

ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ: ПРИ ЧЕМ ЗДЕСЬ ФИЗИКА?

А. С. Анохина *

Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва

Мы постараемся разобраться в основных идеях знаменитой работы Э. Виттена «Квантовая теория поля и полином Джонса». Этот сюжет чрезвычайно популярен в современной математической физике, однако считается весьма трудным для изложения и потому редко обсуждается по существу. На наш взгляд, ключевые предпосылки и основные идеи в этой области не так уж загадочны и вполне доступны для любопытного взгляда со стороны.

We attempt to clarify the main ideas around the famous paper by E. Witten “Quantum field theory and Jones polynomial”. This subject of modern mathematical physics is extremely popular, but it thought to be rather hard for presentation and thus is rarely discussed in essence. We think that the basic background and the key ideas in this field are not so mysterious and are quite available to the curious side observer.

PACS: 02.10.Kn; 11.10.Lm

ВВЕДЕНИЕ

Мы собираемся обсудить следующее удивительное явление: система методов, изначально разработанных для описания физических систем, оказалась также мощным средством в некоторых задачах теории узлов. Подобное явление произошло во многих математических сюжетах, и в настоящее время они образуют целую область, которую по историческим причинам часто продолжают называть *теорией струн* [1]. Собственно элементы теории узлов заняли место среди этих сюжетов сравнительно недавно: хотя различные идеи в этом направлении обсуждаются уже около 30 лет [2], на последние 5 из них приходится период инфляции (в космологическом смысле).

Точкой отсчета сюжета «узлы и физика» принято считать работу [3] и ее знаменитый тезис: «Полином Джонса есть вильсоновское среднее в теории Черна–Саймонса». Однако едва ли стоит переоценивать значение изолированного утверждения, даже если оно стало символом своей области знания.

*E-mail: anokhina@itep.ru

Содержание, как всегда, создается контекстом: многими работами многих людей. Сперва в разных сюжетах находится *что-то такое*, и постепенно все это складывается в *нечто целое*. Именно с такой точки зрения мы и попытаемся обсудить столь популярный ныне «физический смысл полиномов узлов».

В качестве введения в сюжет мы начнем с самой постановки *топологической* задачи, которая в физическом контексте на первый взгляд кажется весьма экзотической: *рассмотреть вместо изолированного объекта сразу целый класс объектов, связанных всевозможными непрерывными преобразованиями*.

1. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ФИЗИКЕ

Название раздела объединяет целый пласт идей. Мы дадим краткий обзор наиболее простых и важных из них (на наш взгляд).

В качестве примеров физических явлений, при описании которых очевидным образом возникают топологические задачи, можно привести несколько ярких физических явлений, известных как *топологические* эффекты. Их перечень открывается эффектом Ааронова–Бома [4], продолжается монопольным решением в модели Вайнберга–Салама [5] и инстантонными решениями уравнений Янга–Миллса [6] (такие решения в числе прочего могли бы быть причиной конфайнмента в КХД, как показал Поляков [7] в модельной задаче [8]). Сюда же относятся различные квазичастицы [9], ряд которых наблюдают в реальных экспериментах, чаще всего в (эффективно) двумерных системах. Два знаменитых примера: абрикосовские вихри, играющие ключевую роль в структуре промежуточного состояния в сверхпроводниках второго рода [10], а также анионы в графене [11], к которым апеллирует большинство моделей дробного квантового эффекта Холла [12] и которые открывают принципиальную возможность для создания квантового компьютера [13]. Изучение всех этих эффектов составляет целый раздел теории поля [9].

Мы тем не менее сознательно сосредоточимся на примерах совсем другого рода, в которых топологические задачи естественным образом возникают при изучении самых обычных физических явлений.

1.1. Адиабатические преобразования. 1.1.1. Что значит адиабатическое? В топологии в качестве основного понятия выступает *класс эквивалентности* объектов: кривых, поверхностей и т. п., такой, что объекты внутри класса можно получить друг из друга непрерывными преобразованиями. Пример аналогичной постановки физической задачи встречается в теории *адиабатических* преобразований [4, 14].

Адиабатическое преобразование физической системы — это непрерывное изменение ее параметров, которое можно рассматривать как эволюцию во времени более сложной системы, для которой изменяющиеся со временем параметры дополняют число динамических переменных. Для этого переменные-

параметры должны изменяться достаточно медленно, чтобы можно было пренебречь членами с их производными в динамических уравнениях. Тогда в каждый момент времени движение системы «нового типа» (когда параметры входят в число переменных) будет приближаться к движению *некоторой* системы «старого типа» (для каждой такой системы параметры — просто параметры, но выбор самой системы, т.е. значений параметров, зависит от времени). При этом за большой промежуток времени может «накопиться» значительное изменение параметров, так что соответствующие системы «старого типа» могут существенно различаться по своим физическим свойствам.

1.1.2. Адиабатически (не)эквивалентные состояния. В теории адиабатических преобразований набор физических систем, различающихся значением(ями) параметра(ов), рассматривается как единый класс эквивалентности *при условии*, что все эти системы можно получить друг из друга путем медленного (как описано выше) изменения параметров во времени. Иными словами, теория адиабатических преобразований изучает общие свойства таких систем. Ниже мы поясним эти идеи на примере конкретной физической системы.

Режимы движения математического маятника. Произвольное движение системы на рис. 1 описывается уравнением

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0, \tag{1.1}$$

которое следует из II закона Ньютона: $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Для исследования различных решений удобно записать первый интеграл уравнения (1.1) — закон сохранения энергии:

$$-\int \dot{\varphi} (\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi) dt = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \cos \varphi = \text{const} \equiv E. \tag{1.2}$$

При этом $E_k = (1/2)ml^2\dot{\varphi}^2$ — кинетическая энергия маятника, а $E_p = -mgl \cos \varphi$ — потенциальная с нулевым уровнем при $\varphi = \pm\pi/2$ (нить горизонтальна), так что $E_p = -mgl \cos \varphi$ при $\varphi = 0$ (нить вертикально вниз); $E_p = mgl \cos \varphi$ при $\varphi = \pi$ (нить вертикально вверх) и $-ml^2\dot{\varphi}^2 \leq E_p \leq mgl \cos \varphi$ в течение всего движения.

Топология фазового портрета. Закон сохранения энергии (1.2) можно рассматривать как уравнение фазовой траектории — кривой, описывающей эволюцию состояния маятника во времени как движение точки $(\varphi, p \equiv m\dot{\varphi})$ на фазовой плоскости. В данном случае можно показать [14], что всевозможные фазовые траектории разобьются на пять различных классов (рис. 2). В частности, все траектории общего положения относятся к одному из трех

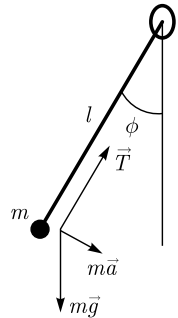


Рис. 1. Силы, действующие на математический маятник

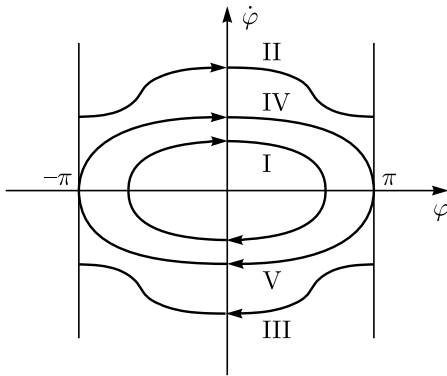


Рис. 2. Фазовые траектории математического маятника в различных режимах движения: режим движения невозможно изменить за *конечное* время путем *адиабатического* изменения параметров системы

что всякие два движения маятника из одного класса *адиабатически* эквивалентны, т.е. переходят друг в друга в результате некоторого адиабатического преобразования системы (при описанном выше медленном изменении собственной частоты или полной энергии) за *конечное* время. Напротив, между движениями из различных классов такой переход невозможен. Например, если у маятника, совершавшего малые колебания, начать изменять длину нити l (и, соответственно, собственную частоту $\omega = \sqrt{g/l}$) достаточно медленно, так, что в каждый момент времени движение маятника приближается к гармоническому колебанию с мгновенной частотой в качестве собственной, то энергия маятника, на первый взгляд, будет неограниченно возрастать. Можно, однако, показать [14], что тогда и период колебаний будет неограниченно нарастать, стремясь к бесконечности по мере приближения энергии к критической величине $E = mgl$ (равной энергии предельных траекторий IV и V). Это видно из следующей явной формулы:

$$T(\lambda) = 2\tau \left| \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \lambda \cos \varphi}} \right|, \quad \cos \varphi_{\max} = -\lambda^{-1},$$

$$|\lambda| > 1 \Leftrightarrow E < mgl, \quad \lambda = \frac{mgl}{E}, \quad \tau = \sqrt{\frac{ml^2}{2E}},$$

которая получается непосредственно из (1.2) для собственной частоты $\omega^2 = g/l$. В противоположном случае, когда энергия маятника достаточна

классов, связанных с различными режимами движения маятника: I) колебания маятника без совершения полного оборота, а также движения с периодическим полным оборотом II) по либо III) против часовой стрелки. Каждый из этих трех классов включает в себя непрерывное множество фазовых траекторий. Напротив, каждый из двух оставшихся классов содержит в точности по одной предельной траектории, связанной с таким режимом движения, как единственный полный оборот за бесконечно большое время IV) по или V) против часовой стрелки.

Адиабатическая и топологическая эквивалентность. Оказывается,

для совершения полного оборота, в интегральной формуле следует заменить пределы:

$$T(\lambda) = \tau \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \lambda \cos \varphi}}, \quad |\lambda| > 1 \Leftrightarrow E > mgl,$$

что приводит к качественному изменению вида функции $T(\lambda)$.

1.1.3. Топология и «квантовые числа» различных режимов. Адиабатическая (не)эквивалентность режимов движения из различных классов соответствует *топологической* (не)эквивалентности их фазовых траекторий: две фазовых траектории переходят друг в друга при непрерывной деформации, *если и только если* они описывают движения одного класса.

Последнее наблюдение допускает количественную формулировку: со всяким режимом движения маятника можно связать число (0 или ± 1), равное ориентированному углу оборота в единицах 2π за период. Эти числа можно рассматривать как значения переменной, описывающей *дискретную* степень свободы системы. Поскольку величина, принимающая дискретный набор значений, не может изменяться *непрерывно* вместе с параметрами системы, она должна сохраняться при всяких адиабатических преобразованиях, т. е. до тех пор, пока движение системы в каждый момент времени приближается к движению аналогичной системы с неизменными параметрами.

1.1.4. Адиабатическое преобразование как возмущение. Адиабатическая/топологическая классификация фазовых траекторий тесно связана с вопросом о выборе нулевого приближения для описания движения системы по теории возмущений. А именно: движение рассмотренного маятника проще всего описать в двух предельных случаях. В первом случае, при энергиях маятника вблизи минимальной $E \approx -mgl$, угол отклонения все время остается малым ($\varphi \leq \varphi_{\max} = \arccos(-E/mgl) \approx 0$). Последнее позволяет положить $\sin \varphi \approx \varphi$ в (1.2) и получить приближенное линейное уравнение $\ddot{\varphi} + \omega\varphi = 0$, которое описывает движение маятника в данном пределе: малые гармонические колебания с частотой ω в окрестности устойчивого положения равновесия $\varphi = 0$. В противоположном предельном случае, при $E > 0 \gg mgl$, потенциальной энергией маятника можно пренебречь по сравнению с кинетической ($E = E_k + E_p \gg mgl \geq E_p \Rightarrow E = E_k$) и рассматривать движение как равномерное круговое.

Когда каждый из разобранных выше предельных случаев можно использовать для описания произвольного движения системы, хотя бы в качестве нулевого приближения? На фазовом портрете (см. рис. 2) *колебаниям* маятника отвечают траектории класса I, и такие движения маятника, в принципе, можно описать как *возмущение* над гармоническим колебанием путем последовательного учета поправок к малым колебаниям с некоторой энергией $E \approx -mgl$. Такое описание заведомо не работает для движений из классов II

и III, которые качественно не являются колебательными. Зато каждое из таких *периодических круговых* движений можно описывать с помощью поправок к равномерному круговому с энергией $E \gg mgl$, причем следует различать случаи движения по и против часовой стрелки, которые годятся в качестве нулевых приближений для траекторий классов II и III соответственно. Наконец, траектории классов IV и V не соответствуют ни одному из рассмотренных случаев, поскольку сами по себе являются предельными. На конечных временах эти траектории приближенно описывают траектории общего положения с $E \approx 0$ (причем траектории классов II и III с $E \rightarrow +0$ описываются движениями IV и V соответственно, а траектории класса I с $E \rightarrow -0$ — любым из движений IV или V), однако за достаточно большое время всегда проявится качественное отличие движений IV и V от других траекторий.

1.1.5. Адиабатические преобразования квантовых систем. Еще более важную роль теория адиабатических преобразований играет в квантовой механике. Хрестоматийный пример — задача о частице в двугорбом (точнее, в «двухямном») потенциале [15]. Явление, о котором пойдет речь, можно особенно ярко продемонстрировать в пределе $V(x) = -\hbar^2/(2mb)\delta(x)$ ($b > 0$). А именно: волновые функции частицы, находящейся в связанном состоянии в потенциале, невозможно получить из волновых функций в потенциале $V(x) = \hbar^2/(2mb)(\delta(x-a) + \delta(x+a))$, адиабатически устремляя расстояние между ямами $2a$ к бесконечности. (Расстояние следует устремлять именно к бесконечности, а не к нулю, поскольку в последнем случае мы получим дельта-яму двойной мощности.) К такому выводу можно прийти, например, заметив, что первая система имеет один дискретный уровень $E_0 = -\hbar^2/(2mb^2)$, а вторая — два: $E_s = E_0 + \Delta/2$ и $E_a = E_0 - \Delta/2$, где $\Delta = e^{-a/b}/(mb^2)$ (при $a/b \gg 1$). В последнем случае состояния частицы на двух дискретных уровнях описываются симметричной и антисимметричной волновыми функциями

$$\psi_{s,a}(x) = \text{const} \begin{cases} e^{\kappa x}, & x < -a, \\ \frac{e^{\kappa(x-a)} \pm e^{-\kappa(x+a)}}{e^{\kappa a} \pm e^{-\kappa a}}, & -a < x < a, \\ \pm e^{-\kappa x}, & x > a, \end{cases} \quad \kappa = \sqrt{-2mE}, \quad (1.3)$$

в то время как суперпозиция этих состояний

$$\psi(t) = \text{const} \exp\left(-i\frac{E_0}{\hbar}t\right) \left(\psi_s \exp\left(-i\frac{\Delta}{\hbar}t\right) + \psi_a \exp\left(i\frac{\Delta}{\hbar}t\right) \right) \quad (1.4)$$

описывает переход частицы из одной ямы в другую. Действительно, если $ka \ll 1$, то волновую функцию частицы, при $T = 0$ локализованной в первой

яме, можно приближенно представить как

$$\psi(0) = \text{const} \left\{ \begin{array}{ll} e^{\kappa x}, & x < -a, \\ e^{\kappa(x-2a)}, & -a < x < a \\ 0, & x > a \end{array} \right\} \approx \text{const} e^{-\kappa|x+a|}. \quad (1.5)$$

Тогда через (экспоненциально большое, но конечное) время $T = \pi/(2\Delta) = (\pi/2)mb^2 e^{a/b}$ частица окажется (в том же приближении) локализована во второй яме:

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}mb^2 e^{a/b}\right) \approx \text{const} e^{-\kappa|x-a|}. \quad (1.6)$$

Как и задача о математическом маятнике (п. 1.1.4), задача о двух дельта-ямах иллюстрирует роль адиабатически (не)эквивалентных состояний в теории возмущений. А именно: ни расщепление энергетических уровней, ни туннельные переходы частицы между ямами не могут быть получены в рамках теории возмущений из решения задачи о частице в одной дельта-яме в качестве нулевого приближения [9, 16]. Одно из проявлений этого факта — обращение в нуль всех членов в разложении расщепления уровней $2\Delta \sim e^{-\kappa a}$ в формальный ряд по обратному расстоянию между ямами $1/a$.

1.1.6. Адиабатические преобразования в статистической физике.

Огромную роль понятие адиабатического преобразования, или адиабатического процесса, играет в статистической физике [17]. Здесь под адиабатическим процессом понимают воздействие на систему, при котором изменяются энергии, но не числа заполнения дискретных уровней. На термодинамическом (макроскопическом) уровне такие процессы отвечают изменению энергии системы без подвода или отвода тепла. На квантово-статистическом (микроскопическом) уровне такой процесс должен быть достаточно медленным: так что обратное характерное время процесса мало по сравнению с наименьшим расстоянием между энергетическими уровнями.

1.2. Метод аналитического продолжения. Так называется еще один путь, на котором при исследовании физических явлений возникает характерная для топологии постановка задачи. Метод [18, 19] широко применяют во многих областях: от радиотехники [20] до квантовой механики [4, 15] (особенно в теории рассеяния [21]), статистической физики [17] и квантовой теории поля [22], включая квантовую хромодинамику [5] и феноменологию элементарных частиц [23].

1.2.1. Волновые функции квазиклассического приближения как периоды римановой поверхности. В качестве иллюстрации рассмотрим квантовую частицу в периодическом потенциале, для которой волновая функция стационарного состояния с энергией E описывается уравнением Шредингера ($\mathcal{V} < E$ и b — параметры потенциала) [4, 15]:

$$E\psi = -\frac{\hbar^2\psi''(x)}{2m} + V(x)\psi(x), \quad V(x) = \mathcal{V} \cos^2\left(\frac{x}{b}\right).$$

Квазиклассическое решение в первом порядке имеет вид [4, 15]

$$\psi(a) = C_+ \exp(i\phi) + C_- \exp(-i\phi),$$

где фаза волновой функции дается интегралом

$$\phi(a) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_0^a dx \sqrt{1 - \frac{V(x)}{E}}. \quad (1.7)$$

В частности, набег фазы на каждом периоде потенциала (например для первого слагаемого) равен

$$\frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{E}\right) \cos^2\left(\frac{x}{b}\right)} \frac{dx}{b} = \frac{b}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{P(z)} dz}{(1+z^2)^2}. \quad (1.8)$$

В последнем выражении $z = (1/\hbar)\sqrt{2mE}$, а $P(z) = (1 - V/E - z^2)(1 + z^2)$.

Комплексная координата. Подынтегральную функцию в (1.8) можно аналитически продолжить на два листа комплексной плоскости, переклеенных вдоль разрезов (возможный выбор которых показан на рис. 3, где $\lambda > 1$). Эквивалентно этому можно рассматривать однозначную функцию комплексной координаты z на торе (рис. 3) [18]. При этом интеграл по произвольному контуру можно представить в виде целочисленной линейной комбинации двух базисных интегралов: например по контурам, показанным на рис. 3 ($a = \sqrt{1-\lambda}$), которые наматываются по одному разу на A - и B -циклы тора. Тогда коэффициенты разложения произвольного интеграла по базисным имеют смысл чисел намоток контура интегрирования на A - и B -циклы, т. е. являются топологическими инвариантами замкнутой кривой (контура) на торе [19].

Риманова поверхность для квантовой системы. В более общей задаче волновые функции могут выражаться через интегралы от функции вида $f(z) = P(z)/Q(z)\sqrt{G(z)}$, где $G(z)$ — многочлен степени n . Такие функции «живут» (однозначно определены) на римановой поверхности рода g

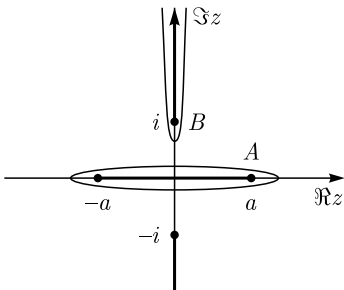


Рис. 3. Независимые контуры интегрирования для волновой функции квазиклассического приближения (1.7), наматывающиеся на A - и B -циклы римановой поверхности — тора (чтобы «увидеть» этот тор, нужно склеить края обоих разрезов, включая точку на бесконечности)

(с g «ручками») в том же смысле, в котором подынтегральная функция в примере выше живет на торе. Род поверхности определяется степенью многочлена: $n = 2g + 2$ либо $n = 2g + 1$, соответственно, для четных и нечетных степеней (в примере выше $n = 4 = 2 \cdot 1 + 2$, так что $g = 1$) [18, 19].

Таким образом, всевозможные квантовые системы разбиваются на классы в зависимости от числа ручек связанной с системой римановой поверхности.

Периоды и базис состояний. Интегралы вида $\oint dz f(z)$ от функций вида $f(z) = P(z)/Q(z)\sqrt{G(z)}$ по нестягиваемым (охватывающим ручки) контурам (циклам) на римановых поверхностях называются *периодами* поверхности. Их значения являются топологическими инвариантами, т. е. сохраняются при непрерывных преобразованиях как контуры интегрирования (замкнутой кривой на поверхности), так и самой поверхности. Таким образом, значения периодов, вычисленные для некоторой физической системы, можно рассматривать как константы (или функции каких-то параметров), общие для класса систем и не зависящие от параметров конкретной системы внутри данного класса.

Чаще всего через периоды выражается набег фазы стационарной волновой функции на периоде потенциала (как в примере выше). Те же величины входят в формулы перехода между асимптотическими разложениями нестационарных волновых функций в различных областях (так называемые формулы Стокса [15, 24] (Wall crossing) [25]).

Квазиклассика и топология: любопытные примеры. *Диаграммы типа «восходящее солнце».* В квантовой теории поля иногда удается написать явные выражения для петлевых диаграмм Фейнмана через периоды римановых поверхностей (см., например, [26]).

Квазиклассика и узлы. Если всевозможные контуры интегрирования в квазиклассических интегралах типа (1.8) рассматривать как замкнутые кривые на римановой поверхности для подынтегрального выражения, то можно вложить эти кривые вместе с поверхностью в трехмерное пространство. При этом различные контуры, вообще говоря, топологически различны и как замкнутые кривые в трехмерном пространстве, т. е. не перетягиваются друг в друга непрерывным преобразованием, даже если про риманову поверхность забыть. Класс эквивалентности таких кривых (относительно непрерывных преобразований в трехмерном пространстве) называется *узлом*.

Здесь можно увидеть более тонкие связи топологии и свойств квантовых систем. В частности, известны примеры, когда асимптотические свойства квазиклассических нестационарных волновых функций удивительным образом описываются инвариантами узлов [25].

1.3. Операторные тождества ТКТП. Наконец, именно класс эквивалентности физических систем рассматривают в задаче о квантовании с учетом симметрий. В таких случаях симметрии классической системы обычно про-

являются как определенные соотношения между квантовыми наблюдаемыми (например корреляционными функциями). Такие соотношения (*тождества Уорда*) можно понимать как соотношения эквивалентности между определенными графами (*диаграммами Фейнмана*), где каждая диаграмма связана с одной из наблюдаемых [5, 22].

Диаграммные тождества в топологии. Во многих примерах из чистой топологии для описания класса эквивалентности (кривых, поверхностей и т. д.) сперва с каждым непрерывным объектом связывают дискретный объект — определенный граф, который по построению остается неизменным при многих непрерывных преобразованиях исходного объекта. Этого, однако, в большинстве случаев оказывается недостаточно: приходится также вводить соотношения эквивалентности между различными графами эквивалентных (связанных непрерывным преобразованием) объектов [2, 27]. При этом задача вычисления *топологического инварианта* (величины, принимающей одно и то же значение для всех объектов, связанных непрерывным преобразованием, и тем самым для всех графов, связанных соотношениями эквивалентности) полностью аналогична задаче о квантовании физической системы с симметриями.

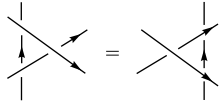
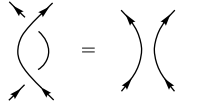
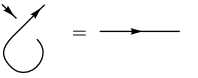
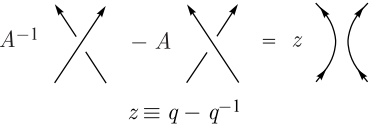
Топологические квантовые теории поля. В особом классе квантовых теорий диаграммы Фейнмана естественным образом соответствуют графам, связанным в топологии с определенными кривыми, поверхностями либо более сложными непрерывными объектами. Более того, тождества Уорда этих теорий в точности оказываются соотношениями эквивалентности между графами непрерывно преобразуемых друг в друга объектов. Конструкции такого рода можно было бы назвать *топологическими квантовыми теориями поля* (ТКТП). Строго говоря, за этим названием закрепился вполне определенный и несколько иной смысл [28], который, впрочем, можно рассматривать как формализацию идей, описанных выше.

ТКТП и группа перестановок. Как ни удивительно, тождества Уорда ТКТП во многих случаях имеют простой смысл. В частности, в той самой ТКТП [3, 29, 30], где корреляционные функции воспроизводят полиномы узлов, основное соотношение (RIII в табл. 1, известное как *соотношение Янга–Бакстера* (ЯБ)) совпадает с одним из соотношений группы перестановок [2, 27].

ТКТП и точно решаемые статмодели. С другой стороны, операторы, удовлетворяющие уравнению ЯБ, возникают во многих интересных физических задачах: в обратной задаче рассеяния в квантовой механике [31], при вычислении корреляционных функций интегрируемых спиновых цепочек [32] и моделей типа льда [33], а также в двумерной конформной теории поля [34].

Тройная роль уравнения Янга–Бакстера. Таким образом, соотношение ЯБ выполняет функцию связующего звена теории точно решаемых систем, теории симметрии и теории узлов.

Таблица 1. Операторные тождества в модели Кауффмана: условия топологической инвариантности (RIII, RII, RI) и специальное свойство простейшей модели. Оператор \mathfrak{R}_j^i связан с произвольной диаграммой с одним входящим и одним выходящим ребрами

Общие свойства: условия топологической инвариантности		
$\mathcal{W}_{\alpha\beta}^{ij} \mathcal{W}_{l\gamma}^{\alpha k} \mathcal{W}_{mn}^{\beta\gamma} = \mathcal{W}_{\gamma\alpha}^{jk} \mathcal{W}_{n\beta}^{\alpha i} \mathcal{W}_{lm}^{\gamma\alpha}$		RIII
$\tilde{\mathcal{W}}_{\alpha\beta}^{ij} \mathcal{W}_{kl}^{\alpha\beta} = \mathcal{W}_{\alpha\beta}^{ij} \tilde{\mathcal{W}}_{kl}^{\alpha\beta} = \delta_k^i \delta_l^j$		RII
$\langle \mathcal{W}_{\alpha\beta}^{ij} \mathfrak{R}_i^j \rangle = \langle \delta_\alpha^\alpha \rangle \langle \mathfrak{R}_i^i \rangle$		RI
Специальные свойства: запутывающие (скейн-)соотношения Sk		
$\left(\mathcal{W}_{\alpha\beta}^{ij} - Aq\delta_\alpha^i \delta_\beta^j \right) \left(\mathcal{W}_{kl}^{\alpha\beta} - Aq^{-1}\delta_k^\alpha \delta_l^\beta \right) = 0$ $\Leftrightarrow A^{-1} \mathcal{W}_{kl}^{ij} - A \tilde{\mathcal{W}}_{kl}^{ij} = (q - q^{-1}) \delta_k^i \delta_l^j$		

За пределами плоскости? Попытки обнаружить соответствия описанного типа в старших размерностях привели к открытию любопытных обобщений соотношения ЯБ, например в теории 2-узлов [35] и в 3d-модели Изинга [36], однако значение сделанных наблюдений еще предстоит понять.

2. ИНВАРИАНТ УЗЛА — НАБЛЮДАЕМАЯ ТКТП?

До сих пор мы обсуждали примеры топологических методов в теоретической физике. Есть, однако, не менее любопытные сюжеты, которые развивались в противоположном направлении. А именно: аппарат методов, исходно разработанный в теории квантовых систем, позволил по-новому подойти к чисто топологической задаче. Один такой сюжет мы и обсудим в этом разделе.

2.1. Узлы и их полиномиальные инварианты. *Инвариант узла (ИУ)* [2, 27] — это по определению величина, которая ставится в соответствие всякой замкнутой кривой в трехмерном пространстве и одинакова для всякой пары кривых, переводимых друг в друга путем непрерывных преобразований. Эта величина может быть как числом, например целым, вещественным или комплексным, так и функцией от одной или нескольких переменных (в последнем случае всякому узлу соответствует именно сама функция — с произвольными значениями аргументов).

2.1.1. Зачем нужны ИУ? В топологии хорошо известна очень характерная и простейшая в своем роде задача: *описать пространство узлов* — замкнутых кривых в трехмерном пространстве, рассмотренных с точностью до произвольных непрерывных преобразований. Среди различных подходов к этой задаче [2, 27] нас интересуют такие, которые можно объединить общей формулировкой: *ввести координаты на пространстве узлов*. Немного точнее, в этом сюжете изучают различные *инварианты узлов*. Примеры приведены в табл. 2.

2.1.2. От чего зависит ИУ? ИУ зависит от

- 1) самого узла, т. е. замкнутой кривой в пространстве, рассмотренной с точностью до непрерывных преобразований;
- 2) от одной или нескольких *формальных переменных*, здесь A и/или q либо \hbar ;
- 3) от нескольких *дополнительных* параметров, здесь целое число N либо группа \mathfrak{g} и представление Q .

Смысл величин из пп. 2) и 3) мы поясним на примерах ниже.

ИУ не зависит от

- 1) непрерывных преобразований кривой;
- 2) способа вычисления.

Последнее утверждение само по себе выглядит тавтологией, но становится нетривиальным, как только выбран конкретный способ вычисления ИУ.

Полиномы узлов. Все ИУ в табл. 2 обладают еще одним свойством [2, 27]: они являются полиномами Лорана по переменным A и/или q (при соответствующем выборе произвольного множителя в определении ИУ). По этой при-

Таблица 2. Примеры полиномов простейших узлов (рис. 4)

Полином	Параметры		Пере- менные	Пример полинома	
				Узел	Полином
Джонса	$SU(2)$	\square	q	3_1	$-q^{-8} + q^{-6} + q^{-2}$
				4_1	$q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4}$
ХОМФЛИ	$SU(N)$	\square	A, q	3_1	$-A^{-4} + A^{-2}(q^2 + q^{-2})$
				4_1	$1 + q^2(A + A^{-1}) - (q^2 + q^{-2})$
Александера	$SU(0)$	\square	q	3_1	$q^2 - 1 + q^{-2}$
				4_1	$q^2 + 1 - q^{-2}$
Кауффмана	$SO(N)$	\square	a, q	3_1	$a^2(q^2 + q^{-2}) - a^4(q^2 - 1 + q^{-2}) + (-a^3 + a^5)(q - q^{-1})$
Джонса раскрашенный	$SU(2)$	$\square\square$	q	3_1	$q^{-4} + q^{-10} - q^{-14} + q^{-16} - q^{-18} - q^{-20} + q^{-22}$

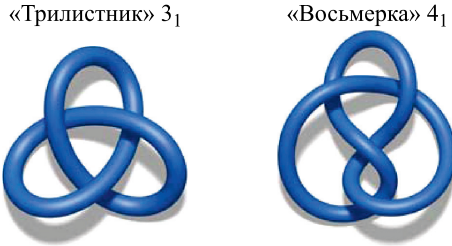


Рис. 4. Рисунки простейших узлов из [37]

чине ИУ из табл. 2 называют *полиномами*: Александра, Джонса, ХОМФЛИ, Кауффмана.

2.2. Абстрактная квантово-полевая модель узла. Теперь мы шаг за шагом начнем обсуждать «физический» контекст, связанный с упомянутыми топологическими инвариантами, в котором многие замечательные свойства этих инвариантов выглядят неслучайными и который служит источником вдохновения и инструментов для дальнейшего изучения этих величин.

2.2.1. Диаграммные тождества как определение ТКТП. Как мы упоминали в п. 1.3, некоторые топологические инварианты допускают определение посредством диаграммной техники, которую можно рассматривать как формальное определение ТКТП. Наиболее распространенные узловые ТКТП в самых общих чертах определяют так.

