operatorname{cn}^2(a, k) = 1$ и $k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) +$

$\operatorname{dn}^2(a, k) = 1$, k и k' — модули эллиптической функции, причем $k^2 + k'^2 = 1$ (см. [81]), приходим к эллиптической системе координат в форме Якоби:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k'), \\ u_1 &= iR \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k'), \\ u_2 &= iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'), \end{aligned} \quad (125)$$

где $a \in (iK', iK' + 2K)$, $b \in [0, 4K')$, $K = K(k)$, $K' = K(k')$ — полные эллиптические интегралы с k и k' соответственно. Эллиптические функции Якоби как двоякопериодические функции вырождаются в тригонометрические или гиперболические функции, если один из периодов бесконечен, т. е. модуль k^2 равен нулю или единице [81]. В предельном случае $k^2 \rightarrow 1$, $k'^2 \rightarrow 0$ имеем $K \sim \infty$, $K' \sim \pi/2$ и

$$\operatorname{sn}(\mu, k) \rightarrow \tanh \mu, \quad \operatorname{dn}(\mu, k) \rightarrow \frac{1}{\cosh \mu}, \quad (126)$$

в то время как в пределе $k^2 \rightarrow 0$, $k'^2 \rightarrow 1$ получаем $K \sim \pi/2$, $K' \sim \infty$ и

$$\operatorname{sn}(\mu, k) \rightarrow \sin \mu, \quad \operatorname{dn}(\mu, k) \rightarrow 1. \quad (127)$$

2. Для однополостного гиперboloида неравенство (90) выполняется в всем пространстве. Таким образом, по аналогии можно построить эллиптическую систему координат (см. рис. 31):

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(a_3 - \rho_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(a_1 - \rho_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \end{aligned} \quad (128)$$

где $\rho_2 < a_3 < a_2 < \rho_1 < a_1$. Вводя функции Якоби, как в (124), можно переписать (128) в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= iR \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k'), \\ u_1 &= -R \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k'), \\ u_2 &= -R \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'), \end{aligned} \quad (129)$$

где $a \in [K, K + i4K')$ и $b \in (iK, iK + 2K')$.

3. В пределе $k \rightarrow 0$ (или $k \rightarrow 1$) возникают подгрупповые координаты. Действительно, в случае $\beta \rightarrow 0$ (или $k \rightarrow 1$) $S_E \sim L^2$, и получаем сферическую систему. В случае больших значений $\beta \sim \infty$ ($k \rightarrow 0$) $S_E / \sinh^2 \beta \sim K_2^2$, и приходим к эквидистантной системе. Чтобы отследить эти переходы на уровне координат, используем известные свойства функций Якоби и полных

эллиптических интегралов в (126) и (127). Сначала рассмотрим двухполостный гиперboloид. В предельном случае $k \rightarrow 1$, т. е. $k' \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(a, k) &\rightarrow \tanh(i\pi/2 + \mu) = \coth \mu \equiv \cosh \tau, \\ \operatorname{dn}(a, k) &\rightarrow \frac{1}{\cosh(i\pi/2 + \mu)} = -\frac{i}{\sinh \mu} \equiv \sinh \tau, \\ \operatorname{sn}(b, k') &\rightarrow \sin b \equiv \sin \varphi, \\ \operatorname{dn}(b, k') &\rightarrow 1, \end{aligned} \tag{130}$$

где $\tau \in (0, \infty)$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Поэтому эллиптическая система координат (125) на H_2 преобразуется в сферическую систему координат (29).

Для определения второго предельного перехода при $k' \rightarrow 1$, $k \rightarrow 0$ воспользуемся новыми переменными (ν, μ) , сделав предварительно замену $a = \nu + iK'$ и $b = \mu + K'$, где $\nu \in (0, 2K)$ и $\mu \in [-K', 3K']$. Используя формулы [81]

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(\nu + iK', k) &= \frac{1}{k \operatorname{sn}(\nu, k)}, \\ \operatorname{cn}(\nu + iK', k) &= -\frac{i \operatorname{dn}(\nu, k)}{k \operatorname{sn}(\nu, k)}, \\ \operatorname{dn}(\nu + iK', k) &= -i \frac{\operatorname{cn}(\nu, k)}{\operatorname{sn}(\nu, k)}, \\ \operatorname{sn}(\mu + K', k') &= \frac{\operatorname{cn}(\mu, k')}{\operatorname{dn}(\mu, k')}, \\ \operatorname{cn}(\mu + K', k') &= -k' \frac{\operatorname{sn}(\mu, k')}{\operatorname{dn}(\mu, k')}, \\ \operatorname{dn}(\mu + K', k') &= \frac{k'}{\operatorname{dn}(\mu, k')}, \end{aligned} \tag{131}$$

принимая во внимание (126) и (127), а также обозначая $\tau_2 = \mu$ и $\cosh \tau_1 = 1/\sin \nu$, легко восстановить из (125) эквидистантную систему (37).

Есть эквивалентный способ получить тот же результат. Рассмотрим интервалы $a \in [K - 2iK', K + 2iK']$, $b \in (-iK, iK)$ (соответствующие порядку $a_3 < a_2 \leq \rho_1 < a_1 \leq \rho_2$). Произведя замену переменных $a = \pi/2 + i\tau_2$, $b = -i \arctan(\sinh \tau_1)$, из (125) при $k' \rightarrow 1$, $k \rightarrow 0$ получим эквидистантные координаты (37).

Для однополостного гиперboloида, выбирая интервалы $a \in (-iK', iK')$, $b \in [0, 4K')$ (соответствующие $\rho_1 < a_3 < a_2 < \rho_2 < a_1$) и вводя новые переменные $a = \tanh^{-1}(-i \sinh \tau)$, $b = \varphi$, получаем переход системы (129) к псевдосферической (31) при $k \rightarrow 1$, $k' \rightarrow 0$.

В случае $k \rightarrow 0$, $k' \rightarrow 1$, вводя $a = \pi/2 + i\tau_2$, $b = \operatorname{arccoth}(\cosh \tau_1) + i\pi/2$ и рассматривая интервалы $a \in [K, K + i4K')$ и $b \in (iK, iK + 2K')$, из (129)

получаем эквидистантную систему типа I (39) с $u_2 \leq -R$, $\tau_1 \in \mathbb{R}$, $\tau_2 \in \mathbb{R}^+$. Для определения второй части $S_{\mathbb{E}Q}$ системы координат при $u_2 \geq R$ можно рассмотреть альтернативный интервал $b \in (iK - 2K', iK)$ и положить $b = \operatorname{arccoth}(-\cosh \tau_1) + i\pi/2$.

Наконец, полагая $a \in (-iK', iK')$, $b \in [0, 4K')$ и $a = i\tau$, $b = \operatorname{arccosh}(-1/\sin \varphi)$, из (129) восстанавливаем эквидистантную систему типа Ib (42) с $\varphi \in [\pi, 2\pi)$, которая соответствует области $u_1 \leq 0$.

1.9. Повернутая эллиптическая система координат ($\tilde{\mathbb{E}}$). Повернутая эллиптическая система координат соответствует оператору $S_{\tilde{\mathbb{E}}} = \cosh 2\beta L^2 + 1/2 \sinh 2\beta \{K_1, L\}$ (см. (73) и (16)) и может быть получена из (125) гиперболическим вращением на угол β относительно оси u_2 :

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & \sinh \beta & 0 \\ \sinh \beta & \cosh \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \cosh \beta + u_1 \sinh \beta \\ u_0 \sinh \beta + u_1 \cosh \beta \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (132)$$

Подставляя соотношения (125) в (132), получаем

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{R}{k} \{ \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k') + ik' \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k') \}, \\ u'_1 &= \frac{R}{k} \{ k' \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k') + i \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k') \}, \\ u'_2 &= iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'), \end{aligned} \quad (133)$$

где интервалы для a, b те же самые, что и в (125). Повернутая эллиптическая система координат была использована в статье [80] при разделении переменных в уравнении Шредингера для кулоновского потенциала на двухмерном гиперboloиде H_2 .

Для однополостного гиперboloида мы не вводим аналог этой системы, так как это не приводит к новым системам координат при контракции эллиптической системы координат на псевдоевклидовую плоскость $E_{1,1}$.

1.10. Гиперболическая система координат (\mathbb{H})

1. Для оператора $S_{\mathbb{H}} = K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2$, $\sin^2 \alpha \neq 0, 1$ система (89) имеет вид

$$\lambda_1 + \lambda_2 = u_1^2 \sin^2 \alpha - u_2^2 \cos^2 \alpha - R^2, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -R^2 u_1^2 \sin^2 \alpha \quad (134)$$

и ее решение

$$\begin{aligned} u_0^2 &= -\frac{(\lambda_1 + R^2 \sin^2 \alpha)(\lambda_2 + R^2 \sin^2 \alpha)}{R^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}, \\ u_1^2 &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{R^2 \sin^2 \alpha}, \\ u_2^2 &= -\frac{(\lambda_1 + R^2)(\lambda_2 + R^2)}{R^2 \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (135)$$

где $\lambda_1 \leq -R^2 < 0 \leq \lambda_2$. Переходя к новым постоянным $a_3 < a_2 < a_1$, так что $\sin^2 \alpha = (a_2 - a_3)/(a_1 - a_3)$, и вводя переменные $\lambda_2/R^2 = (a_3 - \rho_2)/(a_1 - a_3)$, $\lambda_1/R^2 = (a_3 - \rho_1)/(a_1 - a_3)$, получаем алгебраическую форму гиперболических координат (см. рис. 12)

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(a_3 - \rho_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} \end{aligned} \quad (136)$$

с $\rho_2 < a_3 < a_2 < a_1 < \rho_1$.

Подставляя (124) в (136), где модули k и k' определяются уравнениями (123), получаем

$$\begin{aligned} u_0 &= -R \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k'), \\ u_1 &= iR \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k'), \\ u_2 &= iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'), \end{aligned} \quad (137)$$

где $a \in (iK, iK + 2K)$, $b \in (iK, iK + 2K')$.

2. Случай однополостного гиперболоида более сложен. Из соотношения (90) получим, что гиперболическая система координат покрывает области гиперболоида, определенные неравенством

$$|u_1^2 \sin^2 \alpha - u_2^2 \cos^2 \alpha + R^2| > 2R|u_1 \sin \alpha|. \quad (138)$$

Аналогичная предыдущему случаю процедура приводит к гиперболической системе вида (см. рис. 33)

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}, \\ u_1^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}, \\ u_2^2 &= R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}, \end{aligned} \quad (139)$$

где необходимо выделить два случая, такие как:

- гиперболическая система координат типа I H_I^A : $\rho_1, \rho_2 < a_3 < a_2 < a_1$ (H_I^B : $a_3 < a_2 < a_1 < \rho_1, \rho_2$);
- гиперболическая система координат типа II H_{II}^A : $a_3 < \rho_1, \rho_2 < a_2 < a_1$ (H_{II}^B : $a_3 < a_2 < \rho_1, \rho_2 < a_1$).

Это означает, что покрытая часть однополостного гиперboloида (138) расщепляется на несколько областей, соответствующих каждому типу Н-системы, показанному на рис. 33.

Более удобно записать систему (139), используя функции Якоби (124) с теми же самыми модулями k и k' , заданными формулой (123). В итоге приходим к системе

$$\begin{aligned} u_0 &= -iR \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k'), \\ u_1 &= -R \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k'), \\ u_2 &= -R \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'). \end{aligned} \quad (140)$$

Легко проверить, что углы a, b для системы Н пробегают интервалы

$$\begin{aligned} I^A : a &\in (-iK', iK'), \quad b \in (iK, iK + 2K'), \\ I^B : a &\in (iK', iK' + 2K), \quad b \in (-iK, iK); \\ II^A : a &\in [0, 4K), \quad b \in [K', K' + i4K), \\ II^B : a &\in [K, K + i4K'), \quad b \in [0, 4K'). \end{aligned} \quad (141)$$

Отметим, что в общем случае (за исключением, когда $k = k'$) системы типа B не могут быть получены тригонометрическим вращением на угол $\pi/2$ относительно u_0 из систем типа A . Также отметим, что система I^A геометрически разделяется на четыре части в зависимости от знака u_0 и u_2 , поэтому необходимо отслеживать знак этих координат. То же самое верно и для системы I^B . Что касается системы II^A , то здесь имеем две части в зависимости от знака u_2 , а для II^B необходимо выбирать знак для u_1 . Семейство координатных кривых $\rho_i = \text{const}$ имеет в качестве огибающих прямые, заданные равенствами

$$|ku_1 \pm R| = k'|u_2|, \quad (142)$$

точки пересечения которых имеют координаты $(0, \pm kR, \pm k'R)$, $(\pm Rk/k', 0, \pm R/k')$, $(\pm Rk'/k \pm R/k, 0)$. Для избежания пересечения координатных кривых одного семейства необходимо выбирать точки огибающих как начальные точки для одного семейства и как конечные точки для другого. Например, для системы I^A при фиксированном $\rho_1 = \rho_{10} = \text{const}$ параметр ρ_2 должен принадлежать интервалу $\rho_2 \in (-\infty, \rho_{10})$, а для фиксированного $\rho_2 = \rho_{20} = \text{const}$ соответствующий интервал для ρ_1 будет $\rho_1 \in (\rho_{20}, a_3)$.

3. В предельном случае $k = \sin \alpha \rightarrow 0$ ($k' \rightarrow 1$) оператор $S_H = K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2$ переходит в эквидистантный K_2^2 . Если $k' \rightarrow 0$, то, рассматривая $S_{SH} - C = -K_1^2 + L^2 k'^2$, получаем повернутый эквидистантный оператор $-K_1^2$.

Для системы (137) на двухполостном гиперboloиде, полагая $a \in (2K - iK', 2K + iK')$, $b \in (-iK, iK)$ и вводя переменные $\alpha = \pi + i\tau_2$, $\beta = -i \arctan(\sinh \tau_1)$, в пределе $k \rightarrow 0$ получаем эквидистантную систему (37).

Рассмотрим теперь систему I^A (140) с $a \in (2K - iK', 2K + iK')$, $b \in (iK, iK + 2K')$. Вводя $\alpha = \pi + i\tau_2$, $\beta = \operatorname{arcth}(\cosh \tau_1) + i\pi/2$, получаем при $k \rightarrow 0$ эквидистантную систему координат типа Ia (39). Из Π^B с $\alpha = \pi/2 - i\tau$, $\beta = \tanh^{-1}(\cos \varphi)$ приходим к эквидистантной системе (42) для $a \in [K - 2iK', K + 2iK')$, $b \in [-2K', 2K')$ в том же самом пределе: $k \rightarrow 0$. По аналогии можно рассмотреть пределы для оставшихся систем (141) к соответствующим эквидистантным системам координат на \tilde{H}_2 .

1.11. Повернутая гиперболическая система координат (\tilde{H}). Как и в случае повернутой эллиптической системы координат на двухполостном гиперboloиде, для гиперboloида \tilde{H}_2 введем повернутую гиперболическую систему координат. Рассмотрим гиперболическое вращение (54) на угол $a_1 = \operatorname{arccosh}(1/\cos \alpha)$ относительно оси u_1 (см. (16)):

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \alpha} & 0 & -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} & 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_0 - u_2 \sin \alpha}{\cos \alpha} \\ u_1 \\ \frac{-u_0 \sin \alpha + u_2}{\cos \alpha} \end{pmatrix}, \quad (143)$$

тогда

$$K_2 = \frac{K'_2 + \sin \alpha L'}{\cos \alpha}, \quad L = \frac{\sin \alpha K'_2 + L'}{\cos \alpha} \quad (144)$$

и, соответственно, оператор S_H преобразуется в оператор

$$S_{\tilde{H}} = cK_2^2 + \{K_2, L\}, \quad c = \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sin^2 \alpha \neq 0, 1. \quad (145)$$

Для повернутой системы координат из (140) и (143) (см. рис. 35) получаем

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{R}{k'} [k \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k') - i \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')], \\ u'_1 &= -R \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k'), \\ u'_2 &= \frac{R}{k'} [ik \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k') - \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')]. \end{aligned} \quad (146)$$

Интервалы для переменных a и b указаны в (141).

2. КОНТРАКЦИИ НА ДВУХПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ

Введем параметр контракции $\kappa = R^{-1}$ в определение систем координат на двухполостном гиперboloиде H_2 . Для этого перейдем от координат объемлющего пространства (u_0, u_1, u_2) к неоднородным координатам Бельтрами (в литературе используется также термин «геодезические координаты»)

согласно формулам

$$x_\mu(R) = R \frac{u_\mu}{u_0} = \frac{R u_\mu}{\sqrt{R^2 + u_1^2 + u_2^2}}, \quad \mu = 1, 2. \quad (147)$$

Геометрически криволинейные координаты (x_1, x_2) являются отображением поверхности двухполостного гиперболоида H_2 на диск D_2 ($x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$), лежащий в касательной плоскости $u_0 = R$, с помощью прямых, проведенных из точки $(0, 0, 0)$, как показано на рис. 1. В евклидовой плоскости E_2 , ограниченной диском D_2 , координаты (147) образуют неортогональную систему координат. Метрика на диске D_2 , индуцированная метрикой на гиперболоиде, имеет простой вид:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{R^2}\right)^{-2} \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{x_2^2}{R^2}\right) dx_1^2 + 2 \frac{x_1 x_2}{R^2} dx_1 dx_2 + \left(1 - \frac{x_1^2}{R^2}\right) dx_2^2 \right]. \quad (148)$$

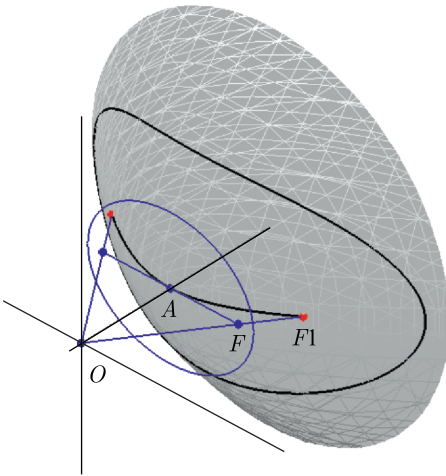


Рис. 1. Проективная плоскость D_2 ($x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$), касательная к верхней полости гиперболоида в точке $u_0 = R$. С помощью прямых OF_1 реализуется отображение точек верхней полости гиперболоида F_1 в точку диска $F \in D_2$

Зафиксируем положение точки F_1 (и тем самым точки F на диске D_2), как показано на рис. 1. В пределе $\kappa \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) диск D_2 расширяется до евклидовой плоскости E_2 . Криволинейные координаты (x_1, x_2) на диске D_2 , как следует из самого определения, остаются конечными и переходят в обычные прямолинейные декартовы координаты (x, y) . Метрика (148) при этом преобразуется в метрику, которая описывает евклидову плоскость E_2 : $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Таким образом, использование бельтрамиевых координат (x_1, x_2) позволяет в явном виде проследить предельный переход $R \rightarrow \infty$ от декартовой системы координат, описывающей положение точки на гиперболоиде H_2 в объемлющем пространстве (u_0, u_1, u_2) , к декартовой системе координат на плоскости E_2 .

Для описания предельного перехода в системах координат, заданных на гиперболоиде H_2 , удобно первоначально определить систему координат, в ко-

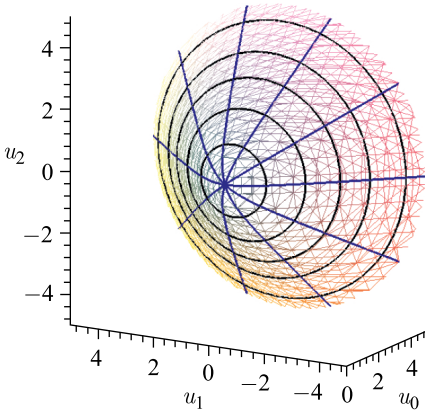


Рис. 2. Псевдосферическая система координат, определенная на верхней полости гиперболоида

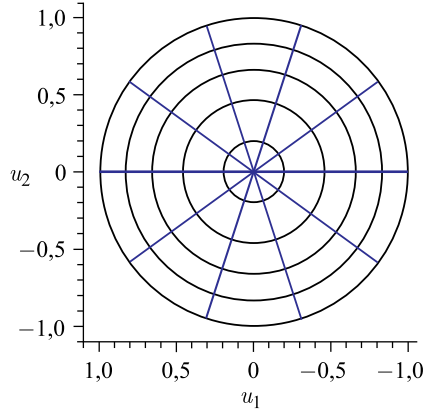


Рис. 3. Проекция псевдосферической системы координат на диск D_2

торой только одна из переменных содержит в явном виде параметр контракции. Такую систему координат будем называть геодезической. Легко заметить, что в качестве геодезической системы координат на H_2 выступает псевдосферическая система координат (29) (рис. 2). Действительно, из рис. 3 видно, что проекция координатных линий псевдосферической системы координат на диск D_2 образована концентрическими кругами и радиальными прямыми, проходящими через начало координат, и локально повторяет координатную сетку, соответствующую полярной системе координат в двумерном евклидовом пространстве E_2 . Таким образом, только гиперболический угол τ содержит параметр контракции $\kappa = 1/R$. В дальнейшем для вычисления асимптотического поведения независимых координат, определяющих различные криволинейные системы координат на H_2 при контракции $R \rightarrow \infty$, используем их связь с углами в псевдосферической системе координат. Данные о системах координат в евклидовой плоскости E_2 представлены в табл. 3 в приложении.