1. Замкнутыми диаграммами ТКТП являются диаграммы узлов — проекции на плоскость с сохранением проходов-переходов и выбранного направления (рис. 5).

2. Роль незамкнутых диаграмм теории играют фрагменты исходной диаграммы узла, отделенные замкнутой плоской кривой (как правило, топологически эквивалентной окружности).

3. Всякой замкнутой диаграмме теории соответствует «среднее» — число (либо функция параметров модели), которое(ая) удовлетворяет общим свойствам (типа условий в табл. 3).

4. Незамкнутые диаграммы удовлетворяют формальным соотношениям — *тождествам Уорда* (в простейшей ТКТП, соответственно, условиям RIII, RII, Sk и RI из табл. 1).

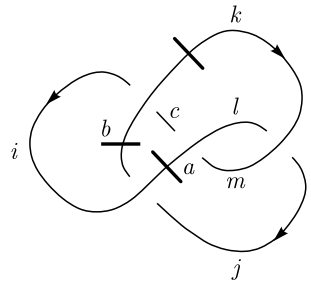


Рис. 5. Вариант диаграммы узла-трилистника (3_1 в [37]). ИУ как статсумма формальной ТКТП имеет вид $\langle \mathcal{W}_{ab}^{ij} \mathcal{W}_{lc}^{ak} \mathcal{W}_{mi}^{bc} \mathcal{W}_{kj}^{ml} \rangle$

П. 4 можно рассматривать по-разному. Один путь (целиком неявный) — получить таким образом достаточную систему уравнений на средние от замкнутых диаграмм. Иначе можно сперва найти базис в формально линейном

Таблица 3. Определяющие свойства среднего в модели Кауффмана. Через \mathfrak{K} и $\mathfrak{K}^{(i)}$ ($i = \overline{1, 4}$) обозначены операторные свертки для произвольных диаграмм модели

$\langle \mathfrak{K}^{(1)}(a\mathfrak{K}^{(2)} + b\mathfrak{K}^{(3)})\mathfrak{K}^{(4)} \rangle = a\langle \mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{K}^{(2)}\mathfrak{K}^{(4)} \rangle + b\langle \mathfrak{K}^{(1)}\mathfrak{K}^{(3)}\mathfrak{K}^{(4)} \rangle$	Полилинейность (лин.)
$\langle \hat{\mathfrak{K}}_j^i \delta_i^j \rangle = -\langle \hat{\mathfrak{K}}_i^i \rangle \langle \delta_j^j \rangle$	Вынесение Id (факт.)

пространстве диаграмм либо даже явные тензорные выражения для вершинных операторов, а затем отдельно определить операцию среднего. Кроме того, возможны различные комбинированные подходы. Ряд возможных вариантов мы продемонстрируем на примере из п. 3.4.

2.2.2. Модель в 2d или в 3d? Основной недостаток данной выше двумерной формулировки ТКТП состоит в том, что часть тождеств Уорда представляет собой условия топологической инвариантности (в простейшей модели — RIII, RII и RI из табл. 1), т. е. с точки зрения трехмерной модели является артефактом проекции на плоскость непрерывных преобразований кривой в трехмерном пространстве. Однако условий топологической инвариантности (и общих свойств функции среднего) недостаточно для определения ТКТП. Поэтому всегда вводятся дополнительные условия [38]. В частности, в определении простейшей модели существенную роль играет тождество Sk из табл. 1, изначально сформулированное для диаграммы узла.

В разд. 3 мы более подробно опишем простейшую двумерную ТКТП полинома узла. В двух последующих разделах, пп. 4.1 и 5.6, мы в самых общих чертах обсудим попытки построить модель полинома узла как КТП в буквальном смысле: как трехмерную теорию полей и частиц с данными рассеяния в качестве наблюдаемых. В этом сюжете можно (с долей условности) выделить два подхода: *пертурбативный*, в духе [30, 39–45] и др. (разд. 5), и *непертурбативный*, в духе [3, 46, 47] и др. (разд. 4).

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАК ТКТП ПОЛИНОМА УЗЛА

Как мы обсудили в п. 1.3, топологический инвариант можно рассматривать как величину, сопоставляемую диаграмме Фейнмана некоторой абстрактной *топологической* квантовой теории поля (ТКТП), формально заданной набором диаграммных соотношений — тождеств Уорда. В этом разделе мы разберем простейший пример такой конструкции, за которым закрепилось название *модель Кауффмана* [38]. Эта модель дает единообразное описание для класса ИУ из табл. 2. С другой стороны, модели Кауффмана присущи все основные особенности формальной ТКТП, поэтому она служит хорошей иллюстрацией общей конструкции. Более того, широко распространенный сейчас метод \mathcal{R} -матриц в теории узлов [48] по существу является обобщением

нием конструкции Кауффмана и также может быть описан как формальная ТКТП для узла [29].

3.1. Модель Кауффмана. Модель Кауффмана строится для всякого узла (или зацепления). При этом узел должен быть представлен в виде своей диаграммы: проекции направленной кривой на некоторую плоскость с сохранением *проходов* и *переходов*. Например, на рис. 5 изображена одна из возможных диаграмм узла-трилистника (не самая простая, см. [37]). Вообще говоря, одному и тому же узлу соответствует бесконечно много различных диаграмм и, как следствие, бесконечно много моделей Кауффмана. Основное свойство модели Кауффмана состоит в том, что эта модель — *топологическая*. Для всякой пары диаграмм двух топологически эквивалентных узлов статсуммы соответствующих моделей Кауффмана одинаковы.

В настоящем разделе мы ограничимся уровнем изложения, достаточным для явного вычисления статсуммы в частном случае, который мы используем для обсуждения ряда существенных свойств этой модели. Более строгое описание можно найти, например, в [2]. Ниже мы перечислим основные элементы, которые вводятся для определения статсуммы в модели Кауффмана.

Операторы перекрестков. Каждый такой оператор связан с окрестностью особой точки — *перекрестка* на диаграмме узла (см. рис. 5). Операторы перекрестков определены формально — при помощи набора аксиом. В частности, операторы тождественно равны, если окрестности соответствующих перекрестков *изотопны*, т. е. переходят друг в друга при непрерывном преобразовании плоскости. Можно показать, что при таком условии для произвольной диаграммы узла понадобится всего два различных оператора: для перекрестков, изотопных двум на рис. 6. В остальном определение операторов допускает несколько вариантов, каждый из которых порождает свой класс моделей Кауффмана. Для данной диаграммы узла статсумма модели каждого класса воспроизводит один из полиномов узла, перечисленных в табл. 2.

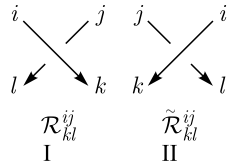


Рис. 6. Прямой (I) и обратный (II) перекрестки; расстановка индексов соответствующих операторов

Свертка операторов. Строится по данной диаграмме узла, как показано на рис. 5.

Статсумма модели Кауффмана. Определена при помощи дополнительной операции — среднего от свертки операторов. Определение самой операции, как и определение операторов, зависит от типа модели Кауффмана, но не от диаграммы узла.

Ниже мы обсудим основные свойства статистической модели для полинома узла и разберем простейшие примеры. Последовательное описание более общей конструкции можно найти в [29].

3.2. Операторные тождества в модели Кауффмана. Ниже мы сосредоточимся на модели Кауффмана в ее простейшем варианте: где статсумма модели равна полиному ХОМФЛИ [2, 37]. В такой модели для операторов должны быть выполнены тождества RI, RII, RIII из табл. 1; эти тождества гарантируют инвариантность операторной свертки относительно преобразований диаграммы узла, перечисленных в правой колонке таблицы.

Здесь имеется в виду, что всякий фрагмент диаграммы, выглядящий как левая часть одного из равенств, можно заменить на фрагмент в правой части соответствующего равенства: такие преобразования проекции кривой на плоскость, как нетрудно видеть, отвечают непрерывным преобразованиям самой кривой — иными словами, перечисленные равенства представляют собой соотношения эквивалентности между диаграммами узлов. Согласно *теореме Рейдемейстера* [2, 27] верно и обратное: всякие две диаграммы, отвечающие двум переводимым друг в друга непрерывным преобразованием кривым, переводятся друг в друга некоторой комбинацией трех движений Рейдемейстера. Таким образом, операторные тождества, перечисленные в первых трех строках таблицы, необходимы и достаточны, чтобы обеспечить топологическую инвариантность построенной по диаграмме узла операторной свертки.

Обратим внимание, что третье тождество выполнено *только* под знаком среднего: как операторное уравнение оно оказывается несовместным с первыми двумя — именно этот факт не позволяет представить инвариант узла просто как операторную свертку и заставляет ввести в конструкцию дополнительную операцию усреднения [2, 27].

3.3. Определение среднего в модели Кауффмана. По определению *среднее* есть скалярная величина, соответствующая свертке операторов так, что выполнены свойства в табл. 3.

Если в первой строке таблицы содержится общее свойство среднего от операторного произведения, то условие во второй строке специфично именно для данной конструкции: оно отражает существенное свойство инвариантов узлов, с которыми предполагается отождествить средние от операторов.

На этом мы остановимся в изложении общей конструкции, последующие построения мы проиллюстрируем (для нескольких различных версий конструкции) с помощью простых примеров, важных для дальнейшего изложения.

3.4. Примеры вычислений в конструкции Кауффмана. В настоящем подразделе во всех формулах подразумевается суммирование по всем повторяющимся индексам, если не оговорено обратное.

3.4.1. Метод тождеств Уорда. Как мы обсуждали выше, тождества в табл. 3 и 1 играют роль тождеств Уорда в модели Кауффмана. При этом условия в табл. 1, как и условия RI, RII, RIII из табл. 3, выполнены во вся-

кой модели Кауффмана*, в то время как условие в строке 4 табл. 3 определяет тип модели. Приведенный здесь вид условия отвечает простейшей модели Кауффмана. Можно показать, что полный набор условий в табл. 3 и 1 позволяет однозначно вычислить статсумму для произвольной диаграммы узла [2]. Иными словами, простейшая модель Кауффмана полностью определяется тождествами Уорда в табл. 3 и 1.

Таким образом, в простейшем случае можно вовсе обойтись без явного определения как самих операторов перекрестков, так и среднего от их свертки.

Чтобы продемонстрировать, как работает данный метод, приведем явное вычисление среднего для диаграммы на рис. 5 (это одна из возможных диаграмм узла-трилистника — не самая простая):

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{W}_{ab}^{\boxed{ij}} \mathcal{W}_{lc}^{\boxed{k}} \mathcal{W}_{mi}^{bc} \mathcal{W}_{kj}^{ml} \rangle &\stackrel{\text{RIII}}{=} \langle \mathcal{W}_{bc}^{\boxed{jk}} \mathcal{W}_{ia}^{\boxed{i}} \mathcal{W}_{lm}^{ab} \mathcal{W}_{kj}^{ml} \rangle \stackrel{\text{Sk}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sk}}{=} Az \langle \mathcal{W}_{bc}^{jk} \mathcal{W}_{ia}^{ci} \mathcal{W}_{kj}^{ab} \rangle + A^2 \langle \mathcal{W}_{kc}^{ak} \mathcal{W}_{ia}^{ci} \rangle \stackrel{\text{Sk}}{=} \\
 &\stackrel{\text{Sk}}{=} A^2 z^2 \langle \mathcal{W}_{ia}^{ci} \mathcal{W}_{bc}^{ab} \rangle + A^3 z \langle \delta_b^b \mathcal{W}_{ia}^{ai} \rangle + A^2 \langle \mathcal{W}_{kc}^{jk} \mathcal{W}_{ia}^{ci} \rangle \stackrel{\text{RI}}{=} \\
 &\stackrel{\text{RI}}{=} A^2 z^2 \langle \mathcal{W}_{ba}^{ab} \rangle + A^3 z \langle \delta_b^b \delta_a^a \rangle + A^2 \langle \mathcal{W}_{ka}^{ak} \rangle \stackrel{\text{RI}}{=} \\
 &\stackrel{\text{RI}}{=} A^2 z^2 \langle \delta_a^a \rangle + A^3 z \langle \delta_a^a \delta_b^b \rangle + A^2 \langle \delta_a^a \rangle \stackrel{\text{Фак.}}{=} A^2 (z^2 + 1) \langle \delta_a^a \rangle - A^3 z \langle \delta_a^a \rangle^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Выше, помимо указанных свойств, несколько раз использовано свойство полилинейности (строка 1 табл. 3), а также введено обозначение $z = q - q^{-1}$. Таким образом, исходное среднее выражается с помощью соотношений из табл. 3 и 1 через средние от произведений следов единичных операторов. Для получения окончательного ответа необходимо воспользоваться свойством факторизации (строка 2 табл. 3), которое в данном случае дает $\langle \delta_a^a \delta_b^b \rangle = -\langle \delta_a^a \rangle^2$, а также равенством

$$\langle \delta_a^a \rangle = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}}.
 \tag{3.2}$$

*Строго говоря, существуют два класса моделей Кауффмана [2]: определенных для направленных диаграмм и ненаправленных диаграмм. В частности, к последнему классу относится модель, статсумму которой традиционно называют *полиномом Кауффмана*. Напротив, серия моделей, которые мы далее рассматриваем, относится к первому классу. Строго говоря, для таких моделей условия в табл. 3 и в строках 1–3 табл. 1 необходимо дополнить их всевозможными аналогами для различного выбора направления на каждом из отрезков соответствующего фрагмента диаграммы узла. Далее мы подразумеваем под тождествами Уорда именно такую полную систему условий.

Последнее соотношение не является *новым* условием: оно есть следствие соотношений в табл. 1, 3:

$$(A^{-1} - A) \langle \delta_k^i \rangle \stackrel{\text{РЛ}}{\text{лин.}} \langle A^{-1} \mathcal{L}_{jk}^{ij} - A \tilde{\mathcal{L}}_{jk}^{ij} \rangle \stackrel{\text{Sk}}{\text{фак.}} - (q - q^{-1}) \langle \delta_k^i \rangle \langle \delta_j^j \rangle. \quad (3.3)$$

Формальное равенство (3.2) можно при этом понимать как замену на последнем этапе вычисления единичного оператора на другой оператор, зависящий от дополнительных параметров, усреднение следа оператора по которым дает выражение в правой части (3.2).

Подставляя (3.2) в (3.1), приходим к окончательному ответу

$$\begin{aligned} \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} \left(A^2 (q - q^{-1})^2 - A^3 (q - q^{-1}) \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} + A^2 \right) = \\ = \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}} (A^2 q^2 - 2A^2 + A^2 q^{-2} - A^4 + A^2 + A^2). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Множитель перед скобками равен значению полинома ХОМФЛИ для тривиального узла, а в скобках стоит нормированный (на это значение) полином ХОМФЛИ узла-трилистника [37]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{0_1}(A, q) &= \frac{A - A^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ \bar{\mathcal{H}}^{3_1}(A, q) &= \frac{\mathcal{H}^{3_1}(A, q)}{\mathcal{H}^{0_1}(A, q)} = A^2 (q^2 + q^{-2}) - A^4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Приведенная выкладка по существу совпадает с вычислением полинома ХОМФЛИ с помощью условий Рейдемейстера и запутывающих (скейн-)соотношений [2, 27], однако в контексте дальнейшего изложения важно, что ту же процедуру можно произвести в терминах модели Кауффмана.

Утверждение, что с помощью соотношений из табл. 2, 3 можно вычислить среднее от произвольной диаграммы узла, как и то, что в результате действительно получится полином Лорана от переменных A и q , глубоко нетривиально: на этот счет есть соответствующая теорема [2, 27, 49, 50].

Метод тождеств Уорда (или переплетающих соотношений) весьма эффективен для вычисления простых полиномов ХОМФЛИ, которые при определенных соотношениях между формальными переменными дают полиномы Джонса ($A = q^2$) и Александера ($A = 1$), а также обобщается на случай полиномов Кауффмана. Можно также показать, что обобщение подхода на случай раскрашенных полиномов отвечало бы условию трех и более различных собственных значений оператора перекрестка вместо условия Sk из табл. 1. Обобщенных таким образом условий, однако, оказывается недостаточно, чтобы вычислять средние только с помощью тождеств Уорда, хотя

они и позволяют получить ряд важных соотношений между раскрашенными полиномами [51].

Для моделей Кауффмана более общего вида (которые получаются при замене соотношения Sk в табл. 1 различными обобщениями [2]) метод тождеств Уорда позволяет записать бесконечную систему соотношений между полиномами различных зацеплений. Таким образом легко вычислять полиномы для *семейств* узлов (см. п. 6.3): например, выразить полиномы торических узлов [37] $T^{[n, nk+p]}$ для $k \geq k_0$ через полиномы аналогичных узлов для $0 \leq k \leq k_0$. Однако задача явного вычисления полинома для произвольной диаграммы зацепления резко усложняется для обобщенной модели Кауффмана по сравнению с простейшей. Впоследствии был разработан аналог такого метода, применимый в широком классе моделей типа моделей Кауффмана [52]. При этом, однако, в определение модели приходится включить дополнительные тождества Уорда, причем достаточный набор этих тождеств для произвольной модели типа модели Кауффмана неизвестен. Для преодоления всех этих трудностей сложился другой подход к решению моделей типа Кауффмана, варианты которого для простейшей модели мы продемонстрируем ниже.

3.4.2. Частное решение для операторов перекрестков. Альтернативный подход состоит в том, чтобы решить тождества Уорда непосредственно для операторов перекрестков, т. е. предъявить в явном виде операторы, удовлетворяющие всем условиям в табл. 1. Именно такой путь в свое время позволил систематическое описание моделей типа модели Кауффмана. А именно, решения условий RI, RII, RIII в табл. 1 допускают весьма прозрачную классификацию [33]. При этом условие Sk в табл. 1 обретает новый смысл, который позволяет записать общий вид аналогичного тождества для произвольного решения условий RI, RII, RIII в табл. 1.

Описание общей конструкции можно найти в [2]. Здесь мы ограничимся тем, что предъявим простейшее решение тождеств Уорда в табл. 1. Это решение можно построить с помощью двумерных инвариантных тензоров:

$$\mathcal{K}_{kl}^{ij} = q^{-1} \delta_l^i \delta_k^j + q^{-2} \varepsilon^{ij} \varepsilon_{kl}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}. \quad (3.6)$$

Здесь δ — двумерный единичный оператор с ненулевыми компонентами $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 0$, а ε — двумерные антисимметричные тензоры с ненулевыми компонентами $\varepsilon^{12} = \varepsilon^{21} = -\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12} = 1$; различия между верхними и нижними индексами не делается вплоть до п. 3.4.3.

Модель Кауффмана с операторами перекрестков (3.6) — специальный случай модели, статсумму которой мы вычислили выше с помощью тождеств Уорда. Однако именно этот частный случай позволяет наглядно продемонстрировать ряд общих свойств конструкции Кауффмана, поскольку изящный вид решения (3.6) делает многие важные выкладки особенно прозрачными.

Оператор (3.6) иногда называют *матрицей Кауффмана* [2]. Можно непосредственно убедиться, что этот оператор удовлетворяет условиям RIII и Sk в табл. 1 (условие RII при этом можно рассматривать как определение матрицы Кауффмана для обратного перекрестка). С другой стороны, условие RI в табл. 1 *не* выполняется как *операторное* тождество (при опускании треугольных скобок), поэтому, чтобы выполнялись соответствующие соотношения модели Кауффмана, необходимо специальное определение среднего (треугольных скобок). Оказывается, что «правильное» определение получится, если к условиям в табл. 3 добавить еще одно:

$$\langle \text{Tr} \mathbb{I} \rangle \equiv q + q^{-1}. \quad (3.7)$$

Условие (3.7) является частным случаем условия (3.2) при $A = q^2$, и понимать его следует в том же смысле. В этих предположениях тождество в строке 3 табл. 1 выполняется, причем именно как условие на средние:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_{jl}^{ij} \rangle &= \langle a \delta_l^i \delta_j^j \rangle + b \langle \varepsilon^{ij} \varepsilon_{jl} \rangle = a \langle \delta_l^i \rangle \langle \delta_j^j \rangle - b \langle \delta_l^i \rangle = \\ &= \langle \delta_l^i \rangle \Rightarrow \text{Tr} \langle \mathbb{I} \rangle = \langle \delta_j^j \rangle = \frac{1+b}{a} = [2]_q, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где мы обозначили коэффициенты в (3.8) через $a \equiv q^{-1}$ и $b \equiv q^{-2}$, чтобы более ясно показать структуру ответа. Более того, можно, наоборот, вывести (3.7) из условия в строке 3 табл. 1: проделав то же вычисление, приняв среднее от единичного оператора на неизвестную x и решив относительно x полученное уравнение.

Для вычисления статсуммы модели Кауффмана, например для диаграммы рис. 5, нужно подставить в соответствующую свертку операторы перекрестков в виде разложения (3.6) и раскрыть скобки:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Z}_{ab}^{ij} \mathcal{Z}_{lc}^{ak} \mathcal{Z}_{mi}^{bc} \mathcal{Z}_{kj}^{ml} \rangle &= a^4 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle + \\ &+ a^3 b \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\delta_l^m \delta_k^j) + \\ &+ (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_l^m \delta_k^j) + (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) \rangle + \\ &+ a^2 b^2 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + \\ &+ (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\delta_j^m \delta_k^l) + (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + \\ &+ (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\delta_j^m \delta_k^l) + (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_l^m \delta_k^j) \rangle + \\ &+ ab^3 \langle (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\delta_c^a \delta_l^k) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + \\ &+ (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) + (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\delta_l^m \delta_k^j) \rangle + \\ &+ b^4 \langle (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) \rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Каждое из слагаемых в полученном в результате выражении представляет собой полную свертку δ - и ε -тензоров, которая упрощается определенным образом, например:

$$\begin{aligned}
 (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\delta_j^m \delta_k^l) &= (\delta_b^i \delta_i^b) (\delta_a^j \delta_c^a \delta_m^c \delta_j^m) (\delta_l^k \delta_k^l) = \delta_i^i \delta_j^j \delta_k^k; \\
 (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) &= (\delta_b^i \delta_i^b) (\delta_a^j \delta_c^a \delta_m^c) (\delta_l^k \varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) = \\
 &= \delta_i^i \delta_j^j (\varepsilon^{mk} \varepsilon_{kj}) = \delta_i^i \delta_j^j (-\delta_j^m) = -\delta_i^i \delta_j^j; \\
 (\delta_b^i \delta_a^j) (\delta_c^a \delta_l^k) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) &= (\delta_b^i \varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\delta_a^j \delta_c^a) (\delta_l^k \varepsilon_{kj} \varepsilon^{ml}) = \\
 &= (-\delta_c^c) \delta_c^j (-\delta_j^m) = \delta_j^j; \\
 (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\delta_i^b \delta_m^c) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) &= (\delta_b^i \delta_i^b) \delta_a^j (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{kj}) \delta_m^c (\varepsilon_{lc} \varepsilon^{ml}) = \\
 &= \delta_i^i \delta_a^j (-\delta_j^a) \delta_m^c (-\delta_c^m) = \delta_i^i \delta_j^j \delta_m^m; \\
 (\delta_b^i \delta_a^j) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) &= \delta_b^i (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{mi}) \delta_a^j (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{kj}) = \\
 &= -(\delta_b^i \delta_l^b \delta_i^l) (\delta_a^j \delta_j^a) = -\delta_i^i \delta_j^j; \\
 (\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ab}) (\varepsilon^{ak} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{kj}) &= (\varepsilon_{ab} \varepsilon^{ak}) (\varepsilon^{bc} \varepsilon_{lc}) (\varepsilon^{ml} \varepsilon_{mi}) (\varepsilon_{kj} \varepsilon^{ij}) = \\
 &= \delta_b^k \delta_l^b \delta_i^l \delta_k^i = \delta_i^i.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Использованные при вычислениях свойства ε -тензоров приведены в табл. 4 слева. Остальные слагаемые в выражении (3.9) упрощаются аналогично. После этого среднее от каждого слагаемого вычисляется с помощью правила (3.8) и свойства вынесения единицы из табл. 3:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}^{31} &= a^4 \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle^3 - 4a^3 b \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle^2 + a^2 b^2 \left(2 \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle^3 + 4 \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle \right) - \\
 &\quad - 4ab^3 \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle^2 + b^4 \langle \text{Tr } \mathbb{I} \rangle = (q + q^{-1}) (q^{-2} + q^{-6} - q^{-8}) = \\
 &\quad = q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} - q^{-9}. \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Ответ совпадает с $\mathcal{H}^{31}(A = q^2, q)$ из (3.5).

Явные выражения для решений условий топологической инвариантности можно написать и в более общем случае, в котором среднее дает полином ХОМФЛИ, а также в случае, отвечающем полиному Кауффмана, однако соответствующие операторы уже не допускают простых разложений по инвариантным тензорам вида (3.6). Более того, известны также явные выражения для операторов, позволяющие получить соответствующие раскрашенные полиномы, для чего одних тождеств Уорда уже недостаточно. Такими решениями являются \mathcal{R} -матрицы [48] — решения уравнения ЯБ (см. п. 1.3), хорошо известные в теории точно решаемых статистических моделей [33], а также в теории представлений квантовых групп [53].

Таблица 4. Свойства операторов перекрестков в моделях Кауффмана с неявным (слева) и явным (справа) определениями среднего

$\varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} = 1, \varepsilon^{21} = \varepsilon_{21} = -1$	$\check{\varepsilon}^{21} = -q, \check{\varepsilon}^{12} = \check{\varepsilon}_{12} = 1, \check{\varepsilon}_{21} = -q^{-1}$
$\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$	$\check{\varepsilon}^{ij} = -\mathcal{M}_k^j \check{\varepsilon}^{ki}, \check{\varepsilon}^{ij} = -\check{\varepsilon}^{jk} \mathcal{M}_k^i$
$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}$	$\check{\varepsilon}_{ij} = -\check{\mathcal{M}}_j^k \check{\varepsilon}_{ki}, \check{\varepsilon}_{ij} = -\check{\varepsilon}_{jk} \mathcal{M}_i^k$
$\varepsilon^{ij} \varepsilon_{ik} = \varepsilon^{ji} \varepsilon_{ki} = \delta_k^j$	$\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kj} = \check{\varepsilon}^{ji} \check{\varepsilon}_{jk} = \delta_k^i$ $\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kl} \mathcal{M}_j^l = \check{\varepsilon}^{ji} \check{\varepsilon}_{lk} \mathcal{M}_j^l = \check{\mathcal{M}}_k^i$
$\varepsilon^{ij} \varepsilon_{jk} = \varepsilon^{ji} \varepsilon_{kj} = -\delta_k^i$	$\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{jk} = -\check{\mathcal{M}}_k^i, \check{\varepsilon}^{ji} \check{\varepsilon}_{ik} = -\check{\mathcal{M}}_j^k$ $\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kl} \check{\mathcal{M}}_j^k = -\delta_l^i, \check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kl} \mathcal{M}_i^l = -\delta_j^k$
$\langle \varepsilon^{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \delta_i^i \rangle = [2]_q$	$\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{ik} \mathcal{M}_k^j = \check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kj} \mathcal{M}_i^k = \mathcal{M}_i^i = [2]_q$ $\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{ik} \check{\mathcal{M}}_k^j = \check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kj} \check{\mathcal{M}}_i^k = \check{\mathcal{M}}_i^i = [2]_q$
$\langle \varepsilon^{ij} \varepsilon_{ji} \rangle = \langle -\delta_i^i \rangle = -[2]_q$	$\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kl} \mathcal{M}_i^l \check{\mathcal{M}}_j^k = -\mathcal{M}_i^i = -\check{\mathcal{M}}_j^j = -[2]_q$

3.4.3. Среднее как свертка с обратными операторами. При вычислении выше мы использовали явное определение операторов перекрестков, но неявное определение операции среднего с помощью тождеств в табл. 3 и условия (3.2) или (3.7) (необходимых для выполнения свойства RI в табл. 1 в соответствующих моделях). Следующий шаг — явное определение среднего от свертки операторов перекрестка. Оказывается, что для этого прежде всего необходимо модифицировать выражение для самого оператора перекрестка следующим образом:

$$\mathcal{K}_{kl}^{ij} \rightarrow K_{kl}^{ij} = q^{-1} \delta_l^i \delta_k^j - q^{-2} \check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{kl}, \quad \check{\varepsilon}^{ij} = v_i \varepsilon^{ij}, \quad \check{\varepsilon}_{kl} = v_k^* \varepsilon_{kl}, \quad (3.12)$$

$$i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad (3.13)$$

где $\vec{v} = (v_1, v_2) = (1, q), \quad \vec{v}^* = (v_1^*, v_2^*) = (1, q^{-1})$.

Кроме того, приходится наряду с четырехиндексными операторами перекрестков K ввести также двухиндексные операторы \mathcal{M} , связанные с некоторыми ребрами диаграммы узла.

Правило, по которому дополнительные операторы связываются с ребрами диаграммы, можно сформулировать различными эквивалентными способами [29, 54]. Чаще всего выбирают направление в плоскости диаграммы узла и помещают дополнительные операторы в точки экстремума. Иногда удается применить более инвариантный подход (без выбора направления): например, расставить двухиндексные операторы так, чтобы всякий простой цикл на диаграмме узла содержал в точности один обратный оператор: \mathcal{M} или $\check{\mathcal{M}} = \mathcal{M}^{-1}$, если цикл ориентирован против или по часовой стрелке соответственно (*простым циклом* на направленном графе называется упорядоченный набор вершин, включающий каждую из вершин графа не более одного раза, такой, что от каждой вершины в последующей, а также от последней вершины к первой ведет направленное ребро). Мы применим последнее пра-

вило в нашем частном случае, и по этой причине мы будем называть новые операторы \mathcal{M} *оборотными операторами*.

На рис. 5 возможный набор ребер для вставки оборотных операторов отмечен штрихами; соответствующая операторная свертка при этом принимает вид

$$\mathcal{J}^{31} = K_{\alpha\beta}^{ij} K_{lc}^{ak} K_{mi}^{bc} K_{\kappa j}^{ml} \mathcal{M}_a^\alpha \mathcal{M}_b^\beta \mathcal{M}_\kappa^k \equiv \mathfrak{K}_{\alpha\beta\kappa}^{abk} \mathfrak{M}_{abk}^{\alpha\beta\kappa}. \quad (3.14)$$

Подобно определению среднего в предыдущих разделах явный вид операторов \mathcal{M} и $\tilde{\mathcal{M}}$ определяется условием RI в табл. 1, которое теперь должно быть выполнено *без усреднения*, но со вставкой оператора \mathcal{M} в сворачиваемую петлю. Можно показать [29], что оператору S вида (3.6) соответствуют операторы \mathcal{M} и $\tilde{\mathcal{M}}$ вида

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Вычисление свертки (3.14) при этом буквально повторяет вычисление свертки (3.9) — с точностью до того, что всякий раз вместо среднего от следа единичного оператора возникает след оператора \mathcal{M} :

$$\langle \delta_a^a \rangle \longrightarrow \mathcal{M}_a^a, \quad (3.16)$$

как раз равный выражению в правой части (3.7), что приводит к тому же ответу для полинома Джонса.

Разложение (3.13) для операторов перекрестков приводит к разложению для оператора \mathfrak{K} в (3.14), аналогичному разложению (3.9). Однако теперь для упрощения отдельных слагаемых необходимо воспользоваться тождествами в табл. 4 справа. Таким образом, для свертки δ и $\check{\varepsilon}$ тензоров каждого из типов имеем

\mathfrak{K}	\mathcal{J}^{31}
$(\delta_\beta^i \delta_\alpha^j)(\delta_c^a \delta_l^k)(\delta_i^b \delta_m^c)(\delta_j^m \delta_\kappa^l) =$ $= (\delta_\beta^i \delta_i^b)(\delta_\alpha^j \delta_c^a \delta_m^c \delta_j^m)(\delta_l^k \delta_\kappa^l) = \delta_\beta^b \delta_\alpha^a \delta_\kappa^k$	$\mathcal{M}_a^a \mathcal{M}_b^b \mathcal{M}_\kappa^k;$
$(\delta_\beta^i \delta_\alpha^j)(\delta_c^a \delta_l^k)(\delta_i^b \delta_m^c)(\check{\varepsilon}^{ml} \check{\varepsilon}_{\kappa j}) =$ $= (\delta_\beta^i \delta_i^b)(\delta_\alpha^j \delta_c^a \delta_m^c \check{\varepsilon}^{ml})(\delta_l^k \check{\varepsilon}_{\kappa j}) = \delta_\beta^b \check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha}$	$-\mathcal{M}_b^b \mathcal{M}_\kappa^k;$
$(\delta_\beta^i \delta_\alpha^j)(\delta_c^a \delta_l^k)(\check{\varepsilon}^{bc} \check{\varepsilon}_{mi})(\check{\varepsilon}^{ml} \check{\varepsilon}_{\kappa j}) =$ $= \check{\varepsilon}^{ba} (\check{\varepsilon}_{m\beta} \check{\varepsilon}^{mk}) \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha} = \delta_\beta^b \check{\varepsilon}^{ba} \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha}$	$\mathcal{M}_b^b \mathcal{M}_\kappa^k;$
$(\delta_\beta^i \delta_\alpha^j)(\check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{lc})(\delta_i^b \delta_m^c)(\check{\varepsilon}^{ml} \check{\varepsilon}_{\kappa j}) =$ $= \delta_\beta^b \check{\varepsilon}^{ak} (\check{\varepsilon}_{lm} \check{\varepsilon}^{ml}) \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha} = -\delta_\beta^b \check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha} \mathcal{M}_m^m$	$\mathcal{M}_\kappa^k;$
$(\delta_\beta^i \delta_\alpha^j)(\check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{lc})(\check{\varepsilon}^{bc} \check{\varepsilon}_{mi})(\check{\varepsilon}^{ml} \check{\varepsilon}_{\kappa j}) =$ $= \check{\varepsilon}^{ak} (\check{\varepsilon}_{lc} \check{\varepsilon}^{bc})(\check{\varepsilon}_{m\beta} \check{\varepsilon}^{ml}) \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha} = \check{\varepsilon}^{ak} \delta_l^b \delta_\beta^l \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha} = \delta_\beta^b \check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{\kappa\alpha}$	$-\mathcal{M}_b^b \mathcal{M}_\kappa^k;$
$(\check{\varepsilon}^{ij} \check{\varepsilon}_{\alpha\beta})(\check{\varepsilon}^{ak} \check{\varepsilon}_{lc})(\check{\varepsilon}^{bc} \check{\varepsilon}_{mi})(\check{\varepsilon}^{ml} \check{\varepsilon}_{\kappa j}) =$ $= \check{\varepsilon}_{\alpha\beta} \check{\varepsilon}^{ak} (\check{\varepsilon}_{lc} \check{\varepsilon}^{bc})(\check{\varepsilon}_{mi} \check{\varepsilon}^{ml})(\check{\varepsilon}_{\kappa j} \check{\varepsilon}^{ij}) = \check{\varepsilon}_{\alpha\beta} \check{\varepsilon}^{ak} \delta_l^b \delta_i^l \delta_\kappa^i =$ $= \delta_\kappa^b \check{\varepsilon}_{\alpha\beta} \check{\varepsilon}^{ak}$	$\mathcal{M}_\kappa^k.$

Скаляры в правой части (3.17) получаются в результате свертки соответствующих выражений слева (в их окончательном виде) с комбинацией оборотных операторов \mathfrak{M} из (3.14). Эти свертки вычисляются с помощью тождеств

$$\begin{aligned} \delta_k^\kappa \mathcal{M}_\kappa^k &= \bar{\mathcal{M}}_k^k, \\ \varepsilon^{ak} \varepsilon_{\kappa\alpha} \mathcal{M}_\alpha^\kappa \mathcal{M}_k^\kappa &= -\delta_\kappa^k \mathcal{M}_k^\kappa = -\mathcal{M}_k^k, \\ (\mathcal{M}_\alpha^\alpha \varepsilon^{ba} \varepsilon_{\kappa\alpha}) (\delta_\beta^\kappa \mathcal{M}_\beta^\beta) \mathcal{M}_k^\kappa &= (\tilde{\mathcal{M}}_\kappa^b \mathcal{M}_\beta^k) \mathcal{M}_k^\kappa = \delta_\kappa^k \mathcal{M}_k^\kappa = \mathcal{M}_k^k. \end{aligned} \quad (3.18)$$

После этого, в силу определений

$$\mathcal{M}_k^k = \langle \mathbb{I} | = [2]_q, \quad (3.19)$$

окончательный ответ для \mathfrak{J}^{31} тождественно совпадает с (3.11).

3.4.4. Среднее как взвешенный след. Еще одна модификация определения среднего в модели Кауффмана основана на том, что операторную свертку можно переписать как след матричного произведения. В частности, для свертки (3.9) это можно сделать следующим образом:

$$\begin{aligned} K_{\boxed{ab}}^{sj} \delta_{\boxed{\kappa}}^t \cdot K_{\boxed{lc}}^{\boxed{ak}} \delta_{\boxed{u}}^{\boxed{b}} \cdot K_{\underline{mi}}^{\overline{uc}} \delta_{\underline{v}}^{\overline{l}} \cdot K_{\underline{tj}}^{\overline{mv}} \delta_{\underline{s}}^{\overline{i}} = \\ = (K_2)_{ucl}^{bak} (K_1)_{imv}^{ucl} (K_2)_{s jt}^{imv} (K_1)_{ba\kappa}^{s jt} = \text{Tr} \{ K_1 K_2 K_1 K_2 \}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где каждая из матриц $\mathcal{K}_L^{(i)I}$, $i = 1, 2$, имеет по два мультииндекса, верхний и нижний, отвечающих, соответственно, тройкам верхних и нижних индексов исходных операторов:

$$(K_1)_L^I \equiv (K_1)_{lmn}^{ijk} \equiv K_{\underline{ml}}^{ij} \delta_n^k, \quad (K_2)_L^I \equiv (K_2)_{lmn}^{ijk} \equiv \delta_l^i K_{\underline{nm}}^{jk}. \quad (3.21)$$

Обратим внимание, что сведение тензорной свертки к операторному произведению потребовало введения *двух* различных двухиндексных операторов вместо одного четырехиндексного.

В свою очередь, статсумму, определенную как свертку с оборотными операторами (3.14), можно записать как

$$\mathfrak{J}^{31} = \langle \text{Tr} \{ K_2 K_1 K_2 K_1 \} \rangle = \text{Tr} \{ M K_2 K_1 K_2 K_1 \}, \quad (3.22)$$

где мы ввели оператор

$$M_{\alpha\beta k}^{ab\kappa} = \mathcal{M}_\alpha^a \mathcal{M}_\beta^b \mathcal{M}_k^\kappa. \quad (3.23)$$

Проделанную выкладку можно представить наглядно: как перерисовывание исходной диаграммы узла на рис. 5 в виде замыкания косы [29]. При этом

произведение операторов S будет связано с открытой косой, а оператор M — с ее замыканием.

В случае S из (3.6) введенные операторы K_1 , K_2 и M можно записать в виде матриц

$$q^2 K_1 = \begin{matrix} & 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 & ijk/lmn \\ \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \end{matrix} & q & & & & & & & & \\ & & q & & & & & & & \\ & & & q - q^{-1} & & -1 & & & & \\ & & & & q - q^{-1} & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & q & & \\ & & & & & & & & q & \\ \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \end{matrix} & & & & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} 111 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 211 \\ 212 \\ 221 \\ 222 \end{matrix}, \quad (3.24)$$

$$q^2 K_2 = \begin{matrix} & 111 & 112 & 121 & 122 & 211 & 212 & 221 & 222 & ijk/lmn \\ \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \end{matrix} & q & & & & & & & & \\ & & q - q^{-1} & -1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & \\ & & & & q & & & & & \\ & & & & & q & & & & \\ & & & & & & q - q^{-1} & -1 & & \\ & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & q & \\ \begin{matrix} \parallel \\ \parallel \end{matrix} & & & & & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} 111 \\ 112 \\ 121 \\ 122 \\ 211 \\ 212 \\ 221 \\ 222 \end{matrix}, \quad (3.25)$$

и

$$\begin{aligned} M &= \text{diag} (m_1^3 \ m_1^2 m_2 \ m_1^2 m_2 \ m_1 m_2^2 \ m_1^2 m_2 \ m_1 m_2^2 \ m_1 m_2^2 \ m_2^3) \\ &= \text{diag} (q^3 \ q \ q \ q \ q^{-1} \ q^{-1} \ q^{-1} \ q^{-3}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Непосредственное вычисление по формулам (3.22), (3.24)–(3.26) дает тот же ответ (3.11) для искомого инварианта.

Вычисление следа с помощью базиса в общих инвариантных подпространствах. Еще один особенно важный для дальнейшего способ записать выражение для статусуммы модели Кауффмана основан на наблюдении, что операторы перекрестков и тензорное произведение оборотных операторов в матричной записи имеют весьма специальную структуру. В нашем случае она проявляется в следующем виде. Во-первых, 8-мерный оператор M имеет всего четыре различных собственных значения, два из которых — q и q^{-1} — имеют кратность три, т. е. соответствующие собственные векторы образуют

два трехмерных подпространства, и вид матрицы M не зависит от выбора базисов в этих подпространствах. Во-вторых, базисы можно выбрать так, что обе матрицы K_1 и K_2 распадутся на блоки

$$M_p^{i8 \times 8} = \begin{pmatrix} M_*^{4 \times 4} & & \\ & M_{**}^{2 \times 2} & \\ & & M_{**}^{2 \times 2} \end{pmatrix}, K_p^{i8 \times 8} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}^{4 \times 4} & & \\ & \Xi_p^{2 \times 2} & \\ & & \Xi_p^{2 \times 2} \end{pmatrix}, i = 1, 2. \quad (3.27)$$

Каждый блок соответствует общему инвариантному подпространству, т. е., как следует из вида матриц, действие обоих операторов не выводит за пределы каждого из таких подпространств. Таким образом, из кратных собственных векторов оператора M можно составить базисы в общих инвариантных подпространствах операторов \mathcal{K}_1 и \mathcal{K}_2 .

Блоки матриц имеют явный вид:

$$M_* = \begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & q^{-3} & & \\ & & q^{-1} & \\ & & & q^{-3} \end{pmatrix}, M_{**} = \begin{pmatrix} q & \\ & q^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} q^{-1} & \\ & -q^{-3} \end{pmatrix}, \Xi_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^3 + q^5} & \frac{\sqrt{1 + q^2 + q^4}}{q^2 + q^4} \\ \frac{\sqrt{1 + q^2 + q^4}}{q^2 + q^4} & \frac{q}{1 + q^2} \end{pmatrix}.$$

При записи матричного представления для статсуммы (3.22) в новом базисе

$$\mathcal{J}^{31} = \text{Tr} \{ M K'_2 K'_1 K'_2 K'_1 \} \quad (3.29)$$

вычисляемый след благодаря блочной структуре матриц (3.27) разлагается в сумму

$$\mathcal{J}^{31} = q^4 \text{Tr} M_* + \text{Tr} M_{**} \text{Tr} \{ \Xi_2 \Xi_1 \Xi_2 \Xi_1 \} \equiv q^4 \chi_* + \text{Tr} \{ \Xi_2 \Xi_1 \Xi_2 \Xi_1 \} \chi_{**}, \quad (3.30)$$

где мы ввели обозначения

$$\chi_* = \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq 2} m_i m_j m_k = m_1^3 + m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2 + m_2^3 = q^3 + q + q^{-1} + q^{-3} = [4]_q, \quad (3.31)$$

$$\chi_{**} = \sum_{1 \leq i \leq j < k \leq 2} m_i m_j m_k = m_1^2 m_2 + m_1 m_2^2 = q + q^{-1} = [2]_q. \quad (3.32)$$

По ходу вычисления видно, что функции (3.32) «считают» общие инвариантные подпространства, на которых K'_1 и K'_2 действуют одинаково, каждое со своим весом: каждое слагаемое в χ_* отвечает одному из четырех общих собственных векторов с одним и тем же собственным значением q , а каждое слагаемое в χ_{**} — одному из двух тождественных блоков. При $q = 1$ обе величины переходят в кратности общих инвариантных подпространств: 4 собственных вектора и 2 двумерных подпространства.

Формула (3.29) позволяет свести вычисление исходного следа от произведения матриц 8×8 к вычислению следа от произведения матриц 2×2 во втором слагаемом, причем последний замечательным образом упрощается по сравнению с отдельными матричными элементами:

$$\begin{aligned} \Xi_{12} &\equiv \Xi_1 \Xi_2 = q^{-5} \begin{pmatrix} -c & -s \\ q^2 s & -q^2 c \end{pmatrix}, \quad c = \frac{q}{1+q^2}, \quad s^2 = 1 - c^2; \\ q^{10} \Xi_{12}^2 &\equiv q^{10} \Xi_1 \Xi_2 = \begin{pmatrix} c^2 - q^2 s^2 & (1+q^2)cs \\ -q^2(1+q^2)cs & q^2(q^2 c^2 - s^2) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} qc - q^2 & qs \\ -q^3 s & q^2(qc - 1) \end{pmatrix}, \\ \text{Tr } \Xi_{12}^2 &= q^{-10}(q^2 - 2q^2) = -q^{-8}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Подставляя (3.33) вместе с (3.32) в (3.30), мы, наконец, еще одним способом получаем полином Джонса узла-трилистника:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= q^{-4} \chi_{**} - q^{-8} \chi_* = q^{-4}(q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}) - q^{-8}(q + q^{-1}) = \\ &= q^{-1} + q^{-3} + q^{-5} - q^{-9}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Среднее как взвешенный след. Выражение (3.30) можно также рассматривать как определение *взвешенного следа*

$$\mathcal{J}^{31} \equiv \text{Tr}_q \{K_2 K_1 K_2 K_1\} \equiv \langle \text{Tr } q^4 \mathbb{I} \rangle + \langle \text{Tr } \{\Xi_2 \Xi_1 \Xi_2 \Xi_1\} \rangle, \quad (3.35)$$

который по построению равен линейной комбинации следов по общим инвариантным подпространствам с некоторыми коэффициентами: в данном случае χ_* и χ_{**} . Можно с самого начала принять выражение вида (3.35) за определение среднего в модели Кауффмана — сперва записав его с неизвестными коэффициентами, а затем вычислив их с помощью условий в табл. 3. Сама идея аналогична неявным определениям среднего, рассмотренным выше, однако ее реализация на этот раз не столь прямолинейна. В более общем случае она обсуждается, например, в [29].

Разложение инварианта узла по характеристам. Оказывается, что для произвольного узла и для широкого класса моделей типа Кауффмана можно написать аналог разложения (3.30) \equiv (3.35):

$$\mathfrak{Z}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} = \sum_r c_r \chi_r, \quad (3.36)$$

который (в силу причин, которые мы обсудим в последующих разделах) часто называют *формулой разложения по характеристам*. Разложение по характеристам неоднозначно: один и тот же инвариант допускает бесконечно много разложений вида (3.36) по различным наборам «характеров» χ [55].

Формулы разложения по характеристам играют важную роль при исследовании инвариантов узлов [2]. Дело в том, что если изучать зависимость инварианта одновременно от параметров узла \mathcal{K} и от типа модели Кауффмана \mathcal{K} , то разложение (3.36) обеспечивает частичное *разделение переменных* в следующем смысле. С одной стороны, для данной модели типа Кауффмана все узлы разбиваются на бесконечные семейства, такие, что набор величин $\{\chi_r\}$ одинаков для всех узлов данного семейства, а зависимость значения инварианта от узла — члена семейства — целиком содержится в коэффициентах $\{c_r\}$. С другой стороны, для данного узла всевозможные модели типа Кауффмана разбиваются на семейства с общими $\{c_r\}$ и различными $\{\chi_r\}$ внутри каждого семейства. Такое разделение переменных играет ключевую роль для двух важных подходов к инвариантам узлов из табл. 2: через матричные представления группы кос [55] и через квантовые \mathcal{R} -матрицы [48].

4. «ГОЛОГРАММА» ФОРМАЛЬНОЙ ТКТП УЗЛА

4.1. Наглядный образ трехмерной модели. Идея чрезвычайно наглядна. Возьмем замкнутую кривую \mathcal{C} в трехмерном пространстве (в простейшем случае в «обычном» \mathbb{R}_3) и не будем различать пару таких кривых, если одна переходит в другую при непрерывном преобразовании. Задача — построить ТКТП, в которой наблюдаемая величина связана именно с таким классом эквивалентности кривых (либо с отдельной кривой, но совпадает для всякой пары непрерывно-эквивалентных кривых). Как уже говорилось, такие классы эквивалентности называют узлами, а соответствующие наблюдаемые величины называют инвариантами узлов (ИУ). В самых общих чертах «физическая» (трехмерная) модель ИУ сводится к двум следующим построениям.

- Источник тока в форме замкнутой кривой \mathcal{C} создает в пространстве поле (наподобие магнитного).
- Наблюдается определенная мера воздействия этого поля на пробную частицу, движущуюся по замкнутой траектории в виде кривой \mathcal{C} .

Здесь, правда, возникает очевидная проблема: одна и та же кривая \mathcal{C} играет роль как источника поля, так и траектории пробной частицы. Эта проблема решается заменой кривой-источника *либо* кривой-траектории на

кривую-спутник: $C \rightarrow C' \sim C$, отличающуюся от исходной «небольшим сдвигом» (подробнее см. [3, 45]). Замечательно, что необходимость такой же операции независимо возникает при чисто математическом определении обсуждаемых ИУ [29, 48].

Искомая модель должна быть топологически инвариантной: мера воздействия на пробную частицу должна сохраняться при произвольных непрерывных преобразованиях как кривой-источника, так и кривой-траектории. Поскольку непрерывные преобразования кривой, вложенной в пространство, можно рассматривать как непрерывные преобразования самого пространства, здесь подошла бы модель, все уравнения и все наблюдаемые величины которой инвариантны относительно общекоординатно-инвариантных преобразований.

Модель, обладающая отмеченным специальным свойством, а также другими желаемыми свойствами, была известна под названием *трехмерная теория Черна–Саймонса* (ТЧС). Величина, которая играет роль основной физической переменной в ТЧС (как и во многих других *калибровочных* теориях поля) называется *вильсоновским средним* (ВС).

Замечательное следствие общекоординатной инвариантности состоит в том, что «существенно различных» полевых конфигураций в ТЧС, связанной с данным узлом (в качестве кривой-источника), оказывается (небольшое!) конечное число. Это позволяет свести вычисление (плохо определенной) квантово-полевой наблюдаемой к вычислению (хорошо определенной) наблюдаемой во вспомогательной модели с конечномерным пространством состояний. Правда, этот путь пролегает через ряд «эвристических» шагов, и все нетривиальные вычисления скорее претендуют на самодостаточную(ые) конструкцию(и), чем на вывод выражения для ИУ из ТЧС. . .

Тем не менее интерпретация ИУ как ВС в ТЧС имеет под собой ряд весьма серьезных оснований, обзору которых на элементарном уровне мы и посвятим настоящий раздел.

4.2. Классическое утверждение. Буквально говорят так: «Полином Джонса/ХОМФЛИ/Кауффмана (в том числе раскрашенный) есть вильсоновское среднее в теории Черна–Саймонса».

В «левой части» утверждения — ИУ особого типа, примеры которых даны в табл. 2. В «правой части» — основная наблюдаемая в ТЧС — упомянутая выше ТКТП, о которой пойдет речь дальше.

Классическая работа. Тезис выше, как правило, ассоциируется с известной работой Виттена [3], в которой, вероятно, это соответствие было впервые изложено как цельный образ*. Однако эту (безусловно яркую) работу скорее

*Для полиномов Джонса и $SU(2)$ ТЧС; в последующей работе [56] упомянуты также полиномы ХОМФЛИ и $SU(N)$ ТЧС.

стоит рассматривать как символ сюжета и эпохи. С одной стороны, огромный успех выступления Виттена на конгрессе МАМФ 1988 г. (и основанной на нем публикации [3]) вряд ли был случайным: идея и наводящие соображения (со слов современников) к тому моменту «витали в воздухе». С другой стороны, последовавшая за выступлением работа [3] приобрела огромную популярность прежде всего благодаря ссылкам на нее как на первую* публикацию по теме. Так или иначе работу Э. Виттена 1988 г. [3] принято рассматривать как точку старта целого направления в математической физике.

Последующие работы. Объем и многообразие различных текстов по теме практически не оставляют возможности привести перечень, хоть скольконибудь претендующий на полноту (см., в частности, ссылки в настоящем тексте). На вкус автора можно привести несколько характерных примеров, отражающих основные точки зрения: работы [46] и [58], курс лекций [47], обзор [45]. Предмет довольно быстро вошел в хрестоматии по теории узлов (см., например, [2]). Еще один поворот сюжета изложен в работах [59, 60]. Различным направлениям поисков посвящена книга [61]. Наконец, самым свежим достижением (ко времени написания этого текста) стала работа [30], которая также содержит обзор использованного в ней подхода.

4.3. Идея конструкции: голограмма двумерной ТКТП. Если найти набор пространственных преобразований, в проекции на плоскость порождающих «изначально плоские» тождества Уорда данной ТКТП (типа Sk из табл. 1 в простейшем случае), то тем самым удастся построить трехмерный прообраз этой ТКТП.

Трехмерный прообраз соотношения Sk схематически изображен на рис. 7. Каждый фрагмент диаграммы узла, входящий в соотношение Sk , получается как пересечение диаграммы узла с диском. Этот диск может получиться при проекции шара в трехмерном пространстве, содержащего соответствующую часть исходной кривой. Тогда переход между различными членами в соотношении Sk будет соответствовать непрерывному преобразованию части кривой внутри шара (но не самой кривой, которую придется разрезать и склеить!).

$$(q - q^{-1}) \times \begin{array}{c} \text{c} \quad \text{d} \\ \text{a} \quad \text{b} \\ \text{II} \end{array} = A^{-1} \times \begin{array}{c} \text{d} \quad \text{c} \\ \text{a} \quad \text{b} \\ \hat{\Omega}_{ab} \end{array} - A \times \begin{array}{c} \text{d} \quad \text{c} \\ \text{a} \quad \text{b} \\ \hat{\Omega}_{ab}^{-1} \end{array}$$

Рис. 7. Трехмерный образ соотношения Sk . Оператор $\hat{\Omega}_{ab}$ непрерывно меняет местами точки a и b в выбранном направлении вместе с присоединенными дугами кривой

*За очень редкими и труднодоступными исключениями вроде [57].

А именно, если дуги кривой (на которой должно быть выбрано направление) «входят» в шар в точках \mathbf{c} и \mathbf{d} , а «выходят» в точках \mathbf{a} и \mathbf{b} , то прообразы двух диаграмм в левой части S_k связаны непрерывным перемещением точек \mathbf{a} и \mathbf{b} (при неподвижных \mathbf{c} и \mathbf{d}) по окружности на границе шара, так что каждая точка возвращается в исходное положение, описав полный оборот. Член в правой части S_k получается, если каждая точка прошла по обороту, так что конечное положение точек отличается от исходного их перестановкой.

Простейшая 3d ТКТП для ИУ по существу определяется описанным трехмерным образом условия S_k . Действительно, общие свойства среднего в табл. 3 не привязаны к двумерной модели и могут с тем же успехом использоваться в трехмерной. Условия же RIII, RII и RI из табл. 1, которые в двумерной модели дополняли условие инвариантности среднего относительно непрерывных преобразований проекции узла на плоскость, не входят в трехмерную формулировку в явном виде, а следуют из инвариантности среднего при непрерывных пространственных преобразованиях. Последнее делает трехмерную модель многообещающей, поскольку открывает путь для обобщения на случай узлов в более сложных (чем \mathbb{R}_3) пространствах (где, как правило, неизвестен аналог системы условий RI, RII и RIII из табл. 1, см. далее).

4.3.1. Как считают инварианты узлов с помощью трехмерной модели? Описанные выше соображения в принципе позволяют провести явное вычисление инварианта узла по аналогии с вычислением в двумерной топологической модели (3.1), но непосредственно представляя себе трехмерную конструкцию. Что нового мог бы принести такой подход, мы обсудим в п. 4.3.2, а его распространенную физическую интерпретацию — в п. 4.3.3. Пока кратко приведем саму схему таких вычислений. В основе лежит метод разрезания и склейки.

- В трехмерном пространстве V , куда вложен наш узел в виде замкнутой кривой \mathcal{C} , выбирают набор областей $D_a \subset V$ так, что пересечение узла с каждой областью $B_a = \mathcal{C} \cap D_a$ имеет вид одного из канонических блоков: в простейшем случае каждая область $D_a = S_3$ — (топологический) шар, а блок $\mathcal{C} \cap D_a = B_a$ — пара дуг (см. рис. 7).

- Граница каждой области ∂D_a — замкнутая двумерная поверхность с набором отмеченных точек пересечения с кривой: $\{\mathbf{a}_\alpha\} = \mathcal{C} \cap \partial D_a$. На рис. 7 граница $\partial D_a \cap \mathcal{C} = S_2 \cap \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ — сфера с четырьмя отмеченными точками.

- Каждому блоку B соответствует величина Ψ_B с заданным множеством значений $\{\Psi_{B|\alpha}\}$ — векторов (или матриц, или тензоров).

- Элементы Ψ_B зависят как от вида блока, так и от параметров модели.

- В ряде случаев для Ψ_B известны явные выражения.

- Тождества Уорда ТКТП записываются как соотношения между различными Ψ_B .

— Ψ_B аналогичны операторам перекрестков и их частичным сверткам в двумерной модели из разд. 3, а также с «элементарными вкладками» в интеграл Концевича из п. 5.6 и приложения 3.

- Геометрическая схема «сборки» блоков задает функцию $F[\Psi_B]$.

— На практике Ψ^B — тензоры, а $F[\Psi_B]$ — их свертка, которая естественным образом записывается по рисунку разрезанного узла (см. примеры в [62]).

— $F[\Psi^B]$ — аналог свертки операторов перекрестка в двумерной модели из п. 3.4.

- Среднее от полученной функции определено как сумма с определенными коэффициентами по всем наборам значений аргумента для каждого блока: $\mathfrak{Z}_M^C = \sum_{\alpha} c_{\alpha} F[\Psi_{B|\alpha}]$. Это и есть «наблюдаемая величина» ТКТП.

Выражение выше — аналог среднего в двумерной модели из п. 3.4.

- Величина \mathfrak{Z}^C должна быть инвариантом узла, т. е.:

— \mathfrak{Z}^C должна сохраняться при произвольных непрерывных преобразованиях кривой \mathcal{C} и пространства вложения V ;

— также \mathfrak{Z}^C не должна зависеть от способа разрезания на элементарные блоки;

— зато \mathfrak{Z}^C может зависеть от топологического класса \mathcal{C} , а также от параметров модели M , в частности, от топологии пространства вложения V (см. обсуждение в п. 2.1.2);

— пишут: $\mathfrak{Z}^{\mathcal{K}} \equiv \mathfrak{Z}^{C[\mathcal{K}]}$, где \mathcal{K} — топологический класс кривой (название узла, например по Рольфсену [37]).

- Условия в последнем пункте должны выполняться благодаря свойствам функций блоков Ψ_B , виду функции $F[\Psi_B]$ и значениям коэффициентов $c_{\alpha} F[\Psi_B]$, использованным в определении ТКТП.

Описанная «трехмерная» техника вычислений подробно излагается, например, в [62].

4.3.2. При чем здесь ТЧС? Трехмерная «физика», описанная в п. 4.1, в фактической конструкции проявляется довольно тонким образом.

А именно: ТЧС допускает аксиоматическое определение; из него, в частности, следует независимое описание «функций элементарных блоков», из которых «собирается» ИУ (п. 4.3.1 [62]).

КТП как набор аксиом. Вообще программа формализации квантовой теории поля посредством набора аксиом восходит еще к классическим монографиям, например [22]. Под *топологической квантовой теорией поля* (ТКТП) обычно понимают изначально формальную конструкцию, идеология которой впервые была изложена в работе Атьи [28]. Представленная там система аксиом ТКТП стала классической и приводится во многих работах, касающихся «квантово-полевых» идей в топологии. Именно с такой точки зрения предлагается рассматривать ТЧС в классической конструкции *a la* [3]. При этом

сама ТЧС, включая основное понятие ВС в теории, вводится посредством еще одной вспомогательной конструкции, набросок которой приведен ниже.

Литературные ссылки. Конструкция, о которой пойдет речь, представлена в оригинальной работе [3] в виде изящной картины. Разработке многочисленных деталей посвящен внушительный ряд последующих работ. В частности, очень подробно и обстоятельно этот сюжет изложен в [63] (краткая версия — в [64]). Во многих работах (особенно в обзорных) приводят сжатое изложение конструкции (см., например, [58, гл. 5], а также [47] и [61]). Техника 3d-вычислений подробно разбирается в [62].

Трехмерная модель как граничная задача. В исходной трехмерной модели узел отождествлялся с источником поля и одновременно с траекторией пробной частицы (см. п. 4.1). При более продвинутом подходе вместо траекторий рассматривают волновые функции пробных частиц. Эти волновые функции образуют линейное пространство состояний модели и определяются как решение системы уравнений (типа уравнения Шредингера). Как следствие, волновая функция внутри ограниченной области пространства целиком определяется ее значениями на границе.

Трехмерная модель на границе как двумерная модель. Значения волновых функций на границе области пространства можно, в свою очередь, рассматривать как волновые функции другой, двумерной, модели, у которой все поля и частицы распространяются на границе области. Полученная в результате двумерная модель должна «унаследовать» основные свойства трехмерной модели (см. п. 4.1): набор параметров и, главное, общекоординатную (топологическую) инвариантность. При этом роль источников поля в двумерной модели будут играть точки пересечения поверхности с узлом.

Двумерная модель Весса–Зумино–Виттена–Новикова (ВЗВН) была известна независимо от ТЧС и теории узлов и, как оказалось, обладала всеми желаемыми свойствами. Конструкция довольно кратко и ясно изложена в оригинальной работе [65]; подробный анализ можно найти, например, в книге [34, гл. 15–17]. В самых общих чертах модель ВЗВН — это общекоординатно-инвариантная модель спиновых полей на двумерной поверхности с дополнительной группой симметрии с отмеченными точками — источниками поля. В частности, был известен способ описания пространства состояний такой модели — в терминах специальных (матричнозначных) функций, которые называются *конформными блоками*.

Оказалось, что определенные линейные операторы (а именно, *инвариантные тензоры*) на пространстве состояний модели ВЗВН (которые можно рассматривать как квантовые наблюдаемые) обладают тем же набором определяющих свойств, что и функции элементарных блоков в 3d-модели ИУ (см. начало раздела).

Кандидаты на роль функций элементарных блоков от модели ВЗВН называются операторами *полумонодромий конформных блоков*: это операторы за-

мены базиса на пространстве состояний модели при полуперестановке пары источников поля путем непрерывного движения, как на рис. 7. В простейших вариантах модели эти операторы действительно удовлетворяют соотношению Sk.

Связующим звеном трехмерной ТЧС, двумерной модели ВЗВН и ИУ фактически является уравнение Книжника–Замолодчикова (КЗ) [65]. Это уравнение (точнее, система уравнений) одновременно описывает как изменение вильсоновских средних в ТЧС при малой деформации пробной кривой либо кривой-источника, так и зависимость конформных блоков в модели ВЗВН от положения точек — источников двумерного поля. При этом в обоих случаях уравнение КЗ возникает как следствие общекоординатной (т. е. топологической) инвариантности каждой из моделей [43]. С другой стороны, определенные решения уравнения КЗ независимо возникают как «универсальные блоки», из которых «собирается» произвольный ИУ посредством тензорной свертки — так называемые ассоциаторы Дринфельда в формализме интеграла Концевича [66] (ряд тонкостей обсуждается в [67]).