Используя неоднородные координаты Бельтрами (147), также можно проследить за контракцией алгебры $so(2, 1)$ при $R \rightarrow \infty$. Введем новые операторы (π_1, π_2, L) согласно

$$\begin{aligned}
 -\frac{K_1}{R} &\equiv \pi_2 = \partial_{x_2} - \frac{x_2}{R^2}(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}), \\
 -\frac{K_2}{R} &\equiv \pi_1 = \partial_{x_1} - \frac{x_1}{R^2}(x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2}), \\
 L &\equiv M = x_1\partial_{x_2} - x_2\partial_{x_1} = x_1\pi_2 - x_2\pi_1
 \end{aligned}
 \tag{149}$$

и представим коммутационные соотношения (3) в виде

$$[\pi_1, \pi_2] = \frac{L}{R^2}, \quad [\pi_1, L] = \pi_2, \quad [L, \pi_2] = \pi_1. \quad (150)$$

Отсюда следует, что при $R \rightarrow \infty$ алгебра $so(2, 1)$ контрактуется к некоторой алгебре, которая изоморфна алгебре $e(2)$, а моменты π_i ($i = 1, 2$) переходят в $p_i = \partial_{x_i}$ ($x_1 = x, x_2 = y$). Оператор Лапласа–Бельтрами на гиперboloиде H_2 преобразуется в обычный оператор Лапласа на плоскости E_2 :

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2}(K_1^2 + K_2^2 - L^2) = \pi_1^2 + \pi_2^2 - \frac{M^2}{R^2} \rightarrow \Delta = p_1^2 + p_2^2. \quad (151)$$

2.1. Переход от псевдосферической системы координат к полярной.

Обозначим геодезическое «расстояние» на диске D_2 как $\bar{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R \tanh \tau$. Далее выпишем неоднородные координаты Бельтрами (x_1, x_2) , соответствующие псевдосферической системе координат (29):

$$\begin{aligned} x_1 &= R \frac{u_1}{u_0} = R \tanh \tau \cos \varphi = \bar{r} \cos \varphi, \\ x_2 &= R \frac{u_2}{u_0} = R \tanh \tau \sin \varphi = \bar{r} \sin \varphi. \end{aligned} \quad (152)$$

Координаты (152) по форме напоминают полярные координаты на плоскости E_2 . Оставляя величину $\bar{r} = R \tanh \tau$ постоянной, получаем в пределе $R \rightarrow \infty$, что $\tau = \operatorname{arctanh} \bar{r}/R \sim \bar{r}/R \sim 0$. С другой стороны, очевидно, что при больших значениях R координата $\bar{r} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sim \sqrt{x^2 + y^2}$ определяет радиальную переменную $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в евклидовой плоскости E_2 . В результате псевдосферическая система координат (τ, φ) на гиперboloиде H_2 контрактуется к полярным координатам (r, φ) на евклидовой плоскости E_2 (см. табл. 3 в приложении). Для соответствующего оператора симметрии получаем $S_{\text{СПН}}^{(2)} = L^2 \rightarrow M^2 = X_S^2$.

2.2. Переход от эквидистантной системы координат к декартовой. Выпишем координаты Бельтрами (147), соответствующие эквидистантной системе координат (37) (рис. 4 и 5):

$$x_1 = R \tanh \tau_2, \quad x_2 = \frac{R \tanh \tau_1}{\cosh \tau_2}.$$

Зависимость гиперболических углов τ_1, τ_2 от параметра контракции $\kappa = 1/R$ легко определить, если сравнить эквидистантную систему координат (37) с псевдосферической (29). В результате, используя соотношения $\sinh \tau_1 = \sinh \tau \sin \varphi$ и $\tanh \tau_2 = \tanh \tau \cosh \varphi$, получаем, что при контракции $R \rightarrow \infty$ гиперболические углы τ_1, τ_2 ведут себя как $\tau_1 \rightarrow 0$ и $\tau_2 \rightarrow 0$. Полагая теперь $\sinh \tau_1 \simeq r/R \sin \varphi = y/R$ и $\tanh \tau_2 \simeq r/R \cos \varphi = x/R$, окончательно

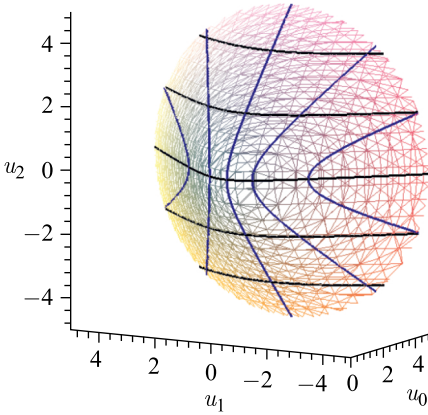


Рис. 4. Эквидистантная система

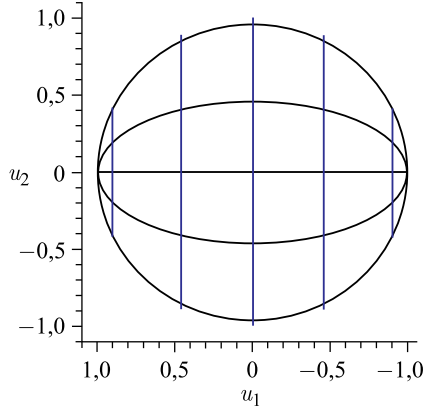


Рис. 5. Проективная плоскость для эквидистантной системы, образованной эквидистантами и параллельными прямыми

получаем $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$ и

$$\frac{S_{\text{EQ}}^{(2)}}{R^2} = \frac{K_2^2}{R^2} \rightarrow p_1^2 = X_C^2,$$

где (x, y) — обычные декартовы координаты на плоскости E_2 (см. табл. 3 в приложении).

2.3. Переход от орициклических координат к декартовым. Выпишем соотношения, связывающие орициклические координаты (\tilde{x}, \tilde{y}) в формуле (48) с координатами объемлющего пространства u_i , $i = 0, 1, 2$:

$$\tilde{x} = \frac{u_2}{u_0 - u_1} = \frac{\tanh \tau \sin \varphi}{1 - \tanh \tau \cos \varphi}, \quad \tilde{y} = \frac{R}{u_0 - u_1} = \frac{1}{\cosh \tau} \frac{1}{1 - \tanh \tau \cos \varphi}.$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ получаем

$$\tilde{x} \sim \frac{r \sin \varphi}{R} \rightarrow \frac{y}{R}, \quad \tilde{y} \sim \left(1 - \frac{r}{R} \cos \varphi\right) \rightarrow 1 + \frac{x}{R},$$

а координаты Бельтрами преобразуются в декартовы координаты (x, y) :

$$x_1 = R \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - 1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \rightarrow x, \quad x_2 = R \frac{2\tilde{x}}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + 1} \rightarrow y.$$

Для оператора $S_{\text{HO}}^{(2)}$ получаем простое выражение

$$\frac{S_{\text{HO}}^{(2)}}{R^2} = \frac{(K_1 + L)^2}{R^2} = \pi_2^2 + \frac{L^2}{R^2} - \frac{1}{R} \{\pi_2, L\} \rightarrow p_2^2 \simeq X_C^2.$$

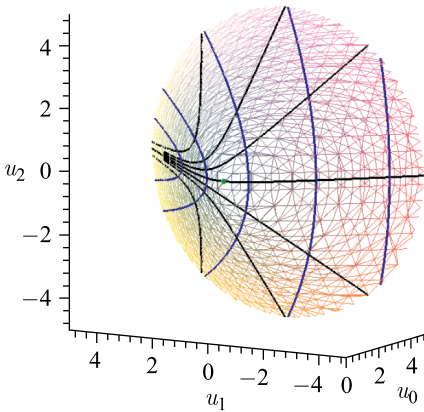


Рис. 6. Орициклическая система координат

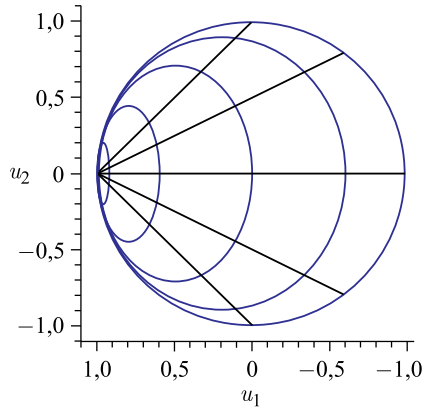


Рис. 7. Проективная плоскость для орициклической системы координат, образованной прямыми, проходящими через граничную точку, и орициклами

Тем самым доказан переход от орициклической системы координат на H_2 (рис. 6 и 7) к декартовой системе на E_2 .

2.4. Контракции в неортогональных системах координат

1. Рассмотрим контракции неортогональной псевдосферической системы координат, заданной уравнением (30). Как и в случае ортогональной системы координат, при контракции $R \rightarrow \infty$ получим $\tau \sim r/R$. Координаты Бельтрами при этом ведут себя так:

$$x_1 = R \frac{u_1}{u_0} = R \tanh \tau \cos \left(\varphi + \frac{R\tau}{\alpha} \right) \rightarrow r \cos \left(\varphi + \frac{r}{\alpha} \right),$$

$$x_2 = R \frac{u_2}{u_0} = R \tanh \tau \sin \left(\varphi + \frac{R\tau}{\alpha} \right) \rightarrow r \sin \left(\varphi + \frac{r}{\alpha} \right).$$

В результате приходим к неортогональной полярной системе координат на евклидовой плоскости E_2 (см. табл. 3 в приложении). Для соответствующего оператора симметрии имеем $S_{SPH} = L \rightarrow M = x\partial_y - y\partial_x = X_S$.

2. Для неортогональной эквидистантной системы (38) в пределе $R \rightarrow \infty$, выбирая $\alpha \sim R$ и $\tau_1 \sim y'/R$, $\tau_2 \sim x'/R$, легко видеть, что

$$x_1 = R \frac{u_1}{u_0} = R \tanh (R\tau_1/\alpha + \tau_2) \rightarrow x' + y',$$

$$x_2 = R \frac{u_2}{u_0} = R \frac{\tanh (R\tau_1/\alpha)}{\cosh \tau_2} \rightarrow y',$$

где (x', y') — неортогональные декартовы координаты на E_2 (см. табл. 3 в приложении). Для оператора симметрии имеем $-S_{EQ}/R = -K_2/R \rightarrow p_1 = X_C$.

3. Рассмотрим неортогональную орициклическую систему координат (49). Переставляя заранее координаты $u_1 \leftrightarrow u_2$ и выбирая в пределе $R \rightarrow \infty$ $\tilde{x} \sim y'/R$, $\tilde{y} \sim 1 + x'/R$, приходим к неортогональным декартовым координатам (x', y') . Для соответствующих координат Бельтрами имеем

$$x_1 \rightarrow x' + y', \quad x_2 \rightarrow x'$$

и $-S_{HO}/R = (-K_2 + L)/R = \pi_1 + L/R \rightarrow p_1 = X_C$.

2.5. Контракции эллиптической системы координат. На проективной плоскости D_2 , как и на гиперboloиде, эллиптическая система координат (122) состоит из софокусных эллипсов и гипербол (рис. 8 и 9). Фокусы эллиптической системы имеют координаты $F(\pm R \tan \alpha, 0)$, где $\tan^2 \alpha = (a_1 - a_2)/(a_1 - a_3)$, а α — угол AOF (см. рис. 1). Существуют три разных предельных перехода при $R \rightarrow \infty$, а именно: когда длина AF фиксирована и $\alpha \rightarrow 0$; когда AF и α одновременно стремятся к нулю; когда α фиксировано, а $AF \rightarrow \infty$. Последний предельный переход включает два дополнительных случая, когда один или оба фокуса стремятся в бесконечность вместе с R . Рассмотрим каждый из пределов в отдельности.

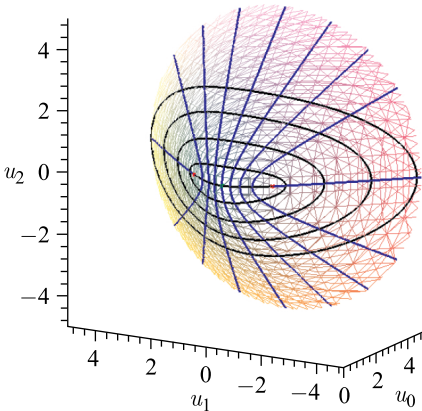


Рис. 8. Эллиптическая система координат, заданная на верхней полости гиперboloида

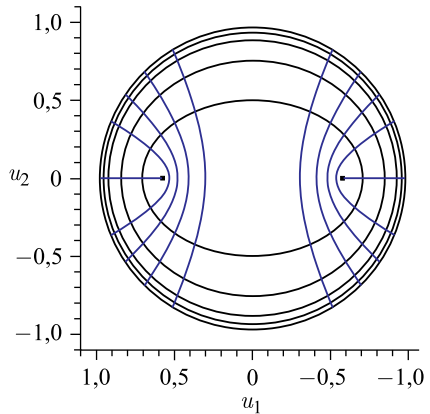


Рис. 9. Проективная плоскость D_2 для эллиптической системы координат, образованной софокусными эллипсами и выпуклыми гиперболами

2.5.1. Переход от эллиптической системы координат к эллиптической. Введем параметр $D = \sqrt{a_1 - a_2}$, который определяет межфокусное расстояние для эллиптической системы координат на плоскости E_2 . Значение D является при $R \rightarrow \infty$ предельным как для длины дуги AF_1 , так и для отрезка AF (см. рис. 1). Поэтому, фиксируя расстояние D и полагая

$-a_3 \simeq R^2 \rightarrow \infty$, получаем

$$\sinh^2 \beta = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \simeq \frac{D^2}{R^2} \rightarrow 0 \quad (153)$$

и

$$S_E = L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2 = L^2 + R^2 \sinh^2 \beta \pi_1^2 \rightarrow M^2 + D^2 \rho_1^2 = X_E.$$

Переходя к новым переменным (ξ, η) согласно соотношениям

$$\sinh^2 \xi = \frac{\rho_1 - a_1}{a_1 - a_2}, \quad \cos^2 \eta = \frac{\rho_2 - a_2}{a_1 - a_2}, \quad \xi \in [0, \infty), \quad \eta \in [0, 2\pi),$$

можно переписать эллиптическую систему координат (122) в виде

$$\begin{aligned} u_0^2 &= R^2 \left[1 + \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} \sinh^2 \xi \right] \left[1 + \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \cos^2 \eta \right], \\ u_1^2 &= \frac{R^2 D^2}{a_2 - a_3} \cos^2 \eta \cosh^2 \xi, \\ u_2^2 &= \frac{R^2 D^2}{a_1 - a_3} \sin^2 \eta \sinh^2 \xi. \end{aligned} \quad (154)$$

Выбирая в (154) предел $-a_3 \simeq R^2 \rightarrow \infty$ и используя формулу (153), легко заметить, что координаты Бельтрами

$$x_1 = R \frac{u_1}{u_0} \rightarrow D \cos \eta \cosh \xi, \quad x_2 = R \frac{u_2}{u_0} \rightarrow D \sin \eta \sinh \xi$$

переходят в обычные эллиптические координаты на плоскости E_2 (см. табл. 3 в приложении).

2.5.2. *Переход от эллиптической системы координат к полярной.* Пусть теперь $a_1 - a_2 \simeq 1/R^2$, $a_2 - a_3 \simeq R^2$, тогда

$$\sinh^2 \beta = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3} \simeq \frac{1}{R^4}.$$

Геометрически это значит, что фокусы эллиптической системы координат сливаются при $R \rightarrow \infty$. В результате для оператора симметрии S_E получаем

$$S_E \simeq L^2 + \frac{1}{R^2} \pi_1^2 \rightarrow M^2 = X_S^2.$$

Перейдем теперь к новым переменным согласно

$$r^2 = \rho_1 - a_2, \quad \cos^2 \varphi = \frac{\rho_2 - a_2}{a_1 - a_2}.$$

Последние формулы позволяют переписать координаты Бельтрами в виде

$$x_1^2 = \frac{(a_1 - a_3)}{R^2} \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{(1 + r^2/R^2)(1 + \cos^2 \varphi/R^4)},$$

$$x_2^2 = \frac{(a_2 - a_3)}{R^2} \frac{\sin^2 \varphi (r^2 - 1/R^2)}{(1 + r^2/R^2)(1 + \cos^2 \varphi/R^4)},$$

откуда в пределе $(a_2 - a_3) \simeq (a_1 - a_3) \simeq R^2 \rightarrow \infty$ приходим к координатам

$$x_1 \rightarrow r \cos \varphi, \quad x_2 \rightarrow r \sin \varphi,$$

которые совпадают с полярной системой координат на евклидовой плоскости E_2 (см. табл. 3 в приложении).

2.5.3. *Переход от эллиптической системы координат к декартовой.* Зафиксируем угол α (так чтобы длина AF стремилась к бесконечности при $R \rightarrow \infty$) и положим $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$ (или $k^2 = k'^2 = 1/2$). Тогда получим

$$\frac{S_E}{R^2} = \frac{1}{R^2}(L^2 + K_2^2) = \frac{L^2}{R^2} + \pi_1^2 \rightarrow p_1^2 = X_C^2.$$

Далее, принимая во внимание уравнение (125), получаем

$$-\operatorname{cn}^2 a = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_0^2 + u_2^2}{R^2} + \sqrt{\left(\frac{u_0^2 + u_2^2}{R^2} \right)^2 - \frac{4u_1^2}{R^2}} \right\},$$

$$\operatorname{cn}^2 b = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_0^2 + u_2^2}{R^2} - \sqrt{\left(\frac{u_0^2 + u_2^2}{R^2} \right)^2 - \frac{4u_1^2}{R^2}} \right\},$$

откуда при больших значениях R приходим к простым асимптотическим формулам для эллиптических функций Якоби:

$$\operatorname{dn} a \rightarrow -i \frac{y}{R}, \quad \operatorname{cn} a \rightarrow -i \left(1 + \frac{y^2}{R^2} \right), \quad \operatorname{sn} a \rightarrow \sqrt{2} \left(1 + \frac{y^2}{4R^2} \right);$$

$$\operatorname{cn} b \rightarrow \frac{x}{R}, \quad \operatorname{dn} b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x^2}{2R^2} \right), \quad \operatorname{sn} b \rightarrow 1 - \frac{x^2}{2R^2}.$$

Из последних соотношений следует, что в пределе $R \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами (147)

$$x_1 = R \frac{i \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}, \quad x_2 = R \frac{i \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}$$

стремятся к декартовым координатам (x, y) на евклидовой плоскости E_2 .

2.5.4. *Переход от повернутой эллиптической системы координат к параболической.* Геометрическое различие эллиптической и повернутой эллиптической систем заключается в разном расположении фокусов на гиперболоиде H_2 . Для повернутой эллиптической системы координат (рис. 10 и 11) один из фокусов расположен в точке $(R, 0, 0)$. Зафиксируем постоянные a_i так, чтобы выполнялись соотношения $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. Тогда повернутая эллиптическая система координат (133) примет вид

$$\begin{aligned} u'_0 &= R\{\sqrt{2} \operatorname{sn} a \operatorname{dn} b + i \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b\}, \\ u'_1 &= R\{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b + i\sqrt{2} \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b\}, \\ u'_2 &= i R \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b, \end{aligned}$$

где для всех функций Якоби $k = k' = 1/\sqrt{2}$. При больших значениях R получаем следующие асимптотические выражения для функций Якоби:

$$\begin{aligned} i \operatorname{cn} a &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \sqrt{2} \frac{u'_1}{R} - \frac{u'_0}{R}\right)^2 + 2 \frac{u'_2{}^2}{R^2}} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \sqrt{2} \frac{u'_1}{R} + \frac{u'_0}{R}\right)^2 + 2 \frac{u'_2{}^2}{R^2}} \simeq -1 + \frac{\sqrt{2} u^2}{2 R}, \\ \operatorname{cn} b &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \sqrt{2} \frac{u'_1}{R} - \frac{u'_0}{R}\right)^2 + 2 \frac{u'_2{}^2}{R^2}} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 - \sqrt{2} \frac{u'_1}{R} + \frac{u'_0}{R}\right)^2 + 2 \frac{u'_2{}^2}{R^2}} \simeq 1 + \frac{\sqrt{2} v^2}{2 R}, \end{aligned} \tag{155}$$

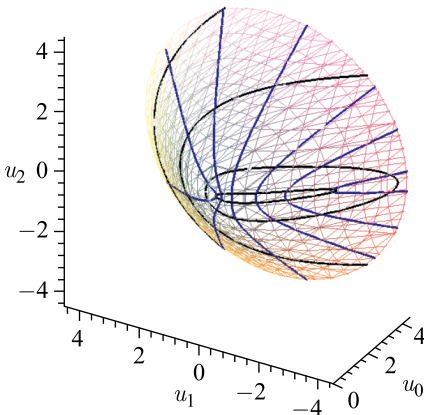


Рис. 10. Повернутая эллиптическая система координат

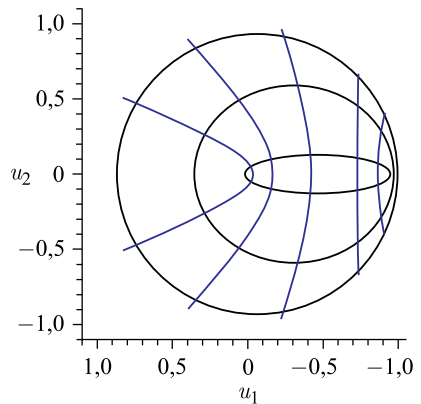


Рис. 11. Проективная плоскость для повернутой эллиптической системы координат

где (v, u) имеют смысл параболических координат. Тем самым в пределе $R \rightarrow \infty$ получаем

$$x_1 \rightarrow \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad x_2 \rightarrow uv.$$

Для оператора симметрии в том же пределе получаем простое выражение

$$\begin{aligned} \frac{S_{\bar{E}}}{\sqrt{2}R} &= \frac{1}{\sqrt{2}R} \left[\cosh 2\beta L^2 + \frac{1}{2} \sinh 2\beta \{K_1, L\} \right] = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}R} L^2 - \{\pi_2, L\} \rightarrow \{p_2, M\} = X_P, \end{aligned}$$

совпадающее с оператором симметрии для параболической системы координат на E_2 (см. табл. 3 в приложении).