4.3.3. Специальные приложения 3d/2d-модели ИУ. Трехмерная ТКТП и ИУ в сложных пространствах. Принципиальная возможность обобщения на 3d-многообразии, существенно отличное от «обычного» \mathbb{R}_3 , — одно из самых привлекательных свойств 3d ТКТП. ИУ в таких пространствах изучены мало, и при этом возникает ряд принципиальных трудностей [2, 27]. В частности, проблема оснащения узла (п. 5.5) оказывается гораздо более серьезной в случае произвольных трехмерных многообразий [2, 27]. Уже в одном из простейших случаев — для обычного пространства без прямой ($\mathbb{R}_3 \mathbb{R}_1$) — про ИУ известно очень мало, не говоря уже о более сложных пространствах.

Со стороны математиков имеются безусловно значимые, но весьма скромные (на фоне успехов теории ИУ в \mathbb{R}_3) достижения: [68–73]. К сожалению, построить 3d ТКТП «до конца» (до явного вычисления наблюдаемых) удастся все в том же \mathbb{R}_3 , и одну из причин мы обсудим ниже.

ВЗВН/КЗ на поверхностях с ручками. В описанном соответствии ЧС–ВЗВН–полином узла топология трехмерного пространства существенно проявляется при сборке узла из элементарных блоков (п. 4.3.1): для узла \mathbb{R}_3 (как мы говорили) достаточно рассмотреть блоки, ограниченные (топологическими) сферами \mathbb{S}_2 [47]. Для узлов в других трехмерных пространствах (например в полнотории) придется, вообще говоря, рассматривать разрезающие поверхности разных родов — с разным числом «ручек». Как следствие, для дальнейшей формулировки обсуждаемой конструкции необходимо рассмотреть модель ВЗВН на поверхности старшего рода (например на торе). Главным образом необходимо вычислить матрицы (полу)монодромий конформных блоков или в явном виде записать уравнения КЗ и найти в том или ином виде их решения. Определенные успехи в этом направлении достигнуты [74–76], но несравнимо более скромные, чем для ВЗВН/КЗ на сфере.

Инварианты узлов в различных моделях типа ВЗВН. ИУ из табл. 2 (ранее известные независимо) получаются в 3d/2d-модели (п. 4.1) с моделями ВЗВН определенного типа [34, гл. 15]. Известны, однако, и другие типы таких моделей [34, гл. 17], в которых наблюдаемые могли бы оказаться новыми ИУ. Такая возможность обсуждается в [77, 78] и (кратко и с примерами) в [79]. В этих поисках метод ВЗВН на сегодня не имеет альтернативы, и, несмотря на его трудоемкость, все (пока, правда, немногие) результаты для соответствующих ИУ получены именно таким образом.

Модели типа ВЗВН и некомпактные квантово-групповые инварианты узлов. Модель ВЗВН помогает расширить класс квантово-групповых инвариантов узлов, перечисленных в п. 2.1. В частности, таким образом можно рассматривать инварианты, связанные с бесконечномерными представлениями калибровочной группы. Явные выражения для таких инвариантов вместо тензорных сверток операторов перекрестков (см. разд. 3) содержат интегралы по бесконечномерным пространствам представлений. При этом новые (*некомпактные*) инварианты в отличие от «обычных» (*компактных*) допускают наилучшее (на данное время) описание с помощью (полу)монодромий конформных блоков соответствующей модели ВЗВН.

Работа [79] содержит обзор, довольно краткий и предельно конкретный с точки зрения вычислений, двух подходов к компактным и некомпактным инвариантам узлов: через модели ВЗВН и через теорию представлений квантовых групп. Там же приводятся необходимые литературные ссылки.

ЧС/ВЗВН-соответствие и инварианты трехмерных многообразий. Наконец, описанная в п. 4.3.1 техника трехмерных вычислений имеет неожиданное приложение к вычислению инвариантов трехмерных многообразий. В основе лежит идея «хирургии» трехмерных пространств: когда простое пространство (вроде \mathbb{R}_3) «разрезается» вдоль вложенной в него замкнутой кривой (узла), а затем, после определенных преобразований, склеивается обратно, так что получается, вообще говоря, пространство с другой топологией [2, 27, разд. 23.2.2].

Возможность вычисления инвариантов трехмерных многообразий на основе ЧС/ВЗВН-модели инварианта узла изучается, например, в работах [80, 81]. В последнее время эта задача приобрела популярность в более общей постановке, и при этом обнаружили неожиданные пересечения с такими предметами, как конформная теория поля [34], теория модулярных форм [19] и даже теория чисел. Два характерных (разных по духу) примера: [82] и [83]. Кроме того, в [84] в том же ключе рассматривается теория четырехмерных многообразий.

Техника «хирургии» также связывает теорию инвариантов трехмерных многообразий с теорией узлов (зацеплений) в топологически нетривиальных пространствах [2, 27, разд. 23.4].

5. ПЕРТУРБАТИВНАЯ УЗЛОВАЯ ТКТП

В этом разделе мы обсудим связь теории Черна–Саймонса с теорией узлов более подробно. Рассмотрим явное вычисление ИУ на языке пертурбативной ТКТП, которая на этот раз будет задана явно: через классическое действие и обобщенный гауссов интеграл.

5.1. Число зацеплений в теории поля. Сперва мы обсудим первое наводящее соображение (по-видимому, впервые предложенное А. С. Шварцем [57]) в пользу квантово-полевой интерпретации полиномов узлов.

5.1.1. Магнитное поле и число зацеплений. *Формула Гаусса для числа зацеплений.* Начнем с известной интегральной формулы для числа зацеплений кривых $C_1\{\vec{r} = \vec{r}_1(s_1)\}$ и $C_2\{\vec{r} = \vec{r}_2(s_2)\}$ в трехмерном пространстве* [85]:

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} dr_1^i \oint_{C_2} dr_2^j \frac{\varepsilon_{ijk} r_{12}^k}{(r_{12}^i r_{12}^i)^{3/2}} \equiv \frac{1}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, \vec{r}_{12})}{|\vec{r}_{12}|^3}, \quad (5.1)$$

где $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

Формула Гаусса в магнитостатике. Формула (5.1) имеет яркую физическую интерпретацию. А именно, функция**

$$\vec{H}_{C_2}(\vec{r}_1) = \oint_{C_2} \frac{d\vec{r}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \quad (5.2)$$

удовлетворяет уравнениям***

$$\text{rot } \vec{H}_{C_2}(\vec{r}_1) = \oint_{C_2} d\vec{r}_2 \delta(\vec{r}_{12}) \equiv 4\pi \vec{J}_{C_2}, \quad (5.3a)$$

$$\text{div } \vec{H}_{C_2} = 0, \quad (5.3b)$$

т. е. задает статическое магнитное поле, порожденное тонким проводом с током $\vec{J}(\vec{r}(s) \in C_2)$ единичной величины вдоль кривой C_2 . Тогда исходный

*Первая из интегральных формул (5.1) написана в тензорных обозначениях: по всем повторяющимся индексам подразумевается суммирование от 1 до 3. То же применимо ко всем формулам с индексами в настоящем разделе, если не оговорено обратное. Различия между верхними и нижними индексами не делается, запись выбирается из соображений удобства. Во второй формуле круглые скобки обозначают смешанное произведение — (положительный или отрицательный) ориентированный объем параллелепипеда, натянутого на тройку векторов.

**Символ \times означает векторное произведение векторов — (положительная или отрицательная) ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на пару векторов. Через $|\vec{r}|$ обозначается модуль (длина) вектора \vec{r} .

***Символ \cdot означает скалярное произведение векторов, $\vec{\nabla}$ — оператор градиента.

интеграл равен циркуляции этого магнитного поля по замкнутой кривой C_1 :

$$\mathcal{L}(C_1, C_2) = \frac{1}{4\pi} \oint_{C_2} d\vec{r}_1 \cdot \vec{H}_{C_2} = \frac{1}{4\pi} \iint_{G: \partial G=C_1} d\vec{S} \cdot 4\pi \vec{J}_{C_2}. \quad (5.4)$$

Это значит, что величина (5.4) легко вычисляется с помощью теоремы о циркуляции магнитного поля*: она равна $4\pi J_{\text{int}}$, где J_{int} — *полный* ток через площадку, натянутую на контур в виде кривой C_1 (для постоянного во времени тока эта величина не зависит от выбора площадки вследствие сохранения электрического заряда [86]). В данном случае $J_{\text{int}} = nJ$, где J — абсолютная величина тока в источнике, а n — число пересечений площадки с кривой C_2 с учетом знака ($n := n \pm 1$ для тока по/против выбранной нормали к натянутой на контур поверхности). Полученное таким образом целое число n сохраняется при непрерывных преобразованиях кривых C_1 и C_2 (тем самым являясь топологическим инвариантом) и называется *числом зацеплений* этих кривых [2, 27].

Эффективное действие магнитостатики. С другой стороны, уравнение (5.3а) можно получить как условие минимума (нулевой вариации по \vec{H}) функционала

$$S_H = \frac{c}{4\pi} \int d^3\vec{r} \vec{H} \cdot \left\{ \text{rot} \vec{H} + \vec{j} \delta(\vec{r} - \vec{r}_2) \right\}. \quad (5.5)$$

При этом функционал (5.5) не изменяется при градиентном преобразовании $\vec{H} \rightarrow \vec{H} + \vec{\nabla} f$ (где $f(\vec{r})$ — произвольная непрерывная функция координат, достаточно быстро убывающая на бесконечности), которое позволяет вместо произвольного поля \vec{H} рассматривать поле (решение (5.3б)) с *тем же* значением функционала (5.5)**, которое имеет смысл магнитостатического поля (см. приложение 2).

В указанном смысле *модель статического магнитного поля*, минимизирующего функционал (5.5), с циркуляцией этого поля по замкнутому контуру (5.4) в качестве наблюдаемой величины *является простейшей ТКТП* (которая пока определена на классическом уровне).

Наблюдаемая величина ТКТП есть топологический инвариант, в данном случае — *число зацеплений* кривой-источника и кривой-контура.

5.1.2. Простейшая теория Черна–Саймонса. *Определение через функционал действия.* Функционал (5.5) при $\vec{j} = 0$ после умножения на константу κ , замены $\vec{H} \rightarrow \vec{A}$ и перехода к тензорным обозначениям обретает вид

*IV уравнение Максвелла в интегральной форме в случае статического магнитного поля [86] (в одной из возможных систем единиц).

**Для $f(\vec{r}) = -\int (d^3\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'| \text{div} \vec{H}(\vec{r}')$: из $\Delta(1/|\vec{r} - \vec{r}'|) = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ следует $\text{div}(\vec{H} + \vec{\nabla} f) = \text{div} \vec{H} + \Delta f = 0$.

действия простейшей ТЧС* [39]:

$$S_{\text{CS}}^{\text{ab}} = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \epsilon^{kij} A_k \partial_i A_j. \quad (5.6)$$

Однако в ТЧС поле \vec{A} рассматривается как *потенциал* «физического» поля $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ (подобно векторному потенциалу магнитного поля). При этом (как и в случае с векторным потенциалом) все функции $\vec{A}(\vec{r})$, задающие одно и то же распределение физического поля, считаются неразличимыми, что позволяет дополнительно наложить на \vec{A} аналог условия (5.36).

В новых обозначениях уравнения движения (5.3) принимают вид

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = 0, \quad \partial_k A_k = 0. \quad (5.7)$$

Вильсоновская линия — набег фазы. В качестве наблюдаемой величины в ТЧС рассматривается экспонента от циркуляции поля по замкнутому контуру (5.4):

$$W_C^{\text{ab}} [A(x)] \equiv \exp \oint_C dx^k A_k(x^\mu) \quad (5.8)$$

— *вильсоновская петля* (ВП). Аналогичная величина для незамкнутой кривой $C\{x = x(s)\}$ называется *вильсоновская линия* (ВЛ):

$$W_C^{\text{ab}} [A(s)] \equiv \exp \int_{C\{x=x(s)\}} dx^k A_k(x^\mu) = \int_0^s d\tilde{s} \dot{x}^k(\tilde{s}) A_k(x^\mu(\tilde{s})),$$

где точка (как и далее) означает производную по параметру на кривой, так что $\dot{x}^k(\tilde{s})$ — компоненты касательного вектора в точке с координатами $x^k(\tilde{s})$. Величину (5.8) можно рассматривать как функцию параметра на кривой. Тогда эта величина удовлетворяет уравнению

$$\dot{W}_C^{\text{ab}}(s) = \dot{x}^k(s) A_k(x(s)). \quad (5.9)$$

В силу (5.9) ВЛ можно интерпретировать как фазовый множитель квантовой частицы, распространяющейся по кривой C под действием поля A по закону $\partial_k \psi - A_k \psi = 0$: функция $\psi(x(s)) = W_C(s) \psi(x(0))$ на кривой C удовлетворяет последнему уравнению.

*В противоположность более общему случаю из п. 5.2 такая теория называется *абелевой*, поэтому все величины в настоящем разделе помечены значком ab.

5.1.3. Вильсоновское среднее в абелевой теории. Любопытно, что интеграл числа зацеплений (5.1) находит интерпретацию не только в классической, но и в квантовой ТЧС. Основой для этого служит наблюдение, что действие (5.6) квадратично по полю A . По этой причине «среднее по всем полям A » (ключевой элемент квантовой теории) можно ввести с помощью обобщенного гауссова интегрирования (см. п. 5.4.2). Так, определенное (гауссово) среднее обладает рядом замечательных свойств, из которых здесь важны два, описанные ниже.

Во-первых, в гауссовой теории решения уравнений с источником (5.3) выражаются через двухточечный коррелятор (среднее от произведения значений поля A в двух заданных точках x и y) как

$$A_k = \oint_C dx_j y_k i\kappa \langle A_j(x) A_k(y) \rangle_{S_{CS}^{ab}} \Rightarrow \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = 4\pi J_C^i, \quad (5.10)$$

т. е. точно так же, как через подынтегральное выражение в (5.1), что позволяет заменить в этой формуле одну величину на другую*.

Во-вторых, гауссовы средние удовлетворяют соотношению, которое позволяет вычислить среднее экспоненты:

$$\langle \exp \Phi \exp \tilde{\Phi} \rangle = \langle \exp \Phi \rangle \langle \exp \tilde{\Phi} \rangle \exp \langle \Phi \tilde{\Phi} \rangle. \quad (5.11)$$

Равенство (5.11) получается в результате разложения экспонент в формальные ряды с последующим вычислением гауссовых средних от степеней Φ и $\tilde{\Phi}$ (и их произведений) по теореме Вика (см. п. 5.4.2); после этого левая и правая части (5.11) запишутся в виде формальных рядов, связанных тождественным преобразованием

$$\begin{aligned} \text{Левая часть (5.11)} &= \left\langle \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{\Phi^k \tilde{\Phi}^l}{k! l!} \right\rangle = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \langle \Phi^k \tilde{\Phi}^l \rangle = \\ &= \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{1}{k! l!} \sum_{m=0}^{\min(k,l)} \langle \Phi^{k-m} \rangle \langle \tilde{\Phi}^{l-m} \rangle \cdot m! \cdot C_k^m C_l^m \langle \Phi \tilde{\Phi} \rangle^m = \\ &= \sum_{i,j,m=0}^{\infty} \frac{1}{(i+m)!(j+m)!} \cdot m! \frac{(i+m)!}{i! m!} \frac{(j+m)!}{j! m!} \langle \Phi^i \rangle \langle \tilde{\Phi}^j \rangle \langle \Phi \tilde{\Phi} \rangle^m = \\ &= \sum_{i,j,m=0}^{\infty} \frac{\langle \Phi^i \rangle \langle \tilde{\Phi}^j \rangle \langle \Phi \tilde{\Phi} \rangle^m}{i! j! m!} = \text{правая часть (5.11)}. \end{aligned}$$

*Более точное утверждение см. в п. 5.4.2 и в приложении 2.

Таким образом, с помощью (5.11) и (5.10) экспоненту от интеграла для числа зацеплений (5.1) можно представить как коррелятор двух ВЛ:

$$\frac{\langle W_{\vec{c}}^{\text{ab}}[A]W_{\vec{c}}^{\text{ab}}[A] \rangle_{\text{CS}}}{\langle W_{\vec{c}}^{\text{ab}}[A] \rangle_{\text{CS}} \langle W_{\vec{c}}^{\text{ab}}[A] \rangle_{\text{CS}}} = \exp \oint_{\vec{c}} \oint_{\vec{c}} dx^i d\tilde{x}^j \langle A_i(x)A_j(\tilde{x}) \rangle_{\text{CS}^{\text{ab}}} = \exp(-\kappa \mathcal{L}(\mathcal{C}, \tilde{\mathcal{C}})). \quad (5.12)$$

Сделанными наблюдениями исчерпывается сюжет о связи абелевой ТЧС с ИУ. Гораздо богаче и загадочней случай неабелевой ТЧС, к которому мы приступим в следующем подразделе.

5.2. Как выглядит неабелева ТЧС? ТЧС с группой $SU(2)$: *триплет калибровочных полей*. Простейшая (после примера из п. 5.1) ТЧС задается тройкой трехмерных векторных полей $(\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3)$ и действием*

$$S = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \left(\sum_{a=1}^3 \vec{A}_a \cdot \text{rot } \vec{A}_a + \frac{2i}{3} (\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3) \right). \quad (5.13)$$

В стандартной записи то же выражение имеет вид (с суммой по $i, j, k \in \{x, y, z\}$)

$$S = \frac{\kappa}{4\pi} \int d^3x \text{Tr} \left\{ \epsilon^{ijk} \left(A_i \partial_j A_k + \frac{2i}{3} A_i A_j A_k \right) \right\}, \quad (5.14)$$

где (A_x, A_y, A_z) — тройка бесследовых ($\text{Tr } A = 0$) антиэрмитовых ($A^\dagger = A$ (или \mathfrak{su}_2) матриц), каждую из которых можно записать в виде разложения

$$A_k = \begin{pmatrix} iA_k^3 & iA_k^1 + A_k^2 \\ iA_k^1 - A_k^2 & -iA_k^3 \end{pmatrix} = i \sum_{a=1}^3 A_k^a \sigma_a, \quad k \in \{x, y, z\}$$

по матрицам Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

То, что матрицы \mathfrak{su}_2 образуют алгебру, значит, что матрицей \mathfrak{su}_2 также является произвольная линейная комбинация таких матриц, и то же верно для их коммутатора $[\sigma_a, \sigma_b] \equiv \sigma_a \sigma_b - \sigma_b \sigma_a = 2i \epsilon_{abc} \sigma_c$. В силу последнего свойства

*Здесь \cdot означает скалярное, а круглые скобки — смешанное произведение векторов: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \equiv \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}] = \vec{b} \cdot [\vec{c} \times \vec{a}] = \vec{c} \cdot [\vec{a} \times \vec{b}]$, где \times означает векторное произведение векторов.

калибровочная теория допускает нелинейные уравнения (5.17), содержащие коммутатор калибровочных полей.

При записи действия в виде (5.14) явно видна калибровочная симметрия: преобразование

$$A_k \rightarrow \Omega^{-1} A_k \Omega - \Omega^{-1} \partial_k \Omega \quad (5.16)$$

для всякой специальной унитарной матрицы

$$\Omega = \begin{pmatrix} a(x, y, z) & b(x, y, z) \\ -b^*(x, y, z) & a^*(x, y, z) \end{pmatrix} \in SU(2)$$

(с непрерывно дифференцируемыми функциями координат в качестве элементов) сохраняет действие с точностью до *внешнеинтегрального* члена. Такие преобразования не изменяют условия нулевой вариации и, как следствие, уравнения движения, но могут изменять величину самого действия в зависимости от топологии отображения $SU(2) \rightarrow S_3 \sim \mathbb{R}_3 \cup \infty$, порожденного матричнозначной функцией $\Omega(x, y, z)$ [39]. Геометрический смысл $SU(2)$ -калибровочных преобразований обсуждается в приложении 1.

«Неабелева» в названии теории означает, что калибровочные преобразования действуют на мультиплет полей и, таким образом, задаются матрицами, которые, вообще говоря, не коммутируют. В общем случае действие неабелевой ТЧС также имеет вид (5.14), но матрицы A могут быть элементами произвольной алгебры Ли [87]. В частности, если iA — элемент алгебры \mathfrak{u}_1 , т. е. A принимает значение в действительных числах, то кубический член в (5.14) обращается в нуль, знак Tr можно опустить, и мы вернемся к действию простейшей ТЧС (5.6). Калибровочное преобразование (5.16) сведется при этом к градиентному преобразованию $A_k(x) \rightarrow A_k(x) + \partial_k f(x)$.

Уравнения движения $SU(2)$ ТЧС. Условия обращения в нуль вариаций действия (5.13) по каждому из полей $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ приводит к системе уравнений на компоненты калибровочного поля:

$$\text{rot } \vec{A}_1 = \vec{A}_2 \times \vec{A}_3, \quad \text{rot } \vec{A}_2 = \vec{A}_3 \times \vec{A}_1, \quad \text{rot } \vec{A}_3 = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2.$$

Иначе можно варьировать действие в виде (5.13) по матричнозначному полю A , при этом получится эквивалентная система матричных уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x A_y - \partial_y A_x + [A_x, A_y] &= \partial_y A_z - \partial_z A_y + [A_y, A_z] = \\ &= \partial_z A_x - \partial_x A_z + [A_z, A_x] = 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Если для некоторого частного решения компоненты поля попарно коммутируют, то мы возвращаемся к линейным уравнениям (5.7) абелевой теории (5.6).

5.2.1. ЧС — топологическая теория. Можно показать, что действие (5.6), как и (5.13), как и действие ТЧС в общем случае, обладает общекоординатной инвариантностью, т. е. сохраняется при произвольных непрерывных преобразованиях пространства. В этом смысле теория называется *топологической* [39, 87]. Именно благодаря этому свойству ТЧС возникает в контексте теории узлов.

5.2.2. Где возникает действие ЧС. Например, интеграл по четырехмерному евклидову пространству* от топологического члена в теории Янга–Миллса (ЯМ)

$$S_{\text{YM}}^{\text{top}} = \int dx^4 \text{Tr} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \quad (5.18)$$

сводится к интегралу (5.13) по бесконечно удаленной трехмерной сфере. Функционал (5.18), как и (5.13), обладает общекоординатной инвариантностью и поэтому называется топологическим членом. Эта величина играет определенную роль в стандартной теории ЯМ, которая, в частности, на сегодня признана как фундаментальная теория сильных и слабых взаимодействий [88].

С одной стороны, хотя стандартное действие ЯМ

$$S_{\text{YM}} = \int dx^4 \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (5.19)$$

и не содержит топологического члена на *классическом* уровне, такой член мог бы возникать в результате квантовых непертурбативных поправок [7].

С другой стороны, величина самого действия ЯМ, если она конечна, ограничена снизу величиной действия ЧС от полей ЯМ на бесконечно удаленной сфере. В результате самодуальные поля, т. е. поля, удовлетворяющие уравнениям *первого* порядка $F_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, в силу которого $S_{\text{YM}} = S_{\text{CS}}$, дают частные решения классических уравнений ЯМ [6]. Интерес к такого рода решениям возник после работы А. Полякова [7], где было показано, что учет аналогичных решений в модельной задаче (в решеточной двумерной электродинамике) приводит к эффекту конфайнмента.

5.2.3. Вильсоновские линии — матрицы смешивания. Вильсоновская линия как решение уравнения переноса. В неабелевой калибровочной теории вильсоновская линия (ВЛ) вводится с помощью понятия упорядоченной экспоненты [89]. Экспонента от неабелева калибровочного поля \vec{A} , упорядоченная по траектории γ , по определению есть оператор, удовлетворяющий уравнению

$$W(t + \delta t) = W(t) (1 + \vec{A}(t) \cdot \vec{\tau}(t) \delta t), \quad (5.20)$$

*Который возникает в результате поворота Вика $t \rightarrow it$.

где на кривой γ выбран параметр t , а $\vec{\tau}(t)$ — касательный вектор к кривой в данной точке. Определение неабелевой ВЛ при этом записывают как

$$W[A(x), \gamma] \equiv \text{Pexp}_\gamma \left(\int_0^t \vec{A}(s) \cdot \vec{\tau}(s) ds \right) \equiv \text{Pexp} \left(\int_\gamma \vec{A} \cdot dl \right). \quad (5.21)$$

Эта величина задает конечное калибровочное преобразование, которому подвергается мультиплет частиц материи, прошедший по траектории γ , минимально взаимодействуя с мультиплетом калибровочных полей A [5].

Для замкнутой кривой γ след ВЛ называется *вильсоновской петлей* (ВП). Эта величина калибровочно инвариантна и не зависит от выбора начальной точки на кривой. По этой причине ВП рассматривают в качестве основных физических (наблюдаемых) величин в неабелевой калибровочной теории [5, 7].

В абелевой калибровочной теории упорядоченная экспонента сводится к обыкновенной и ВП равна (5.8).

Вильсоновские средние. При переходе к *квантовой* теории поля возникает понятие вильсоновского *среднего* (ВС) с весом e^{iS} . В теории возмущений эта величина определена как среднее от разложения в ряд ВЛ [39]:

$$\langle W_\gamma(A) \rangle \equiv \sum_{k=0}^{\infty} g^k \int_{\vec{x}}^{\vec{x}} dx_{(k)}^{i_1} \cdots \int_{\vec{x}}^{x_1} dx_{(3)}^{i_2} \int_{\vec{x}}^{x(2)} dx_{(1)}^{i_1} \langle A_{i_k}(x_{(k)}) \cdots A_{i_2}(x_{(2)}) A_{i_1}(x_{(1)}) \rangle,$$

где все интегрирования производятся по линии γ .

Особые свойства вильсоновских средних в ТЧС. Вильсоновские средние в теории Черна–Саймонса сохраняются при произвольных непрерывных преобразованиях пути, т. е. являются топологическими инвариантами замкнутых кривых в трехмерном пространстве.

Мы вернемся к этому тезису в п. 5.6, когда запишем ряд теории возмущений ТЧС в виде интеграла Концевича.

5.2.4. Примеры явных вычислений в $SU(2)$ -теории. В качестве иллюстрации к сказанному выше сделаем упражнение: явно вычислим вильсоновскую линию для частного решения простейшей неабелевой ТЧС.

Какие решения нас интересуют? С точки зрения теории узлов интересны именно нетривиальные поля с протяженными особенностями, которые можно рассматривать как местоположения токов — источников поля.

Пример решения с протяженным источником. Уравнения (5.17) суть частный случай уравнений нулевой кривизны. Общее решение таких уравнений *локально* (т. е. в некоторой области пространства) можно записать в виде [9]

$$A_k = \Omega^{-1} \partial_k \Omega, \quad k \in \{x, y, z\}, \quad \forall \Omega = \Omega(x, y, z) \in SU(2). \quad (5.22)$$

Пусть

$$\Omega \left(a \begin{vmatrix} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \begin{pmatrix} r & \frac{a}{r}(ix + y) \\ \frac{a}{r}(ix - y) & r \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2}} \begin{pmatrix} r & ia e^{-i\varphi} \\ a e^{i\varphi} & r \end{pmatrix} \in SU(2), \quad (5.23)$$

так что неабелево ЧС-поле имеет источник в виде прямой $x = y = 0$.

Подстановка (5.23) в (5.22) дает следующие компоненты поля:

$$A_x = \frac{ia}{r^2(r^2 + a^2)} \begin{pmatrix} -ay & (y + ix)^2 \\ (y - ix)^2 & ay \end{pmatrix}, \\ A_y = \frac{a}{r^2(r^2 + a^2)} \begin{pmatrix} iax & (y - ix)^2 \\ -(y + ix)^2 & -iax \end{pmatrix}, \\ A_z = 0.$$

Можно непосредственно убедиться, что это поле является *локально* плоским, т. е. удовлетворяет уравнениям нулевой кривизны:

$$\partial_z A_x = \partial_z A_y = 0, \\ \partial_x A_y - \partial_y A_x + [A_x, A_y] = 0.$$

Последнее из уравнений является *существенно* неабелевым:

$$[A_x, A_y] = \frac{2a^2}{(r^2 + a^2)^2} \begin{pmatrix} i & \frac{a}{r}(iy - x) \\ \frac{a}{r}(iy + x) & -i \end{pmatrix} \neq 0.$$

Явное вычисление вильсоновской линии. По определению ВЛ для дуги длины φ окружности ($x^2 + y^2 = 1, z = 0$) равна

$$W(\varphi) \equiv \text{Tr} \text{Pexp} \int_0^\varphi A_\varphi(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \Big|_{\substack{x=r \cos \tilde{\varphi}, \\ y=r \sin \tilde{\varphi}}} \equiv \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ \varepsilon N = \varphi}} \prod_{n=0}^N W_n, \quad (5.24)$$

где $W_n = 1 + \varepsilon A_\varphi(\varphi_n)$. Выберем равномерное разбиение: $\varepsilon = \varphi/N$ и $\varphi_n = n\varepsilon$. Из (5.23), $\Omega^{-1} = \Omega^\dagger$ и $A_\varphi = \Omega^\dagger \partial_\varphi \Omega$ получаем

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} iu & v e^{-in\varepsilon} \\ -v e^{in\varepsilon} & -iu \end{pmatrix},$$

где $u = a^2/(r^2 + a^2)$ и $v = ar/(r^2 + a^2)$. Заметим, что в данном случае вычисление упорядоченной экспоненты не сводится к вычислению простой матричной экспоненты, поскольку $W_n(\varphi)$ при различных n не коммутируют. Однако выражение (5.24) можно тождественно переписать путем замены ба-зиса в каждом сомножителе:

$$W(\varphi) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \\ \varepsilon N = \varphi}} \prod_{n=0}^N \left\{ \begin{pmatrix} \exp(-n(i\varepsilon/2)) & 0 \\ 0 & \exp(n(i\varepsilon/2)) \end{pmatrix} \times \right. \\ \left. \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} iu & v \\ -v & -iu \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \exp(n(i\varepsilon/2)) & 0 \\ 0 & \exp(-n(i\varepsilon/2)) \end{pmatrix} \right\} = \\ = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} iu & v \\ -v & -iu \end{pmatrix} \right)_{\varepsilon=0} X \begin{pmatrix} \exp(i\varphi/2) & 0 \\ 0 & \exp(-i\varphi/2) \end{pmatrix},$$

где $X = \lim \left\{ \prod_{n=1}^N X_n(\varepsilon) \right\}$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ и $\varepsilon N = \varphi$, так что

$$X_n(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \exp[(n-1)i\varepsilon/2] & 0 \\ 0 & \exp[-(n-1)i\varepsilon/2] \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \exp(-n(i\varepsilon/2)) & 0 \\ 0 & \exp(n(i\varepsilon/2)) \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} iu & v \\ -v & -iu \end{pmatrix} \right) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \\ \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -i/2 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} iu & v \\ -v & -iu \end{pmatrix} \right) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \\ \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} i\tilde{u} & v \\ -v & -i\tilde{u} \end{pmatrix}, \quad \tilde{u} = u - \frac{1}{2}.$$

То есть все $X_n(\varepsilon)$ равны друг другу, и предел их произведения равен матричной экспоненте вида (П1.4):

$$X = \exp \left\{ \varphi \begin{pmatrix} i\tilde{u} & v \\ -v & -i\tilde{u} \end{pmatrix} \right\} = \cos(c\varphi) + c^{-1} \begin{pmatrix} i\tilde{u} & v \\ -v & -i\tilde{u} \end{pmatrix} \sin(c\varphi), \\ c^2 = \tilde{u}^2 + v^2 = u^2 + v^2 - u + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow c = \frac{1}{2}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\cos \frac{\varphi}{2} + i(2u - 1) \sin \frac{\varphi}{2} = u \exp \left(\frac{i\varphi}{2} \right) + (1 - u) \exp \left(-\frac{i\varphi}{2} \right),$$

окончательно получаем

$$W = \begin{pmatrix} u \exp(i\varphi/2) + (1-u) \exp(-i\varphi/2) & iv(\exp(i\varphi/2) - \exp(-i\varphi/2)) \\ iv(\exp(-i\varphi/2) - \exp(i\varphi/2)) & u \exp(-i\varphi/2) + (1-u) \exp(i\varphi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 + a^2 e^{i\varphi} & -iar(1 - e^{-i\varphi}) \\ iar(1 - e^{i\varphi}) & r^2 + a^2 e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Почему ответ очевиден? С другой стороны, если в выражение для ВЛ (5.24) подставить локальную формулу (5.22), то сразу получим, что

$$W_n = \mathbb{I} + A_{\phi_n} \varepsilon = \mathbb{I} + \varepsilon \Omega^{-1}(\varphi_n) \partial_\phi \Omega(\varphi_n) = \prod_{n=0}^N \Omega^{-1}(\varphi_n) (\Omega(\varphi_n) + \partial_\phi \Omega(\varphi_n)) \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{\simeq} \Omega^{-1}(\varphi_n) \Omega(\varphi_n + \varepsilon) = \Omega^{-1}(\varphi_n) \Omega(\varphi_{n+1}) \Rightarrow W(\varphi) = \Omega^{-1}(0) \Omega(\varphi).$$

В частности, для Ω вида (5.23) получим ответ (5.25):

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(0) \Omega(\varphi) &= \frac{1}{r^2 + a^2} \begin{pmatrix} r & -ia \\ ia & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & ia e^{-i\varphi} \\ -ia e^{i\varphi} & r \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{r^2 + a^2} \begin{pmatrix} r^2 + a^2 e^{i\varphi} & -iar(1 - e^{-i\varphi}) \\ iar(1 - e^{i\varphi}) & r^2 + a^2 e^{-i\varphi} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5.3. Как избавиться от кубического члена? «Среднее по полям» хорошо определено для квадратичного действия (см. пп. 5.4.2, 5.4.3). Однако действие неабелевой ТЧС содержит также кубический член. Проблему определения неабелевых ВС ТЧС сводят к хорошо поставленной задаче различными путями. Обзор можно найти в [45].

Лоренцева диаграммная техника. Прежде всего можно воспользоваться стандартным приемом КТП — разложить экспоненту от кубического члена в (5.14) вместе с ВЛ (5.21) в ряд, а затем усреднять отдельные члены с экспонентой от квадратичной части действия в качестве меры. Такой подход предложен в [39], где стандартной процедурой переходят к среднему по «физически» различным (не калибровочно-эквивалентным) полям, удовлетворяющим калибровочному условию Лоренца $\partial_k A_k = 0$. В результате в качестве диаграмм Фейнмана возникают круговые тривалентные диаграммы, где в вершинах стоят определенные операторы из алгебры Ли калибровочной группы, а на линиях — пропагаторы вида подынтегрального выражения в (5.1). В результате для каждой диаграммы в ряду для ВС записывается выражение, которое дает любопытное интегральное представление для хорошо известных ИУ (инвариантов Васильева [66]). Однако явные вычисления на этом пути производятся с большим трудом (до второго порядка в [40], до шестого — в [90]). Обзору метода посвящена гл. 4 в [45].

Таблица 5. Описание одной и той же модели в различных калибровках. Калибровочные условия и выражения для различных величин по форме близки к своим аналогам в ГЧС

Калибровка	Сингулярная	Лоренцева	Голоморфная
Действие	$\psi_y = 0, \psi_x \equiv \psi$	$\operatorname{div} \psi \equiv \partial_x \psi_x + \partial_y \psi_y = 0$	$\psi_{\bar{u}} = 0, \psi_u \equiv \psi$
	$\int dx dy \phi \partial_x \psi_x$	$\int dx dy \phi (\partial_x \psi_y - \partial_y \psi_x) = \int du d\bar{u} 2i\phi (\partial_u \psi_u - \partial_{\bar{u}} \psi_{\bar{u}})$	$\int dx dy i\phi \partial_u \psi_u$
Уравнения	$\operatorname{rot} \psi \equiv \partial_x \psi_y - \partial_y \psi_x = 2i(\partial_u \psi_u - \partial_{\bar{u}} \psi_{\bar{u}}) = 0; \partial_x \phi = \partial_y \phi = 0$ [$\phi = \operatorname{const}$]	$\operatorname{rot} \psi \equiv \partial_x \psi_y - \partial_y \psi_x = 0$	$\partial_{\bar{u}} \psi = 0$
	$\vec{\psi} \rightarrow \vec{\psi} + \vec{\nabla} f : \psi_x \rightarrow \psi_x + \partial_x f, \psi_y \rightarrow \psi_y + \partial_y f \Leftrightarrow \psi_u \rightarrow \psi_u + 2\partial_u f, \psi_{\bar{u}} \rightarrow \psi_{\bar{u}} + 2\partial_{\bar{u}} f$		
Калибровочные преобразования	$f = -\int_0^y d\tilde{y} \psi_y$	$f = \int d^2 \rho \operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{\rho}) \log \vec{r} - \vec{\rho} $ $\operatorname{div} \vec{\nabla} f = \Delta f = \operatorname{div} \psi(\vec{r}) = \int d^2 \rho \operatorname{div} \vec{\psi}(\vec{\rho}) \delta(\vec{r} - \vec{\rho})$	$f = -\int_0^{\bar{u}} d\bar{v} \psi_{\bar{v}}(v, \bar{v})$
	Вещественные функции на прямой	Безроторно-бездивергентные функции на плоскости	Голоморфные функции на комплексной плоскости
Оператор переноса «пропагатор»	$x, \tilde{x}, \psi_x \in \mathbb{R}$	$\vec{r} = (x, y), \vec{\rho}, \vec{\psi} = (\psi_x, \psi_y) \in \mathbb{R}_2$	$u = x + iy, v, \psi_u = \frac{1}{2}(\psi_x - i\psi_y) \in \mathbb{C}$
	$\delta(x)$	\vec{r} $\frac{\vec{r}}{2\pi \vec{r} ^2}$	$\frac{1}{2\pi i u}$
Уравнения переноса	$\psi_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{x} \delta(\tilde{x} - x) \psi_x(x)$	$\vec{\psi}(\vec{r}) = \int \frac{dx(\vec{\rho} - \vec{r}) \cdot \vec{\psi}(\vec{\rho}) + dy(\vec{\rho} - \vec{r}) \times \vec{\psi}(\vec{\rho})}{2\pi \vec{\rho} - \vec{r} ^2}$	$\psi_u(u) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dv \psi_u(v)}{v - u}$
		$\vec{r} \cdot \vec{\psi} \equiv x\psi_x + y\psi_y, \vec{r} \times \vec{\psi} \equiv y\psi_x - x\psi_y$	

Гауссовы калибровки в ТЧС. В частности, калибровочное преобразование (5.16) позволяет обратить в нуль одну из компонент ЧС-поля (либо их произвольную линейную комбинацию с постоянными коэффициентами) как функцию координат. Например, $A_z(x, y, z)$ обращается в нуль в некоторой области для

$$\Omega(x, y, z) = \text{Pexp} \int_0^z dz A_z \quad \text{или} \quad A_z = (\partial_z \Omega) \Omega^{-1}. \quad (5.26)$$

(При этом A_x и A_y , конечно, тоже изменяются, поэтому, вообще говоря, невозможно таким образом обратить все три компоненты поля в нуль *одновременно*.) Замечательно, что в результате также обращается в нуль кубический член в (5.13), равный (с точностью до множителя) сумме шести перестановок (x, y, z) в $\text{Tr}(A_x A_y A_z)$.

Таким образом, действие Черна–Саймонса в некоторых калибровках становится квадратичным функционалом по полям A . В таких калибровках ВС можно сразу определить с помощью обобщенного гауссова интегрирования (см. пп. 5.4.2, 5.4.3).

Можно ли избавиться от кубического члена сразу везде? Преобразование (5.26) определено во всей области пространства, где компонента $A_z(x, y, z)$ непрерывна. Однако ИУ получаются в ТЧС с источниками в форме замкнутых кривых (см. разд. 4). В результате приходится сперва разбить пространство на области и в каждой выбрать свое преобразование вида (5.26). Окончательный ответ будет выражаться через набор обобщенных гауссовых средних, вычисленных в каждой области (см. п. 5.6, ср. с разд. 3 и п. 4.1).

Останется ли квантовая ТЧС гауссовой моделью? Резюме и основные ссылки по этому вопросу можно найти, например, в [45]. Основной вывод состоит в том, что и квантовая теория остается гауссовой, по крайней мере во всяком конечном порядке теории возмущений.

5.3.1. Различные гауссовы калибровки. Сингулярные калибровки. Как уже упоминалось, на поля ТЧС можно наложить простое калибровочное условие $A_z = 0$. При этом кубический член в действии исчезает, а пропагаторы выражаются через δ -функции так, что для всех диаграмм Фейнмана явно вычисляются координатные интегралы и ответ оказывается сверткой вершинных операторов. Таким образом ожидали воспроизвести ранее известные \mathcal{R} -матричные выражения для так называемых квантовых ИУ со стороны ТЧС. Однако теория возмущений ТЧС в калибровке $A_z = 0$ оказалась несостоятельной, а наивные ответы — тривиальными [29].

Продвинуться в этом направлении позволил новый подход, где предлагается более слабое условие $\partial_z A_z = 0$ и еще ряд нетривиальных шагов. В результате действительно удается воспроизвести элементы \mathcal{R} -матричного исчисления для различных ИУ с помощью ТЧС (см. [30] и ссылки там). При

этом, однако, приходится сперва «поднять» ТЧС из 3d- в 4d-пространство, а затем наложить на новые поля дополнительные нетривиальные условия. По видимости, аналогичные построения дали бы более строгие основания трюку, описанному ниже.

Поворот Вика и голоморфная калибровка. Хорошо определенные (и неплохо поддающиеся вычислению) пертурбативные выражения для ВС в ТЧС возникают с помощью дополнительного трюка, в результате которого возникает формализм интеграла Концевича (п. 5.6) [43, 66, 91, 92].

Идея основана на следующем наблюдении: формула Коши для голоморфной функции комплексного переменного аналогична определению δ -функционала на вещественной прямой. Поэтому один и тот же оператор $\langle A_k(x)A_l(\tilde{x}) \rangle$, который в калибровке $A_z = 0$ записывается через сингулярный функционал $\delta(x)$, в другой «голоморфной» калибровке мог бы вместо этого выражаться через аналитическую функцию $1/u$.

Формально процедура сводится к комплексной замене переменных

$$\begin{aligned} z &\rightarrow it, & (x, y) &\rightarrow (z = x + iy, \bar{z} = x - iy), \\ \partial_z &\rightarrow i\partial_t, & (\partial_x, \partial_y) &\rightarrow \left(\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y), \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y) \right), \\ A_z &\rightarrow -iA_t, & (A_x, A_y) &\rightarrow (A_z = A_x - iA_0, A_{\bar{z}} = A_x + iA_0) \end{aligned}$$

с последующим наложением условия $A_{\bar{z}} = 0$. В новой (голоморфной) калибровке действие ТЧС (5.14) принимает вид

$$S = \int dt dz \{ A_0(t, z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} A_z(t, z, \bar{z}) - A_z(t, z, \bar{z}) \partial_{\bar{z}} A_0(t, z, \bar{z}) \},$$

а классические уравнения (условия нулевой вариации по A_z и A_0) — $\partial_{\bar{z}} A_0 = 0$ и $\partial_{\bar{z}} A_z = 0$. К интегралу Концевича мы вернемся в п. 5.6.

5.4. Что общего у полиномов узлов и вильсоновских средних? Интерпретация определенных ИУ как неабелевых ВА прежде всего мотивирована рядом общих свойств этих величин [44, 45]. В настоящем подразделе мы приведем краткую сводку этих свойств. При этом будем апеллировать к базовым сведениям об упорядоченных экспонентах [89] и гауссовых средних [93].

5.4.1. Свойство композиции. Прежде всего ИУ, о которых идет речь, обладают основным свойством упорядоченной экспоненты — оператора в определении ВЛ (см. п. 5.2.3).

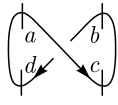
В общем случае для оператора $F(t)$, заданного как функция параметра t на кривой γ , оператор упорядоченной (вдоль γ) экспоненты [89] относительно произвольного разбиения кривой ведет себя как

$$\text{Pexp} \int_u^v dt F(t) = \text{Pexp} \int_u^w dt F(t) \text{Pexp} \int_c^v dt F(t). \quad (5.27)$$

Уравнение переноса (5.20) можно получить как частный случай (5.27) при $|b - c| \rightarrow 0$.

Аналогичное свойство широкого класса ИУ известно как *правило композиции при связанной сумме узлов* (зацеплений) [2, 27, 66].

Тензорная запись свойства композиции. Свойство (5.27) позволяет записать упорядоченную экспоненту для кривой-композиции как тензорную свертку упорядоченных экспонент для кривых-составляющих. Например, если разбить некоторую замкнутую кривую, как на рисунке, (5.27) можно тождественно переписать в виде



$$\text{Tr Pexp} \oint_{\gamma} dt F(t) = S_{kl}^{ij} \bar{S}_{ji}^{kl}, \quad (5.28)$$

где введены операторы

$$S = \text{Pexp} \int_u^v dt F(t) \otimes \text{Pexp} \int_w^y dt F(t), \quad \bar{S} = \text{Pexp} \int_v^u dt F(t) \otimes \text{Pexp} \int_y^w dt F(t),$$

а также использовано тождество

$$L_j^i M_k^j P_l^k Q_i^l = (L \otimes P)_{jl}^{ik} (M \otimes Q)_{ki}^{jl}.$$

В свою очередь, для ряда ИУ известны явные тензорные выражения типа (5.28), в которых отдельные блоки связаны определенными фрагментами узла [2, 29]. Примером служит свертка вершинных операторов в конструкции Кауффмана (см. рис. 5). Аналогичным образом устроены \mathcal{R} -матричные выражения для ряда ИУ [29] (среди которых ИУ из табл. 2), которые до сих пор являются основным средством изучения этих величин. Наконец, интегральный ряд Концевича, о котором мы скажем в п. 5.6, можно «просуммировать» и записать в виде тензорной свертки «операторов элементарных событий» на плоской проекции узла [92].

5.4.2. Сумма по спариваниям. *Инвариант узла как обобщенное гауссово среднее.* Последующие свойства роднят ИУ не с самими ВЛ/ВП, а со средними от последних. Как уже упоминалось, ВС в ТЧС (в соответствующей калибровке, п. 5.3) можно определить с помощью обобщенного гауссова интеграла [5, 93]. То есть данные ВС можно определить через систему их свойств, которые также обнаруживаются у многих ИУ. Здесь мы кратко обсудим эти свойства, а в п. 5.6 увидим их в конкретном примере.

Четный коррелятор есть сумма по спариваниям. Первое существенное свойство обобщенного гауссова среднего (*теорему Вика*) можно записать так:

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2k-1} F(t_i) \right\rangle \equiv \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{2k-1} \langle F(t_i) F(t_{\sigma(i)}) \rangle. \quad (5.29)$$

Для конечномерных гауссовых интегралов (5.29) выводится непосредственно из определения.

Все нечетные корреляторы равны нулю. Второе свойство,

$$\left\langle \prod_{i=1}^{2k-1} F(t_i) \right\rangle \equiv 0, \quad (5.30)$$

следует из симметрии гауссова среднего относительно $F \rightarrow -F$.

5.4.3. ИУ через пропагаторы ТЧС. Свойства (5.29), (5.30) необходимо дополнить определением парного коррелятора.

Парный коррелятор есть функция Грина. За основу здесь также берут конечномерное вычисление, которое для гауссова интеграла кратности N дает

$$\langle F_i F_j \rangle \equiv \frac{\int \prod_{i=1}^N dF_i F_k F_l \exp\left(-1/2 \sum_{i,j=1}^N K_{ij} F^k F^l\right)}{\int \prod_{i=1}^N dF_i \exp\left(-1/2 \sum_{i,j=1}^N K_{ij} F^k F^l\right)} = K_{ij}^{-1}. \quad (5.31)$$

В теории поля показатель экспоненты (действие) вместо N -мерной квадратичной формы содержит квадратичный функционал

$$\sum_{i,j=1}^N K_{ij} F^k F^l \rightarrow S[F] = \int_0^T ds \int_0^T dt \mathcal{K}(t, s) F(t) F(s). \quad (5.32)$$

Например, $\mathcal{K}(t, s) = \delta(t-s)$ и $S = \int_0^T dt F(t) \ddot{F}(t) = -\int_0^T dt \dot{F}(t)^2$ (если $F(T) = F(0) = 0$). Тогда (5.31) заменяют определением

$$\langle F(t) F(s) \rangle_S \equiv G(t, s) : \int du G(t, u) \mathcal{K}(u, s) = \delta(t-s). \quad (5.33)$$

Функционал $G(t, s)$ называется функцией Грина оператора $\mathcal{K}(t, s)$.

Как правило, среднее вычисляют по пространству функций $F(t)$ с наложенными граничными условиями (например, $F(a) = F_u, F(b) = F_v$), так что все эти функции разлагаются в ряды вида $F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \psi_k(t)$ по общему дискретному базису $\{\psi_k(t)\}$. В результате функционал $S(t)$ можно представить как N -мерную квадратичную форму в пределе $N \rightarrow \infty$:

$$S[F] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{K}_{ij} f_i f_j, \quad \mathcal{K}_{ij} \equiv \int dt \psi_i(t) \psi_j(t).$$

5.4.4. Независимость несвязных компонент. В особых случаях гаусово среднее от произведения двух наборов полей распадается в произведение средних от сомножителей. Условия, при которых это имеет место, следуют непосредственно из свойства (5.29). А именно, достаточно, чтобы область значений переменной t разбивалась на несколько интервалов так, чтобы спаривание двух функций, аргументы которых принимают значения на различных интервалах, всегда обращалось в нуль:

$$\langle F(t)F(s) \rangle = 0 \text{ при } a < t < c < s < b \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\langle \text{Pexp} \int_u^v dt F(t) \right\rangle = \left\langle \text{Pexp} \int_u^w dt F(t) \right\rangle \left\langle \text{Pexp} \int_w^v dt F(t) \right\rangle. \quad (5.34)$$

Для среднего с весом $\exp(-\int dt F^2(t))$ (для ядра $\mathcal{K}(t, s) = \delta(t - s)$) (5.34) выполняется точно. В более общем случае, когда интегральное ядро достаточно быстро убывает с расстоянием, (5.34) выполняется приближенно для удаленных друг от друга интервалов

$$\langle F(t)F(t + u - v) \rangle \ll \langle F(t)F(t + \epsilon) \rangle, \quad |\epsilon| \ll |u - v|,$$

например, для $\langle F(t)F(s) \rangle = 1/((t - s)^2 + T^2)$ при $T \gg b - a$.

Свойство факторизации ИУ относительно несвязной суммы узлов/зацеплений [2, 27] (когда компоненты можно разделить в пространстве) понимают как отражение свойства (5.34) ВА в ТЧС.

Тензорные формулы для ИУ. Чтобы понимать свертки «элементарных вкладов» в ИУ из п. 5.4.1 как запись ВА в ТЧС, необходимо свойство (5.34). Именно оно позволяет распространить правило композиции упорядоченной экспоненты также на среднее от этой величины.

Разделение переменных. Наконец, если величина $F(t)$ принимает значения в некоторой алгебре Ли, то свойство факторизации (когда выполнено) также приводит к разделению «координатной» и «групповой» компонент коррелятора. Например, если $\langle F(t)F(s) \rangle = 0$ для $v < t < w < s < u$, то

$$\left\langle \text{Tr Pexp} \int_u^v dt \sum_u F^a(t) T^a \right\rangle = \sum_{a,b} S^a(u, w) S^b(w, v) \text{Tr } T_a T_b. \quad (5.35)$$

В выражение (5.35) отдельно входит постоянный множитель $\text{Tr } T_a T_b$ и числовые функции вида $S^a(u, w) \equiv \left\langle \left[\text{Pexp} \int_u^w dt F(t) \right]^a \right\rangle$. Подобным свойством как раз обладает ИУ в представлении Концевича (см. пример в п. 5.6).

5.4.5. Топологическая и контурная инвариантности. *BC* как функционал траектории. Если функция $F(x, y, \dots)$ в определении упорядоченной экспоненты (5.27) задана в некоторой области на плоскости или в пространстве, то всякой кривой в этой области будет соответствовать свой оператор (5.27). В частности, для заданной пары точек значение упорядоченной экспоненты зависит от формы кривой, соединяющей эти точки, по которой вычисляется экспонента. То же, вообще говоря, верно и для среднего от этой величины [5]. Однако есть исключительный случай, представляющий особый интерес с точки зрения теории узлов.

Речь о случае, когда интегралы от парных корреляторов (5.32), (5.33), и тогда в силу (5.29), (5.30) обобщенное гауссово среднее не зависит от контура интегрирования. Тем же свойством должны обладать функции Грина ТЧС в гауссовых калибровках вследствие топологической инвариантности теории.

Свойство контурной независимости жестко ограничивает вид парного коррелятора, а вместе с другими свойствами полностью его задает. Это один из основных пунктов в интерпретации ИУ как ТЧС [29, 30, 92].

5.5. Регуляризация вильсоновских средних и инварианты ленточных узлов. 5.5.1. Почему вместо инварианта узла рассматривают инвариант зацепления? Как мы показали на примере из п. 5.1.3, члены разложения *BC* в формальный ряд имеют вид двойных интегралов от парных корреляторов, которые в результате гауссова усреднения (п. 5.4) дают двойные интегралы от функций Грина ТЧС (приложение 2):

$$\left\langle \int_C dx^i A_i(\vec{x}) \int_{\tilde{C}} dy^j A_j(\vec{y}) \right\rangle = \iint_{\mathcal{X}} dx^i dy^j G_{ij}(x - y). \quad (5.36)$$

Вспомним теперь, что в аналогичных выражениях из п. 5.1.3 два интеграла всегда вычислялись по двум *разным* (более того, непересекающимся) кривым — именно для этого мы рассматривали две различные ВЛ и вычисляли среднее от произведения, нормированное на произведение средних. Теперь пришло время обсудить проблему, которая возникает при попытке определить среднее от отдельной ВЛ. Для этой величины формальный ряд (как нетрудно убедиться) также записывается через двойные интегралы вида (5.36), но на этот раз в качестве обоих кривых интегрирования стоит *одна и та же* исходная заданная кривая.

Проблема состоит в том, что если пересечение кривых интегрирования в левой части (5.36) не пусто ($C \cap \tilde{C} \neq \emptyset$), то область двойного интегрирования в правой части \mathcal{X} содержит точки с $\vec{x} = \vec{y} \in C \cap \tilde{C}$, в которых подынтегральное выражение имеет неопределенность вида $0 \cdot \infty$ (причем сингулярная область может включать как изолированные особые точки (в случае трансверсального пересечения кривых), так и целые интервалы — при наличии у кривых общих дуг; в частности, в наиболее интересном случае $C = \tilde{C}$ в сингулярную

область входит вся кривая C). Неопределенность в двойном интеграле (5.36) по области пересечения обусловлена двумя свойствами функции Грина в ТЧС (см. приложение 2): сингулярность при $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ и антисимметричность по индексам i, j , вследствие которой мера интегрирования при $\vec{x} \rightarrow \vec{y}$ обращается в нуль:

$$G_{ij} = -G_{ji} \Rightarrow dx_i dy_j G_{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = \underbrace{\begin{vmatrix} dx_i & dy_j \\ dx_j & dy_i \end{vmatrix}}_{\Delta_{ij}} G_{ij}(\vec{x} - \vec{y}); \tag{5.37}$$

$$|\vec{x} - \vec{y}| \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta_{ij} \rightarrow 0, \quad G_{ij}(\vec{x} - \vec{y}) \rightarrow \infty.$$

Оснащение в абелевой теории: кривая-спутник. Для решения описанной проблемы определение ВС изменяют следующим образом. Наряду с исходной кривой $C\{\vec{x} = \vec{x}_C(s)\}$ рассматривают *кривую-спутник* $\tilde{C}\{\vec{x} = \vec{x}_C(s) + \vec{n}(s)\}$, полученную путем сдвига каждой точки исходной кривой на некоторый вектор \vec{n} , который непрерывно изменяется вдоль кривой, но в остальном в каждой точке выбирается произвольно (рис. 8). Необходимо только, чтобы вектор \vec{n} всюду был трансверсален (т. е. не был касательным) к кривой, причем (как следует из выражения выше для меры Δ) без ограничения общности рассматривать только нормальные векторы [39]. В результате такого доопределения двойного интеграла (5.36) на месте сингулярных вкладов возникают хорошо определенные выражения

$$\Delta_{ij} G_{ij}(\vec{x} - \vec{y}) = x_i n_j G(\vec{n}). \tag{5.38}$$

Однако такая «регуляризация» неоднозначна, поскольку интеграл от (5.38) имеет вид (5.39) и, как мы показали в п. 5.1.1, равен числу зацеплений исходной кривой и кривой-спутника.

Исходная кривая как траектория, кривая-спутник как источник поля. Описанная выше процедура и связанная с ней неоднозначность имеют изящную физическую интерпретацию, если посмотреть на определение ВС с помощью «интеграла по всем полям» [3]. Именно через регуляризованные выражения вида (5.36) (где один интеграл вычисляется по исходной кривой C ,

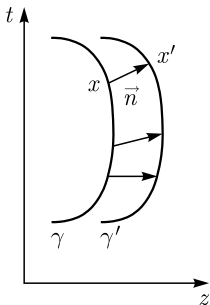


Рис. 8. Операция оснащения при вычислении ВС или инварианта узла: на исходной кривой задается нормальное векторное поле, сдвиг вдоль которого порождает кривую-спутник

а второй — по кривой-спутнику \tilde{C}) записывается (с помощью разложения в ряд и применения теоремы Вика, см. п. 5.4.2) обобщенный гауссов коррелятор пары ВЛ для траекторий C и \tilde{C} . Такой коррелятор, в свою очередь, можно рассматривать как среднее от отдельной ВЛ по траектории C , а вторую ВЛ вместе с экспонентой от действия рассматривать как новую меру усреднения:

$$\langle W_C[A]W_{\tilde{C}}[A] \rangle = \frac{\exp\left(\int_C dx^i A_i\right) \left\{ \exp\left(\int_{\tilde{C}} d\tilde{x}^j A_j\right) \exp(-S_{CS}) \right\}}{\int [DA] \exp(-S_{CS})} = \langle W_C[A] \rangle_{S'_{CS}[\tilde{C}]} \quad (5.39)$$

Показатель объединенной экспоненты можно рассматривать как действие ТЧС, в которой поле A порождается (или взаимодействует с) источником тока в форме кривой-спутника \tilde{C} :

$$S'_{CS}[\tilde{C}] = \int_{\tilde{C}} d\tilde{x}^j A_j + S_{CS} = \int_{\tilde{C}\{\tilde{x}=\tilde{x}_{\tilde{C}}(s)\}} d^3\tilde{x} (A_i J_i + \varepsilon_{ijk} A_i \partial_j A_k), \quad (5.40)$$

$$J^i = \delta^{(2)} \dot{x}_{\tilde{C}}^i(s) (\vec{x} - \vec{x}_{\tilde{C}}(s)).$$

5.5.2. Оснащение в неабелевой теории: синхронизирующее векторное поле. До сих пор мы рассматривали простейшую ТЧС, определенную в п. 5.1. Однако интересные инварианты узлов получаются для более сложной версии теории (см. п. 5.2), в которой компоненты поля $\vec{A}(\vec{x})$ в каждой точке пространства задаются матрицами, вообще говоря, не коммутирующими друг с другом. В этом случае, чтобы написать аналог (5.40), необходимо определить произведение двух экспонент, каждая из которых упорядочена по *своей* траектории. Оказывается, что подходящее обобщение (5.40) получится, если «синхронизировать» значения параметра на обоих кривых при помощи векторного поля $\eta(s)$ (см. рис. 8), которое вводилось в п. 5.5 при построении кривой-спутника \tilde{C} , исходной по кривой C . В результате такого определения (ср. с определением упорядоченной экспоненты через свойство композиции в п. 5.4.1)

$$W_C[A]W_{\tilde{C}}[A] \equiv P\left\{ \text{Pexp} \int ds \dot{x}^i \{ A_i(\vec{x}(s)) + A_j(\vec{x}(s)) + \vec{n}(s) \} \right\}. \quad (5.41)$$

Таким образом, для регуляризации неабелева вильсоновского среднего необходимо ввести нормальное векторное поле на кривой-траектории. Обратите внимание, что здесь, в отличие от абелевой теории, преимущественно используется именно само поле \vec{n} , а не только порожденная им кривая-спутник.

Введенное векторное поле называется *оснащением* узла [39]. Замечательным образом изучаемые нами топологические инварианты независимо оказываются инвариантами именно оснащенных (ленточных) узлов в рамках других определений [2, 27, 29].

5.5.3. Неабелев оснащающий множитель и нетривиальный инвариант узла. Прямого аналога (5.11) и, следовательно, (5.12) в неабелевой теории (т. е. для полей с матричнозначными компонентами), насколько нам известно, не существует. На практике при вычислении ВС с помощью лагранжевой ЧС за определение этой величины принимают ее формальный ряд по степеням парных корреляторов (5.36), к каждому из которых применяют операцию оснащения [39], т. е. заменяют выражением вида

$$\oint_C ds \dot{x}(s) A_i(\vec{x}(s)) \int_0^s d\vec{s} (\dot{x}(s) + \dot{\eta}(s)) A_j(\vec{x}(s) + \vec{n}(s)). \quad (5.42)$$

Наивно, по аналогии с (5.12), кажется, что ответ должен иметь вид

$$F = \exp \text{Tr} \oint_C ds x^i(s) \tilde{x}^j(s) \langle A_i(x(s)) A_j(\tilde{x}(s)) \rangle. \quad (5.43)$$

Однако уже само выражение для среднего от (5.41) через парные *гауссовы* корреляторы в неабелевом случае устроено весьма нетривиально. В результате оказывается, что ответ всегда пропорционален, но *не* равен (5.43). Более того, величина (5.43) фактически содержит информацию об оснащении, но не о самом узле, поэтому ее и называют оснащающим множителем.

- Нетривиальный инвариант узла получается в результате деления регуляризованного ВС на оснащающий множитель.

Полученный ответ уже не зависит от выбора оснащения [39].

В следующем подразделе мы подробнее обсудим определение неабелева ВС как ряда по гауссовым корреляторам и покажем, как оно работает в простейших примерах. За основу возьмем так называемый формализм *интеграла Концевича* [43, 91].

5.6. Ряд для ИУ как ряд для ВС ТЧС. Наиболее точное на сегодня утверждение о связи полиномов узлов из табл. 2 с пертурбативной лагранжевой ТЧС основано на формализме интеграла Концевича (ИК) [91]. Оно состоит из двух частей.

1. Определенные ИУ допускают представление в виде формальных интегральных рядов по некоторому параметру.

2. Эти ряды можно почленно соотнести с рядом теории возмущений для вильсоновского среднего ТЧС в голоморфной калибровке.

Первая часть является доказанной математической теоремой [94]. Второй, вероятно, также можно придать статус строгого утверждения — после

точного аксиоматического определения правой части на основе ее ожидаемых существенных свойств из п. 5.4.

Ниже мы кратко сформулируем идею соответствия ряда для ИК ряду теории возмущений для ВС ТЧС. Более подробно этот вопрос рассмотрен в работах [41–45, 92].

5.6.1. Структура ИК. Соответствие ИК/ВС ТЧС основано на ряде их общих свойств, системы которых достаточно для определения каждого из выражений. Эти свойства обсуждались по отдельности в п. 5.4. Дадим краткую сводку в приложении к ИК.