2.6. Переход от гиперболической системы координат к декартовой. Гиперболическая система координат (136) определяется тремя параметрами (a_1, a_2, a_3) , которые задают положение фокуса гипербол на гиперboloиде H_2 . Рассматривая ортогональную проекцию на плоскость D_2 ($u_0 = R$), получаем семейство гипербол (рис. 12 и 13). Фиксируя ρ_2 для первого семейства гипербол, получаем, что минимальное межфокальное расстояние равно $2d_1$, где $d_1 = R\sqrt{(a_1 - a_3)/(a_2 - a_3)} = R/k$. Минимальное межфокальное расстояние для второго семейства гипербол (когда ρ_1 постоянное) равно $2d_2$, где $d_2 = R\sqrt{(a_1 - a_3)/(a_1 - a_2)} = R/k'$.

Если ввести обозначения $F_1(R, d_1, 0)$, $F_{21}(R, 0, d_2)$ и $F_{22}(R, 0, -d_2)$, то параметр 2α задаст угол $F_{21}F_1F_{22}$ и $\sin^2 \alpha = (a_2 - a_3)/(a_1 - a_3) = k^2$.

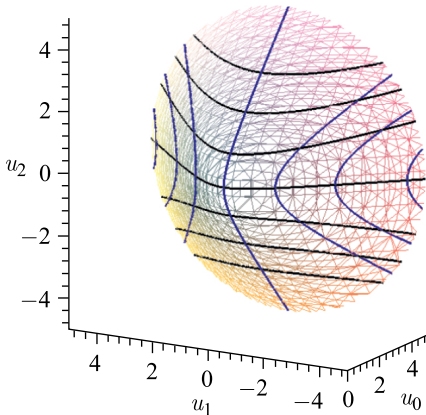


Рис. 12. Гиперболическая система координат, определенная на верхней полости гиперboloида. Параметры a_1, a_2, a_3 задают положение фокусов

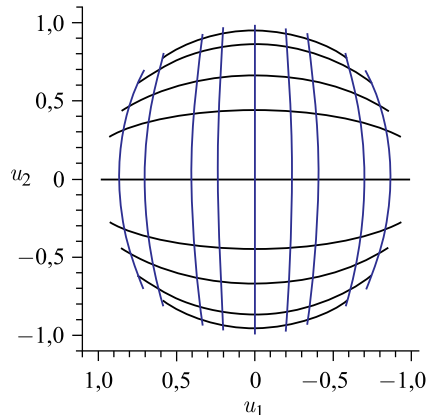


Рис. 13. Проективная плоскость D_2 для гиперболической системы координат, образованной вогнутыми гиперболами

Отметим, что $\sin^2 \alpha \neq 0, 1$, и можно сказать, что этот параметр является масштабным для проективных координат.

Для простоты положим $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. Тогда $k^2 = k'^2 = \sin^2 \alpha = 1/2$ и оператор симметрии контрактурирует согласно

$$\frac{S_H}{R^2} = \frac{1}{R^2} \left(K_2^2 - \frac{1}{2} L^2 \right) = \pi_1^2 - \frac{L^2}{2R^2} \rightarrow p_1^2 = X_C^2.$$

Из формул (137) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2 a &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_1^2 - u_2^2}{R^2} - \sqrt{\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{R^2} \right)^2 + \frac{4u_0^2}{R^2}} \right\}, \\ -\operatorname{cn}^2 b &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_1^2 - u_2^2}{R^2} + \sqrt{\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{R^2} \right)^2 + \frac{4u_0^2}{R^2}} \right\}, \end{aligned}$$

откуда для больших значений R получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{dn} a &\rightarrow -\frac{iy}{R\sqrt{2}}, & \operatorname{cn} a &\rightarrow -i \left(1 + \frac{y^2}{2R^2} \right), & \operatorname{sn} a &\rightarrow \sqrt{2} \left(1 + \frac{y^2}{4R^2} \right), \\ \operatorname{dn} b &\rightarrow -\frac{ix}{R\sqrt{2}}, & \operatorname{cn} b &\rightarrow -i \left(1 + \frac{x^2}{2R^2} \right), & \operatorname{sn} b &\rightarrow \sqrt{2} \left(1 + \frac{x^2}{4R^2} \right). \end{aligned}$$

Используя последние асимптотические соотношения, легко проследить, как координаты Бельтрами в пределе $R \rightarrow \infty$

$$x_1 = -iR \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} b}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b}, \quad x_2 = -iR \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b} \quad (156)$$

стремятся к декартовым координатам $x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$ на E_2 .

2.7. Контракция полугиперболической системы координат. *2.7.1. Переход от полугиперболической системы к декартовой.* Рассмотрим полугиперболическую систему (94) с фиксированным параметром $c = 1$. Координаты фокуса (рис. 14 и 15) уходят в бесконечность при $R \rightarrow \infty$, а полугиперболическая система координат SH преобразуется в декартову. В самом деле, записывая координаты (τ_1, τ_2) из формулы (94) в виде

$$\begin{aligned} \sinh \tau_{1,2} &= -\frac{u_0 u_1}{R^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{R^2} + 1 \right) \pm \\ &\pm \sqrt{\left(\frac{u_0 u_1}{R^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_2^2}{R^2} + 1 \right) \right)^2 + \frac{u_2^2}{R^2} - 2 \frac{u_0 u_1}{R^2}}, \quad (157) \end{aligned}$$

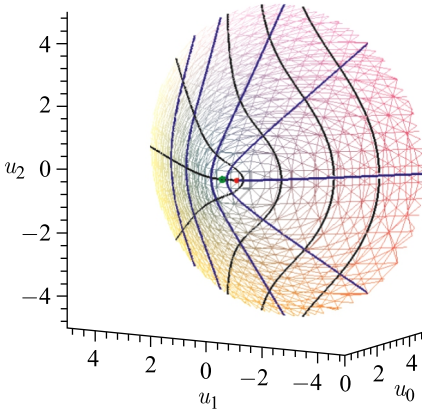


Рис. 14. Полугиперболическая система координат на верхней полости гиперболоида

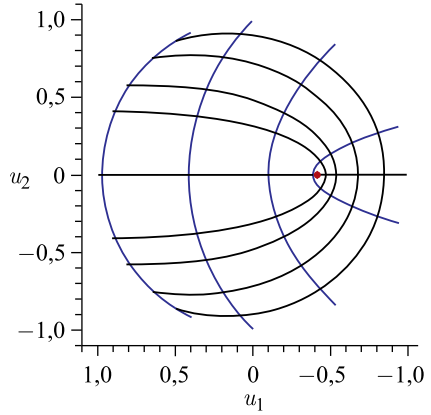


Рис. 15. Проективная плоскость D_2 для полугиперболической системы координат, состоящей из полугипербол с координатами фокуса $\left(-R\sqrt{\frac{\sqrt{c^2+1-1}}{\sqrt{c^2+1+1}}}, 0\right)$

для больших значений R имеем

$$\sinh \tau_1 \rightarrow -2\frac{x}{R}, \quad \sinh \tau_2 \rightarrow -1 - 2\frac{y^2}{R^2}. \quad (158)$$

Отсюда легко видеть, что в пределе $R \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами переходят в декартовы координаты: $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$. Для соответствующего оператора симметрии получим

$$\frac{S_{SH}}{R^2} = \frac{1}{R^2} (K_2^2 + \{K_1, L\}) \simeq \pi_1^2 - \frac{1}{R} \{\pi_2, L\} \rightarrow p_1^2 = X_C^2.$$

2.7.2. *Переход от полугиперболической системы координат к параболической.* В случае $c = 0$ координаты фокуса F на проективной плоскости фиксированы (см. рис. 15) и в пределе $R \rightarrow \infty$ полугиперболические координаты стремятся к параболическим. Действительно, для переменных $\mu_{1,2}$ из (93) при больших значениях R имеем

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{\frac{u_0^2 u_1^2}{R^4} + \frac{u_2^2}{R^2}} + \frac{u_0 u_1}{R^2} \rightarrow \frac{u^2}{R}, \\ \mu_2 &= \sqrt{\frac{u_0^2 u_1^2}{R^4} + \frac{u_2^2}{R^2}} - \frac{u_0 u_1}{R^2} \rightarrow \frac{v^2}{R}. \end{aligned} \quad (159)$$

Поэтому координаты Бельтрами в пределе стремятся к параболическим:

$$x_1 \rightarrow \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad x_2 \rightarrow uv. \quad (160)$$

Для оператора симметрии S_{SH} получим

$$\frac{S_{SH}}{R} = \frac{1}{R} \{K_1, L\} \rightarrow \{p_2, M\} = X_P.$$

2.8. Контракции эллиптико-параболической системы координат.

2.8.1. *Переход от эллиптико-параболической системы координат к декартовой.* Рассмотрим сначала случай, когда параметр $\gamma \neq 1$. Тогда фокус на проективной плоскости D_2 (рис. 16 и 17) стремится к бесконечности при $R \rightarrow \infty$. Для координат $\xi_1 = \cos^2 \theta$ и $\xi_2 = \cosh^2 a$ из формулы (105) имеем

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0(\gamma + 1) + u_1(\gamma - 1) \mp \sqrt{[u_0(\gamma + 1) + u_1(\gamma - 1)]^2 - 4R^2\gamma}}{2(u_0 - u_1)}. \quad (161)$$

При анализе асимптотического поведения координат $\xi_{1,2}$ при больших значениях R необходимо различать два случая в зависимости от значений параметра $\gamma > 0$. При $\gamma \in (0, 1)$ имеем

$$\cos \theta \rightarrow \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{x}{R}\right), \quad \sinh a \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \gamma}} \frac{y}{R}, \quad (162)$$

в то время как для $\gamma > 1$ получим

$$\sin \theta \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{y}{R}, \quad \cosh a \rightarrow \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{x}{R}\right). \quad (163)$$

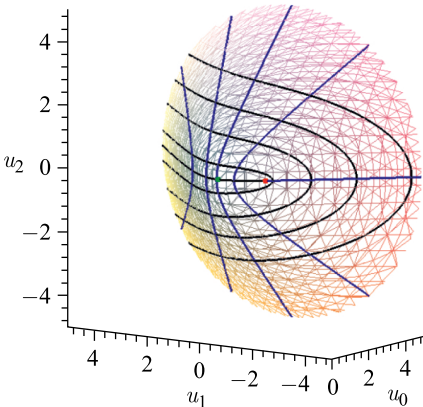


Рис. 16. Эллиптико-параболическая система координат, определенная на верхней полости гипербоида

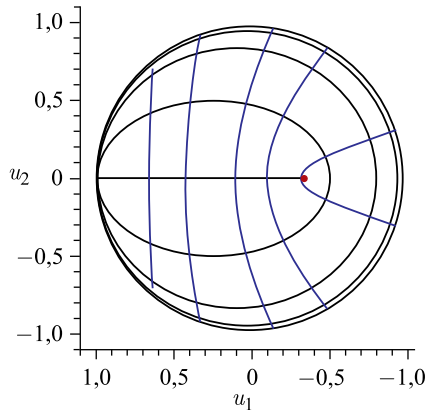


Рис. 17. Проективная плоскость D_2 эллиптико-параболической системы, образованной эллиптическими и выпуклыми гиперболическими параболой. Координаты фокуса $(R(\gamma - 1)/(\gamma + 1), 0)$

Легко видеть, что в обоих случаях координаты Бельтрами при $R \rightarrow \infty$ стремятся к декартовым: $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$. Оператор симметрии S_{EP} преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{(\gamma - 1)R^2} [S_{EP} - R^2 \Delta_{LB}] = \pi_1^2 - \frac{1}{(\gamma - 1)R^2} [R\{\pi_2, L\} - 2L^2] \rightarrow p_1^2 = X_C^2.$$

2.8.2. Переход от эллиптико-параболических координат к параболическим. При значении параметра $\gamma = 1$ координаты фокуса на проективной плоскости фиксированы в $(0, 0)$. Для больших значений R имеем

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= \frac{-u_1 + \sqrt{u_0^2 - R^2}}{u_0 - u_1} \rightarrow \frac{v^2}{R}, \\ \sinh^2 a &= \frac{u_1 + \sqrt{u_0^2 - R^2}}{u_0 - u_1} \rightarrow \frac{u^2}{R}, \end{aligned} \tag{164}$$

поэтому координаты Бельтрами контрактируют к параболическим:

$$x_1 \rightarrow \frac{u^2 - v^2}{2}, \quad x_2 \rightarrow uv. \tag{165}$$

Для оператора симметрии S_{EP} получаем

$$\frac{S_{EP}}{R} - R \Delta_{LB} = -\{\pi_2, L\} + 2 \frac{L^2}{R} \rightarrow \{p_2, M\} = X_P.$$

2.9. Переход от гипербло-параболической системы координат к декартовой. Перепишем координаты $\xi_1 = \sin \theta$, $\xi_2 = \sinh b$ из формулы (112) в терминах декартовых координат (u_0, u_1, u_2) :

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{\pm u_0(1 - \gamma) \mp u_1(\gamma + 1) + \sqrt{[u_0(\gamma - 1) + u_1(\gamma + 1)]^2 + 4R^2\gamma}}{2(u_0 - u_1)}. \tag{166}$$

Сравнивая с псевдосферической системой координат, при больших значениях R легко получить

$$\cos \theta \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + 1}} \frac{y}{R}, \quad \sinh b \rightarrow \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{x}{R}\right), \tag{167}$$

где (x, y) имеют смысл декартовых координат на плоскости E_2 . Из последних формул видно, что параметр $\gamma > 0$ не влияет на асимптотическое поведение координат (b, θ) (в отличие от случая эллиптико-параболической системы координат, когда (a, θ) имеют особенности в точке $\gamma = 1$, как следует из формул (162) и (163)) и выполняет роль масштабного множителя.

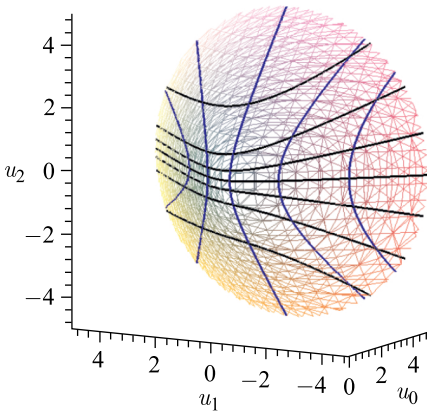


Рис. 18. Гиперbolo-параболическая система координат на верхней полости гиперболоида

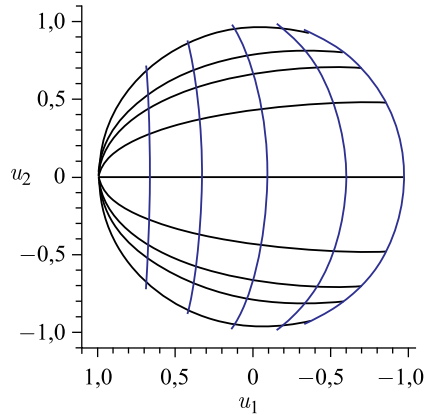


Рис. 19. Проективная плоскость D_2 для гиперbolo-параболической системы координат, образованной вогнутыми гиперболическими параболой с двумя ветками и одной веткой

Из формулы (112) легко проследить, что координаты Бельтрами, определенные на диске D_2 (рис. 18 и 19), в пределе $R \rightarrow \infty$ переходят в декартовы координаты: $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$. Таким образом, гиперbolo-параболическая система координат контрактирует только к декартовой системе координат.

Для оператора симметрии, следовательно, получаем

$$-\frac{1}{(\gamma + 1)R^2} [S_{HP} - R^2 \Delta_{LB}] = \pi_1^2 + \frac{1}{\gamma + 1} [\{\pi_2, L/R\} - 2L^2] \rightarrow p_1^2 = X_C^2.$$

2.10. Контракция полуциркулярно-параболической системы координат к декартовой. Перепишем полуциркулярно-параболические координаты η и ξ из формулы (100) в виде

$$\eta^2 = \frac{\sqrt{R^2 + u_2^2} + u_2}{u_0 - u_1}, \quad \xi^2 = \frac{\sqrt{R^2 + u_2^2} - u_2}{u_0 - u_1}. \tag{168}$$

Тогда в пределе $R \rightarrow \infty$ получим

$$\eta^2 \rightarrow 1 + \frac{x + y}{R}, \quad \xi^2 \rightarrow 1 + \frac{x - y}{R}, \tag{169}$$

где (x, y) имеют смысл декартовых координат на E_2 . Из последнего уравнения (169) видно, что в пределе $R \rightarrow \infty$, координаты η и ξ для системы SCP «смешанным» образом содержат декартовы координаты (x, y) , т. е. каждая из переменных η и ξ зависит явно сразу от обеих координат: x, y . В силу нашего

определения контракций систем координат асимптотическое поведение (169) не является контракцией. Несмотря на это, легко понять, что контракцию полукриволинейно-параболической системы координат можно получить, если предварительно повернуть нашу систему (100) относительно оси u_0 на угол $\alpha_3 = -\pi/4$ (см. (16)). Тогда систему SCP запишем в виде

$$\begin{aligned} u'_0 &= u_0 = R \frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 + 4}{8\xi\eta}, \\ u'_1 &= \frac{u_1 + u_2}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 - 4}{8\xi\eta} + \frac{\eta^2 - \xi^2}{2\xi\eta} \right), \\ u'_2 &= \frac{-u_1 + u_2}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \left(-\frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 - 4}{8\xi\eta} + \frac{\eta^2 - \xi^2}{2\xi\eta} \right). \end{aligned} \quad (170)$$

Соответственно, после преобразования поворота генераторы группы $SO(2, 1)$ преобразуются как

$$K_1 = \frac{K'_2 + K'_1}{\sqrt{2}}, \quad K_2 = \frac{K'_2 - K'_1}{\sqrt{2}}, \quad L = L', \quad (171)$$

а оператор симметрии примет вид

$$S'_{SCP} = K_2'^2 - K_1'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\{K'_1, L'\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\{K'_2, L'\}. \quad (172)$$

Теперь из соотношений (170) получаем

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \frac{\sqrt{2R^2 + (u'_1 + u'_2)^2} + u'_1 + u'_2}{\sqrt{2}u'_0 - u'_1 + u'_2}, \\ \xi^2 &= \frac{\sqrt{2R^2 + (u'_1 + u'_2)^2} - u'_1 - u'_2}{\sqrt{2}u'_0 - u'_1 + u'_2}. \end{aligned} \quad (173)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ имеем

$$\eta^2 \rightarrow 1 + \sqrt{2}\frac{x}{R}, \quad \xi^2 \rightarrow 1 - \sqrt{2}\frac{y}{R}, \quad (174)$$

а координаты Бельтрами переходят в декартовы координаты: $x_1 \rightarrow x, x_2 \rightarrow y$. Для оператора симметрии получаем

$$\begin{aligned} \frac{S'_{SCP}}{R^2} + \Delta_{LB} &= \frac{1}{R^2} \times \\ &\times \left[K_2'^2 - K_1'^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\{K'_1, L'\} + \frac{1}{\sqrt{2}}\{K'_2, L'\} + \Delta_{LB} \right] \rightarrow 2p_1^2 \sim X_C^2. \end{aligned} \quad (175)$$

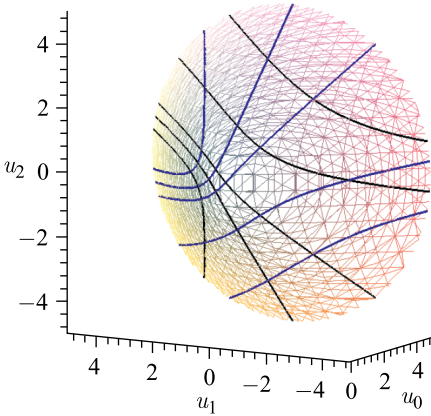


Рис. 20. Полуциркулярно-параболическая система координат на верхней полости гиперболоида

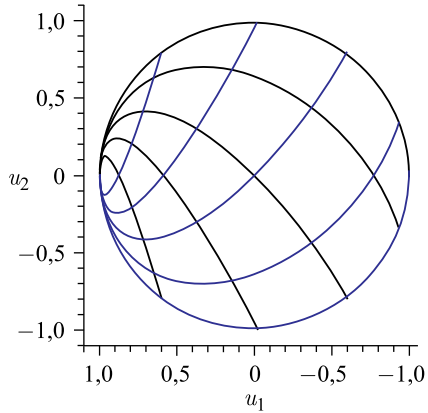


Рис. 21. Проективная плоскость для полуциркулярно-параболической системы, образованной соприкасающимися парабололами

Таким образом, показано, как полуциркулярно-параболическая система координат может контрактивировать к декартовой системе координат (рис. 20 и 21).