- Выражение в целом представляет собой бесконечный формальный ряд интегралов последовательно возрастающих (четных) кратностей.

- Каждый из кратных интегралов является *t-упорядоченным*, т. е. интегрирование производится по области, где переменные удовлетворяют условию $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$.

- Каждый из кратных интегралов входит в ряд с определенным *групповым множителем*, представляющим из себя некоторую свертку генераторов заданной алгебры Ли в заданном ее представлении.

- Все интегралы кратности $2g$ вместе со своими групповыми множителями можно естественным образом занумеровать с помощью спариваний $2g$ -элементов.

- Ядро каждого из кратных интегралов разлагается в произведение функций Грина для определенного функционала.

- Ряд в целом можно представить в виде тензорной свертки «элементарных составляющих».

Подробное обсуждение свойств ИК [91] можно найти, например, в обзорах [66]; элементарное введение и подробные примеры можно также найти в [92]).

5.6.2. Пример ряда для интеграла Концевича. Например, ряд для ИК может начинаться с 1, продолжаться шестью двойными интегралами, за которыми будут следовать $\frac{4 \cdot 3}{2} + 4 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + \left(\frac{4 \cdot 3}{2}\right) = 6 + 12 + 36 = 54$ четырехкратных интеграла трех различных типов (табл. 6).

Структура ряда в целом совпадает при этом с разложением в ряд гауссова среднего (п. 5.4.2)

$$P \prod_{k=1}^4 \left(1 + \int dz A^a(z_k) T_a + A^a(z_k) A^b(z_k) T_a T_b + \dots \right), \quad (5.44)$$

так что двойные интегралы отвечают членам второго порядка, четырехкратные — четвертого и т. д. Метки под каждым членом указывают тип

Таблица 6. Пример интегрального ряда Концевича

$$\begin{aligned}
 & \int_a^b dt \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} + \int_a^b dt \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_3(t)}{z_1(t) - z_3(t)}}_{(13)}}_{(12)} + (C_4^2 - 2 = 4 \text{ подобных члена}) + \\
 & + \sum_{a,b} \text{Tr} \int_a^t \int_a^s \underbrace{2 \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_1(s) - \dot{z}_2(s)}{z_1(s) - z_2(s)} T_a T_b T_a T_b + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_1(s) - \dot{z}_3(s)}{z_1(s) - z_3(s)} \left(\underbrace{T_a T_b T_a T_b + T_a T_b T_b T_a}_{(12)(13)} \right)}_{(12)(12)} \underbrace{\left(\underbrace{T_a T_b T_a T_b + T_a T_b T_b T_a}_{(13)(12)} \right)}_{(1123)} + \\
 & + \underbrace{\frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_3(s) - \dot{z}_4(s)}{z_3(s) - z_4(s)} T_a T_a T_b T_b + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_3(t)}{z_1(t) - z_3(t)} \cdot \frac{\dot{z}_2(s) - \dot{z}_4(s)}{z_2(s) - z_4(s)} T_a T_b T_a T_b + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_4(t)}{z_1(t) - z_4(t)} \cdot \frac{\dot{z}_2(s) - \dot{z}_3(s)}{z_2(s) - z_3(s)} T_a T_b T_b T_a + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_2(t)}{z_1(t) - z_2(t)} \cdot \frac{\dot{z}_3(s) - \dot{z}_4(s)}{z_3(s) - z_4(s)} T_a T_a T_b T_b + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_3(t)}{z_1(t) - z_3(t)} \cdot \frac{\dot{z}_2(s) - \dot{z}_4(s)}{z_2(s) - z_4(s)} T_a T_b T_a T_b + \frac{\dot{z}_1(t) - \dot{z}_4(t)}{z_1(t) - z_4(t)} \cdot \frac{\dot{z}_2(s) - \dot{z}_3(s)}{z_2(s) - z_3(s)} T_a T_b T_b T_a}_{(12)(34)} \underbrace{\left(\underbrace{T_a T_b T_a T_b + T_a T_b T_b T_a}_{(13)(24)} \right)}_{(14)(23)} \underbrace{\left(\underbrace{T_a T_b T_a T_b + T_a T_b T_b T_a}_{(1234)} \right)}_{(1234)} + \\
 & + (C_4^2 \times C_4 - 6 = 30 \text{ подобных членов}).
 \end{aligned}$$

спаривания, а цифры соответствуют аргументам полей в исходном корреляторе: например, $\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle$ означает $\langle A(z_1)A(z_2) \rangle \langle A(z_3)A(z_4) \rangle$. Символ P в (5.44) указывает, что все кратные интегралы в разложении упорядочены согласно номерам переменных интегрирования, например, $P \iint dz_1 dz_2 \equiv \int_a^b dz_2 \int_a^{z_2} dz_1$. В каждом слагаемом можно выделить два множителя: координатный (кратный интеграл от скалярной функции координат) и групповой (свертка генераторов алгебры), т. е. имеет место структура из п. 5.4.4.

5.6.3. Ядра как парные корреляторы. Интегралы ряда Концевича, в частности в табл. 6, вычисляются по мере $\dot{z}dt = dz$ от произведений «элементарных множителей» вида $1/z$. Такой множитель удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}} \frac{\delta(t)}{z} = \delta(t) \delta(z) \delta(\bar{z}) \quad (5.45)$$

и, следовательно, может рассматриваться как значение парного коррелятора ТЧС в голоморфной калибровке (п. 5.3). Таким образом, по правилам обобщенного гауссова интегрирования (п. 5.4.3) координатные множители в ИК отождествляются с парными корреляторами полей ТЧС в голоморфной калибровке:

$$\langle A_z A_z \rangle = 0, \quad \langle A_0 A_0 \rangle = 0, \quad \langle A_0 A_z \rangle = -\langle A_z A_0 \rangle = \frac{\delta(t)}{z}. \quad (5.46)$$

5.6.4. Область интегрирования в ИК. Важная тонкость состоит в том, что интегральный ряд для ИК корректно определен не для всей замкнутой кривой, а для ее фрагмента, причем область интегрирования всегда является объединением четного числа попарно непересекающихся дуг. Поэтому для сравнения ИК с рядом для ВА последнюю величину сперва необходимо представить в виде тензорной свертки статистически независимых вкладов (см. пп. 5.4.1, 5.4.4). Явный вид таких разложений можно найти, например, в [92].

5.6.5. Выбор оснащения в интеграле Концевича. Другая особенность ИК касается проблемы регуляризации ВА, которую мы обсуждали в разд. 4 и п. 5.5. В формализме ИК эта проблема скрыта: ряд с самого начала включает только те спаривания, в которых точки в аргументах полей лежат на различных (попарно непересекающихся) дугах из данного фрагмента кривой. Например, если ряд для ВА содержал коррелятор типа $\langle 1122 \rangle$, то соответствующий ряд для ИК будет содержать *только* спаривание типа $\langle 12 \rangle \langle 12 \rangle$, но не сингулярный вклад $\langle 11 \rangle \langle 22 \rangle$. Можно показать, что такое опускание сингулярных вкладов соответствует определенному выбору оснащения — условию на кривую-спутник при регуляризации соответствующего ВА [66].

5.6.6. Квадратичный вклад в вильсоновское среднее в голоморфной калибровке. В качестве иллюстрации к нашей дискуссии о связи ИК с ТЧС мы установим явное соответствие между простейшими нетривиальными вкладами в ИК и ВС ТЧС. Ниже мы покажем, как получается квадратичная часть выражения в табл. 6 из ряда теории возмущений для абелева ВС ТЧС.

Более интересные примеры разбираются в приложении 3, а также, например, в [66] и (менее строго, но более подробно) в [92].

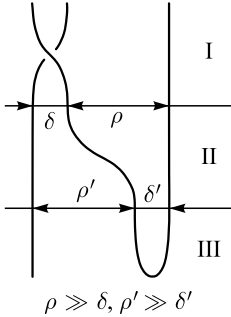


Рис. 9. «Нетривиальные события» на проекции кривой с точки зрения интеграла Концевича

Рассмотрим кривую γ , проекция которой показана на рис. 9, и вычислим ВС для нее в первом исчезающем порядке теории возмущений. Для регуляризации этой величины введем оснащение на кривой (см. п. 5.5) и рассмотрим кривую-спутник γ' (как на рис. 8). После этого в каждом парном корреляторе заменим аргумент второго из полей — точку исходной кривой $(z(t), t)$ — на точку $(z'(t'), t')$ кривой-спутника (процедура из п. 5.5 устанавливает между точками двух кривых взаимно-однозначное соответствие). В результате описанной процедуры первый исчезающий (квадратичный) вклад в ВС равен

$$\oint_{\gamma} dx^{\mu} \oint_{\gamma'} dx'^{\nu} \langle A_{\mu}(t, z, \bar{z}) A_{\nu}(t, z, \bar{z}) \rangle. \quad (5.47)$$

Затем, пользуясь определением гауссова среднего (5.33), а также явным выражением для функции Грина (5.46), перепишем (5.47) в виде

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} dz \oint_{\gamma'} dt' \langle A_t(t, z, \bar{z}) A_z(t', z', \bar{z}') \rangle + \oint_{\gamma} dt \oint_{\gamma'} dz' \langle A_z(t, z, \bar{z}) A_t(t', z', \bar{z}') \rangle = \\ = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z'} + \oint_{\gamma'} \frac{dz'}{z' - z}. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Следующий шаг состоит в переходе от интегрирования по комплексному переменному $z(t)$ к интегрированию по оси t . Для этого кривую интегрирования необходимо разбить на дуги, разделенные критическими точками. В данном простейшем случае контур имеет две критические точки (см. рис. 9) и представляется в виде композиции $\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_-$ двух дуг, которые можно задать как явные функции $z = z_+(t)$ и $z = z_-(t)$ соответственно. Аналогичным образом следует разбить кривую-спутник γ' . После этого исходный интеграл

сводится к сумме четырех интегралов по оси t

$$\int_0^1 dt \frac{\dot{z}_+(t) - \dot{z}'_+(t)}{z_+(t) - z'_+(t)} + \int_0^1 dt \frac{\dot{z}_+(t) - \dot{z}'_-(t)}{z_+(t) - z'_-(t)} + \\ + \int_1^0 dt \frac{\dot{z}_-(t) - \dot{z}'_-(t)}{z_-(t) - z'_-(t)} + \int_1^0 dt \frac{\dot{z}_-(t) - \dot{z}'_+(t)}{z_-(t) - z'_+(t)}. \quad (5.49)$$

Теперь воспользуемся контурной независимостью исходных интегралов (от голоморфных функций), чтобы расположить контуры γ и γ' параллельно оси t всюду, за исключением, например, отрезков γ_+ и γ'_+ , заключенных в области $t_1 \leq t \leq t_2$, где контуры, вообще говоря, могут переплетаться. Тогда в сумме (5.49) отличны от нуля только слагаемые, содержащие z_+ или z'_+ , причем соответствующие интегралы набирают значения исключительно при $t_1 \leq t \leq t_2$, поскольку

$$\dot{z}_+(t) = \dot{z}_-(t) = \dot{z}'_+(t) = \dot{z}'_-(t), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad t_2 \leq t \leq 1. \quad (5.50)$$

Далее заметим, что функция Грина в голоморфной калибровке (5.46) есть убывающая функция $|z|$, а также снова воспользуемся произволом в выборе контуров, чтобы раздвинуть переплетающиеся дуги γ_+ и γ'_+ сколь угодно далеко:

$$|z_+(t) - z'_-(t)| \sim |z_-(t) - z'_+(t)| \rightarrow \infty. \quad (5.51)$$

В пределе соответствующие интегралы обращаются в нуль, что в силу контурной независимости означает равенство нулю таких же интегралов по исходным дугам.

В результате всех описанных преобразований интеграл (5.47) принимает вид

$$\mathcal{I} = \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\dot{z}_+(t) - \dot{z}'_+(t)}{z_+(t) - z'_+(t)}. \quad (5.52)$$

Разобранный пример иллюстрирует в числе прочего свойство композиции, на котором основано разложение ИК в композицию «элементарных универсальных вкладов». Это свойство является одним из существенных общих свойств ИК и упорядоченной экспоненты, средним от которой является ВС в ГЧС (см. п. 5.4.1). С помощью свойства композиции получается тензорное представление для ИК, по существу аналогичное \mathcal{R} -матричному представлению для полиномов узлов [66, 92].

6. РАЗВИТИЕ И КОНТЕКСТ

Мы завершили наш краткий рассказ о месте и роли инвариантов узлов в математической физике. Сюжеты, которые мы затронули, уже стали классическими. Теперь самое время обратиться к современному положению дел. Для затравки перечислим некоторые модели и объекты, в которых за последнее время открыли (неожиданно?) встроенные инварианты узлов.

6.1. Уравнения для полиномов узлов. Под *динамической моделью* какой-либо системы в самом общем смысле обычно понимают набор величин, каким-то образом описывающих систему, вместе с уравнениями для этих величин. При этом вид уравнений, в принципе, ничем не ограничен. Однако среди динамических моделей, представляющих реальный интерес (для физиков или математиков), можно выделить обширные классы, где основные уравнения имеют определенный характерный вид. Более того, систему динамических уравнений можно часто принять за определение такой модели. Поэтому любую конструкцию, где такая система уравнений возникла независимо, в принципе, можно рассматривать как модель исходной системы и так или иначе использовать для изучения свойств последней.

Ниже мы кратко расскажем, как некоторые уравнения, характерные для интересных динамических систем, проявляются для обсуждавшихся выше (табл. 7, 8) инвариантов узлов. Основные случаи можно условно разделить на перечисленные ниже типы.

6.1.1. Линейные разностные уравнения. Здесь следует различать несколько случаев.

Соотношения между однотипными полиномами для различных узлов. Первый пример — запутывающие (skein) соотношения S_k в табл. 1 (которые позволяют «запутать» произвольный узел или зацепление, начав с тривиального узла). Аналоги этих соотношений лежат в основе различных рекуррентных методов вычисления полиномов ХОМФЛИ (см., например, [95] и ссылки там, а также [96]). При динамическом подходе (см. п. 6.3) особое место занимают уравнения эволюции для полинома узла при многократном повторе фрагмента. Еще один важный пример — уравнения дефекта полинома при мутации узла (см. п. 6.3).

Здесь нужно оговориться, что перечисленные уравнения являются линейными по определенным параметрам узла (например по различным числам намоток, см. рис. в табл. 7), и в то же время могут рассматриваться как нелинейные уравнения, например, для вершинных операторов (см. далее).

Соотношения между различными полиномами одного узла. Наиболее распространенный пример — рекуррентные соотношения между полиномами ХОМФЛИ в симметрических раскрасках. Такие полиномы зависят от дополнительной дискретной переменной: натурального числа n (оно нумерует простейшие разбиения числа n : $[n]$, с диаграммой из одной строки). В од-

Таблица 7. Квантово-групповые полиномы для семейств узлов и зацеплений: динамические формулы в разделенных переменных

Семейства узлов/зацеплений	Полиномы ХОМФЛИ, диаграммы раскрасок	Переменные			Ссылка	
		Групповые		Динамические: наборы целых чисел		
		Универсальные блоки	Скалярные спец-функции			
Замыкания кос, 3 нити		$[n_1] \otimes [n_2] \otimes [n_3] \rightarrow [n_4]$	Характеры представлений квантовой группы		[112]	
		$Y_1 \otimes Y_2 \otimes Y_3 \rightarrow Y_4 \mid Y \leq 4$				[113, 114]
Крендельные рода g		$[n] \otimes [\bar{n}] \otimes [n] \rightarrow [\bar{n}];$ $[\bar{n}] \otimes [n];$ $\otimes [n] \rightarrow [n]$			[115]	
Древовидные; специальные петлевые		$[\bar{n}, n] \otimes [n, n] \otimes [n, n] \rightarrow [n, n];$ $[n, n] \otimes [\bar{n}, n];$ $\otimes [n, n] \rightarrow [n, n]$			[116, 117]	
		$[3, 3, 3] \otimes [\bar{3}, 3, 3] \otimes [3, 3, 3] \rightarrow [3, 3, 3];$			[118]	
Дважды скрученные		$[2, 1] \otimes [2, 1];$ $\otimes [2, 1] \rightarrow [2, 1]$		Структурные функции дифференциального разложения		[119]
		$[3, 1] \otimes [3, 1];$ $\otimes [3, 1] \rightarrow [3, 1]$				[120]
Скрученные					$\nu = 2p - 1$ $\nu = 2p$	[121]
2-нитевые торические					ν	

народной форме эти уравнения выглядят как условие обращения в нуль раскрашенного полинома ХОМФЛИ под действием определенного разностного оператора. Этот оператор сам по себе является инвариантом узла (под названием квантовый A-полином). Из этого оператора путем замены разностных производных на формальные переменные можно получить полином узла иного сорта, чем примеры из табл. 2, — классический A-полином (см., например, [51] и ссылки там).

Таблица 8. Динамические модели квантово-групповых полиномов узлов и зацеплений

Модель	Класс инвариантов		Уравнения	Тип	Класс моделей	Асимптотики	
	Полиномы	Узлы/ зацепления				Предел	Описание
Эволюции	Любые	С кратными блоками	Эволюции	Лин. рек.	Эволюционные		
S/T-блоков [116]	Прямоугольные [121]	Древесные [121]					
Гурвица	ХОМФЛИ крашенные симметрические (Джонса)	Любые узлы	Алгебра симм. группы	Умн.	Комбинаторные	Специальный	τ -функция КП [106]
						Александера	Уравнения КП [107, 123]
Колчанная [125]		Зацепления: тор. $T_{3,n}$ [126], рац. [127]; узлы: тор. $T_{3,n}$, скрученные, до 6 пер. [126]	Тождества Уорда по узлу и раскраске	Лин. рек.		Большие раскраски	Гауссово распределение [124]
							Стабилизация по колчану
Экхольма		$0_1, 2_1^2, 3_1$ [128]				Специальный	Алгебра [129]
БЭМ [61]		Торические			Матричные		Матричная
АМ [130]		4_1					
АММ [131]		Скрученные					
Гиперкубов [96]	ХОМФЛИ простые	Любые	Тождества Уорда по узлу				
Спиновая цепочка		Торические	Рудженнаерса–Шнайдера [101]	Н/л инт.	Полином узла как инвариант поверхности	Нерафинированный	ХОМФЛИ крашенные симметрические
Чередника		Алгебраические 3-я [102]	ДААГ [101, 103]				
Артамонова–Шакирова		На поверхности рода 2	[104]				
Гарофалидиса–Цагира [82]	Джонса крашенные в корнях 1	Гиперболические: $4_1, 5_2$ [132]				Большие раскраски	Ряд вокруг гиперболического объема; модулярная инвариантность
Топ. вершин	ХОМФЛИ крашенные	$L_{2a1}/2_1^2$ [133], $L_{8n8}/8_3^4$ [99]	Алгебра топ. вершин/ ДИМ	Умн.			

Соотношения смешанного типа. Уравнения, связывающие полиномы различных узлов в различных раскрасках, характерны для метода дифференциального разложения (см. п. 6.2.2). Примеры можно найти в [97] и процитированных там работах.

6.1.2. Линейно-билинейные формулы умножения. *Тождества для характеров.* Прежде всего речь идет об определенных соотношениях для базисных функций в различных формулах разделения переменных для инвариантов узлов — типа формулы для взвешенного следа в п. 3.4.4 (см. далее п. 6.2). Формулы умножения играют двойную роль. С одной стороны, они отражают свойства соответствующих теоретико-групповых величин относительно тензорного умножения представлений, фактически лежащего в основе определения этих величин (см., например, [98], разд. 3). С другой стороны, те же соотношения выражают условия топологической инвариантности и другие основные свойства полиномов узлов [55].

Во многих случаях формулы умножения можно использовать как систему рекуррентных соотношений для последовательного вычисления соответствующих величин. Именно так мы вычислили коэффициенты в определении взвешенного следа в п. 3.4.4. Один из наиболее современных примеров такого подхода — явное вычисление раскрашенного полинома узла с помощью модели топологических вершин (см., например, [99] и приведенные там ссылки, а также п. 6.3.4).

Формулы каблирования. Особое место среди формул умножения занимают соотношения каблирования, которые существенно отражают теоретико-групповую природу обсуждаемых полиномов узлов [100]. Эти соотношения могут служить как средством вычисления раскрашенных полиномов узлов, так и источником интересных линейно-билинейных соотношений между раскрашенными инвариантами (пример приведен в [99]).

Другие формулы (ко)умножения для полиномов узлов. Другие подходы к инвариантам узлов позволяют связать с ними новые структуры. Ярким примером является конструкция Чередника [101] и ее обобщения [102–104]. Весьма экзотическая и пока плохо исследованная алгебра ДИМ, которая возникает в теории топологических вершин, также должна иметь свои проявления на уровне инвариантов узлов в силу предполагаемой связи одних и других (см., например, [99] и приведенные там ссылки, а также п. 6.3.4).

6.1.3. Нелинейные интегрируемые соотношения. Под этим названием традиционно объединяют всякие бесконечные системы уравнений, которые допускают точное решение (либо иное аналитическое описание) в каких-либо разумных терминах. Строго говоря, в эту категорию попадают все описанные выше уравнения (включая линейные как простейший случай). Наряду с уже упомянутыми выше классами особую роль в теории интегрируемых систем играют перечисленные ниже виды соотношений.

Билинейные соотношения (типа) Плюккера. Формально представляют из себя тождества для миноров прямоугольных матриц. В интересующем нас контексте наиболее известны в модели КП [105] и имеют неожиданные проявления в теории узлов [106, 107] (см. п. 6.3.2).

Уравнение Янга–Бакстера. См. п. 1.3 и приведенные там ссылки.

Другие системы операторных тождеств того же класса возникают в различных версиях диаграммной техники для инвариантов узлов (см., например, [52, 95] и [96]).

6.2. Динамические формулы в разделенных переменных. В п. 6.1 мы обсудили взгляд на полиномы узлов как на динамические переменные, удовлетворяющие определенным уравнениям. Альтернативный подход состоит в поиске различных структур в явных выражениях для полиномов узлов. Здесь очень трудно четко поставить задачу, как и систематизировать имеющиеся результаты. Настоящий раздел претендует на очередную попытку.

6.2.1. Постановка задачи. Одна из основных задач теории точно решаемых моделей ставится следующим образом: выделить среди величин, описывающих данную систему, два «базисных» набора — функции неизменных параметров модели и динамические переменные, описывающие эволюцию системы. Из этих двух наборов должна составляться любая величина, которой интересуются в рамках данной модели. Классический вариант — метод разложения по характерам [7, 98, 108], частный случай которого мы получили, записав среднее как взвешенный след в п. 3.4.4.

Однако по мере усложнения узла и типа полинома коэффициенты перед характерами сами по себе быстро становятся сложными неструктурированными функциями. По этой причине вызывают интерес дальнейшие либо альтернативные разложения для полиномов узлов. Ниже мы прокомментируем основные (из известных нам) достижения в этом направлении.

Примеры формул с динамическим разделением переменных. В теории полиномов узлов классическими примерами упомянутых разложений являются формула Джонса–Росса для торических узлов [109] и формула разложения по характерам для произвольных узлов [110]. Однако дальнейшее развитие разнообразных вычислительных техник привело к открытию множества новых структур и новых специальных функций. Как правило, в формулах разделения переменных для полиномов узлов базисные функции являются специальными функциями теории представлений либо имеют схожую с ними структуру. По этой причине их часто называют *групповыми переменными*, в противоположность остальным, *динамическим переменным*.

6.2.2. Кандидаты в базисные функции. *Спецфункции теории представлений.* При классическом подходе к разделению переменных роль базисных функций играют характеры неприводимых представлений квантовых групп, а также универсальные блоки в \mathcal{R} -матрицах (либо коэффициенты Рака) [100]. Резюме основных (на момент написания данного текста) достижений в рамках

такого подхода содержится в табл. 7. Актуальные достижения этого подхода можно найти по ссылке [121].

Эмпирические структуры. Альтернативой является эмпирический поиск «общего базиса» для разложения определенной серии полиномов узлов [97]. Как правило, кандидаты на роль базисных функций наследуют ряд основных свойств характеров. Прежде всего каждый базисный элемент

- 1) разлагается в произведение канонических элементарных множителей f ;
- 2) (анти)симметричен при одновременном обращении всех формальных переменных, $f\{x_i\} = \pm f\{x_i^{-1}\}$;
- 3) подвергается редукции, т. е. обращается в нуль при определенных условиях на формальные переменные, $\{x_i\} \in X \Rightarrow f\{x_i\} = 0$.

В случае полинома ХОМФЛИ (от переменных A и q), как правило, рассматривают множители вида $f_n = (Aq)^n - (Aq)^{-n}$ для некоторого целого n ; при этом каждый базисный элемент (заданный набором целых чисел Y) $F_Y = \prod_{n \in Y} f_n$ удовлетворяет условию редукции: $F_Y(N < N_0) = 0$ для некоторого $N_0(Y)$. В случае разложения полинома ХОМФЛИ по характерам (выражения типа (3.30)) мультииндекс Y пробегает все возможные разбиения данного целого числа, а $N_0(Y)$ — число слагаемых в разбиении Y (высота его диаграммы Юнга). В частности, в (3.30) $n = 3$, $\chi_* \equiv \chi_{[3]}$, $\chi_{**} \equiv \chi_{[2,1]}$; модель определена для частного значения $N = 2$ (индексы операторов бегут от 1 до 2), так что $\chi_{[1,1,1]} \equiv 0$.

Принцип положительной обратной связи. Практика применения метода всегда начинается с анализа ряда примеров, в которых изучаемые инварианты узлов удается привести к более или менее единому виду. Из анализа этих примеров определяется набор базисных функций. Далее, при попытке разложить по тому же базису полином узла, *a priori* лежащего за пределами рассмотренного класса, возможны две ситуации: либо класс узлов с данным разложением полинома расширяется, либо (гораздо чаще) приходится расширить/видоизменить набор базисных функций.

Достоинства и недостатки. Предсказательной силой такие формулы, как правило, обладают внутри семейства узлов, простейшие члены которого использовались при их выводе. В этом их недостаток по сравнению с теоретико-групповыми разложениями, в которых базисные элементы хотя бы в принципе допускают универсальное определение. Однако «динамическая» (параметрическая) формула для семейства узлов в разделенных переменных (на «групповые», общие для всего семейства, и «узловые», содержащие простую зависимость от конкретного члена) является самоценным достижением. И в этом плане (полу)эмпирические поиски иногда приводят к интересным результатам, в том числе в случаях, пока плохо поддающихся последовательному анализу.

Последние достижения. Прогресс метода дифференциальных разложений на момент написания текста отражен в табл. 7.

Функции начальных/граничных условий. Все перечисленные выше наборы базисных функций так или иначе привязаны к конкретному семейству узлов (даже в классическом разложении по характерам состав представлений определяется шириной косы). В более сложных случаях в качестве базисных функций и вовсе выбирают полиномы для достаточного числа простейших членов изучаемого семейства или более или менее изящные комбинации этих полиномов. Такой выбор является наиболее естественным в случаях, когда явная параметрическая формула получается как решение рекуррентного уравнения с неопределенными «константами интегрирования» [113, 122] (см. также ссылки в этих работах).

Достоинства и недостатки. Процедура решения рекуррентных соотношений, как правило, является гораздо более прямолинейной, чем чисто или полуэмпирические поиски скрытых структур. При этом большинство выкладок оказываются гораздо проще, чем при вычислениях с помощью теории представлений. Основной недостаток метода в том, что полученный таким образом набор базисных функций не обладает никакими интересными свойствами (за исключением случаев, когда эти функции совпадают со стандартными теоретико-групповыми величинами). Поэтому для сравнения полиномов различных семейств гораздо лучше подходят обсуждавшиеся выше базисы: теории представлений либо дифференциальных разложений, элементы которых обладают рядом общих свойств.

6.2.3. Кандидаты на динамические переменные. Наиболее явным образом такие переменные возникают при изучении эволюции на пространстве узлов. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть семейство узлов, последовательно полученных друг из друга заданным *не непрерывным* преобразованием (в более общем случае — многопараметрическое семейство, порожденное группой преобразований). Примеры таких семейств приведены в табл. 7. В простейших случаях преобразование сводится к дополнительному перекручиванию двух «близких» дуг кривой на один оборот. Последовательное применение такого преобразования выглядит как вставка двунитевой косы в некоторую область на плоской проекции узла. В частности, таким образом можно описать представления узла в виде замыкания косы. Другие примеры в табл. 7 отличаются взаимным расположением «эволюционирующих» двунитевых кос на диаграмме узла, а также относительным направлением (со-/против-) нитей в этих косах. Более сложные случаи мы обсудим в п. 6.3.

6.3. Модели полиномов узлов против известных моделей. **6.3.1. Эволюционные модели узла.** В основе подхода к инвариантам узлов, о котором здесь пойдет речь, лежит понятие об инварианте узла как о динамической переменной. А именно: семейство узлов (или зацеплений), полученных друг из друга последовательным применением некоторого преобразова-

ния, можно рассматривать как дискретную траекторию некоторой квантовой системы. При этом инварианты узлов играют роль наблюдаемых для этой системы и удовлетворяют определенным (разностным) уравнениям эволюции. Такой подход позволяет изучать полиномы узлов на языке динамических моделей с помощью уравнений эволюции и фазовых диаграмм. Замечательно, что этот метод продолжает работать для инвариантов узлов, существенно выходящих за пределы описанного здесь семейства (см. [134] и ссылки там).

«Канонические» разрывные преобразования. Метод \mathcal{R} -матриц [29] сразу подсказывает два способа эволюции узла.

Эволюция — повтор фрагмента. Это простейший пример не непрерывного преобразования, позволяющего по данному узлу построить целое семейство (рис. 10). При этом, в принципе, можно получить фрагмент произвольной формы. Линейная эволюция всех квантово-групповых полиномов узлов при этом напрямую следует из \mathcal{R} -матричного формализма [110]. Основная проблема состоит в том, что собственные значения оператора эволюции, как правило, не являются рациональными функциями [110]. На сегодня единственное известное исключение — семейство торических узлов ([135] и ссылки там), частным случаем которого являются двунитевые косы. При этом «начальный» узел (или зацепление), к которому добавляется «эволюционирующая» двунитевая (торическая) коса, может быть произвольным, как и относительные направления нитей в добавленной косе.

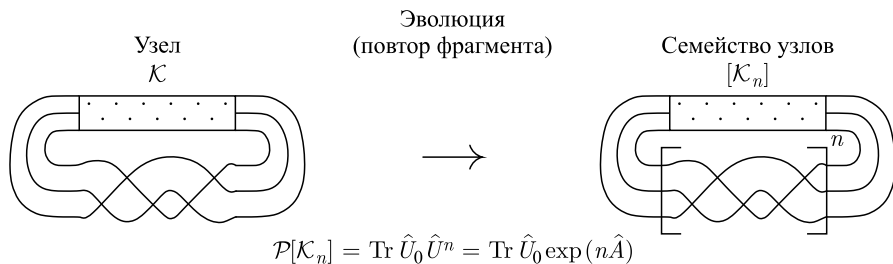


Рис. 10. Семейство узлов как дискретная траектория динамической системы

Мутации. Преобразование сводится к вырезанию части узла с последующей вклейкой его зеркального образа [2, 27, 136]. Этот пример разрывного преобразования стал хрестоматийным в теории полиномов узлов. Дело в том, что многие инварианты узлов инвариантны также относительно мутаций. Как уже упоминалось, первое (простейшее среди инвариантов узлов) исключение составляют полиномы ХОМФЛИ в несимметрических раскрасках. Для таких полиномов можно рассматривать нетривиальные уравнения дефекта при мутации. Примеры можно найти в [116].