3. КОНТРАКЦИИ НА ОДНОПОЛОСТНОМ ГИПЕРБОЛОИДЕ

3.1. Контракция алгебры Ли $so(2, 1)$ к алгебре $e(1, 1)$. Как и в случае двухполостного гиперболоида, введем на \tilde{H}_2 неоднородные координаты Бельтрами согласно формулам

$$y_\mu = R \frac{u_\mu}{u_2} = R \frac{u_\mu}{\sqrt{R^2 + u_0^2 - u_1^2}}, \quad \mu = 0, 1. \tag{176}$$

Тогда в переменных (176) генераторы группы $SO(2, 1)$ (2) преобретут вид

$$\begin{aligned} -\frac{K_1}{R} &\equiv \pi_0 = \partial_{y_0} - \frac{y_0}{R^2}(y_0 \partial_{y_0} + y_1 \partial_{y_1}), \\ -K_2 &= y_1 \pi_0 + y_0 \pi_1 = y_0 \partial_{y_1} + y_1 \partial_{y_0}, \\ -\frac{L}{R} &\equiv \pi_1 = \partial_{y_1} + \frac{y_1}{R^2}(y_0 \partial_{y_0} + y_1 \partial_{y_1}), \end{aligned} \tag{177}$$

а коммутационные соотношения (3) запишем как

$$[\pi_0, \pi_1] = -\frac{K_2}{R^2}, \quad [\pi_0, K_2] = -\pi_1, \quad [K_2, \pi_1] = \pi_0. \tag{178}$$

Выберем теперь базис алгебры $e(1, 1)$

$$p_0 = \partial_{y_0}, \quad p_1 = \partial_{y_1}, \quad N = y_0 \partial_{y_1} + y_1 \partial_{y_0}, \quad (179)$$

для которого верны следующие коммутационные соотношения:

$$[p_0, p_1] = 0, \quad [p_0, N] = p_1, \quad [N, p_1] = -p_0. \quad (180)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ из формулы (177) получаем

$$\pi_0 \rightarrow p_0, \quad \pi_1 \rightarrow p_1, \quad K_2 \rightarrow -N. \quad (181)$$

В результате коммутационные соотношения (178) переходят в (180), а алгебра $so(2, 1)$ контрактурирует к изоморфной алгебре $e(1, 1)$. При этом оператор Лапласа–Бельтрами, заданный на однополостном гиперboloиде \tilde{H}_2 , преобразуется в оператор Лапласа в пространстве $E_{1,1}$:

$$\Delta_{LB} = \frac{1}{R^2}(K_1^2 + K_2^2 - L^2) = \pi_0^2 + \frac{N^2}{R^2} - \pi_1^2 \rightarrow \Delta = p_0^2 - p_1^2. \quad (182)$$

3.2. Контракции систем координат. В геометрическом смысле неоднородные координаты Бельтрами (y_0, y_1) , определенные, как в уравнении (176), описывают отображение точек однополостного гиперboloида \tilde{H}_2 на проективную плоскость L_2 ($u_2 = R$) посредством прямых, проходящих через начало координат (рис. 22). Отметим, что диаметрально противоположные точки на гиперboloиде \tilde{H}_2 переходят в одну и ту же точку на проективной плоскости.

Точки гиперboloида отображаются на область проективной плоскости L_2 , ограниченную двумя гиперболами $y_0 = \pm \sqrt{y_1^2 + R^2}$, как показано на рис. 23 и 24. Асимптоты $|y_1| = |y_0|$ гиперболы $y_0^2 - y_1^2 = R^2$ делят плоскость L_2 на четыре области: $|y_1| > |y_0|$ и $|y_0| > |y_1|$. Части гиперboloида $0 < u_2 \leq R$ и $u_2 \geq R$ отображаются на областях $|y_1| \geq |y_0|$ и $|y_0| \geq |y_1|$ соответственно. В контрактционном пределе при $R \rightarrow \infty$ координаты (y_0, y_1) на плоскости L_2 переходят в декартовы координаты t, x ($|t| > |x|$) на псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$ (или в декартовы координаты \tilde{t}, \tilde{x} , $|\tilde{x}| > |\tilde{t}|$).

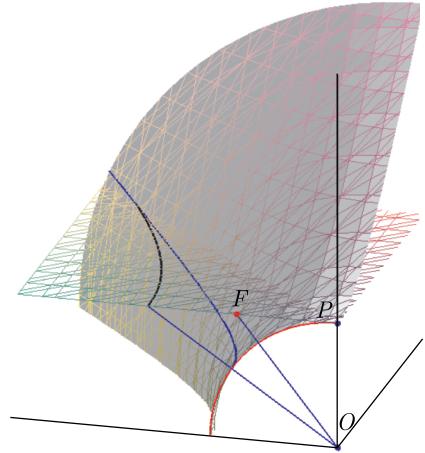


Рис. 22. Проективная плоскость L_2 ($y_0^2 - y_1^2 \leq R^2$) для однополостного гиперboloида

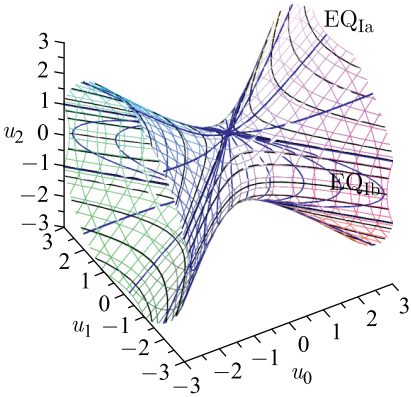


Рис. 23. Эквилидистантные системы координат типа Ib ($|u_2| \geq R$) и Ib ($|u_2| \leq R$)

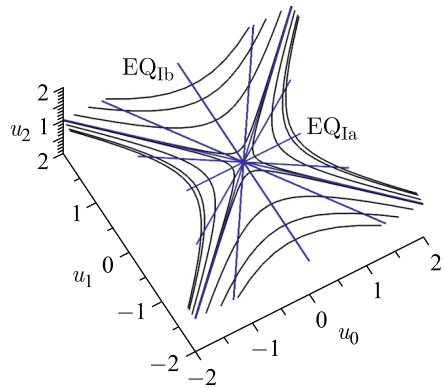


Рис. 24. Эквилидистантные системы координат типа Ia и Ib на проективной плоскости L_2

Для описания в явном виде контракций систем координат на однополостном гиперboloиде \tilde{H}_2 необходимо, как и в случае двухполостного гиперboloида, определить сначала геодезическую систему координат. Легко заметить, что таковой является эквилидистантная система. Действительно, координатная сетка этой системы на плоскости L_2 образована гиперболами и прямыми, проходящими через начало координат (см. рис. 24). Очевидно, что эти прямые являются геодезическими и при контракции преобразуются в геодезические линии на плоскости $E_{1,1}$. Ниже используем этот факт для определения асимптотического поведения независимых криволинейных координат на \tilde{H}_2 при $R \rightarrow \infty$.

Отметим интересную особенность контракций на однополостном гиперboloиде — нарушение «симметрии» для эквивалентных систем координат при $R \rightarrow \infty$, которое можно наблюдать уже при контракции операторов K_1 и K_2 к (177). Причина этого явления скрывается в неоднозначном выборе проективной плоскости L_2 , которая может касаться или пересекать однополостный гиперboloид как в точке $u_2 = R$, так и в $u_1 = R$ (в отличие от случая двухполостного гиперboloида с одной проективной плоскостью, касательной в точке $u_0 = R$). Тем самым при контракции одной и той же системы координат в зависимости от выбора плоскости L_2 можно прийти к различным результатам. Чтобы избежать такой неоднозначности, с одной стороны, а с другой — не менять проективную плоскость L_2 , отдельно (если это приведет к отличному результату) исследуем также контракции для «переставленной» системы координат (см. замечание после (16)). Последняя получается от исходной простой перестановкой координат $u_1 \leftrightarrow u_2$ и, соответственно, операторов $K_1 \leftrightarrow K_2$, $L \rightarrow -L$.

Наконец, отметим, что метрика для неоднородных координат (176) на проективной плоскости $L_2(y_0, y_1)$ имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{y_1^2 - y_0^2}{R^2}\right)^{-2} \times \left[\left(1 + \frac{y_1^2}{R^2}\right) dy_0^2 - 2 \frac{y_0 y_1}{R^2} dy_0 dy_1 + \left(\frac{y_0^2}{R^2} - 1\right) dy_1^2 \right] \quad (183)$$

и в пределе переходит в метрику на псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$ $ds^2 = dy_0^2 - dy_1^2 \sim dt^2 - dx^2$.

3.3. Переход от эквидистантных координат типа Ia и Ib к псевдополярным. В эквидистантной системе типа Ia (см. формулу (39)) зафиксируем геодезический параметр $r = \tau_1 R$. Тогда при больших значениях R угол τ_1 стремится к нулю и $\tanh \tau_1 \simeq \tau_1 \simeq r/R$. При пределе контракции $R \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами (176) преобразуются следующим образом:

$$y_0 = R \frac{u_0}{u_2} = R \tanh \tau_1 \cosh \tau_2 \rightarrow t = r \cosh \tau_2,$$

$$y_1 = R \frac{u_1}{u_2} = R \tanh \tau_1 \sinh \tau_2 \rightarrow x = r \sinh \tau_2,$$

где переменные (r, τ_2) представляют псевдополярные координаты, параметризующие часть $|t| > |x|$ псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$ (см. рис. 24).

В случае эквидистантной системы типа Ib (см. формулу (42)) для фиксированного геодезического параметра $r = \varphi R$ при $R^{-1} \rightarrow 0$ получаем $\tan \varphi \simeq r/R$. При этом координаты Бельтрами стремятся к псевдополярным

$$y_0 = R \frac{u_0}{u_2} = R \tan \varphi \sinh \tau \rightarrow \tilde{t} = r \sinh \tau,$$

$$y_1 = R \frac{u_1}{u_2} = R \tan \varphi \cosh \tau \rightarrow \tilde{x} = r \cosh \tau$$

и покрывают оставшуюся часть $|\tilde{x}| > |\tilde{t}|$ плоскости $E_{1,1}$ (см. рис. 24). Для оператора симметрии получаем $S_{\text{EQ}}^{(2)} = K_2^2 \rightarrow N^2 = X_5^2$ (см. табл. 4 в приложении).

3.4. Контракции неортогональных систем

1. а) Координаты Бельтрами для неортогональной эквидистантной системы типа Ia (см. формулу (40)) в контракционном пределе $\tau_1 \sim r/R, \tau_2 \sim \tau$ преобразуются так:

$$y_0 \sim \frac{1}{2} (\alpha e^\tau + r^2 e^{-\tau}/\alpha), \quad y_1 \sim \frac{1}{2} (\alpha e^\tau - r^2 e^{-\tau}/\alpha), \quad (184)$$

где (r, τ) — полугиперболические неортогональные координаты ($|t| > |x|$) на плоскости $E_{1,1}$ (см. табл. 4 в приложении).

б) Для неортогональной эквидистантной системы Ib (43) имеем $\varphi \sim r/R$ и координаты Бельтрами контрактурируют согласно формулам

$$y_0 \sim \frac{1}{2} (\alpha e^\tau - r^2 e^{-\tau}/\alpha), \quad y_1 \sim \frac{1}{2} (\alpha e^\tau + r^2 e^{-\tau}/\alpha), \quad (185)$$

где (r, τ) — полугиперболические неортогональные координаты ($|t| < |x|$).

Оператор симметрии преобразуется так:

$$-K_2 \rightarrow N = X_S. \quad (186)$$

в) Для неортогональной EQ-системы типа Ib (44) в контракционном пределе имеем $\varphi \sim t'/(2R)$, $\tau \sim x'/R$, $\alpha \sim R$ и соответствующие координаты Бельтрами преобразуются следующим образом:

$$y_0 = R \tanh(\tau + R\varphi/\alpha) \sim x' + \frac{t'}{2}, \quad y_1 = -R \frac{\tan \varphi}{\cosh(\tau + R\varphi/\alpha)} \sim -\frac{t'}{2}, \quad (187)$$

где (t', x') — «переставленные» неортогональные декартовы координаты типа III. Для оператора симметрии имеем $-K_1/R \rightarrow p_0 \sim X_C^{III}$.

Отметим, что для неортогональной EQ-системы типа Ia ($|u_1| > R$) имеем $|y_0| = R|u_0/u_2| = R|\coth(\tau_2 - g(\tau_1, R))| > R$ для любой функции g . Поэтому эта система не контрактурирует к декартовой системе III на $E_{1,1}$ при $R \rightarrow \infty$.

2. Для неортогональной псевдосферической системы (32) при $R \rightarrow \infty$ имеем $\tau \sim -t'/(2R)$, $\varphi \sim -x'/R$, $\alpha \sim R$ и координаты Бельтрами преобразуются так:

$$y_0 = R \frac{\tanh \tau}{\cos(\varphi + R\tau/\alpha)} \sim -\frac{t'}{2}, \quad y_1 = -R \tan(\varphi + R\tau/\alpha) \sim \frac{t'}{2} + x', \quad (188)$$

где (t', x') — неортогональные декартовы координаты типа III (см. табл. 4 в приложении). Оператор симметрии $S_{SPH} = L$ принимает вид

$$-\frac{L}{R} = \pi_1 \rightarrow p_1 = X_C^{III}. \quad (189)$$

3. Рассмотрим неортогональную орициклическую систему координат (51). Учитывая, что $\xi \sim t'/R$, $\eta \sim -x'/R$, для координат Бельтрами получим

$$y_0 \rightarrow x' + t'/4, \quad y_1 \rightarrow x' - t'/4,$$

где (x', t') — неортогональные декартовы координаты типа II (см. табл. 4 в приложении). Оператор контрактурирует так: $-S_{EQ}/R = -(K_1 + L)/R = \pi_0 + \pi_1 \rightarrow p_0 + p_1 = X_C^{II}$.

3.5. Переход от эквидистантной системы координат типа Ib к декартовой. Используем эквивалентный вид оператора $\bar{S}_{EQ}^{(2)} = K_1^2$, являющийся основой для двух эквидистантных систем (при $|u_1| \geq R$ и при $|u_1| \leq R$), которые назовем системой типа Ia и системой типа Ib соответственно (рис. 25).

Эквидистантная система типа IIb может быть получена из (42) перестановкой $u_1 \leftrightarrow u_2$ и будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} u_0 &= R \sin \varphi \sinh \tau, \\ u_1 &= R \cos \varphi, \\ u_2 &= R \sin \varphi \cosh \tau. \end{aligned} \quad (190)$$

Тогда для больших значений R получим выражения

$$\begin{aligned} \cot \varphi &= \frac{u_1}{\sqrt{u_2^2 - u_0^2}} \simeq \frac{x}{R}, \\ \tanh \tau &= \frac{u_0}{u_2} \simeq \frac{t}{R}, \end{aligned} \quad (191)$$

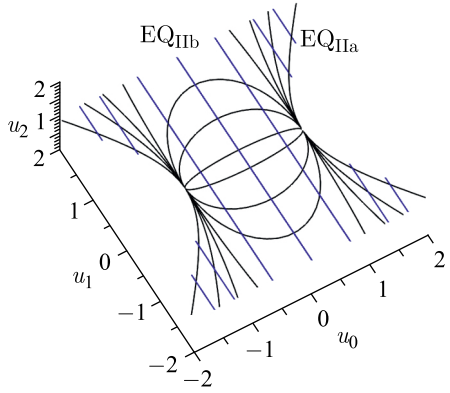


Рис. 25. Проективная плоскость для «переставленных» эквидистантных систем EQ* типа IIa и IIb

откуда следует, что при $R \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами стремятся к декартовым:

$$y_0 = R \tanh \tau \rightarrow t, \quad y_1 = R \frac{\cot \varphi}{\cosh \tau} \rightarrow x. \quad (192)$$

Для оператора симметрии найдем

$$\frac{\bar{S}_{EQ}^{(2)}}{R^2} = \pi_0^2 \rightarrow p_0^2 = X_C^I.$$

Для эквидистантной системы типа IIIa

$$u_0 = R \sinh \tau_1 \cosh \tau_2, \quad u_1 = R \cosh \tau_1, \quad u_2 = R \sinh \tau_1 \sinh \tau_2 \quad (193)$$

получаем $|y_0| = R|u_0/u_2| = R|\coth \tau_2| > R$, что означает отсутствие контракционного предела при $R \rightarrow \infty$ для этой системы координат.

3.6. Переход от псевдосферической системы координат к декартовой.

Для псевдосферической системы (31) имеем (рис. 26 и 27)

$$y_0 = \frac{u_0}{u_2} = R \frac{\tanh \tau}{\sin \varphi}, \quad y_1 = \frac{u_1}{u_2} = R \cot \varphi.$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ получаем $\tanh \tau \simeq t/R$ и $\cot \varphi \simeq x/R$, поэтому координаты Бельтрами (y_0, y_1) переходят в декартовы координаты $y_0 \rightarrow t, y_1 \rightarrow x$, а оператор симметрии имеет простой вид:

$$\frac{S_{SPH}^{(2)}}{R^2} = \frac{L^2}{R^2} = \pi_1^2 \rightarrow p_1^2 = X_C^I.$$

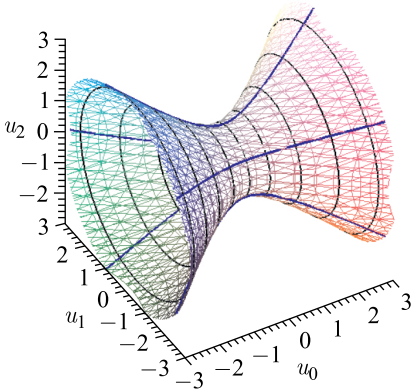


Рис. 26. Псевдосферическая система

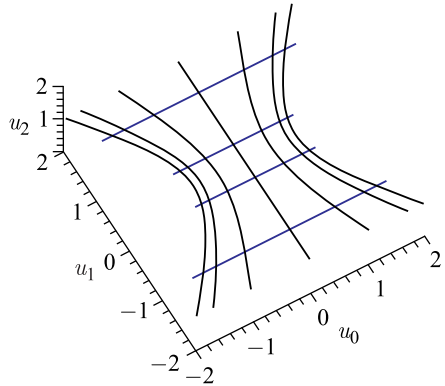


Рис. 27. Проективная плоскость для псевдосферической системы

3.7. Переход от орициклической системы координат к декартовой.

Возьмем систему (50) с переставленными координатами $u_1 \leftrightarrow u_2$ (рис. 28–30), т. е.

$$u_0 = R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1}{2\tilde{y}}, \quad u_1 = R \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}, \quad u_2 = R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 1}{2\tilde{y}}. \quad (194)$$

Соответствующий оператор симметрии принимает вид

$$\bar{S}_{НО}^{(2)} = K_2^2 - \{K_2, L\} + L^2. \quad (195)$$

Для переменных \tilde{x}, \tilde{y} получаем

$$\tilde{x} = \frac{u_1}{u_0 - u_2}, \quad \tilde{y} = \frac{R}{u_0 - u_2}, \quad (196)$$

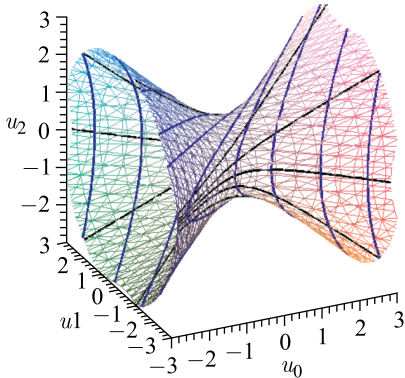


Рис. 28. Орициклическая система

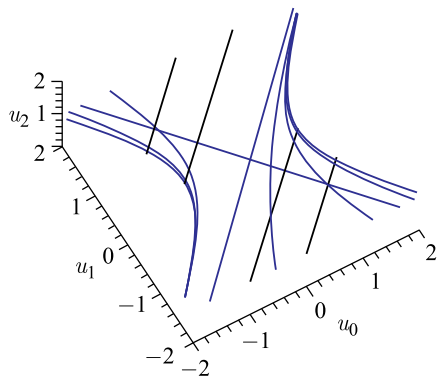


Рис. 29. Проективная плоскость для орициклической системы координат

откуда в пределе $R \rightarrow \infty$ получаем $\tilde{x} \rightarrow -x/R$ и $\tilde{y} \rightarrow -(1 + t/R)$, следовательно, координаты Бельтрами переходят в декартовы координаты:

$$\begin{aligned} y_0 &= R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 + 1}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 1} \rightarrow t, \\ y_1 &= 2R \frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 1} \rightarrow x. \end{aligned} \tag{197}$$

Для оператора симметрии имеем

$$\begin{aligned} \frac{\bar{S}_{\text{HO}}^{(2)}}{R^2} &= \frac{K_2^2}{R^2} + \frac{1}{R} \{K_2, \pi_1\} + \\ &+ \pi_1^2 \rightarrow p_1^2 = X_C^I. \end{aligned}$$

Отметим, что контракция координат (194) более простая по сравнению с контракцией системы (50), так как нет «перемешивания» декартовых координат при больших значениях R .