Для каких инвариантов существуют эволюционные модели? Замечательно, что относительно свойств эволюции существуют два подкласса полиномов узлов. Полиномы первого класса (Джонса, Александра, ХОМФЛИ, Кауффмана — в том числе раскрашенный) для произвольного узла допускают явное тензорное (\mathcal{R} -матричное) представление. Как следствие, на всякой фазовой траектории на пространстве узлов эти полиномы могут быть записаны явно в виде следа соответствующего оператора эволюции (частичная свертка \mathcal{R} -матриц). Оператор эволюции как линейный оператор удовлетворяет характеристическому уравнению, которое и играет роль «встроенного» уравнения эволюции для полиномов первого класса.

Напротив, полиномы второго класса (Хованова, Хованова–Рожанского, суперполиномы) обладают рядом существенных свойств, судя по всему, несовместимых с тензорным/ \mathcal{R} -матричным представлением (или, по крайней мере, с более или менее близкими аналогами такого представления для полиномов первого класса). Тем не менее эти полиномы также удовлетворяют уравнениям эволюции. Более того, между уравнениями для первого и второго классов прослеживается достаточно прозрачная связь (см. [134] и ссылки там).

6.3.2. Статистические модели раскрасок. В эволюционных моделях (п. 6.3) динамическим («эволюционирующим») объектом является сам узел. В противоположность этому можно рассмотреть ансамбль инвариантов для заданного узла. С таким ансамблем можно связать статсумму (производящую функцию для различных инвариантов ансамбля, см. пример ниже). В частности, величиной такого рода является набирающий популярность универсальный полином узла (см. [137] и приведенные там ссылки).

Любопытно, что в некоторых случаях у таких статсумм обнаруживается ряд замечательных свойств, характерных для «интересных» статистических моделей [98]. Ниже пойдет речь про наиболее популярную и изученную конструкцию описанного типа. В ее основе лежит величина, которая в некоторых источниках [106] называется *статсуммой Гурвица*:

$$\mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(A, q|\{x_k\}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}_{[n]\chi_{[n]}^{\mathcal{K}}}(\{x_k\}) \xrightarrow[x_k \geq 1 = 0]{x_1 = g} \mathcal{Z}^{\mathcal{K}}(A, q|g) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g^n \mathcal{H}_{[n]}^{\mathcal{K}}. \quad (6.1)$$

В формуле (6.1) вычисляется сумма различных полиномов (полиномов ХОМФЛИ, раскрашенных симметрическими разбиениями) для данного узла с известными теоретико-групповыми функциями (симметрическими характеристиками/полиномами Шура [138]) в качестве весов. (Не путать с разложением по характеристам для самого полинома ХОМФЛИ!) В таком или подобном виде записывается статсумма во многих точно решаемых моделях [108].

В результате величина (6.1) зависит от узла, но не от дополнительной переменной полинома — раскраски (представления), поскольку содержит в себе

сразу все полиномы данного семейства. Кроме того, (6.1) есть функция формальных переменных: аргументов полиномов ХОМФЛИ A и q , а также использованных в определении *времен* $\{x_k\}$ (первый вариант) — аргументов коэффициентных функций (характеров/симметрических полиномов Шура), зависимость от которых в частном случае $\chi_{[n]}(x_k = g \delta_{1,k}) = g^k$ содержится в «константе» связи g (второй вариант).

Асимптотики и формальные ряды. Большинство известных на сегодня интересных свойств статсуммы Гурвица связаны с одним из трех предельных случаев [139].

Специполиномы, билинейные тождества и целочисленные инварианты: $q \rightarrow 1$, $g, x_k, A = \text{const}$. В точке $q = 1$ полиномы ХОМФЛИ вырождаются в специальные полиномы с тривиальной зависимостью от диаграммы раскраски (см., например, [100, гл. 11]). Зато в этом пределе полиномы ХОМФЛИ удовлетворяют билинейным соотношениям Плюккера, которые наряду с линейными тождествами Уорда и уравнением ЯБ (см. п. 6.1) играют важную роль в теории интегрируемых систем [139].

С другой стороны, при различных разложениях статсуммы (6.1) вокруг «специальной» точки неожиданным образом возникает ряд величин, связанных с другими задачами топологии и теории представлений: инварианты Васильева [66] (упомянутые выше), числа Гурвица и характеры симметрической группы [106], а также инварианты ЛМОВ ([124] и ссылки там).

Закон Гаусса и τ -функция КП: $g \rightarrow \infty$. Ряд интересных закономерностей выполняется приближенно для членов с большим n . В частности, сами полиномы ХОМФЛИ (как и в специальном пределе $q \rightarrow 1$) удовлетворяют билинейным соотношениям Плюккера. В результате «хвост» статсуммы (6.1) приближенно совпадает со статсуммой другой хорошо известной точно решаемой модели, а именно, с τ -функцией иерархии КП [106], причем точность возрастает с ростом n .

Другое (любопытное, но пока плохо понятое) наблюдение состоит в том, что числа ЛМОВ — весьма загадочные целочисленные инварианты, замечательным образом возникающие в одном из переразложений статсуммы (6.1), при больших n оказываются распределены по закону Гаусса [124].

Полиномы Александра и уравнения КП: $A = 1$, $g, x_k, q = \text{const}$. При $A = 1$ полином ХОМФЛИ превращается в полином Александра. При этом зависимость симметрического полинома от раскраски (от представления), как и в специальной точке $q = 1$, резко упрощается (см., например, [100, гл. 12]).

Интересно, что изучение того же предела позволяет установить еще одно любопытное свойство статсуммы (6.1): одно из ее переразложений в формальный ряд оказывается производящей функцией для уравнений иерархии КП — той самой системы, статсумма которой в *другом* пределе приближается к статсумме (6.1) [107, 123].

6.3.3. Матричные модели полиномов узлов. Буквально термин «матричная модель» означает, что некоторая величина (статсумма модели) задана как интеграл по пространству матриц определенного вида с некоторой мерой. Такие модели в свое время вводились для феноменологического описания атомных спектров (пример относительно современного обзора: [140]). Аналогичная постановка задачи возникает при использовании решеточной регуляризации в различных задачах КТП [7]. Обзор приложений в контексте современной математической физики можно найти, например, в [108].

Замечательно, что при исследовании матричных моделей возникает множество дополнительных интересных структур, в том числе характерных для других точно решаемых систем. В результате теория матричных моделей стала самостоятельным разделом математической физики (см., например, обзор в двух частях [98, 108]).

Статсумма Гурвица и цепочка Тоды. Первое наблюдение, о котором здесь стоит упомянуть, связано с интегральным представлением для симметрических полиномов ХОМФЛИ и может рассматриваться как еще одно свойство соответствующей статистической модели (6.1) [51]. Строго говоря, здесь рассматривается матричная модель в узком смысле (интеграл по матрицам), однако возникает ряд характерных для таких моделей структур. Центральное место среди них занимают линейные тождества Уорда, которые порождаются системой линейных разностных либо дифференциальных операторов (квантовых A -полиномов, см. п. 6.1), действующих, соответственно, на сами раскрашенные полиномы либо на статсумму (6.1).

Замечательно, что описание системы симметрических ХОМФЛИ с помощью A -полиномов одновременно является описанием известной точно решаемой системы — релятивистской цепочки Тоды [51] (работа содержит необходимые ссылки).

Откуда матричные модели в теории узлов? Вопрос об описании полиномов узлов с помощью матричных моделей встает по крайней мере по двум причинам [61]. Во-первых, у полиномов узлов и корреляторов в матричных моделях обнаруживается ряд интересных общих свойств, вообще характерных для наблюдаемых величин в точно решаемых моделях [131]. Во-вторых, весьма многообещающий способ *вывести* выражения для полиномов узлов из формальных выражений для вильсоновских средних в теории Черна–Саймонса (с помощью так называемой техники локализации [61]) на промежуточном этапе должен сводиться к вычислению статсуммы или коррелятора в матричной модели.

Матричная модель торических узлов. Описанную выше программу полностью удалось проделать в случае торических узлов [61]. Полученная в результате матричная модель (Брини–Эйнарта–Марини (БЭМ)) позволяет найти изящное описание для некоторых важных свойств полиномов торических узлов.

Для других узлов? К сожалению, за пределами семейства торических узлов успехи в этом направлении (ко времени написания данного текста) остаются гораздо более скромными. Одним из достижений является асимптотическая матричная модель скрученных узлов (см. рис. в табл. 8): полиномы этих узлов совпадают с матрично-модельными корреляторами типа БЭМ в пределе $q \rightarrow 1$, причем равенство сохраняется в нескольких первых порядках по $\hbar = -i \log q$ [131].

Явное выражение через матрично-модельные интегралы удалось написать в частном случае предыдущей задачи: для раскрашенных полиномов Джона простейшего неторического узла («восьмерка» или 4_1 в [37]) [130]. В настоящее время продолжается активная работа над матрично-модельным описанием системы этих полиномов.

С другой стороны, в том же пределе $q \rightarrow 1$ известная система рекуррентных соотношений на полиномы произвольных узлов может рассматриваться как система тождеств Уорда некоторой матричной модели [96].

Наконец, известно косвенное проявление матрично-модельной структуры в системе симметрических полиномов ХОМФЛИ. А именно: (как упоминалось выше) при определенном разложении этих полиномов в формальный ряд коэффициенты ряда оказываются числами Гурвица [106], хорошо известными в топологии и теории симметрических групп. В частности, для чисел Гурвица известно описание с помощью топологической рекурсии (недавние достижения и классические ссылки см. в [141]) — приема, характерного для теории матричных моделей. Однако область применимости самого приема гораздо шире, так что возможность его использования не обязательно говорит о наличии матричной модели.

6.3.4. Узел задает поверхность. В отдельный класс стоит выделить модели, связанные с двумерными или многомерными топологическими объектами. Узел (одномерный объект в трехмерном пространстве) при этом может возникать в качестве границы или пересечения объектов старших размерностей. При этом в ряде случаев роль этого узла оказывается определяющей во всей модели, так что изучаемые величины многомерной топологии имеют непосредственное отношение к инвариантам узлов.

Алгебра преобразований тора и торических узлов. Наиболее последовательное применение описанного подхода связано с конструкцией Чередника [101]. Изначально рассматривались замкнутые кривые без самопересечений на поверхности тора, которые при вложении в трехмерное пространство образуют семейство торических узлов. Со временем эту модель удалось обобщить на случай произвольных рациональных узлов и зацеплений [102, 142].

По основной идее конструкцию можно отнести к классу эволюционных моделей (см. п. 6.3): произвольный торический узел получается из тривиального узла в результате последовательности определенных (не непрерывных) преобразований. Отличие конструкции Чередника состоит в том, что в ней

рассматриваются преобразования самого тора (типа «перекручивания ручек»), а узел преобразуется вместе с ним.

Преобразования тора в конструкции Чередника образуют так называемую двойную аффинную алгебру Гекке (ДААГ), которая является отдельным предметом изучения (см., например, [103]). В частности, эта алгебра допускает полиномиальное представление, которое и делает возможным явное вычисление инвариантов узлов в таких терминах. В качестве наблюдаемых в классической модели Чередника получаются полиномы Джонса, а в более продвинутых версиях модели также и ХОМФЛИ* [102, 142].

Изящным приложением описанной конструкции является еще одна связь полиномов узлов и интегрируемых систем: в некотором смысле модель Чередника эквивалентна известной точно решаемой модели — спиновой цепочке Рудженаарса–Шнайдера.

Алгебра узлов рода 2. Проблема обобщения конструкции Чередника для поверхностей старших родов (с произвольным числом ручек) является предметом активного исследования. В настоящее время подобная конструкция разработана для поверхностей рода 2.

По аналогии с моделью торических узлов модель узлов рода 2 можно рассматривать как «топологическое описание» некоторой интегрируемой системы (в данном случае, судя по всему, новой).

Однако, в отличие от торического случая, смысл наблюдаемых в полученной модели рода 2 до конца не ясен. По построению они являются топологическими инвариантами и имеют шансы оказаться новыми полиномами узлов, однако их свойства еще подлежат изучению.

Узел как выкройка топологического пространства. Этот сюжет (уже упоминавшийся в п. 4.3.3) исторически возник раньше, чем конструкция Чередника, и исследуется значительно шире. В отличие от предыдущих моделей здесь речь идет не столько о самодостаточной математической конструкции, сколько о системе идей и наблюдений. Ниже мы назовем некоторые из них, на наш взгляд, наиболее простые и яркие.

Идеи, о которых пойдет речь, в принципе относятся к произвольным узлам, однако конкретные подробности на сегодня разработаны лишь в немногочисленных частных случаях (см. табл. 8).

Полиномы Джонса и инварианты трехмерных пространств. Прежде всего раскрашенные полиномы Джонса данного узла допускают разложение по инвариантам топологически нетривиального трехмерного пространства, определенным образом связанного с узлом.

*А также, соответственно, полиномы Хованова [143] и Хованова–Рожанского [144], изначально связанные с гомологиями узлов, что гораздо более любопытно, но выходит далеко за рамки нашего обсуждения.

Асимптотика в корнях единицы и гипотеза объема. Существует также довольно прямолинейный способ связать с узлом нетривиальное трехмерное пространство: рассмотреть пространство вложения узла (как правило, «обычное» \mathbb{R}_3) за вычетом самого узла. В некоторых случаях удается определить (*гиперболический*) объем такого пространства. Согласно популярной гипотезе та же величина входит в показатель экспоненты, описывающей асимптотику полинома Джонса в корнях единицы в пределе старших раскрасок [132, 139].

Преобразования пространства и асимптотические условия на полиномы узлов. Более того, асимптотический предэкспоненциальный ряд для полинома Джонса в том же пределе обладает любопытными свойствами [132]. Один из интересных вопросов — можно ли выразить полиномы Джонса через «ковариантные» функции на пространствах старших размерностей (модулярные формы) и каким образом допустимые преобразования этих пространств проявляются на уровне полиномов Джонса [82].

Модель топологических вершин. Близкий по духу подход возникает в комплексе идей о связи теории Черна–Саймонса с различными моделями теории струн [61]. Мы остановимся на одном примере, в котором построения наиболее близки к последовательной математической конструкции.

Речь идет о так называемой теории топологических вершин (см. ссылки в [133]). Модель определена как топологическая квантовая теория поля в классическом смысле термина [28] — на языке диаграмм Фейнмана и тождеств Уорда, которые можно рассматривать как условия топологической инвариантности.

С описанными выше геометрическими конструкциями модель топологических вершин роднит два свойства. Во-первых, в последнем случае сама модель связана с диаграммой, которая должна задавать узел (хотя как именно — известно лишь в частных случаях) и в то же время «скелет» (торическую диаграмму) многомерной поверхности (снабженной весьма замысловатыми дополнительными структурами). Во-вторых, при этом можно отдельно рассматривать алгебру диаграмм модели (это так называемая алгебра Динга–Йохара–Мики (ДИМ)) и ее представления.

Система рекуррентных соотношений (типа формул умножения, см. п. 6.1) для моделей топологических вершин дает возможность для явных вычислений в рамках этой конструкции. В частности, на момент написания данного текста удалось установить конкретное соответствие полиномов узлов и топологических вершин для зацепления Хопфа ($L_{2a1}/2_1^1$ в [37]) [133], а также исследовать проблему подобного соответствия для неторического зацепления $L_{8n8}/8_3^4$ (в [37]) [99] (в работах даны необходимые ссылки).

Модель Экхольма. Наконец, совершенно загадочным выглядит появление раскрашенных полиномов узлов в контексте контактной геометрии [128]. Соответствующая конструкция также имеет мотивацию со стороны теории струн [125].

Конкретно речь идет о выводе рекуррентных соотношений для симметрических полиномов ХОМФЛИ (см. п. 6.1) в качестве приложения отдельной самоценной конструкции [129]. Явно проработать все детали удалось (с большим трудом!) лишь в немногочисленных примерах [128]; несколько лучше дело обстоит в пределе спецполиномов ($q = 1$ в ХОМФЛИ) [129].

Особенно интригует, что сама исходная конструкция до сих пор выглядела труднодоступной для анализа и совершенно неприступной для явных вычислений, а связь с системой симметрических полиномов узлов может быть проявлением скрытой в основе более простой структуры.

6.3.5. Полиномы узлов и квантовое запутывание. Отдельного упоминания заслуживает сюжет, связанный с возможной ролью теории узлов при квантовых вычислениях (см., например, [145] и приведенные там ссылки). Как и в большинстве «физико-узловых» сюжетов, связь здесь проходит через группу кос (либо ее обобщение) и ее представления с помощью \mathcal{R} -матриц.

В самой идее квантовых вычислений [13, 146] «программа» связана с волновой функцией *запутанного* состояния системы квантовых частиц. Традиционно такие состояния описывают с помощью матриц плотности [15] (классическим аналогом является матрица Стокса для частично поляризованного света [24]).

С другой стороны, запутанные состояния можно описывать с помощью кос (или других подобных диаграмм) и, как следствие, связывать с полиномами заданных таким образом узлов. Соответствующие матрицы плотности можно связать с вершинными операторами в тензорных выражениях для полиномов (см. разд. 3). В результате такой подход позволяет проследить связь между узлом и квантовым вычислением.

Другим источником вдохновения здесь служит идея физической реализации квантового компьютера с помощью неабелевых анионов, которые, в свою очередь, могли бы возникать в трехмерной теории Черна–Саймонса [147] (стоящей во главе угла физической интерпретации полиномов узлов, см. разд. 2).

Благодарности. Эта работа во многом обязана своим появлением А. Ю. Морозову и А. Д. Миронову, много лет кропотливо направляющим научную работу автора, а также Е. С. Суловой и В. В. Слепцовой (Насоновой), самоотверженно создающим условия для этой работы.

Спасибо Э. Т. Ахмедову, П. И. Дунину-Барковскому, Д. В. Васильеву, Е. А. Выродову, Д. В. Галахову, А. А. Морозову, А. Ю. Орлову, И. В. Полюбину, А. В. Пополитову, А. А. Рослому и А. В. Слепцову за проявленный интерес к работе, внимательное прочтение черновиков к настоящему тексту и многочисленные критические замечания. Автор также благодарен Н. Я. Амбургу, Г. Б. Аминову, С. Б. Артамонову, И. А. Даниленко, А. В. Забродину, О. С. Круглинской, Н. А. Немкову, С. А. Миронову, Ш. Р. Шакирову и другим

участникам семинара лаборатории методов математической физики ИТЭФ за регулярные увлекательные и полезные обсуждения.

Спасибо всем людям, не перечисленным выше, но открывшим автору путь в науку, в особенности А. А. Абрикосову, Д. А. Александрову, М. В. Данилову, Н. В. З. Нозику, Н. Острикову, В. П. Слободянину, Т. В. Углову, В. В. Шанькову и С. А. Шаракину.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 16-12-10344).

Приложение 1 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ГРУППЫ $SU(2)$: ПОЛЕ БАЗИСНЫХ ТРОЕК

Здесь мы опишем простейшую группу, которая годится на роль калибровочной группы мультиплетной ТЧС. Эта группа называется $SU(2)$: ее элементами являются матрицы U с комплексными элементами, удовлетворяющие условиям* $\det U = 1$ (**S**pecial) и $U^\dagger U = \mathbb{I}$ (**U**nitary), размером 2×2 . Оба свойства сохраняются при умножении матриц, т. е. такие матрицы образуют группу относительно умножения. Всякую матрицу $U \in SU(2)$ можно записать в виде [148]

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & -a^* \end{pmatrix}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C} : aa^* + bb^* = 1. \quad (\text{П1.1})$$

Группа $SU(2)$ — простейшая неабелева группа Ли. «Неабелева» означает, что группа существенно отличается от группы вещественных чисел по умножению, а «Ли» — что всякое конечное калибровочное преобразование, соответствующее некоторому элементу группы, можно представить как экспоненту от элемента алгебры, т. е. как композицию бесконечного числа *одинаковых* бесконечно малых преобразований, причем все возможные бесконечно малые преобразования для данной группы образуют линейное пространство (более точные определения см. в [148]).

Группа $SU(2)$ имеет изящную геометрическую интерпретацию, которая называется кватернионным представлением группы вращений** [149]. А именно: пусть повороту вокруг оси с единичным вектором \vec{n} на угол ψ соответствует матрица

$$\begin{aligned} \Omega(\vec{n}, \psi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi + in_z \sin \psi & (n_x + in_i) \sin \psi \\ (n_x - in_y) \sin \psi & \cos \psi - in_z \sin \psi \end{pmatrix} = \\ &= \cos \psi \mathbb{I} + \sin \psi \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \in SU(2), \quad \vec{n} \equiv (n_x, n_y, n_z). \quad (\text{П1.2}) \end{aligned}$$

Здесь и далее \dagger означает эрмитово сопряжение: $U_{ij}^\dagger = U_{ji}^$, где $*$ — комплексное сопряжение.

**В основе лежит теорема о двойном накрытии группы вращений $SO(3)$ группой $SU(2)$ [148].

Всякую матрицу вида (П1.1) можно записать также в виде (П1.2). Нетривиальный факт состоит в том, что при этом композиции поворотов соответствует произведение их матриц (П1.2) [148].

Таким образом, матрицу $\Omega(x, y, z) \in SU(2)$, элементы которой непрерывно зависят от координат точки (x, y, z) , можно представить в виде тройки базисных векторов, полученной из реперной тройки, например, произвольно заданной в точке $(0, 0, 0)$ путем поворота, соответствующего матрице $\Omega(x, y, z)$ по формуле (П1.2). Можно также рассматривать такое поле матриц $SU(2)$ как поле спинов, т. е. расположить в каждой точке (x, y, z) асимметричный волчок так, что положение его собственных осей совпадает с базисной тройкой для матрицы $\Omega(x, y, z)$ [149].

Геометрическое представление также помогает записать произвольное преобразование (П1.2) как композицию бесконечного числа одинаковых бесконечно малых преобразований — поворотов вокруг оси \vec{n} на угол $\delta\psi = \psi/N \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$). А именно, малый поворот можно представить как сумму тождественного преобразования и линейной комбинации матриц Паули (5.15):

$$\Omega(\vec{n}, \delta\psi) \sim \begin{pmatrix} 1 + in_z\delta\psi & (n_x + in_i)\delta\psi \\ (n_x - in_y)\delta\psi & 1 - in_z\delta\psi \end{pmatrix} = \mathbb{I} + \delta\psi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{П1.3})$$

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \equiv n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z.$$

Тогда, поскольку конечный поворот является композицией малых, должно иметь место соотношение $\Omega(\vec{n}, \delta\psi) = \Omega(\vec{n}, \psi)^N$, из которого следует выражение

$$\begin{aligned} \Omega &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{I} + \frac{\psi}{N} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right)^N = \exp(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^k}{k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{I}}{2k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{(2k+1)!} = \cos \psi \mathbb{I} + \sin \psi \vec{n} \cdot \vec{\sigma}. \quad (\text{П1.4}) \end{aligned}$$

При выводе (П1.4) мы воспользовались определением матричной экспоненты* [150] и тождеством $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ для матриц (5.15). Представление для Ω в виде матричной экспоненты (П1.4) отражает важный факт: группа $SU(2)$ является группой Ли. При этом матрицы малых поворотов, которые образуют линейное пространство с базисом (5.15), задают представление соответствующей алгебры Ли — \mathfrak{su}_2 [148].

* Определена как обобщение обыкновенной экспоненты, матричная экспонента сохраняет ряд свойств первой, в частности формулу предельного перехода и разложение в формальный ряд, использованные в (П1.4). Окончательное выражение для Ω в виде (П1.4) обобщает числовую формулу Эйлера: $e^{i\psi} = \cos \psi + i \sin \psi$.

Приложение 2 ЯВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В ТЧС

Здесь мы поясним некоторые тонкости касательно приведенных в пп. 5.1.1 и 5.3 выражений для функций Грина.

П2.1. Лоренцева калибровка. Для начала покажем, что подынтегральное выражение в интеграле числа зацеплений из п. 5.1.1 является функцией Грина абелевой ЧС в калибровке Лоренца ($\partial_k A_k = 0$). Функция Грина по определению удовлетворяет *интегральному* уравнению

$$\epsilon^{kji} \partial_j A_i(x) = 4\pi J^k(x) + \text{граничные условия}, \quad (\text{П2.1})$$

$$\Downarrow \\ A_i(x) = \int d^3 y G_{ij}(x-y) J^j(y) = \int d^3 y J^j(y) G_{ji}(y-x). \quad (\text{П2.2})$$

При этом граничные условия для G те же, что и для полей $A_i(x)$: например, функция $G_{ij}(x)$ регулярна во всем пространстве за исключением области, занятой источниками поля, и обращается в нуль на бесконечности. Кроме того, произвол в определении (П2.2) в виде возможности добавить к подынтегральному выражению полную производную позволяет наложить на функцию Грина то же калибровочное условие, что и на поля $A_i(x)$: $\partial^i G_{ij}(x-y) = \partial^j G_{ij}(x-y) = 0$. Далее, переписав (П2.1) в виде $\partial_i A_j - \partial_j A_i = 4\pi \epsilon_{ijk} J^k$ и взяв дивергенцию от обеих частей, получаем $\partial^2 A_i = 4\pi \epsilon_{ijk} \partial^j J^k$ при условии $\partial_i A^i = 0$. Точно такое же равенство будет следовать из (П2.2), если функция Грина удовлетворяет *дифференциальному* уравнению $\partial^2 G_{ij}(x-y) = 4\pi \epsilon_{ijk} \partial^k \delta(x-y)$ (следует помнить, что оператор $\partial \equiv d/dx$ не действует на $J^k(y)$). Последнее уравнение вместе с граничными и калибровочными условиями однозначно определяет функцию Грина $G_{ij}(x-y)$ [86]. Следовательно, решение этого уравнения,

$$G_{ij}(x-y) = 4\pi \epsilon_{ijk} \partial^k \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (\text{П2.3})$$

удовлетворяющее всем перечисленным условиям, должно удовлетворять также интегральному уравнению (П2.2). Отметим, что при этом функция Грина *не* обязательно удовлетворяет классическим уравнениям движения в *дифференциальной* форме: из определения (П2.2) следует лишь, что

$$\epsilon^{kji} \partial_j G_{il}(x-y) = 4\pi \delta_l^k \delta(x-y) + \partial^k f_l \quad (\text{П2.4})$$

для некоторой функции $f_l(x)$, достаточно быстро убывающей на бесконечности.

П2.2. Голоморфная калибровка. Теперь напомним пару способов убедиться, что «элементарные множители» в табл. 6 являются функциями Грина

уравнения (5.45). Первый способ сводится к применению определения производной по голоморфной координате z :

$$\partial_z f(z, \bar{z}) \equiv \lim_{|C| \rightarrow 0} \frac{1}{|C|} \oint_{z \in C} f(z, \bar{z}) dz. \quad (\text{П2.5})$$

Второй способ состоит в том, чтобы перейти от функции одного комплексного переменного к паре двумерных вещественных векторных полей (одно — функция другого):

$$\begin{aligned} \partial_z u &\equiv (\partial_x + i\partial_y)(u_x - iu_y) = \operatorname{div} \vec{u} + i \operatorname{rot} \vec{u}, \\ \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\vec{r}}{r^2}, \\ \Gamma_{\partial G} \frac{\vec{r}}{r^2} &= 0, \quad \Phi_{\partial G} \frac{\vec{r}}{r^2} = \delta_{0 \in G}. \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

Приложение 3 ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ «ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВКЛАДОВ» В ИНТЕГРАЛ КОНЦЕВИЧА

Здесь приведем дальнейшие иллюстрации к основным свойствам ИК, обсуждавшимся в п. 5.6.

Ниже мы подробно разберем вычисление ИК для трех различных контуров. В первом случае получится единичный оператор, в двух других — операторы двух «универсальных элементарных вкладов» в ИК (в последнем случае ограничимся первыми ненулевыми членами). Эти три случая в определенном смысле являются исчерпывающими: искомый инвариант произвольной замкнутой кривой можно представить как тензорную свертку ИК трех перечисленных типов [66] (хотя такое вычисление уже в простейших случаях наталкивается на серьезные технические трудности [92]).

Отметим, что в основе представления ИК в виде свертки «универсальных элементарных вкладов» лежит свойство композиции (см. п. 5.4.1) — существенное общее свойство ИК и упорядоченной экспоненты — и, как следствие, ВС в ТЧС (см. п. 5.4).

Несмотря на то, что разобранные ниже примеры уже стали хрестоматийными (см., например, [66] и [92]), мы еще раз остановимся на них, чтобы прояснить некоторые тонкости, существенные в контексте нашего изложения и, на наш взгляд, до сих пор обойденные вниманием в литературе.

П3.1. Тривиальные вклады. Уже из вида функции Грина (П2.6) следует, что все интегралы по вертикальным отрезкам контура обращаются в нуль. Также обращаются в нуль все интегралы по замыкающим дугам (область III на рис. 9), поскольку точки всяких двух таких дуг можно попарно соединить

горизонтальными отрезками. Как следствие, для всяких (необязательно одно-связных) контуров описанных типов единственный ненулевой член ряда ИК равен единичному оператору:

$$S_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{l \text{ сомножителей}}, \text{ если } \dot{z}(t) = 0 \text{ для } (t, z, \bar{z}) \in \gamma_k, \text{ где } k = \overline{1, l}, \text{ (ПЗ.1)}$$

для набора из l параллельных отрезков, и

$$Q = \tilde{Q} = \underbrace{\mathbb{I} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}}_{m \text{ сомножителей}} \quad (\text{ПЗ.2})$$

для набора из m попарно-параллельных замыкающих дуг.

ПЗ.2. Вклады перекрестков. Первый нетривиальный «универсальный элементарный оператор» отвечает ИК по области, где две дуги переплетаются (область I на рис. 9). Соответствующая область на плоской проекции узла содержит точку-перекресток. Отвечающий такой области оператор является тензором типа $(2, 2)$ (см. п. 5.4.1), который имеет весьма простой вид и может быть явно вычислен в произвольном порядке разложения [66]. Результат обычно записывают в компактном символическом виде

$$R \equiv \left\langle \text{Pexp} \int_{\gamma} dx^{\mu} A_{\mu}(x) \otimes \text{Pexp} \int_{\gamma'} dx'^{\nu} A_{\nu}(x') \right\rangle = q^{T_a \otimes T_a}, \quad (\text{ПЗ.3})$$

смысл которого мы поясним ниже.

Напомним, что при определении вильсоновского среднего (в соответствующей калибровке) как гауссова среднего эта величина сводится к сумме по спариваниям (см. обсуждение и ссылки в п. 5.4.2), причем после регуляризации путем оснащения (см. [39] и п. 5.5) в ряд следует включить только спаривания, аргументы которых принимают значения на *разных* дугах. В результате, вклад, например, четвертого порядка оказывается равен

$$\left\langle \left(\mathbb{I} + \int_{\gamma} dx^{\mu} A^{\mu}(x) + \int_{\gamma} dx^{\mu} \int_0^x dy^{\nu} A_{\mu}(x) A_{\nu}(y) + \dots \right) \otimes \right. \\ \left. \otimes \left(\mathbb{I} + \int_{\gamma'} dx'^{\mu} A_{\mu}(x') + \int_{\gamma'} dx'^{\mu} \int_0^{x'} dy'^{\nu} A_{\mu}(x') A_{\nu}(y') + \dots \right) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \int_{\gamma} dx'^{\mu} \int_{\gamma'} dx^{\mu} \langle A_{\mu}^a(x) A_{\nu}^b(x') \rangle T^a \otimes T^a + \\
&+ \int_{\gamma} dx^{\mu} \int_0^x dy^{\nu} \int_{\gamma'} dx'^{\mu} \int_0^{x'} dy'^{\nu} \{ \langle A_{\mu}^a(x) A_{\rho}^c(x') \rangle \langle A_{\nu}^b(y) A_{\sigma}^d(y') \rangle + \\
&\quad + \langle A_{\nu}^b(y) A_{\rho}^c(x') \rangle \langle A_{\mu}^a(x) A_{\sigma}^d(y') \rangle \} T^a T^b \otimes T^c T^d + \dots \quad (\text{ПЗ.4})
\end{aligned}$$

На следующем шаге важно, что функция Грина разлагается в произведение зависящей от координат скалярной функции и не зависящего от координат тензорного множителя. Отсюда следует аналогичное свойство оператора перекрестка:

$$R^{(k)} = \sum_{\sigma \in \text{perm}(k)} T_{a_1 \dots a_k} \otimes T_{\sigma(a_1 \dots a_k)}, \quad (\text{ПЗ.5})$$

где мультииндекс σ пробегает все перестановки из k элементов. Более того, все скалярные множители порядка k оказываются равны степени k одной и той же для всех k величины, с точностью до коэффициента $1/k!$. Описанные свойства оператора перекрестка и стоят за символической записью (ПЗ.3).