3.8. Контракция эллиптической системы координат. Три параметра (a_1, a_2 и a_3) эллиптической системы (128) определяют положение фокусов на гиперboloиде. На проективной плоскости фокусы гипербол имеют координаты $F \left(0, R \sqrt{\frac{2\rho_1 - a_2 - a_3}{a_1 - \rho_1}} \right)$. Минимальное фокусное расстояние для проективных гипербол равно $|FP| = R \sqrt{(a_2 - a_3)/(a_1 - a_2)} = R/\sinh \beta$, или $\sinh \beta = R/|FP| = \cot \alpha$, где α — угол FOP , $|OP| = R$ (см. рис. 22, 31 и 32). С точки зрения контракций можно выделить два случая. Пер-

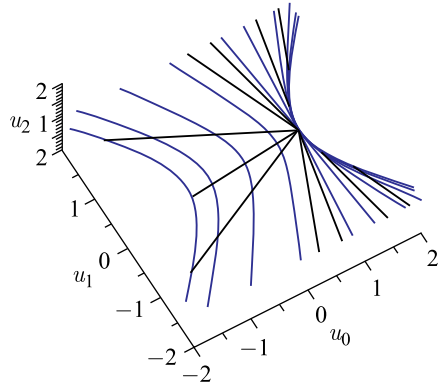


Рис. 30. Проективная плоскость для «переставленной» орициклической системы координат

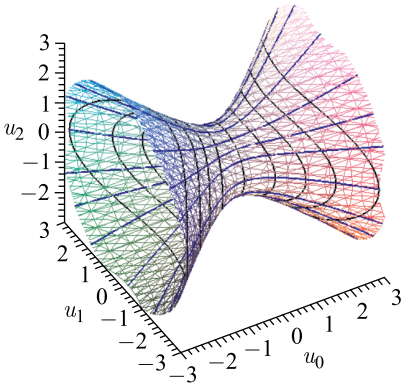


Рис. 31. Эллиптическая система координат

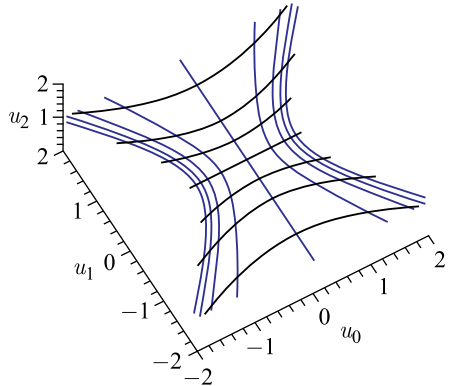


Рис. 32. Проективная плоскость для эллиптической системы координат

вый — когда минимальное фокусное расстояние $|FP|$ фиксировано, так что $\sinh \beta \sim R$, а второй — когда $\sinh \beta$ фиксирован, поэтому $|FP| \sim R$.

3.8.1. *Переход между эллиптическими системами координат.* Введем параметр $D = \sqrt{a_2 - a_3}$, являющийся пределом для $|FP|$ при $R \rightarrow \infty$, $a_1 \simeq R^2$ и представляющий собой минимальное фокусное расстояние для обоих семейств гипербол на плоскости $E_{1,1}$.

Используя новые переменные ξ, η :

$$\sinh^2 \eta = \frac{\rho_1 - a_2}{a_2 - a_3}, \quad \cosh^2 \xi = \frac{a_2 - \rho_2}{a_2 - a_3},$$

запишем эллиптическую систему координат (128) в виде

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{RD}{\sqrt{a_1 - a_3}} \cosh \eta \sinh \xi, \\ u_1 &= \frac{RD}{\sqrt{a_1 - a_2}} \sinh \eta \cosh \xi, \\ u_2^2 &= R^2 \left[1 - \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} \sinh^2 \eta \right] \left[1 + \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} \sinh^2 \xi \right]. \end{aligned} \quad (198)$$

В контракционном пределе $a_1 \simeq R^2 \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами стремятся к эллиптическим типа I (см. табл. 4 в приложении) на плоскости $E_{1,1}$:

$$y_0 \rightarrow t = D \cosh \eta \sinh \xi, \quad y_1 \rightarrow x = D \sinh \eta \cosh \xi.$$

Оператор симметрии при $a_1 \simeq R^2 \rightarrow \infty$ преобразуется так:

$$\frac{D^2}{R^2} S_E = \frac{D^2}{R^2} [L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2] = D^2 \pi_1^2 + \frac{a_1 - a_2}{R^2} K_2^2 \rightarrow N^2 + D^2 p_1^2 = X_E^I.$$

3.8.2. *Переход от эллиптической системы координат к декартовой.* Зафиксируем угол α (или, что то же, $\sinh \beta$) и выберем для простоты $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$. Тогда $k^2 = k'^2 = 1/2$, $\sinh \beta = \cot \alpha = 1$ и получаем $S_E = L^2 + K_2^2$. Из соотношений (129) имеем

$$\begin{aligned} -\operatorname{cn}^2 a &= \sqrt{\left(\frac{u_0^2 + u_2^2}{2R^2}\right)^2 + \frac{u_1^2}{R^2}} - \frac{u_0^2 + u_2^2}{2R^2}, \\ -\operatorname{cn}^2 b &= \sqrt{\left(\frac{u_0^2 + u_2^2}{2R^2}\right)^2 + \frac{u_1^2}{R^2}} + \frac{u_0^2 + u_2^2}{2R^2}. \end{aligned} \quad (199)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ получим

$$\operatorname{cn} a \rightarrow \frac{ix}{R}, \quad \operatorname{dn} b \rightarrow -\frac{it}{R}, \quad (200)$$

поэтому координаты Бельтрами (176) переходят в декартовы: $y_0 \rightarrow t$ и $y_1 \rightarrow x$. Оператор симметрии преобразуется согласно формуле

$$\frac{S_E}{R^2} = \pi_1^2 + \frac{K_2^2}{R^2} \rightarrow p_1^2 = X_C^I.$$

3.9. Контракции гиперболической системы координат. Гиперболическая система координат (139) в алгебраической форме определяется тремя параметрами (a_1, a_2 и a_3), которые задают точки пересечения огибающих для семейств координатных линий. На проективной плоскости эти точки расположены в $F_{1,2}(\pm R \sin \alpha, 0)$ и $G_{1,2}(0, \pm R \tan \alpha)$. Расстояние $|F_1 F_2|$ равно $2f = 2R\sqrt{(a_2 - a_3)/(a_1 - a_3)} = 2R \sin \alpha$ (рис. 33 и 34). В контракционном пределе $R \rightarrow \infty$ необходимо различать два случая: когда фиксируется f или когда фиксируется угол α .

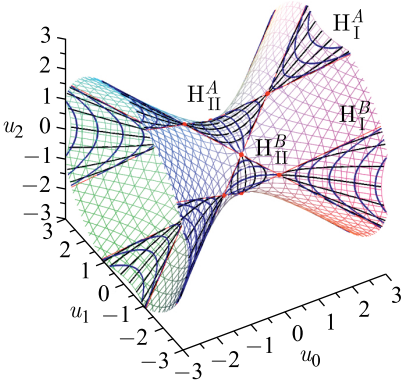


Рис. 33. Гиперболическая система координат

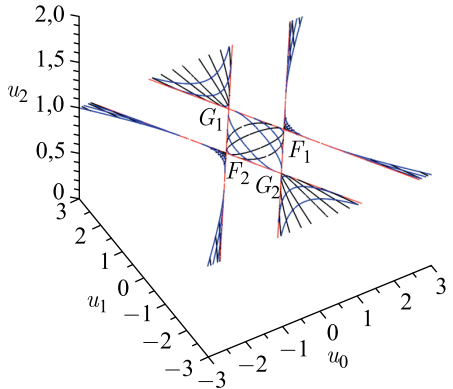


Рис. 34. Проективная плоскость для гиперболической системы координат

3.9.1. Переход от гиперболической системы координат к эллиптической.

Начнем со случая, когда $f \sim R/\sqrt{a_1}$ фиксировано. Рассмотрим вначале гиперболические координаты H_I^A (при $\rho_1, \rho_2 < a_3 < a_2 < a_1$). Введем новые переменные ξ и η

$$\cosh^2 \eta = \frac{a_2 - \rho_1}{a_2 - a_3}, \quad \cosh^2 \xi = \frac{a_2 - \rho_2}{a_2 - a_3}$$

и в пределе $a_1 \simeq R^2 \rightarrow \infty$ получим для координат Бельтрами (176)

$$y_0 \rightarrow t = d \cosh \eta \cosh \xi, \quad y_1 \rightarrow x = d \sinh \eta \sinh \xi.$$

Здесь (ξ, η) — эллиптические координаты типа $\Pi(i)$ (см. табл. 4 в приложении), а $d = \sqrt{a_2 - a_3}$ — минимальное фокусное расстояние для гипербол на плоскости $E_{1,1}$.

Аналогично в случае гиперболической системы H_{II}^A (при $a_3 < \rho_1, \rho_2 < a_2 < a_1$). Используя переменные

$$\cos^2 \eta = \frac{a_2 - \rho_1}{a_2 - a_3}, \quad \cos^2 \xi = \frac{a_2 - \rho_2}{a_2 - a_3},$$

легко показать, что координаты Бельтрами (176) переходят к эллиптическим типа $II(ii)$ (см. табл. 4 в приложении) на плоскости $E_{1,1}$:

$$y_0 \rightarrow t = d \cos \eta \cos \xi, \quad y_1 \rightarrow x = d \sin \eta \sin \xi.$$

Константа d теперь обозначает максимальное фокусное расстояние для эллипсов. Для оператора получим

$$S_H = K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2 = K_2^2 - R^2 \sin^2 \alpha \pi_1^2 \rightarrow N^2 - d^2 p_1^2 = X_E^{II}. \quad (201)$$

Отметим, наконец, что эллиптические координаты типа $II(i)$ и $II(ii)$ не покрывают полностью псевдоевклидову плоскость $E_{1,1}$ (см. табл. 4 в приложении и [49]).

3.9.2. Переход от гиперболической системы координат к декартовой.

Зафиксируем угол α и выберем для простоты $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$, тогда $\sin \alpha = 1/\sqrt{2}$ и $f = R/\sqrt{2} \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$. Как можно заметить из рис. 33 и 34, только система H_{II}^A на проективной плоскости покрывает начало координат. Проанализируем контракцию этой системы с $u_2 = R \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \geq R$. Из соотношений (140) получим (рассматривая $-\operatorname{cn}^2 b \geq \operatorname{cn}^2 a$):

$$\begin{aligned} \operatorname{cn}^2 a &= \frac{u_2^2 - u_1^2}{2R^2} - \sqrt{\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2R^2}\right)^2 - \frac{u_0^2}{R^2}}, \\ -\operatorname{cn}^2 b &= \frac{u_2^2 - u_1^2}{2R^2} + \sqrt{\left(\frac{u_2^2 - u_1^2}{2R^2}\right)^2 - \frac{u_0^2}{R^2}}. \end{aligned} \quad (202)$$

При больших значениях R имеем

$$\operatorname{cn} a \rightarrow \frac{t}{R}, \quad \operatorname{dn} b \rightarrow \frac{x}{R}, \quad (203)$$

а координаты Бельтрами переходят к декартовым координатам: $y_0 \rightarrow t$ и $y_1 \rightarrow x$. Оператор симметрии переходит так:

$$-\frac{2}{R^2} S_H = -\frac{2}{R^2} (K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2) = \pi_1^2 - \frac{2K_2^2}{R^2} \rightarrow p_1^2 = X_C^I.$$

3.9.3. Переход от повернутых гиперболических координат к параболическим типа I. Основное отличие между гиперболической и повернутой гиперболической системами заключается в расположении «предельных» точек

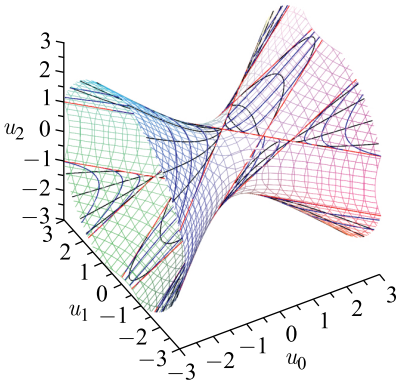


Рис. 35. Повернутая гиперболическая система координат

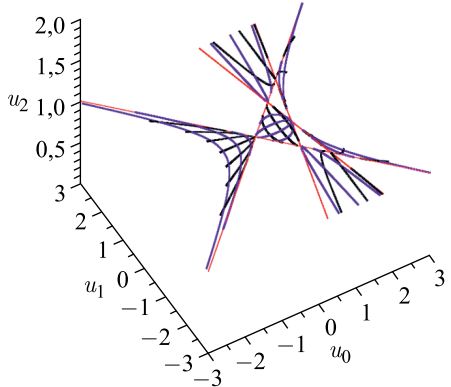


Рис. 36. Проективная плоскость для повернутой гиперболической системы координат

(точек пересечения огибающих). Для повернутой системы H предельные точки имеют координаты $(0, 0, R)$ (рис. 35 и 36) и не зависят от параметра a , что играет существенную роль при контракции.

Зафиксируем параметр k (или k') и используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 2R^2 k^2 \operatorname{sn}^2(a, k) &= (u'_1)^2 k^2 - (ku'_0 + u'_2)^2 + \\
 &+ R^2 \sqrt{[(u'_1)^2 k^2 - (ku'_0 + u'_2)^2 + R^2]^2 - 4R^2 k^2 (u'_1)^2}, \\
 2R^2 \operatorname{dn}^2(b, k') &= (u'_1)^2 k^2 - (ku'_0 + u'_2)^2 + \\
 &+ R^2 - \sqrt{[(u'_1)^2 k^2 - (ku'_0 + u'_2)^2 + R^2]^2 - 4R^2 k^2 (u'_1)^2}.
 \end{aligned}$$

Тогда легко видеть, что при больших значениях R

$$\operatorname{sn}(a, k) \rightarrow \frac{iv}{\sqrt{kR}}, \quad \operatorname{dn}(b, k') \rightarrow iu\sqrt{\frac{k}{R}}, \quad (204)$$

где v, u — параболические координаты на плоскости (см. табл. 4 в приложении). Используем теперь систему H_1^A (с $u_2 \geq R, u_0 > 0$):

$$\begin{aligned}
 u_0 &= R \operatorname{cn}(a, k) i \operatorname{cn}(b, k'), \\
 u_1 &= R i \operatorname{sn}(a, k) i \operatorname{dn}(b, k'), \\
 u_2 &= R \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k'),
 \end{aligned} \quad (205)$$

которая после гиперболического вращения (143) принимает вид

$$\begin{aligned} u'_0 &= \frac{R}{k'} [-k \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k') + i \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')], \\ u'_1 &= R i \operatorname{sn}(a, k) i \operatorname{dn}(b, k'), \\ u'_2 &= \frac{R}{k'} [-k \operatorname{cn}(a, k) i \operatorname{cn}(b, k') + \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')]. \end{aligned} \quad (206)$$

Наконец, в пределе $R \rightarrow \infty$ повернутая гиперболическая система (206) переходит в следующую:

$$y_0 \rightarrow t = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad y_1 \rightarrow x = uv, \quad (207)$$

которая совпадает с параболической системой типа I (см. табл. 4 в приложении). Для оператора симметрии имеем ($c = k + 1/k$)

$$\frac{S_{\bar{H}}}{R} = \frac{1}{R} (cK_2^2 + \{K_2, L\}) \rightarrow \{N, p_1\} = X_P^I.$$

Отметим, что параболические координаты (207) покрывают только часть: $t > 0$ и $|t| > |x|$. Для покрытия оставшейся части псевдоевклидовой плоскости $t < 0$ достаточно поменять $u_0 \rightarrow -u_0$ в повернутой системе (206).

3.9.4. Переход от повернутой гиперболической системы к псевдополярной. Положим $k \sim R^{-2}$, тогда $k' \sim 1$ и $c \sim R^2$. Используя систему координат (206), для больших значений R вместо (204) получим

$$\operatorname{sn}(a, k) \rightarrow i \sinh \tau_2, \quad \operatorname{cn}(b, k') \rightarrow -i \frac{r}{R}, \quad (208)$$

а повернутые гиперболические координаты перейдут в псевдополярные:

$$y_0 \rightarrow t = r \cosh \tau_2, \quad y_1 \rightarrow x = r \sinh \tau_2. \quad (209)$$

Для оператора симметрии имеем

$$\frac{S_{\bar{H}}}{R^2} = \frac{c}{R^2} K_2^2 + \frac{1}{R^2} \{K_2, L\} \rightarrow N^2 = X_S^2.$$

Отметим, что перестановка переменных $u_1 \leftrightarrow u_2$ не приводит к новым контракциям гиперболической системы.

3.10. Контракция полугиперболической системы координат. Как было показано в п. 1.4, полугиперболическая система координат (97) содержит безразмерный параметр $c = \sinh 2\beta$ и не покрывает всю поверхность однополостного гиперboloида (см. (96)). Параметр c , как видно на рис. 37,

делит координатную сетку на две части: $\sinh \tau_1, \sinh \tau_2 \leq c$ (назовем ее SH_I) и $\sinh \tau_1, \sinh \tau_2 \geq c$ (SH_{II}).

3.10.1. *Переход от полугиперболической системы координат к гиперболической.* Для переменных $\xi_{1,2} = \sinh \tau_{1,2}$ имеем (предполагая $\sinh \tau_1 > \sinh \tau_2$):

$$\xi_{1,2} = \frac{u_0 u_1}{R^2} + \frac{c u_1^2 - u_0^2}{2 R^2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{u_0 u_1}{R^2} + \frac{c u_1^2 - u_0^2}{2 R^2} \right\}^2 - \frac{u_2^2 + 2c u_0 u_1}{R^2}}. \quad (210)$$

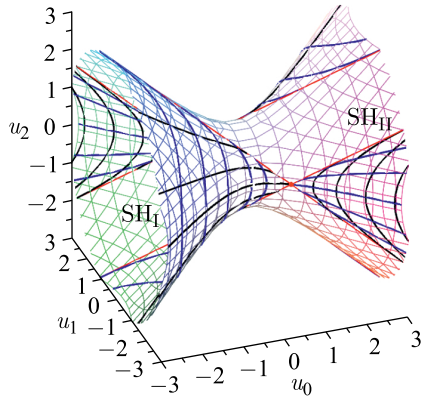


Рис. 37. Полугиперболическая система координат

Положим $c = 2R^2/l^2$ (l — некоторая постоянная) и рассмотрим только систему SH_I (для SH_{II} углы $\tau_{1,2} \rightarrow \infty$). Соотношения (210) определяют предельный переход, а именно $\xi_{1,2} \rightarrow \sinh \zeta_{1,2}$. В пределе $R \rightarrow \infty$ получаем для координат Бельтрами

$$\begin{aligned} y_0 \rightarrow t &= \frac{l}{2} \left[\cosh \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} - \sinh \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \right], \\ y_1 \rightarrow x &= \frac{l}{2} \left[\cosh \frac{\zeta_1 - \zeta_2}{2} + \sinh \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (211)$$

Тем самым полугиперболическая система координат контрактирует к гиперболической типа I (см. табл. 4). Соответствующий оператор симметрии преобразуется так:

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{2R^2} S_{SH} &= K_2^2 + \frac{l^2}{2} \{ \pi_0, \pi_1 \} \rightarrow \\ &\rightarrow N^2 + l^2 p_0 p_1 = X_H^I. \end{aligned}$$

3.10.2. *Переход полугиперболической системы координат к декартовой и параболической типа I.* Зафиксируем значение $\sinh 2\beta$. Тогда оператор S_{SH} переходит к декартову оператору

$$\frac{S_{SH}}{2R^2} = \frac{\sinh 2\beta}{2R^2} K_2^2 + \frac{1}{2} \{ \pi_0, \pi_1 \} \rightarrow p_0 p_1 = X_C^I.$$

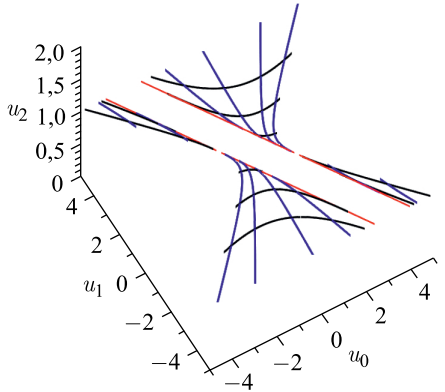


Рис. 38. Проективная плоскость для полугиперболической системы координат

Легко видеть, что начало координат на проективной плоскости (рис. 38) не покрывается системой SH. Отсюда при больших значениях R выражение под корнем в (210) становится отрицательным (ввиду того, что $u_2 \sim R$). Таким образом, полугиперболическая система в виде (97) не контрактурирует к декартовой на плоскости $E_{1,1}$.

1. Рассмотрим теперь «переставленную» систему (97), в которой $u_1 \leftrightarrow u_2$. Видоизмененный оператор симметрии $\bar{S}_{SH} = \sinh 2\beta K_1^2 - \{K_2, L\}$ в предположении, что $\sinh 2\beta > 0$, при $R \rightarrow \infty$ стремится к пределу

$$\frac{\bar{S}_{SH}}{\sinh 2\beta R^2} \rightarrow p_0^2 \simeq X_C^I.$$

Далее, из (210), учитывая, что $u_1 \leftrightarrow u_2$, для переменных $\xi_{1,2} = \sinh \tau_{1,2}$ получим

$$\xi_{1,2} = \frac{u_0 u_2}{R^2} + \frac{c}{2} \frac{u_2^2 - u_0^2}{R^2} \pm \sqrt{\left\{ \frac{u_0 u_2}{R^2} + \frac{c}{2} \frac{u_2^2 - u_0^2}{R^2} \right\}^2 - \frac{u_1^2 + 2c u_0 u_2}{R^2}}. \quad (212)$$

Тогда в пределе $R \rightarrow \infty$ из (212) находим

$$\xi_1 \rightarrow c - \frac{c^2 + 1}{c} \frac{x^2}{R^2}, \quad \xi_2 \rightarrow 2 \frac{t}{R}, \quad (213)$$

откуда $y_0 \rightarrow t$ и $y_1 \rightarrow x$. Следовательно, «переставленная» полугиперболическая система координат SH контрактурирует к декартовой. Также отметим, что в зависимости от знака постоянной c при контракции необходимо выбирать систему SH_I или SH_{II} .

2. Рассмотрим случай, когда $\sinh 2\beta = 0$. В пределе $R \rightarrow \infty$ оператор симметрии \bar{S}_{SH} контрактурирует к оператору симметрии для параболической системы координат типа I на плоскости $E_{1,1}$:

$$-\frac{\bar{S}_{SH}}{R} = -\{K_2, \pi_1\} \rightarrow \{N, p_1\} = X_P^I.$$

Далее, из соотношений (212) при больших значениях R получим

$$\xi_1 \rightarrow \frac{u^2}{R}, \quad \xi_2 \rightarrow \frac{v^2}{R}. \quad (214)$$

Отсюда легко видеть, что координаты Бельтрами (176) в пределе $R \rightarrow \infty$ соответствуют параболической системе координат типа I (см. табл. 4 в приложении):

$$y_0 \rightarrow t = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad y_1 \rightarrow x = uv.$$

3.11. Контракция эллиптико-параболической системы координат. Эллиптико-параболическая система содержит масштабный параметр $\gamma > 0$. При контракции $R \rightarrow \infty$ в зависимости от значения параметра $\gamma > 0$ воспроизводятся различные системы координат (рис. 39 и 40).

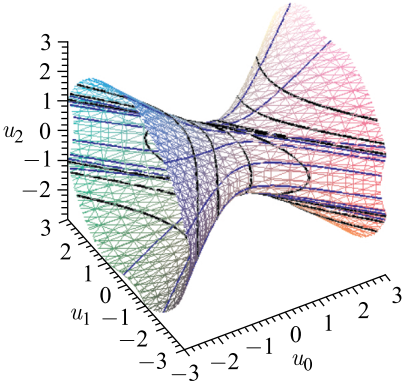


Рис. 39. Эллиптико-параболическая система координат

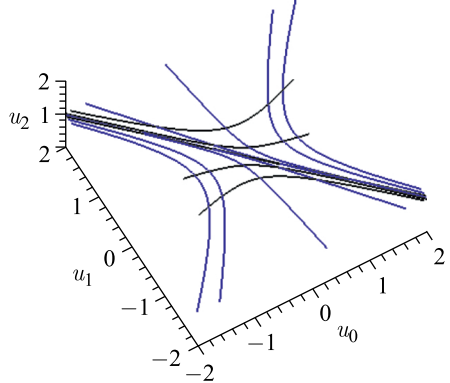


Рис. 40. Проективная плоскость для эллиптико-параболической системы координат

3.11.1. Переход от эллиптико-параболической системы координат к гиперболической типа II. Рассмотрим EP-систему (109) с параметром $\gamma \sim R^2/l^2$ ($l > 0$ — некоторая постоянная) и положим $\xi_1 = -\gamma/\sinh^2 \tau_2$ и $\xi_2 = \gamma/\cosh^2 \tau_1$. Из (109) имеем ($\xi_1 < 0 < \xi_2 \leq \gamma$):

$$-2R^2\xi_{1,2} = (u_0 - u_1)^2 + \gamma(u_0^2 - u_1^2) \pm \sqrt{[(u_0 - u_1)^2 + \gamma(u_0^2 - u_1^2)]^2 + 4R^2\gamma(u_0 - u_1)^2}. \quad (215)$$

В контракционном пределе получаем простую формулу:

$$\xi_{1,2} \rightarrow \mp 2e^{2\zeta_{1,2}}. \quad (216)$$

Для координат Бельтрами имеем ($t > x$):

$$\begin{aligned} y_0 \rightarrow t &= l [\sinh(\zeta_2 - \zeta_1) + e^{\zeta_1 + \zeta_2}], \\ y_1 \rightarrow x &= l [\sinh(\zeta_2 - \zeta_1) - e^{\zeta_1 + \zeta_2}], \end{aligned} \quad (217)$$

где ζ_1, ζ_2 — гиперболические координаты типа II (см. табл. 4 в приложении). Оператор симметрии в том же самом пределе переходит как

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{R^2} S_{EP} &= \frac{l^2}{R^2} [\gamma K_2^2 + (K_1 + L)^2] = \\ &= K_2^2 + l^2(\pi_0 + \pi_1)^2 \rightarrow N^2 + l^2(p_0 + p_1)^2 = X_{II}^{\Pi}. \end{aligned}$$

3.11.2. *Переход от эллиптико-параболической системы координат к декартовой.* Рассмотрим уравнения (109) с переставленными координатами $u_1 \leftrightarrow u_2$. Для оператора симметрии получим

$$\bar{S}_{EP} = \gamma K_1^2 + (K_2 - L)^2. \tag{218}$$

Зафиксируем параметр $\gamma > 0$. Тогда для оператора симметрии \bar{S}_{EP} в пределе для больших значений R имеем

$$\frac{\bar{S}_{EP}}{R^2} = \gamma \pi_0^2 + \left(\frac{K_2}{R} + \pi_1 \right)^2 \rightarrow \gamma p_0^2 + p_1^2 \simeq X_C^I.$$

При переходе уравнений (109) с переставленными координатами $u_1 \leftrightarrow u_2$ к новым переменным $\xi_1 = \cosh \tau_1$, $\xi_2 = \sinh \tau_2$ легко получить (в случае $u_2 > u_0$, $\tau_2 < 0$, чтобы покрыть начало координат):

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{\pm u_0(\gamma + 1) \pm u_2(\gamma - 1) - \sqrt{[u_0(\gamma + 1) + u_2(\gamma - 1)]^2 + 4R^2\gamma}}{2(u_0 - u_2)}. \tag{219}$$

Из формулы (219) следует, что для больших значений R

$$\sinh \tau_1 \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma + 1}} \frac{x}{R}, \quad \sinh \tau_2 \rightarrow -\sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{t}{R} \right), \tag{220}$$

а координаты Бельтрами переходят к декартовым: $y_0 \rightarrow t$ и $y_1 \rightarrow -x$.

В заключение отметим, что при использовании EP-системы в исходной форме (109) переменные t и x при контракции «перепутываются».

3.12. Контракция гиперголо-параболической системы координат. В

определение системы координат HP входит безразмерный параметр $\gamma > 0$,

который задает точки пересечения огибающих (119) на гиперboloиде с координатами

$$\left(\pm R \frac{1 - \gamma}{2\sqrt{\gamma}}, \pm R \frac{1 + \gamma}{2\sqrt{\gamma}}, 0 \right)$$

(рис. 41). Как и в случае с EP-системой координат, при различном выборе параметра γ можно получить контракции к различным системам координат на $E_{1,1}$.

3.12.1. *Переход от гиперголо-параболической к гиперболической системе координат типа III.* Предположим, что $\gamma = R^2/l^2$ (l — некоторая постоянная). Введем обозначения $\xi_1 = \sin \theta$ и $\xi_2 = \sin \phi$. Тогда

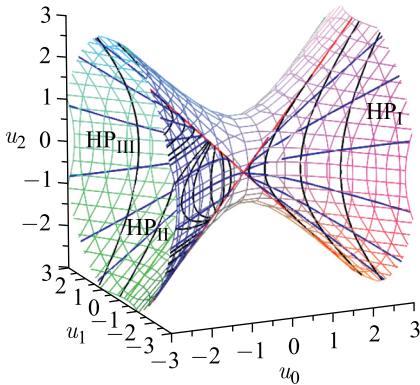


Рис. 41. Гиперголо-параболическая система координат

из формул (116) и (117) получаем

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0(1 - \gamma) - u_1(\gamma + 1) \mp \sqrt{(u_0(1 - \gamma) - u_1(1 + \gamma))^2 - 4l^2}}{2(u_0 - u_1)} \quad (221)$$

и, соответственно,

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0 - u_1}{2R^2\gamma} \left\{ u_0(1 - \gamma) - u_1(\gamma + 1) \pm \sqrt{[u_0(1 - \gamma) - u_1(1 + \gamma)]^2 - 4l^2} \right\}. \quad (222)$$

Положим $\xi_{1,2}^{-1} = (\sqrt{2}l/R) e^{\zeta_{2,1}}$ для НР-координат типа I и $\xi_{1,2} = (\sqrt{2}l/R) e^{\zeta_{2,1}}$ для НР_{II}. Тогда в пределе $R \rightarrow \infty$ координаты Бельтрами y_0, y_1 систем типа I и II контрактируют к гиперболическим координатам типа III в плоском пространстве, которые покрывают область $x > t$ на псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$ (см. табл. 4 в приложении):

$$y_0 \rightarrow t = l [\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) - e^{\zeta_1 + \zeta_2}], \quad (223)$$

$$y_1 \rightarrow x = l [\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) + e^{\zeta_1 + \zeta_2}].$$

Используя теперь обозначения $\xi_1 = \sinh \theta$ и $\xi_2 = \sinh \phi$, из уравнений (118) получаем

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0 - u_1}{2R^2\gamma} \left\{ u_0(\gamma - 1) + u_1(\gamma + 1) \pm \sqrt{[u_0(\gamma - 1) + u_1(1 + \gamma)]^2 - 4R^2\gamma} \right\}. \quad (224)$$

Полагая $\xi_{1,2} = (\sqrt{2}l/R) e^{\zeta_{1,2}}$, в пределе $R \rightarrow \infty$ получим, что НР_{III} переходит в гиперболические координаты типа III, покрывающие часть $t > x$ плоскости $E_{1,1}$ (см. табл. 4 в приложении):

$$\begin{aligned} y_0 \rightarrow t &= l [\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) + e^{\zeta_1 + \zeta_2}], \\ y_1 \rightarrow x &= l [\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) - e^{\zeta_1 + \zeta_2}]. \end{aligned} \quad (225)$$

Для оператора симметрии имеем

$$-\frac{l^2}{R^2} S_{\text{НР}} = K_2^2 - \frac{l^2}{R^2} (K_1 + L)^2 \rightarrow N^2 - l^2(p_0 + p_1)^2 = X_{\text{H}}^{\text{III}}.$$

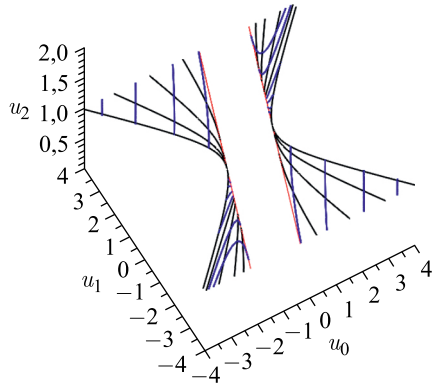


Рис. 42. Проективная плоскость для гипероло-параболической системы координат

Отметим присутствие непокрытой области $|t + x| < 2|l|$ на псевдоевклидовой плоскости, что является результатом расщепления гиперbolo-параболических координат, как показано на рис. 42.

3.12.2. *Переход от гиперbolo-параболической системы координат к декартовой.* Рассмотрим все три вида НР-систем координат, в которых предварительно сделана замена $u_1 \leftrightarrow u_2$. В новых координатах оператор симметрии $\bar{S}_{\text{НР}}$ запишем в эквивалентном виде, а именно $\bar{S}_{\text{НР}} = -\gamma K_1^2 + (K_2 - L)^2$, где $\gamma > 0$ и $\gamma \neq 1$ (случай $\gamma = 1$ рассмотрим позже). В пределе $R \rightarrow \infty$ для эквивалентного оператора $\bar{S}_{\text{НР}}$ получаем

$$\frac{\bar{S}_{\text{НР}}}{R^2} = -\gamma \pi_0^2 + \left(\frac{K_2}{R} + \pi_1 \right)^2 \rightarrow -\gamma p_0^2 + p_1^2 \simeq X_C^1.$$

Сначала отметим, что огибающие на проективной плоскости системы координат $\bar{S}_{\text{НР}}$ расположены в точках $((1 - \gamma)/(1 + \gamma), 0)$. Поэтому начало координат покрывается различными НР-системами в зависимости от значения параметра γ .

Из соотношений (221) для НР_I после замены $u_1 \leftrightarrow u_2$ получим

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0(1 - \gamma) - u_2(\gamma + 1) \mp \sqrt{[u_0(1 - \gamma) - u_2(\gamma + 1)]^2 - 4R^2\gamma}}{2(u_0 - u_2)}, \quad (226)$$

поэтому при больших значениях R имеем

$$\cos \theta \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{1 - \gamma}} \frac{x}{R}, \quad \sin \phi \rightarrow \sqrt{\gamma} \left(1 + \frac{t}{R} \right). \quad (227)$$

Здесь $0 < \gamma < 1$, так как только для этого интервала система НР_I на проективной плоскости покрывает $(0, 0)$ и переходит в декартовы координаты (рис. 43, $\gamma = 1/2$).

Аналогично для переставленной системы НР_{II}. Из (222) следует, что

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{u_0 - u_2}{2\gamma R^2} \left\{ u_0(1 - \gamma) - u_2(\gamma + 1) \pm \sqrt{[u_0(1 - \gamma) - u_2(\gamma + 1)]^2 - 4\gamma R^2} \right\}, \quad (228)$$

откуда при больших значениях R имеем

$$\sin \theta \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(1 - \frac{t}{R} \right), \quad \cos \phi \rightarrow \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \frac{x}{R}, \quad (229)$$

где теперь $\gamma > 1$, так как только в этом случае система НР_{II} на проективной плоскости покрывает начало координат $(0, 0)$ и контрактирует к декартовой системе (рис. 44, $\gamma = 2$).

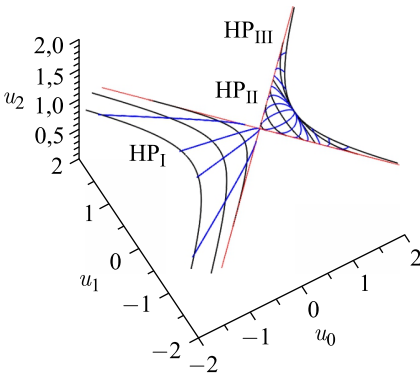


Рис. 43. Проективная плоскость для переставленной системы координат \bar{S}_{HP} , $0 < \gamma < 1$

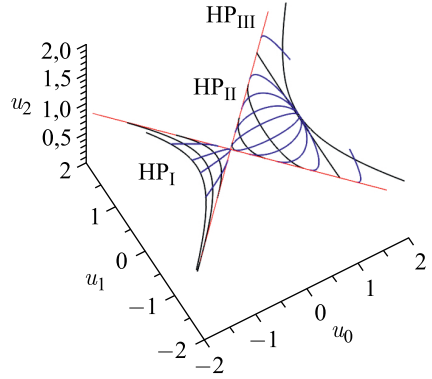


Рис. 44. Проективная плоскость для переставленной системы координат \bar{S}_{HP} , $\gamma > 1$

Переставленная система HP_{III} не покрывает $(0, 0)$ ни при каком значении γ и не контрактирует к декартовой системе.

3.12.3. *Переход от гиперголо-параболической системы координат к параболической типа I.* Рассмотрим случай, когда $\gamma = 1$. Точка пересечения огибающих находится в точке $(0, 0)$ проективной плоскости. Тогда для оператора симметрии имеем выражение

$$\bar{S}_{\text{HP}} = -K_1^2 + (K_2 - L)^2 = 2K_2^2 - \{K_2, L\} - R^2 \Delta_{\text{LB}}$$

и в пределе $R \rightarrow \infty$ получаем

$$-\frac{\bar{S}_{\text{HP}}}{R} - R \Delta_{\text{LB}} = -2 \frac{K_2^2}{R} - \{K_2, \pi_1\} \rightarrow \{N, p_1\} = X_P^I.$$

Для координат $\xi_{1,2}^2 = (-u_2 \mp \sqrt{u_2^2 - R^2}) / (u_0 - u_2)$ типа I (226) имеем

$$\xi_1^2 \rightarrow 1 - \frac{u^2}{R}, \quad \xi_2^2 \rightarrow 1 - \frac{v^2}{R}; \quad (230)$$

для координат $\xi_{1,2}^2 = (u_0 - u_2) (-u_2 \pm \sqrt{u_2^2 - R^2}) / R^2$ типа II (228) выполняется

$$\xi_1^2 \rightarrow 1 - \frac{v^2}{R}, \quad \xi_2^2 \rightarrow 1 - \frac{u^2}{R}; \quad (231)$$

для координат $\xi_{1,2}^2 = (u_0 - u_2) (u_2 \pm \sqrt{u_2^2 - R^2}) / R^2$ типа III (здесь $\xi_1 = \sinh \theta$, $\xi_2 = \sinh \phi$) получаем

$$\xi_1^2 \rightarrow 1 + \frac{v^2}{R}, \quad \xi_2^2 \rightarrow 1 + \frac{u^2}{R}. \quad (232)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ имеем

$$y_0 \rightarrow t = \frac{1}{2}(u^2 + v^2), \quad y_1 \rightarrow x = uv,$$

что совпадает с параболическими координатами типа I на плоскости $E_{1,1}$ (см. табл. 4 в приложении).

3.13. Переход от полуциркулярно-параболической системы координат к декартовой. В контракционном пределе оператор S_{SCP} переходит в оператор

$$\frac{S_{SCP}}{R} = \frac{1}{R}\{K_1, K_2\} + \frac{1}{R}\{K_2, L\} \rightarrow \{p_0, N\} + \{p_1, N\}, \quad (233)$$

который, как хорошо известно, не генерирует систему координат, допускающую разделение переменных на $E_{1,1}$ (см. [49]). Тем не менее возможно построить эквивалентную форму SCP-системы координат, которая будет контрактировать к декартовой (рис. 45 и 46).

Применим последовательно два гиперболических вращения: сначала на угол $a_1 \neq 0$ относительно оси u_1 , а затем на угол $a_2 \neq 0$ относительно оси u_2 . В результате имеем следующее преобразование:

$$\begin{pmatrix} u'_0 \\ u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh a_2 \cosh a_1 & \sinh a_2 & \cosh a_2 \sinh a_1 \\ \sinh a_2 \cosh a_1 & \cosh a_2 & \sinh a_2 \sinh a_1 \\ \sinh a_1 & 0 & \cosh a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (234)$$

Для упрощения формул положим $a_1 = \ln 1/\sqrt{2}$ и $a_2 = -\tanh^{-1}(\cosh a_1 + \sinh a_1) = -\tanh^{-1} 1/\sqrt{2}$. Тогда оператор симметрии преобразуется так:

$$\tilde{S}_{SCP} = \frac{1}{4}K_1^2 + \frac{1}{4}\{K_1, K_2\} - \frac{3}{4}K_2^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\{K_2, L\} - \frac{1}{2}L^2. \quad (235)$$

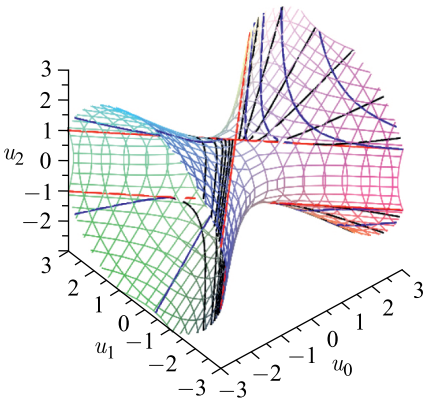


Рис. 45. Полуциркулярно-параболическая система координат

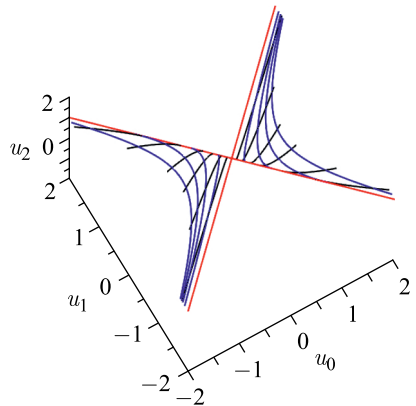


Рис. 46. Проективная плоскость для полуциркулярно-параболической системы координат

В пределе $R \rightarrow \infty$ получим

$$\frac{4}{R^2} \left(\frac{R^2}{2} \Delta_{\text{LB}} - \tilde{S}_{\text{SCP}} \right) \rightarrow p_0^2 = X_C^1. \quad (236)$$

Для координат ξ и η после трудоемких вычислений имеем

$$\xi \rightarrow 2 \left(1 + \frac{x}{R} \right), \quad \eta \rightarrow \sqrt{2} - \frac{2t}{R}, \quad (237)$$

а координаты Бельтрами (176) переходят в декартовы координаты: $y_0 \rightarrow t$, $y_1 \rightarrow x$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках алгебраического подхода изложен метод классификации операторов первого и второго порядка, ответственных за разделение переменных в уравнении Гельмгольца на двухмерных гиперблоидах. Эти операторы не коммутируют между собой, но коммутируют с оператором Лапласа–Бельтрами. Результат классификации операторов второго порядка находится в согласии с полученным в [65] данными. Как было упомянуто в работе [49], процедура построения разделяющих систем координат, основанная на операторах первого порядка, не является однозначной и не только приводит к ортогональным подгрупповым системам координат, но и описывает неортогональные координаты. В данной работе представлены системы координат такого типа.

Детально описаны все ортогональные системы координат, соответствующие операторам симметрии второго порядка как для двухполостного (верхняя полость) H_2 , так и однополостного \tilde{H}_2 гиперблоида. Замечено, что в отличие от двухполостного гиперблоида H_2 только пять систем координат, а именно псевдосферическая, эквидистантная (оба ее вида), орициклическая, эллиптико-параболическая и эллиптическая, полностью покрывают однополостный гиперблоид. Прослежены предельные переходы от более сложных (содержащих безразмерный параметр) систем координат к более простым — подгрупповым.

Показано, как все четыре ортогональные системы координат на E_2 могут быть получены в результате контракций систем координат на H_2 при $R \rightarrow \infty$. В дополнение к уже известным контракциям из статей [33, 38] представлены некоторые новые, включая контракции в неортогональных системах координат. Доказано, что существование хорошо определенного предельного перехода $R \rightarrow \infty$ при контракции оператора симметрии не гарантирует существования такого же предела для соответствующей системы координат. Это происходит, например, в случае систем координат типа SCP, SH и H на однополостном гиперблоиде \tilde{H}_2 . Тем не менее можно рассмотреть предел $R \rightarrow \infty$ для

этих координат, используя комплексные переменные. Например, рассмотрим оператор симметрии \bar{S}_{SCP} :

$$\bar{S}_{\text{SCP}} = \{K_1, K_2\} - \{K_1, L\},$$

соответствующий полуциркулярно-параболической системе (102) после перестановки $u_1 \leftrightarrow u_2$. В пределе $R \rightarrow \infty$ этот оператор контрактирует к декартовому на $E_{1,1}$:

$$-\frac{\bar{S}_{\text{SCP}}}{2R^2} = -\frac{1}{2R}\{\pi_0, N\} + \frac{1}{2}\{\pi_0, \pi_1\} \rightarrow p_0 p_1 = X_C^I.$$

Теперь рассмотрим, что происходит с SCP-системой координат. При замене $u_1 \leftrightarrow u_2$ в (101) получаем

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2u_1(u_2 - u_0), \quad \lambda_1 \lambda_2 = R^2(u_2 - u_0)^2. \quad (238)$$

Из (238) следует, что существуют три возможные области определения для координат λ_i : 1) $\lambda_i \geq 0$; 2) $\lambda_i \leq 0$; 3) $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. В первом и втором случаях система координат (λ_1, λ_2) ввиду соотношения

$$u_1^2 = R^2 \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{4\lambda_1 \lambda_2} \geq R^2 \quad (239)$$

покрывает только часть гиперboloида $|u_1| \geq R$. При геометрическом рассмотрении видно, что в пределе $R \rightarrow \infty$ координатная сетка для SCP-системы координат на проективной плоскости пуста. Чтобы обойти эту проблему, рассмотрим формально третий случай. Положим $a = A \cdot R^2$, $b = B \cdot R^2$, $A \in \mathbb{R}$, $B > 0$. Тогда система координат (неразделяющая и неортогональная) в терминах переменных (A, B) выглядит так ($|u_1| < R$):

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{R}{2} \left(\sqrt{A^2 + B^2} - \frac{B^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \right), \\ u_1 &= R \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ u_2 &= \frac{R}{2} \left(\sqrt{A^2 + B^2} + \frac{B^2}{(A^2 + B^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (240)$$

При контракции системы координат (240) при больших значениях R имеем

$$A = \frac{u_1(u_0 + u_2)}{R^2} \rightarrow -\frac{x}{R}, \quad B = \frac{u_0 + u_2}{R} \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{R^2}} \rightarrow 1 + \frac{t}{R}. \quad (241)$$

В результате система координат (240) в пределе $R \rightarrow \infty$ преобразуется к декартовой системе координат: $y_0 \rightarrow t$, $y_1 \rightarrow x$ на $E_{1,1}$.

В данном обзоре мы ограничились описанием только действительных аналитических контракций на однополостном гиперboloиде \tilde{H}_2 . Мы использовали эквивалентные формы систем координат на \tilde{H}_2 , которые, как в случае с эквидистантной системой координат, приводят к различным предельным координатам на $E_{1,1}$. Наряду с ортогональными системами представлены контракции неортогональных систем координат на обоих гиперboloидах \tilde{H}_2 , которые преобразуются к неортогональным на $E_{1,1}$, классификация которых ранее была дана Калнинсом в хорошо известной работе [49].

Все ортогональные системы координат на $E_{1,1}$, за исключением одной, а именно параболической системы типа II, могут быть получены переходом $R \rightarrow \infty$ при контракции из некоторой системы координат на гиперboloиде \tilde{H}_2 . Для определения «прообраза» параболической системы типа II на \tilde{H}_2 , который мы не определили среди девяти ортогональных систем, можно сделать следующее. Рассмотрим формулу (52), описывающую общий вид оператора $S^{(2)}$, полагая в (52) $b = e = 1$, $c = 0$ и $a = f = -d = \alpha/R$, где α — некоторая константа. Получим в некотором смысле «минимальный» оператор

$$S^{(2)} = \{K_1, K_2\} + \{L, K_2\} + \frac{\alpha}{R}(L - K_1)^2, \quad (242)$$

который контрактирует к X_P^{II} :

$$\frac{S^{(2)}}{R} \rightarrow \{p_0, N\} + \{p_1, N\} + \alpha(p_0 - p_1)^2 = X_P^{\text{II}}. \quad (243)$$

Характеристическое уравнение (89), соответствующее этому оператору (242), дает

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R} &= \frac{\alpha}{R^2}(u_0 + u_1)^2 + 2\frac{u_2}{R}(u_0 - u_1), \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{R^2} &= (u_0 - u_1)^2 - \frac{4\alpha}{R}u_2(u_0 + u_1). \end{aligned} \quad (244)$$

Так как нас интересует только вопрос контракций, то рассмотрим предельный переход $R \rightarrow \infty$ прямо в системе (244). Из (244) легко видеть, что

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{R} \simeq 2(t - x), \quad \frac{\lambda_1 \lambda_2}{R^2} \simeq (t - x)^2 - 4\alpha(t + x), \quad (245)$$

где (t, x) — декартовы координаты на $E_{1,1}$. Вводя новые переменные $\xi = -\lambda_1/(4R)$, $\eta = -\lambda_2/(4R)$ и выражая t, x из предыдущей системы, получим параболические координаты типа II:

$$t = \frac{1}{2\alpha}(\eta - \xi)^2 - (\eta + \xi), \quad x = \frac{1}{2\alpha}(\eta - \xi)^2 + (\eta + \xi). \quad (246)$$

Так, контракция к параболическим координатам типа II может быть найдена посредством некоторой системы координат, заданной в неявном виде и соответствующей оператору симметрии (242).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Системы координат на двухполостном гиперболоиде (* означает перестановку $u_1 \leftrightarrow u_2$)

Система координат, оператор	Координаты	Система на E_2 при контракции
Ia. Псевдосферическая (SPH) L^2 $\tau > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$	$u_0 = R \cosh \tau$ $u_1 = R \sinh \tau \cos \varphi$ $u_2 = R \sinh \tau \sin \varphi$	Полярная
Ib. Сферическая (неортогональная) L $\tau > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$	$u_0 = R \cosh \tau$ $u_1 = R \sinh \tau \cos(\varphi + R\tau/\alpha)$ $u_2 = R \sinh \tau \sin(\varphi + R\tau/\alpha)$	Полярная неортогональная
IIa. Эквилистантная (EQ) K_2^2 $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$	$u_0 = R \cosh \tau_1 \cosh \tau_2$ $u_1 = R \cosh \tau_1 \sinh \tau_2$ $u_2 = R \sinh \tau_1$	Декартова
IIb. Эквилистантная (неортогональная) K_2 $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$	$u_0 = R \cosh \tau_1 \cosh(\tau_2 + R\tau_1/\alpha)$ $u_1 = R \cosh \tau_1 \sinh(\tau_2 + R\tau_1/\alpha)$ $u_2 = R \sinh \tau_1$	Декартова неортогональная
IIIa. Орициклическая (НО) $(K_1 + L)^2$ $\tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{y} > 0$	$u_{0,1} = R \frac{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \pm 1}{2\tilde{y}}$ $u_2 = R \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$	Декартова
IIIb. Орициклическая* (неортогональная) $K_2 - L$ $\tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{y} > 0$	$u_{0,2} = R \frac{(\tilde{x} + \tilde{y} - 1)^2 + \tilde{y}^2 \pm 1}{2\tilde{y}}$ $u_1 = R \frac{\tilde{x} + \tilde{y} - 1}{\tilde{y}}$	Декартова неортогональная
IV. Эллипτικο-параболическая (EP) $(K_1 + L)^2 + \gamma K_2^2, \gamma > 0$ $a \geq 0, \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$u_{0,1} = \frac{R \cosh^2 a - \sin^2 \theta \pm \gamma}{\sqrt{\gamma} 2 \cos \theta \cosh a}$ $u_2 = R \tan \theta \tanh a$	Декартова ($\gamma \neq 1$) Параболическая ($\gamma = 1$)
V. Гиперβολо-параболическая (HP) $(K_1 + L)^2 - \gamma K_2^2, \gamma > 0$ $b > 0, \theta \in (0, \pi)$	$u_{0,1} = \frac{R \cosh^2 b - \sin^2 \theta \pm \gamma}{\sqrt{\gamma} 2 \sin \theta \sinh b}$ $u_2 = R \cot \theta \coth b$	Декартова

Продолжение табл. 1

Система координат, оператор	Координаты	Система на E_2 при контракции
Vа. Полуциркулярно-параболическая (SCP) $\{K_1, K_2\} + \{K_2, L\}, \xi, \eta > 0$	$u_{0,1} = R[(\eta^2 + \xi^2)^2 \pm 4]/(8\xi\eta)$ $u_2 = R[\eta^2 - \xi^2]/(2\xi\eta)$	Декартова
Vб. Полуциркулярно-параболическая (SCP') $K_2^2 - K_1^2 - \{K_1, L\}/\sqrt{2} + \{K_2, L\}/\sqrt{2}$ $\xi, \eta > 0$	$u_0 = R \frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 + 4}{8\xi\eta}$ $u_1 + u_2 = R \frac{\eta^2 - \xi^2}{\sqrt{2}\xi\eta}$ $u_1 - u_2 = R \frac{(\eta^2 + \xi^2)^2 - 4}{4\sqrt{2}\xi\eta}$	Декартова
Vа. Эллиптическая (E) $L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2, \sinh^2 \beta = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3}$ $a_3 < a_2 \leq \rho_2 < a_1 \leq \rho_1, k^2 = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}$ $a \in (iK', iK' + 2K), b \in [0, 4K')$	$u_0^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} u_0 = R \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k')$ $u_1^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} u_1 = iR \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')$ $u_2^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} u_2 = iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$	Эллиптическая ($a_1 - a_2 = D^2, -a_3 \simeq R^2$) Полярная ($a_1 - a_2 \simeq R^{-2}, a_2 - a_3 \simeq R^2$) Декартова ($a_1 - a_2 = a_2 - a_3$)
Vб. Эллиптическая (E) (гиперболическое вращение E) $\cosh 2\beta L^2 + 1/2 \sinh 2\beta\{K_1, L\}$	$u_0 = \frac{R}{k} \{\operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k') + ik' \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')\}$ $u_1 = \frac{R}{k} \{k' \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k') + i \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')\}$ $u_2 = iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$	Параболическая
VIII. Гиперболическая (H) $K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2$ $\sin^2 \alpha = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} = k^2$ $\rho_2 < a_3 < a_2 < a_1 < \rho_1; k^2 + k'^2 = 1$ $a \in (iK, iK + 2K), b \in (iK, iK + 2K')$	$u_0^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)} u_0 = -R \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')$ $u_1^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(a_3 - \rho_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)} u_1 = iR \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k')$ $u_2^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} u_2 = iR \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$	Декартова

Окончание табл. 1

Система координат, оператор	Координаты	Система на E_2 при контракции
IXа. Полулиперболическая (SH-I) $cK_2^2 + \{K_1, L\}$, $c = \sinh 2\beta \neq 0$ $\sinh \tau_2 < -c < \sinh \tau_1$	$u_0^2 + u_1^2 = \frac{R^2}{\sqrt{c^2 + 1}} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2$ $u_0^2 - u_1^2 = \frac{R^2}{c^2 + 1} [c^2 + 1 - (\sinh \tau_1 + c)(\sinh \tau_2 + c)]$ $u_2^2 = -\frac{R^2}{c^2 + 1} (\sinh \tau_1 + c)(\sinh \tau_2 + c)$	Система на E_2 при контракции Декартова ($c \neq 0$)
IXб. Полулиперболическая (SH-II) $\{K_1, L\}$ $\mu_1, \mu_2 \geq 0$	$u_0^2 = \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} + \mu_1 \mu_2 + 1 \right\}$ $u_1^2 = \frac{R^2}{2} \left\{ \sqrt{(1 + \mu_1^2)(1 + \mu_2^2)} - \mu_1 \mu_2 - 1 \right\}$ $u_2^2 = R^2 \mu_1 \mu_2$	Параболическая

Таблица 2. Системы координат на однополостном гиперболоиде (* означает перестановку $u_1 \leftrightarrow u_2$)

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
Ia. Евклидистантная (EQ-Ia), K_2^2 $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$	$u_0 = R \sinh \tau_1 \cosh \tau_2$ $u_1 = R \sinh \tau_1 \sinh \tau_2$ $u_2 = \pm R \cosh \tau_1$	Псевдополярная, N^2 $ t > x $	$ u_2 > R$
Iб. Евклидистантная (EQ-Ia), K_2 $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$	$u_0 = R \sinh \tau_1 \cosh (\tau_2 - \ln [R\tau_1/\alpha])$ $u_1 = R \sinh \tau_1 \sinh (\tau_2 - \ln [R\tau_1/\alpha])$ $u_2 = \pm R \cosh \tau_1$	Полулиперболическая, N $ t > x $	$ u_2 > R$ неортогональная
Iс. Евклидистантная (EQ-Ib), K_2^2 $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = R \sin \varphi \sinh \tau$ $u_1 = R \sin \varphi \cosh \tau$ $u_2 = R \cos \varphi$	Псевдополярная, N^2 $ t < x $	$ u_2 < R$
Id. Евклидистантная (EQ-Ib), K_2 $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = R \sin \varphi \sinh (\tau - \ln [R\varphi/\alpha])$ $u_1 = R \sin \varphi \cosh (\tau - \ln [R\varphi/\alpha])$ $u_2 = R \cos \varphi$	Полулиперболическая, N $ t < x $	$ u_2 < R$ неортогональная

Продолжение табл. 2

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
Ie. Эвклидистантная (EQ-Пв)*, K_1^2 $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = R \sin \varphi \sinh \tau$ $u_1 = R \cos \varphi$ $u_2 = R \sin \varphi \cosh \tau$	Декартова I, p_0^2	$ u_1 < R$
If. Эвклидистантная (EQ-Пв)*, K_1 $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = -R \cos \varphi \sinh (\tau + R\varphi/\alpha)$ $u_1 = R \sin \varphi$ $u_2 = -R \cos \varphi \cosh (\tau + R\varphi/\alpha)$	Декартова III, p_0	$ u_1 < R$ неортогональная
IIa. Псевдосферическая (SPH), L^2 $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = R \sinh \tau$ $u_1 = R \cosh \tau \cos \varphi$ $u_2 = R \cosh \tau \sin \varphi$	Декартова I, p_1^2	
IIb. Псевдосферическая (SPH), L $\tau \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi)$	$u_0 = R \sinh \tau$ $u_1 = -R \cosh \tau \sin (\varphi + R\tau/\alpha)$ $u_2 = R \cosh \tau \cos (\varphi + R\tau/\alpha)$	Декартова III, p_1	Неортогональная
IIIa. Орициклическая (HO)*, $(K_2 - L)^2$ $\tilde{x} \in \mathbb{R}, \tilde{y} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$u_{0,2} = R \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 \pm 1}{2\tilde{y}}$ $u_1 = R \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}$	Декартова I, p_1^2	
IIIb. Орициклическая (HO), $K_1 + L$ $\xi, \eta \in \mathbb{R}$	$u_{0,1} = R(\xi\eta^2 - 4\eta \pm \xi)/4$ $u_2 = R(1 - \xi\eta/2)$	Декартова II, $p_0 + p_1$	Неортогональная
IVa. Эллипτικο-параболическая (EP), $\gamma K_2^2 + (K_1 + L)$ $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \gamma > 0$	$u_{0,1} = \frac{R \cosh^2 \tau_1 - \cosh^2 \tau_2 \pm \gamma}{\sqrt{\gamma}}$ $u_2 = R^2 \tanh \tau_1 \coth \tau_2$	Гиперболическая II, $N^2 + l^2(p_0 + p_1)^2$, γ фиксированное	
IVb. Эллипτικο-параболическая (EP)*, $\gamma K_1^2 + (K_2 - L)$ $\tau_1 \geq 0, \tau_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \gamma > 0$	$u_0 = \frac{R \cosh^2 \tau_1 - \cosh^2 \tau_2 + \gamma}{\sqrt{\gamma}}$ $u_1 = R^2 \tanh \tau_1 \coth \tau_2$ $u_2 = \frac{R \cosh^2 \tau_1 - \cosh^2 \tau_2 - \gamma}{\sqrt{\gamma}}$	Декартова I, $\gamma p_0^2 + p_1^2, \gamma \simeq R^2/l^2$	

Продолжение табл. 2

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
<p>V. Эллиптическая (E) $L^2 + \sinh^2 \beta K_2^2$ $\rho_2 < a_3 < a_2 < \rho_1 < a_1$ $a \in [K, K + i4K']$, $b \in (iK, iK + 2K')$</p>	$u_0^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(a_3 - \rho_2)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}$ $u_1^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(a_2 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}$ $u_2^2 = R^2 \frac{(a_1 - \rho_1)(a_1 - \rho_2)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$ $u_0 = iR \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k')$ $u_1 = -R \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k')$ $u_2 = -R \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$	<p>Эллиптическая I, $N^2 + D^2 \rho_1^2$, $D = \sqrt{a_1 - a_2}$, $a_1 \simeq R^2$ Декартова I, ρ_1^2, β фиксированное: $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$</p>	$\sinh^2 \beta = \frac{a_1 - a_2}{a_2 - a_3}$
<p>VIa. Полушаркулярно-гиперболическая (SCP), $\{K_1, K_2\} + \{K_2, L\}$ $\xi > 0$, $\eta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$</p>	$u_{0,1} = R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 \pm 4}{8\xi\eta}$ $u_2 = \pm R \frac{\eta^2 + \xi^2}{2\xi\eta}$	<p>Нет разделяющих координат $\{p_0, N\} + \{p_1, N\}$</p>	$ u_2 > R$
<p>VIb. SCP (гиперболическое вращение), $(K_1^2 + \{K_1, K_2\} - 3K_2^2)/4 + \{K_2, L\}/\sqrt{2} - L^2/2$ $\xi\eta \neq 0$</p>	$u_0 = R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 - 4\xi^2 - 4\eta^2 + 20}{16\xi\eta}$ $u_1 = R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2 + 4\eta^2 - 28}{16\sqrt{2}\xi\eta}$ $u_2 = -R \frac{(\eta^2 - \xi^2)^2 - 12\xi^2 - 12\eta^2 + 4}{16\sqrt{2}\xi\eta}$	<p>Декартова I, ρ_0^2</p>	

Продолжение табл. 2

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
VIIa. Гиперболо-параболическая (НР-I), $-\gamma K_2^2 + (K_1 + L)^2$ $\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}, \phi \in (0, \pi)$	$u_{0,1} = \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \phi \pm \gamma}{\sin \theta \sin \phi}$ $u_2 = R \cot \theta \cot \phi$	Гиперболическая III для всех НР-систем, $N^2 - l^2 (p_0 + p_1)^2$, $\gamma \simeq R^2/l^2$	
VIIb. Гиперболо-параболическая (НР-II), $\theta \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}, \phi \in (0, \pi)$	$u_0 = \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \times$ $\times \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1 + \gamma \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin \theta \sin \phi}$ $u_1 = \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \times$ $\times \frac{\cos^2 \theta \cos^2 \phi - 1 - \gamma \sin^2 \theta \sin^2 \phi}{\sin \theta \sin \phi}$ $u_2 = R \cos \theta \cos \phi$		
VIIc. Гиперболо-параболическая (НР-III), $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \phi > 0$	$u_{0,1} = \frac{R}{2\sqrt{\gamma}} \times$ $\times \frac{\cosh^2 \theta \cosh^2 \phi - 1 \pm \gamma \sinh^2 \theta \sinh^2 \phi}{\sinh \theta \sinh \phi}$ $u_2 = \pm R \cosh \theta \cosh \phi$	Декартова I, $p_1^2 - \gamma p_0^2$, γ фиксированное для НР*, $\gamma \in (0, 1)$ для НР**, $\gamma > 1$	$ u_0(1 - \gamma) +$ $u_1(1 + \gamma) >$ $2R\sqrt{\gamma}$
VIIId. (НР*) Гиперболо-параболическая, $-K_1^2 + (K_2 - L)^2$	Всё переставленные НР-системы	Параболическая I, $\{N, p_1\}$	$\gamma = 1$

Продолжение табл. 2

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
<p>VIIa. Гиперболическая I, $K_2^2 - \sin^2 \alpha L^2$ $\sin^2 \alpha = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} = k^2$ $H_1^A : \rho_i < a_3 < a_2 < a_1$ $a \in (-iK', iK')$, $b \in (iK, iK + 2K')$ $H_1^B : a_3 < a_2 < a_1 < \rho_i$ $a \in (iK', iK' + 2K)$, $b \in (-iK, iK)$ VIIIb. Гиперболическая II, $H_1^A : a_3 < \rho_i < a_2 < a_1$ $a \in [0, 4K)$, $b \in [K', K' + i4K)$ $H_1^B : a_3 < a_2 < \rho_i < a_1$ $a \in [K, K + i4K')$, $b \in [0, 4K')$</p>	$u_0^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_2)(\rho_2 - a_2)}{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}$ $u_1^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_3)(\rho_2 - a_3)}{(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)}$ $u_2^2 = R^2 \frac{(\rho_1 - a_1)(\rho_2 - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)}$ $u_0 = -iR \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$ $u_1 = -R \operatorname{sn}(a, k) \operatorname{dn}(b, k')$ $u_2 = -R \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')$	$H_1^A \text{ к}$ эллиптической $\Pi(i)$, $d = \sqrt{a_2 - a_3}$ $H_1^A \text{ к}$ эллиптической $\Pi(ii)$, $N^2 - a_2^2 p_1^2$ $a_1 \simeq R^2$	$ u_1^2 \sin^2 \alpha - u_2^2 \cos^2 \alpha + R^2 > 2R u_1 \sin \alpha $
<p>VIIIc. Гиперболическая III (гиперболическое вращение H_1^A) $cK_2^2 + \{K_2, L\}$ $c = k + 1/k$</p>	$u_0 = \frac{R}{k'} [-k \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{cn}(b, k') + i \operatorname{cn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')]$, $u_1 = Ri \operatorname{sn}(a, k) i \operatorname{dn}(b, k')$, $u_2 = \frac{R}{k'} [-k \operatorname{cn}(a, k) i \operatorname{cn}(b, k') + \operatorname{dn}(a, k) \operatorname{sn}(b, k')]$	Псевдоголоярная, $N^2, k \simeq R^{-2}$ Параболическая I, $\{N, p_1\}$, k фиксированное	

Окончание табл. 2

Система координат, оператор	Координаты	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор	Замечания
IX. Полугиперболическая $\sinh 2\beta K_2^2 + \{K_1, L\}$ $SH_1 : \tau_i \leq \text{arcsinh } c,$ $SH_{II} : \tau_i \geq \text{arcsinh } c$ $c = \frac{a-\gamma}{\delta} = \sinh 2\beta$	$u_0^2 + u_1^2 = \frac{R^2}{\sqrt{c^2 + 1}} \cosh \tau_1 \cosh \tau_2$ $u_0^2 - u_1^2 = \frac{R^2}{2(c^2 + 1)} \times$ $\times \{(\sinh \tau_1 - c)(\sinh \tau_2 - c) - c^2 - 1\}$ $u_2^2 = \frac{R^2}{c^2 + 1} (\sinh \tau_1 - c)(\sinh \tau_2 - c)$	Система на $E_{1,1}$ при контракции, оператор SH_1 к гиперболической I, $N^2 + l^2 p_0 p_1,$ $c \simeq 2R^2/l^2, l = \text{const}$ SH^* к декартовой I, $p_0, c \neq 0$ SH^* к параболической I, $\{N, p_1\}, c = 0$	

Таблица 3. Системы координат на евклидовой плоскости E_2

Система координат	Интеграл движения X	Координаты	Замечания
I. Декартова $-\infty < x, y < \infty$	$X_C^2 = p_1^2$	x y	Ортогональная
IIa. Декартова $-\infty < x', y' < \infty$	$X_C = p_1$	$x = x' + y'$ $y = y'$	Неортогональная
II. Полярная $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$	$X_S^2 = M^2$	$x = r \cos \varphi$ $y = r \sin \varphi$	Ортогональная
IIa. Полярная $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$	$X_S = M$	$x = r \cos(\varphi + r/\alpha)$ $y = r \sin(\varphi + r/\alpha)$	Неортогональная $\alpha \neq 0$
III. Параболическая $u \geq 0, -\infty < v < \infty$	$X_P = \{p_2, M\}$	$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ $y = uv$	Ортогональная
IV. Эллиптическая $0 \leq \xi < \infty, 0 \leq \eta < 2\pi$	$X_E = M^2 + D^2 p_1^2$	$x = D \cosh \xi \cos \eta$ $y = D \sinh \xi \sin \eta$	Ортогональная

Таблица 4. Системы координат на псевдоевклидовой плоскости $E_{1,1}$

Система координат	Интеграл движения X	Координаты	Замечания
I. а) Декартова, тип I	$X_C^I = p_0 p_1$ или $X_C^I = (p_0 + p_1)^2$ или $X_C^I = p_1^2$ или $X_C^I = p_0^2$	$t,$ x	Ортогональные
б) Декартова, тип II	$X_C^{II} = p_0 + p_1$	$t = x' + t'/4, x = x' - t'/4$	Неортогональные
в) Декартова, тип III	$X_C^{III} = p_1$	$t = -t'/2, x = t'/2 + x'$	Неортогональные
IIа. Псевдополярная $r \geq 0, -\infty < \tau_2 < \infty$	$X_S^2 = N^2$	$t = r \cosh \tau_2, x = r \sinh \tau_2$	$t > x $
IIб. Псевдополярная $r \geq 0, -\infty < \tau < \infty$	$X_S^2 = N^2$	$\tilde{t} = r \sinh \tau, \tilde{x} = r \cosh \tau$	$ \tilde{t} < \tilde{x}$
III. Параболическая, тип I $v \geq 0, -\infty < u < \infty$	$X_P^I = \{p_1, N\}$	$t = (1/2)(u^2 + v^2),$ $x = uv$	
IV. Параболическая, тип II $-\infty < \eta, \xi < \infty$	$X_P^{II} = \{p_0, N\} + \{p_1, N\}$ $+ \alpha(p_0 - p_1)^2$	$t = (1/2\alpha)(\eta - \xi)^2 - (\eta + \xi),$ $x = (1/2\alpha)(\eta - \xi)^2 + (\eta + \xi)$	
V. Гиперболическая, тип I $-\infty < \zeta_1, \zeta_2 < \infty$	$X_H^I = N^2 + l^2 p_0 p_1$	$t = (l/2) (\cosh(\zeta_1 + \zeta_2)/2 - \sinh(\zeta_1 - \zeta_2)/2),$ $x = (l/2) (\cosh(\zeta_1 + \zeta_2)/2 + \sinh(\zeta_1 - \zeta_2)/2)$	
VI. Гиперболическая, тип II $-\infty < \zeta_1, \zeta_2 < \infty$	$X_H^{II} = N^2 + l^2 (p_0 + p_1)^2$	$t = l (\sinh(\zeta_1 - \zeta_2) + e^{\zeta_1 + \zeta_2}),$ $x = l (\sinh(\zeta_1 - \zeta_2) - e^{\zeta_1 + \zeta_2})$	
VII. Гиперболическая, тип III $-\infty < \zeta_1, \zeta_2 < \infty$	$X_H^{III} = N^2 - l^2 (p_0 + p_1)^2$	$t = l (\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) \pm e^{\zeta_1 + \zeta_2}),$ $x = l (\cosh(\zeta_1 - \zeta_2) \mp e^{\zeta_1 + \zeta_2})$	Непокрытая часть $ t + x < 2 l $
VIII. Эллиптическая, тип I $-\infty < \eta, \xi < \infty$	$X_E^I = N^2 + D^2 p_1^2$	$t = D \sinh \xi \cosh \eta,$ $x = D \cosh \xi \sinh \eta$	
IX. Эллиптическая, тип II (i) $-\infty < \eta < \infty, \xi \geq 0$ (ii) $0 < \eta < 2\pi, 0 \leq \xi < \pi$	$X_E^{II} = N^2 - d^2 p_1^2$	(i) $t = d \cosh \eta \cosh \xi, x = d \sinh \eta \sinh \xi;$ (ii) $t = d \cos \eta \cos \xi, x = d \sin \eta \sin \xi$	
X. Полугиперболическая $r > 0, -\infty < \tau < +\infty$	$X_S = N$	(i) $2t = e^\tau + r^2 e^{-\tau}, 2x = e^\tau - r^2 e^{-\tau};$ (ii) $2t = e^\tau - r^2 e^{-\tau}, 2x = e^\tau + r^2 e^{-\tau}$	Неортогональные (i) $ t > x $ (ii) $ t < x $

Благодарности. Авторы выражают признательность профессору Э. Калнинсу за плодотворное обсуждение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Segal I. E. A Class of Operator Algebras Which Are Determined by Groups // Duke Math. J. 1951. V. 18. P. 221–265.
2. Inönü E. On the Contractions of Groups and Their Representations // Proc. Nat. Acad. Sci. (US). 1953. V. 39. P. 510.
3. Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications. New York: Wiley, 1974.
4. Saletan E. J. Contraction of Lie Groups // J. Math. Phys. 1961. V. 2. P. 1–21.
5. Doebner H. D., Melsheimer O. On a Class of Generalized Group Contractions // Nuovo Cim. A. 1967. V. 49. P. 306–311.
6. Inönü E., Wigner E. P. Contractions of Lie Groups and Their Representations // Lectures Istanbul Summer School Theor. Phys. New York: Gordon and Breach, 1962. P. 391–402.
7. Лыхмус Я. Предельные (сжатые) группы Ли // II Летн. шк. по проблемам теории элементарных частиц, Отепя, 1–13 авг. 1967 г. Таллин: АН ЭССР, 1969. С. 111–120.
8. Talman J. D. Special Functions: A Group Theoretic Approach. New York: Benjamin, 1968.
9. Weimar-Woods E. The Three-Dimensional Real Lie Algebras and Their Contractions // J. Math. Phys. 1991. V. 32, No. 8. P. 2028–2033.
10. Weimar-Woods E. Contraction of Lie Algebra Representations // Ibid. P. 2660–2665.
11. Weimar-Woods E. Contractions of Lie Algebras: Generalized Inönü–Wigner Contractions versus Graded Contractions // J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 4519–4548.
12. Atakishiyev N. M., Pogosyan G. S., Wolf K. B. Contraction of the Finite One-Dimensional Oscillator // Intern. J. Mod. Phys. A. 2003. V. 18, No. 2. P. 317–327.
13. Atakishiyev N. M., Pogosyan G. S., Wolf K. B. Contraction of the Finite Radial Oscillator // Ibid. P. 329–341.
14. Couture M., Patera J., Sharp R. T., Winternitz P. Graded Contractions of $sl(3, C)$ // J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 2310–2318.
15. De Montigny M., Patera J. Discrete and Continuous Graded Contractions of Lie Algebras and Superalgebras // J. Phys. A: Math. Gen. 1991. V. 24. P. 525–549.
16. Moody R. V., Patera J. Discrete and Continuous Graded Contractions of Representations of Lie Algebra // Ibid. P. 2227–2258.
17. De Montigny M., Patera J., Tolar J. Graded Contractions and Kinematical Groups of Space-Time // J. Math. Phys. 1994. V. 35, No. 1. P. 405–425.

18. *Herranz F. J., De Montigny M., Del Olmo M. A., Santander M.* Cayley–Klein Algebras as Graded Contractions of $so(N + 1)$ // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1994. V. 27. P. 2515–2526.
19. *Patera J., Pogosyan G., Winternitz P.* Graded Contractions of the Lie Algebra $e(2, 1)$ // *J. Phys. A.* 1999. V. 32. P. 805–826.
20. *Tolar J., Travníček P.* Graded Contractions and the Conformal Groups of Minkowski Space-Time // *J. Math. Phys.* 1995. V. 36, No. 8. P. 4489–4506.
21. *Ballesteros A., Gromov N. A., Herranz F. J., Del Olmo M. A., Santander M.* Lie Bialgebra in Contractions and Quantum Deformations of Quasiorthogonal Algebras // *Ibid.* P. 5916–5937.
22. *Ballesteros A., Herranz F. J., Del Olmo M. A., Santander M.* Quantum Structure of the Motion Groups of the Two-Dimensional Cayley–Klein Geometries // *J. Phys. A.* 1993. V. 26. P. 5801–5823.
23. *Castaños O., Draayer J. P.* Contracted Symplectic Model with ds -Shell Applications // *Nucl. Phys. A.* 1989. V. 491. P. 349–372.
24. *Celeghini E., Giachetti E., Tarlini M.* Contractions of Quantum Groups // *Lecture Notes Math.* Berlin: Springer, 1992. V. 1510.
25. *Громов Н. А.* Контракции классических и квантовых групп. М.: Физматлит, 2012. 318 с.
26. *Herranz F. J., Ballesteros A.* Superintegrability on N -Dimensional Space of Constant Curvature from $so(N + 1)$ and Its Contractions. arXiv:0707.3772v1.
27. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Post S.* Contractions of 2D 2nd Order Quantum Superintegrable Systems and the Askey Scheme for Hypergeometric Orthogonal Polynomials. arXiv:1212.4766v1 [math-ph].
28. *Lohmus J., Tammelo R.* Contractions and Deformations of Space-Time Algebras: I. General Theory and Kinematical Algebras // *Hadronic J.* 1997. V. 20. P. 361–416.
29. *Nesterenko M., Popovych R.* Contractions of Low-Dimensional Lie Algebra // *J. Math. Phys.* 2006. V. 47. P. 123515.
30. *Escobar-Ruiz M. A., Kalnins E. G., Miller W., Jr., Subag E.* Bôcher and Abstract Contractions of 2nd Order Quadratic Algebras // *SIGMA.* 2017. V. 13. P. 013.
31. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S.* Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables. From Two-Dimensional Hyperboloid to Pseudo-Euclidean Plane. JINR Preprint E2-98-83. Dubna, 1998.
32. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P.* Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables // *J. Phys. A.* 1996. V. 29. P. 5940–5962.
33. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P.* Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables. Two-Dimensional Hyperboloid // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1997. V. 12. P. 53–61.
34. *Izmest'ev A. A., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P.* Contractions of Lie Algebras and Separation of Variables. The n -Dimensional Sphere // *J. Math. Phys.* 1999. V. 40. P. 1549–1573.

35. *Izmet'sev A. A., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P.* Contractions of Lie Algebras and the Separation of Variables. Interbases Expansions // *J. Phys. A.* 2001. V. 34. P. 521–554.
36. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Pogosyan G. S.* Contractions of Lie Algebras: Applications to Special Functions and Separation of Variables // *J. Phys. A.* 1999. V. 32. P. 4709–4732.
37. *Kalnins E., Pogosyan G. S., Yakhno A.* Separation of Variables and Contractions on Two-Dimensional Hyperboloid // *SIGMA.* 2012. V. 8. P. 105; arXiv:1212.6123v1.
38. *Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P.* Separation of Variables and Lie Algebra Contractions. Applications to Special Functions // *Phys. Part. Nucl.* 2002. V. 33, Iss. 1. P. S123–S144.
39. *Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Winternitz P., Wolf K. B.* Graf's Addition Theorem Obtained from $SO(3)$ Contraction // *Theor. Math. Phys.* 2001. V. 129, No. 2. P. 1501–1503 (*Teor. Mat. Fiz.* 2001. V. 129(2). P. 227–229).
40. *Pogosyan G. S., Yakhno A.* Lie Algebra Contractions and Separation of Variables. Three-Dimensional Sphere // *Phys. At. Nucl.* 2009. V. 72, No. 5. P. 836–844.
41. *Gel'fand I. M., Graev M. I., Vilenkin N. Ya.* Generalized Functions. V.5. New York: Academic, 1966.
42. *Kalnins E. G., Miller W., Jr.* Lie Theory and the Wave Equation in Space-Time: 1. The Lorentz Group // *J. Math. Phys.* 1977. V. 18. P. 1–16.
43. *Dane C., Verdiev Y. A.* Integrable Systems of Group $SO(1, 2)$ and Green's Functions // *J. Math. Phys.* 1996. V. 31, No. 1. P. 39–60.
44. *Kowalski K., Rembielinski J., Szczesniak A.* Pseudospherical Functions on Hyperboloid of One Sheet // *J. Phys. A.* 2011. V. 44. P. 085302.
45. *Pogosyan G. S., Yakhno A.* Lie Algebra Contractions on Two-Dimensional Hyperboloids // *Phys. At. Nucl.* 2010. V. 73, No. 3. P. 499–508.
46. *Pogosyan G. S., Yakhno A.* Two-Dimensional Imaginary Lobachevsky Space. Separation of Variables and Contractions // *Phys. At. Nucl.* 2011. V. 74, No. 7. P. 1091–1101.
47. *Kildyushov M. S.* Hyperspherical Functions of "Tree" Type in the n -Body Problem // *J. Nucl. Phys.* 1972. V. 15, No. 1. P. 197–208.
48. *Олевский М. Н.* Триортогональные системы в пространствах постоянной кривизны, в которых уравнение $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ допускает полное разделение переменных // *Матем. сб.* 1950. Т. 27(69), № 3. С. 379–426.
49. *Kalnins E. G.* On the Separation of Variables for the Laplace Equation $\Delta\Psi + K^2\Psi$ in Two- and Three-Dimensional Minkowsky Space // *SIAM J. Math. Anal.* 1975. V. 6, No. 2.
50. *Kalnins E. G., Miller W., Jr.* The Wave Equation, $SO(2, 2)$, and Separation of Variables on Hyperboloids // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. A.* 1977. V. 79. P. 227–256.
51. *Kalnins E. G., Miller W., Jr.* Lie Theory and the Wave Equation in Space-Time: 2. The Group $SO(4, C)$ // *SIAM J. Math. Anal.* 1978. V. 9. P. 12–33.

52. *Boyer C. P., Kalnins E. G., Miller W., Jr.* Separable Coordinates for Four-Dimensional Riemannian Spaces // *Commun. Math. Phys.* 1978. V. 59. P. 285–302.
53. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Reid G. J.* Separation of Variables for Complex Riemannian Spaces of Constant Curvature: I. Orthogonal Separable Coordinates for $S_{n\mathbb{C}}$ and $E_{n\mathbb{C}}$ // *Proc. Roy. Soc. London. A.* 1984. V. 394. P. 183–206.
54. *Kalnins E. G.* Separation of Variables for Riemannian Spaces of Constant Curvature. Longman: Burnt Mill, 1986.
55. *Smorodinskii Ya. A., Tugov I. I.* On Complete Sets of Observables // *Sov. Phys. JETP.* 1966. V. 23. P. 434–437.
56. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Winternitz P.* The Group $SO(4)$, Separation of Variables and the Hydrogen Atom // *SIAM J. Appl. Math.* 1976. V. 30. P. 630–664.
57. *Kalnins E. G., Thomova Z., Winternitz P.* Subgroup Type Coordinates and the Separation of Variables in Hamilton–Jacobi and Schroedinger Equations. arXiv:math-ph/0405063v2.
58. *Lukáčs I.* A Complete Set of the Quantum-Mechanical Observables on a Two-Dimensional Sphere // *Theor. Math. Phys.* 1973. V. 14. P. 271–281.
59. *Lukáčs I.* Complete Sets of Observables on the Sphere in Four-Dimensional Euclidean Space // *Theor. Math. Phys.* 1978. V. 31. P. 457–461.
60. *Miller W., Jr.* Symmetry and Separation of Variables. Addison Wesley Publ. Co., 1987.
61. *Miller W., Jr., Patera J., Winternitz P.* Subgroup of Lie Groups and Separation of Variables // *J. Math. Phys.* 1981. V. 22, No. 2. P. 251–260.
62. *Patera J., Winternitz P.* A New Basis for the Representations of the Rotation Group. Lamé and Heun Polynomials // *J. Math. Phys.* 1973. V. 14. P. 1130.
63. *Pogosyan G. S., Winternitz P.* Separation of Variables and Subgroup Bases on n -Dimensional Hyperboloid // *J. Math. Phys.* 2002. V. 43, No. 6. P. 3387–3410.
64. *Boyer C. P., Kalnins E. G., Winternitz P.* Completely Integrable Relativistic Hamiltonian Systems and Separation of Variables in Hermitean Hyperbolic Spaces // *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 2022–2034.
65. *Winternitz P., Lukac I., Smorodinskii Ya. A.* Quantum Numbers in the Little Groups of the Poincaré Group // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1968. V. 7. P. 139–145.
66. *Lumic N., Niederle J., Raczka R.* Continuous Degenerate Representations of Noncompact Rotation Groups. II // *J. Math. Phys.* 1966. V. 7, No. 11. P. 2026.
67. *Raczka R., Lumic N., Niederle J.* Discrete Degenerate Representations of Noncompact Rotation Groups. I // *Ibid.* P. 1861.
68. *Kuznetsov G. I., Smorodinski Ya. A.* Integral Representation of Relativistic Amplitudes in the Non-Physical Region // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1966. V. 3. P. 375.
69. *Verdiev I. A.* Total Set of Functions on the Unparted Hyperboloid // *Sov. J. Nucl. Phys.* 1969. V. 10. P. 1282–1286.

70. *Calzada J. A., Negro J., Del Olmo M. A., Rodriguez M. A.* Contraction of Superintegrable Hamiltonian Systems // *J. Math. Phys.* 2000. V. 41. P. 317.
71. *Hakobyan Ye. M., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Vinitzky S. I.* Isotropic Oscillator in the Space of Constant Positive Curvature. Interbasis Expansions // *Phys. At. Nucl.* 1999. V. 62, No. 4. P. 671–685.
72. *Herederero H. R., Levi D., Rodriguez M. A., Winternitz P.* Lie Algebra Contractions and Symmetries of the Toda Hierarchy // *J. Phys. A.* 2000. V. 33. P. 5025.
73. *Kalnins E. G., Miller W., Jr., Subag E.* Bocher Contractions of Conformally Superintegrable Laplace Equations // *SIGMA.* 2016. V. 12. P. 038; arXiv:1510.09067.
74. *Miller W., Jr., Post S., Winternitz P.* Classical and Quantum Superintegrability with Applications // *J. Phys. A.* 2013. V. 46. P. 423001.
75. *Escobar-Ruiz M. A., Kalnins E. G., Miller W., Jr., Subag E.* 2D 2nd Order Laplace Superintegrable Systems, Heun Equations, QES and Bocher Contractions. arXiv:1609.03917.
76. *Morse Ph., Feshbach H.* Methods of Theoretical Physics. Part 1. Feshbach Publ., 2005.
77. *Ovsyannikov L. V.* Group Analysis of Differential Equations. New York: Acad. Press, 1982.
78. *Куров А.* Высшая алгебра. М.: Мир, 1984.
79. *Каган В. Ф.* Основания геометрии II. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956.
80. *Grosche C., Pogosyan G. S., Sissakian A. N.* Path Integral Approach to Superintegrable Potentials. Two-Dimensional Hyperboloid // *Phys. Part. Nucl.* 1996. V. 27, Iss. 3. P. 244–278 (Part. Nucl. 1996. V. 27. P. 593–674).
81. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. V. 3. New York: Mc. Graw-Hill, 1953.