Теперь вычислим координатные сомножители явно. Вводя простые и штрихованные переменные для параметризации двух переплетающихся дуг

$$\gamma: x = x(t) \equiv (t, z(t), \bar{z}(t)), \quad \gamma': x' = x'(t) (t, z'(t), \bar{z}'(t)) \quad (\text{ПЗ.6})$$

и используя явное выражение для координатного множителя в функции Грина $g_{0z}(x(t) - x'(t')) = \frac{\delta(t - t')}{z(t) - z'(t)}$, в случае вклада четвертого порядка получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 dt \int_0^t ds \int_0^1 dt' \int_0^{t'} ds' \dot{x}^{\mu}(t) \dot{x}'^{\rho}(t') g_{\mu\rho}(x(t) - x'(t')) \times \\
&\quad \times \dot{y}^{\nu}(s) y'^{\sigma}(s') g_{\nu\sigma}(y(s) - y'(s')) = \\
&= \int_0^1 dt \int_0^t ds h_{\mu\rho} \dot{x}^{\mu}(t) \dot{x}'^{\rho}(t) f(x(t) - x'(t)) h_{\nu\sigma} \dot{y}^{\nu}(s) y'^{\sigma}(s) f(y(s) - y'(s)) = \\
&= \int_0^1 dt \int_0^t ds \frac{(\dot{z}(t) - \dot{z}'(t))(\dot{z}(s) - \dot{z}'(s))}{(z(t) - z'(t))(z(s) - z'(s))} = \frac{1}{2} \log^2 \frac{z(0) - z'(0)}{z(1) - z'(1)}, \quad (\text{ПЗ.7})
\end{aligned}$$

где \log означает многозначную функцию $\log \vartheta(t) \equiv \int_0^1 dt (\dot{\vartheta}(t)/\vartheta(t))$. Члены

старших порядков вычисляются аналогично:

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} dx_1^{\mu_1} \int_0^{x_1} dx_2^{\mu_2} \dots \int_0^{x_{k-1}} dx_k^{\mu_k} \int_{\gamma'} dx_1^{\nu_1} \int_0^{x_1'} dx_2^{\nu_2} \dots \int_0^{x_{k-1}'} dx_k^{\nu_k} \times \\ & \quad \times g_{\mu_1 \nu_{m_1}}(x_1 - x_1') g_{\mu_2 \nu_{m_2}}(x_2 - x_2') \dots g_{\mu_k \nu_{m_k}}(x_k - x_k') = \\ & = \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{k-1}} dt_k \frac{(\dot{z}(t_1) - \dot{z}'(t_1))(\dot{z}(t_2) - \dot{z}'(t_2)) \dots (\dot{z}(t_k) - \dot{z}'(t_k))}{(z(t_1) - z'(t_1))(z(t_2) - z'(t_2)) \dots (z(t_k) - z'(t_k))} = \\ & = \frac{1}{k!} \log^k \frac{z(0) - z'(0)}{z(1) - z'(1)}. \end{aligned}$$

Наконец, получаем ответ:

$$R = e^{\hbar T_a \otimes T^a} \equiv \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hbar^k}{k!} \sum_{\sigma \in \text{perm}_k} T_{a_1 \dots a_k} \otimes T_{\sigma(a_1 \dots a_k)}. \quad (\text{П3.8})$$

П3.3. Ассоциаторы. Второй нетривиальный «универсальный элементарный вклад» устроен гораздо сложнее — соответствующий оператор известен как *ассоциатор Дринфельда* [66]. Этот оператор получается при вычислении ИК по контуру из трех дуг: две из них сколь угодно близко на верхней границе области, а две других — на нижней (область II на рис. 9). Такому фрагменту отвечает тензор типа (3, 3) (см. п. 5.4.1):

$$\Phi \equiv \left\langle \text{Pexp} \int_{\gamma} dx^{\mu} A_{\mu}(x) \otimes \text{Pexp} \int_{\gamma'} dx^{\nu} A_{\nu}(x') \otimes \text{Pexp} \int_{\gamma''} dx^{\rho} A_{\rho}(x'') \right\rangle. \quad (\text{П3.9})$$

Чтобы продемонстрировать разницу между оператором перекрестка и ассоциатором Дринфельда, вычислим в случае последнего простейший нетривиальный вклад в ИК. Такой вклад возникает из спаривания

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma} dx^{\mu} \int_0^x dy^{\nu} \int_{\gamma'} dx'^{\mu} \int_{\gamma''} dy'^{\nu} \times \\ & \quad \times \langle A_{\mu}^a(x) A_{\rho}^c(x') \rangle \langle A_{\nu}^b(y) A_{\sigma}^d(y') \rangle T^a \otimes T^b T^c \otimes T^d, \quad (\text{П3.10}) \end{aligned}$$

которое, в свою очередь, входит в виковское разложение коррелятора (см. п. 5.4.1)

$$\left(\int_{\gamma} dx^{\mu} A_{\mu}(x) \right) \otimes \left(\int_{\gamma'} dx'^{\nu} \int_0^{x'} dy'^{\rho} A_{\nu}(x') A_{\rho}(y') \right) \otimes \left(\int_{\gamma} dx^{\sigma} A_{\sigma}(y) \right). \quad (\text{П3.11})$$

Выбирая параметризацию на дугах

$$\begin{aligned}\gamma: x = x(t) &= (t, z(t), \bar{z}(t)), \\ \gamma': x = x(t) &= (t, z'(t), \bar{z}'(t)), \\ \gamma'': x = x(t) &= (t, z''(t), \bar{z}''(t)),\end{aligned}\tag{П3.12}$$

для соответствующего координатного множителя получаем

$$\int_0^1 \int_0^t ds dt \frac{(\dot{z}(t) - \dot{z}'(t))(\dot{z}'(s) - \dot{z}''(s))}{(z(t) - z'(t))(z'(s) - z''(s))}.\tag{П3.13}$$

Приняв во внимание, что первая и третья дуги имеют вид вертикальных отрезков, и положив расстояние между ними равным единице:

$$z''(t) = 1 + z(t),\tag{П3.14}$$

приводим последнее выражение к виду

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^t ds dt \frac{(\dot{z}(t) - \dot{z}'(t))(\dot{z}(s) - \dot{z}'(s))}{(z(t) - z'(t))(1 + z(s) - z'(s))} &= \\ &= \int_0^1 dt \frac{\dot{z}(t) - \dot{z}'(t)}{z(t) - z'(t)} \log \frac{1 + z(t) - z'(t)}{1 + z(0) - z'(0)} = \\ &= \text{Li}_2(z'(0) - z(0)) - \text{Li}_2(z'(1) - z(1)) - \\ &\quad - \log(1 + z(0) - z'(0)) \log \frac{z(1) - z'(1)}{z(0) - z'(0)},\end{aligned}\tag{П3.15}$$

где функция *дилогарифм* определена как

$$\text{Li}_2(x) \equiv - \int_0^x \frac{dy}{y} \log(1 - y) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{k-1}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k^2}.\tag{П3.16}$$

В пределе, когда расстояние между близкими дугами на границах областей стремится к нулю, формула (П3.15) заметно упрощается:

$$\boxed{z'(0) \rightarrow z(0), \quad z'(1) \rightarrow z''(1) \Rightarrow \text{ответ} \rightarrow \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}},\tag{П3.17}$$

где мы воспользовались равенствами $\text{Li}_2(0) = 0$, $\text{Li}_2(1) = \zeta(2)$. Входящая в последнее равенство ζ -функция Римана определена как ряд $\zeta(m) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} 1/k^m$

и может быть явно вычислена с помощью производящей функции

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = 1 - \zeta(2)x^2 + \dots \quad (\text{П3.18})$$

Замечательное свойство ассоциатора Дринфельда состоит в том, что этот оператор можно выразить из решения уравнения Книжника–Замолодчикова, которому удовлетворяют конформные блоки ВЗВН [65] (различные возникающие при этом тонкости подробно разбираются в [68]). Это свойство служит связью между ИК, который можно интерпретировать как ряд теории возмущений для ВС в голоморфной калибровке, и непертурбативным определением ВС через теорию ВЗВН (см., соответственно, пп. 5.6 и 4.1, а также приведенные там ссылки).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А. Ю. Теория струн — что это такое? // УФН. 1992. Т. 162, № 8. С. 83–175.
2. Kauffman L. H. The Interface of Knots and Physics. Singapore: World Sci., 2001. 788 p.
3. Witten E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial // Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 351–399.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1976. 768 с.
5. Пескин М. Е., Шредер Д. В. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. 784 с.
6. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S. Pseudoparticle Solutions of the Yang–Mills Equations // Phys. Lett. B. 1975. V. 59. P. 85–87.
7. Поляков А. М. Калибровочные поля и струны. Ижевск: Изд-во Удмурт. ун-та, 1999. 312 с.
8. Polyakov A. M. Quark Confinement and Topology of the Gauge Fields // Nucl. Phys. B. 1977. V. 120. P. 429–458.
9. Рубаков В. Классическая теория калибровочных полей. М.: Едиториал УРСС, 1999. 336 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
11. Zhang Y., Tan Y.-W., Stormer H. L., Kim P. Experimental Observation of the Quantum Hall Effect and Berry’s Phase in Graphene // Nature. 2005. V. 438. P. 201–204.
12. Stern A. Anyons and the Quantum Hall Effect — a Pedagogical Review // Ann. Phys. 2008. V. 323. P. 204–249.
13. Китаев А., Шень А., Вялый М. Классические и квантовые вычисления. М.: МЦНМО, 1999. 192 с.
14. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. С. 96.
15. Елютин П. В., Кривченков В. Д. Квантовая механика. М.: Наука, 1974. 336 с.

16. *Вайнштейн А. И., Захаров В. И., Новиков В. А., Шифман М. А.* Инстантонная азбука // УФН. 1982. Т. 136. С. 553–591.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Курс теоретической физики. Т. 5. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
18. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Едиториал УРСС, 2015. Т. 1. 336 с.
19. *Клеменс Г.* Мозаика теории комплексных кривых. М.: Мир, 1984. 160 с.
20. *Вятчанин С. П.* Конспект лекций по курсу «Радиофизика». М.: Изд-во физ. факультета Моск. ун-та, 2005. 113 с; <http://hbar.phys.msu.ru/hbar/pages/vyat/conswork.pdf>.
21. *Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М.* Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М.: Наука, 1971. 544 с.
22. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984. 600 с.
23. *Волюшин М. В., Тер-Мартirosян К. А.* Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1984. 296 с.
24. Wikipedia. Параметры Стокса // https://ru.wikipedia.org/wiki/Параметры_Стокса (дата обращения: 03.06.18).
25. *Galakhov D., Mironov A., Morozov A.* Wall Crossing Invariants: from Quantum Mechanics to Knots // ZhETF. 2015. V. 147. P. 623–663; arXiv: hep-th/1410.8482.
26. *Bloch S., Vanhove P.* The Elliptic Dilogarithm for the Sunset Graph // J. Number Theory. 2015. V. 148. P. 328–364; arXiv: hep-ph/1309.5865.
27. *Мантуров В. О.* Теория узлов. М.; Ижевск: Изд-во ин-та комп. исслед., 2005. 512 с.
28. *Atiyah M. F.* New Invariants of Three and Four Dimensional Manifolds // Proc. Symp. Pure Math. 1988. V. 48. P. 285–299.
29. *Morozov A., Smirnov A.* Chern–Simons Theory in the Temporal Gauge and Knot Invariants through the Universal Quantum R -Matrix // Nucl. Phys. B. 2010. V. 835. P. 284–313; arXiv: hep-th/1001.2003.
30. *Aamand Nanna Havn.* Chern–Simons Theory and the R -Matrix. arXiv: hep-th/1905.03263.
31. *Korepin V. E., Bogolyubov N. M., Izergin A. G.* Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 576 p.
32. *Сазерленд Б.* Замечательные модели. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2008. 388 с.
33. *Baxter R. J.* Exactly Solved Models in Planar Mechanics. London: Acad. Press, 1989. 502 p.
34. *Di Francesco P., Mathieu P., Sènèchal D.* Conformal Field Theory. New York: Springer, 1997. 890 p.
35. *Korepanov I. G., Sharygin G. I., Talalaev D. V.* Cohomology of the Tetrahedral Complex and Quasi-Invariants of 2-knots. arXiv: math-ph/1510.03015.
36. *Talalaev D. V.* Towards Integrable Structure in 3d Ising Model. arXiv: math-ph/1805.04138.
37. *Bar-Natan D., Scott M. et al.* The Knot Atlas. <http://katlas.org> (дата обращения: 24.09.15).

38. *Kauffman L.* State Models and the Jones Polynomial // *Topology*. 1987. V. 26. P. 395–407.
39. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Perturbative Aspects of Chern–Simons Theory // *Phys. Lett. B*. 1989. V. 227. P. 111–117.
40. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Wilson Lines in Chern–Simons Theory and Link Invariants // *Nucl. Phys. B*. 1990. V. 330. P. 575–607.
41. *Alvarez M., Labastida J. M. F.* Analysis of Observables in Chern–Simons Perturbation Theory // *Nucl. Phys. B*. 1993. V. 395. P. 198–238; arXiv: hep-th/9110069.
42. *Axelrod S., Singer I. M.* Chern–Simons Perturbation Theory // *Proc. of XX DGM Conf.* New York: World Sci., 1991. P. 3–45; arXiv: hep-th/9110056.
43. *Fröhlich J., King C.* The Chern–Simons Theory and Knot Polynomial // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 126. P. 167–199.
44. *Labastida J. M. F., Pérez E.* Kontsevich Integral for Vassiliev Invariants in the Holomorphic Gauge // *J. Math. Phys.* 1998. V. 39. P. 5183–5198; arXiv: hep-th/9710176.
45. *Labastida J. M. F.* Chern–Simons Gauge Theory: Ten Years after // *AIP Conf. Proc.* 1999. V. 484. P. 1–40; arXiv: hep-th/9905057.
46. *Elitzur Sh., Moore G., Schwimmer A., Seiberg N.* Remark on the Canonical Quantization of the Chern–Simons–Witten Theory // *Nucl. Phys. B*. 1989. V. 326. P. 108–134.
47. *Kaul R. K.* Chern–Simons Theory, Colored-Oriented Braids and Link Invariants // *Commun. Math. Phys.* 1994. V. 162. P. 289–320; arXiv: hep-th/9305032.
48. *Reshetikhin N. Yu., Turaev V. G.* Ribbon Graphs and Their Invariants Derived from Quantum Groups // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 127. P. 1–26.
49. *Freyd P., Yetter D., Hoste J. et al.* A New Polynomial Invariant of Knots and Links // *Bull. AMS*. 1985. V. 12. P. 239–246.
50. *Przytycki J. H., Traczyk P.* Invariants of Links of Conway Type // *Kobe J. Math.* 1988. V. 4. P. 115–139.
51. *Mironov A., Morozov A.* Equations on Knot Polynomials and 3d/5d Duality // *AIP Conf. Proc.* 2012. V. 1483. P. 189–211; arXiv: hep-th/1208.2282.
52. *Murakami H., Ohtsuki T., Yamada Sh.* Homfly Polynomial via an Invariant of Colored Plane Graphs // *Enseign. Math.* 1998. V. 2(44), No. 3–4. P. 325–360.
53. *Демидов Е. Е.* Квантовые группы. М.: Факториал, 1998. 128 с.; <http://old.pskgu.ru/ebooks/demidov.html>.
54. *Kirillov A. N., Reshetikhin N. Yu.* Representations of the Algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal Polynomials and Invariants of Links // *Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups*. Singapore: World Sci., 1989. P. 285–339; <https://math.berkeley.edu/reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>.
55. *Jones V. F. R.* Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials // *Ann. Math.* 1989. V. 126. P. 335–388.
56. *Witten E.* Gauge Theories and Integrable Lattice Models // *Nucl. Phys. B*. 1989. V. 322. P. 629–697.
57. *Schwarz A. S.* New Topological Invariants Arising in the Theory of Quantized Fields // *Бакинская междунар. топологическая конф.: Тез. докл. Т. 2.* Баку: Изд-во Ин-та математики и механики АН АзССР, 1987.
58. *Gawędzki K.* Conformal Field Theory: A Case Study. arXiv: hep-th/9904145.
59. *Marino M.* Lectures on Localization and Matrix Models in Supersymmetric Chern–Simons-Matter Theories // *J. Phys. A*. 2011. V. 44, No. 463001; arXiv: hep-th/1104.0783.

60. Källén J. Cohomological Localization of Chern–Simons Theory // JHEP. 2011. V. 1108, No. 008; arXiv: hep-th/1104.5353.
61. Mariño M. Chern–Simons Theory, Matrix Models and Topological Strings. Oxford: Clarendon Press, 2005. 210 p.
62. Nawata S., Ramadevi P., Zodinmawia. Colored HOMFLY Polynomials from Chern–Simons Theory // J. Knot Theory Ramifications. 2013. V. 22, No. 1350078; arXiv: hep-th/1302.5144.
63. Moore G., Seiberg N. Lectures on RCFT. RU-89-32, YCTP-P13-89. 1989.
64. Alvarez-Gaumé L., Sierra G., Gomez C. Topics in Conformal Field Theory. CERN-TH 5540. 1989.
65. Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B. Current Algebra and Wess–Zumino Model in Two Dimensions // Nucl. Phys. B. 1984. V. 247. P. 83–103.
66. Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J. Introduction to Vassiliev Knot Invariants. Cambridge Univ. Press. arXiv: math.GT/1103.5628v3.
67. Dunin-Barkowski P., Sleptsov A., Smirnov A. Explicit Computation of Drinfeld Associator in the Case of the Fundamental Representation of $gl(n)$ // J. Phys. A. 2012. V. 245, No. 385204; arXiv: hep-th/1201.0025.
68. Дроботухина Ю. В. Аналог многочлена Джоунса для зацеплений в RP_3 и обобщение теоремы Кауффмана–Мурасуги // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, № 3. С. 171–191.
69. Lin Xiao-Song. Finite Type Link Invariants of 3-manifolds // Topology. 1994. V. 33, No. 1. P. 45–71.
70. Vassiliev V. A. On Invariants and Homology of Spaces of Knots in Arbitrary Manifolds. arXiv: math.GT/9703207.
71. Kalfagianni E. Finite Type Invariants for Knots in 3-manifolds // Topology. 1998. V. 37, No. 3. P. 673–707.
72. Kirk P., Livingston Ch. Type 1 Knot Invariants in 3-manifolds // Pacific J. Math. 1998. V. 182, No. 1. P. 305–331.
73. Bataineh Kh., Zaytoon M. A. Vassiliev Invariants of Type One for Links in the Solid Torus // Topology and Its Applications. 2010. V. 157. P. 2495–2504.
74. Bernard D. On the Wess–Zumino–Witten Models on the Torus // Nucl. Phys. B. 1988. V. 303. P. 77–93.
75. Ivanov D. Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard Equations on Riemann Surfaces // Intern. J. Mod. Phys. A. 1995. V. 10, No. 2507.
76. Losev S. A. Coset Construction and Bernard Equations. CERN-TH 6215-91. 1991. 17 p.
77. Ramadevi P., Govindarajan T. R., Kaul R. K. Knot Invariants from Rational Conformal Field Theories // Nucl. Phys. B. 1994. V. 422. P. 291–306; arXiv: hep-th/9312215.
78. Alekseev O., Novaes F. Wilson Loop Invariants from wn Conformal Blocks // Nucl. Phys. B. 2015. V. 901. P. 461–479; arXiv: hep-th/1505.06221.
79. Галахов Д. М., Миронов А. Д., Морозов А. Ю. $su(2)/sl(2)$ -инварианты узлов и монодромии Концевича–Сойбельмана // ТМФ. 2016. Т. 187, № 2. С. 263–282; arXiv: hep-th/1510.05366.
80. Kaul Romesh K. Chern–Simons Theory, Knot Invariants, Vertex Models and Three-Manifold Invariants // Horizons in World Physics / Eds.: R. K. Kaul et al. OVA Science Publ., 1999. V. 227; arXiv: hep-th/9804122.

81. *Garnerone S., Marzuoli A., Rasetti M.* Efficient Quantum Processing of 3-manifold Topological Invariants // *Adv. Theor. Math. Phys.* 2009. V. 13, No. 6. P. 39; arXiv: quant-ph/0703037.
82. *Calegari F., Garoufalidis S., Zagier D.* Bloch Groups, Algebraic K-theory, Units, and Nahm's Conjecture. 2017.
83. *Cheng M. C. N., Chun S., Ferrari F. et al.* 3d Modularity. arXiv: hep-th/1809.10148.
84. *Gukov S., Pei D., Putrov P., Vafa C.* 4-manifolds and Topological Modular Forms. arXiv: hep-th/1811.07884.
85. *Аминов Ю. А.* Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 160 с.
86. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. 703 с.
87. *Chern S.-S., Simons J.* Characteristic Forms and Geometric Invariants // *Ann. Math.* 1974. V. 99. P. 48–69.
88. *Ожунь Л. Б.* Лептоны и кварки. М.: Наука, 1990. 346 с.
89. Wikipedia. Ordered Exponential. https://en.wikipedia.org/wiki/Ordered_exponential (дата обращения: 03.06.18).
90. *Guadagnini E., Martellini M., Mintchev M.* Chern–Simons Holonomies and the Appearance of Quantum Groups // *Phys. Lett. B.* 1990. V. 235. P. 275–281.
91. *Kontsevich M.* Vassiliev's Knot Invariants // *Adv. Sov. Math.* 1993. V. 16, No. 2. P. 137–150.
92. *Dunin-Barkowski P., Sleptsov A., Smirnov A.* Kontsevich Integral for Knots and Vassiliev Invariants // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2013. V. 28, No. 1330025; arXiv: hep-th/1112.5406.
93. Wikipedia. Gaussian Integral. https://en.wikipedia.org/wiki/Gaussian_integral (дата обращения: 03.06.18).
94. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev Knot Invariants // *Topology.* 1995. V. 34. P. 423–472.
95. *Garoufalidis S., Lauda Aaron D., Lê Thang T. Q.* The Colored Homflypt Function is q -Holonomic // *Duke Math. J.* 2018. V. 167, No. 3. P. 397–447; arXiv: math.GT/1604.08502.
96. *Морозов А. Ю., Морозов А. А., Пополитов А. В.* Матричные модели и размерности в вершинах гиперкубов // *ТМФ.* 2017. Т. 192, № 1. С. 115–163; arXiv: hep-th/1508.01957.
97. *Bai C., Jiang J., Liang J. et al.* Differential Expansion for Link Polynomials // *Phys. Lett. B.* 2018. V. 778. P. 197–206; arXiv: hep-th/1709.09228.
98. *Морозов А. Ю.* Унитарные интегралы и связанные с ними матричные модели // *ТМФ.* 2010. Т. 162, № 1. С. 3–40; arXiv: 0906.3518.
99. *Awata H., Kanno H., Mironov A. et al.* A Non-Torus Link from Topological Vertex // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 98, No. 046018; arXiv: hep-th/1806.01146.
100. *Анохина А. С., Морозов А. А.* Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ // *ТМФ.* 2014. Т. 178. С. 3–68; arXiv: hep-th/1307.2216.
101. *Cherednik I.* Djones Polynomials of Torus Knots via Daha // *Intern. Math. Res. Not.* 2013. V. 2013, No. 23. P. 5366–5425; arXiv: math.QA/1111.6195.
102. *Cherednik I., Danilenko I.* Daha Approach to Iterated Torus Links. arXiv: math.QA/1509.08351.
103. *Gorsky E., Oblomkov A., Rasmussen J., Shende V.* Torus Knots and the Rational Daha // *Duke Math. J.* 2014. V. 163, No. 14. P. 2709–2794; arXiv: math.RT/1207.4523.

104. *Arthamonov S., Shakirov Sh.* Genus Two Generalization of a_1 Spherical Daha. arXiv: math.QA/1704.02947.
105. *Kharchev S.* Kadomtsev–Petviashvili Hierarchy and Generalized Kontsevich Model. arXiv: math-ph/9810091.
106. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* On Genus Expansion of Knot Polynomials and Hidden Structure of Hurwitz Tau-Functions // Eur. Phys. J. C. 2013. V. 73, No. 2492; arXiv: hep-th/1304.7499.
107. *Mironov A., Mironov S., Mishnyakov V. et al.* Colored Alexander Polynomials and KP Hierarchy // Phys. Lett. B. 2018. V. 783. P. 268–273; arXiv: hep-th/1805.02761.
108. *Морозов А. Ю.* Интегрируемость и матричные модели // УФН. 1994. Т. 164, № 1. С. 3–62.
109. *Stevan S.* Chern–Simons Invariants of Torus Links // Trans. AMS. 2009. V. 11. P. 2001–2024; arXiv: hep-th/1003.2861.
110. *Mironov A., Morozov A., Morozov And.* Character Expansion for HOMFLY Polynomials. II. Fundamental Representation up to Five Strands in Braid // JHEP. 2012. V. 03, No. 034; arXiv: hep-th/1112.2654.
111. *Dhara S., Mironov A., Morozov And. et al.* Multi-Colored Links from 3-strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations. arXiv: hep-th/1805.03916.
112. *Bai C., Jiang J., Liang J. et al.* Quantum Racah Matrices up to Level 3 and Multicolored Link Invariants // J. Geom. Phys. 2018. V. 132. P. 155–180; arXiv: hep-th/1801.09363.
113. *Mironov A., Morozov A., Morozov And., Sleptsov A.* Quantum Racah Matrices and 3-strand Braids in Irreps r with $|r| = 4$ // JETP Lett. 2016. V. 104. P. 56–61; arXiv: hep-th/1605.03098.
114. *Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* Colored Homfly Polynomials for the Pretzel Knots and Links // JHEP. 2015. V. 07, No. 069; arXiv: hep-th/1412.8432.
115. *Mironov A., Morozov A.* Towards Effective Topological Field Theory for Knots // Nucl. Phys. B. 2015. V. 899. P. 395–413; arXiv: hep-th/1506.00339.
116. *Mironov A., Morozov A., Morozov And. et al.* Tabulating Knot Polynomials for Arborescent Knots // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50, No. 085201; arXiv: hep-th/1601.04199.
117. *Morozov A.* Homfly for Twist Knots and Exclusive Racah Matrices in Representation [333] // Phys. Lett. B. 2018. V. 778. P. 426–434; arXiv: hep-th/1711.09277.
118. *Kononov Ya., Morozov A.* On Rectangular Homfly for Twist Knots // Mod. Phys. Lett. A. 2016. V. 31, No. 38. P. 1650223; arXiv: hep-th/1610.04778.
119. *Morozov A.* Factorization of Differential Expansion for Non-Rectangular Representations // Mod. Phys. Lett. A. 2018. V. 33, No. 12. P. 1850062; arXiv: hep-th/ 1612.00422.
120. *Morozov A.* Knot Polynomials for Twist Satellites // Phys. Lett. B. 2018. V. 782. P. 104–111; arXiv: hep-th/1801.02407.
121. *Morozov And., Sleptsov A. et al.* The Knotbook. www.knotbook.org (дата обращения: 10.06.18).
122. *Mironov A., Morozov A., Morozov And., Sleptsov A.* Racah Matrices and Hidden Integrability in Evolution of Knots // Phys. Lett. B. 2016. V. 760. P. 45–58; arXiv: hep-th/1605.04881.

123. *Mishnyakov V., Sleptsov A.* Perturbative Analysis of the Colored Alexander Polynomial and KP Soliton τ -Functions. arXiv: hep-th/1906.05813.
124. *Mironov A., Morozov A., Morozov And., Sleptsov A.* Gaussian Distribution of LMOV Numbers // Nucl. Phys. B. 2017. V. 924. P. 1–32; arXiv: hep-th/1706.00761.
125. *Ekhholm T., Kucharski P., Longhi P.* Physics and Geometry of Knots-Quivers Correspondence. arXiv: hep-th/1811.03110.
126. *Kucharski P., Reineke M., Stosic M., Suekowski P.* BPS States, Knots and Quivers // Phys. Rev. D. 2017. V. 96, No. 121902; arXiv: hep-th/1707.02991.
127. *Stosic M., Wedrich P.* Rational Links and DT Invariants of Quivers. arXiv: hep-th/1811.03110.
128. *Tobias E., Lenhard Ng.* Higher Genus Knot Contact Homology and Recursion for Colored Homfly-pt Polynomials. arXiv: math.SG/1803.04011.
129. *Ekhholm T., Etnyre J., Lenhard Ng., Sullivan M.* Knot Contact Homology // Geom. Topol. 2013. V. 17. P. 975–1112; arXiv: math.SG/1109.1542.
130. *Alexandrov A., Melnikov D.* Matrix Integral Expansion of Colored Jones Polynomials for Figure-eight Knot // Pis'ma ZhETF. 2015. V. 101, No. 1. P. 54–58; arXiv: hep-th/1411.5698.
131. *Alexandrov A., Mironov A., Morozov A., Morozov And.* Towards Matrix Model Representation of Homfly Polynomials // Pis'ma ZhETF. 2014. V. 100, No. 4. P. 297–304; arXiv: hep-th/1407.3754.
132. *Dimofte T., Gukov S., Lenells J., Zagier Don.* Exact Results for Perturbative Chern–Simons Theory with Complex Gauge Group // Commun. Num. Theor. Phys. 2009. V. 3. P. 363–443; arXiv: hep-th/0903.2472.
133. *Mironov A., Morozov A., Morozov And.* Tangle Blocks in the Theory of Link Invariants. arXiv: hep-th/1804.07278.
134. *Anokhina A., Morozov A., Popolitov A.* Nimble Evolution for Pretzel Khovanov Polynomials. arXiv: hep-th/1904.10277.
135. *Anokhina A., Morozov A.* Are Khovanov–Rozansky Polynomials Consistent with Evolution in the Space of Knots? // JHEP. 2018. V. 1804, No. 066; arXiv: hep-th/1802.09383.
136. Wikipedia. Мутация (теория узлов). [https://ru.wikipedia.org/wiki/Мутация_\(теория_узлов\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/Мутация_(теория_узлов)) (дата обращения: 05.12.18).
137. *Mironov A., Morozov A.* Universal Racah Matrices and Adjoint Knot Polynomials. I. Arborescent Knots // Phys. Lett. B. 2016. V. 755. P. 47–57; arXiv: hep-th/1511.09077.
138. Wikipedia. Schur Polynomial. https://en.wikipedia.org/wiki/Schur_polynomial (дата обращения: 11.12.18).
139. *Миронов А. Д., Морозов А. Ю., Слепцов А. В.* Разложение по родам для полиномов ХОМФЛИ // ТМФ. 2013. Т. 177, № 2. С. 179–221; arXiv: hep-th/1303.1015.
140. *Papenbrock T., Weidenmueller H. A.* Random Matrices and Chaos in Nuclear Spectra // Rev. Mod. Phys. 2007. V. 79. P. 997–1013; arXiv: nucl-th/0701092.
141. *Dunin-Barkowski P., Kramer R., Popolitov A., Shadrin S.* Loop Equations and a Proof of Zvonkine's qr-ELSV Formula. arXiv: hep-th/1905.04524.
142. *Cherednik I., Danilenko I.* Daha and Iterated Torus Knots // Algebr. Geom. Topol. 2016. V. 16, No. 2. P. 843–898; arXiv: math.QA/1408.4348.

143. *Khovanov M.* A Categorification of the Jones Polynomial // Duke Math. J. 2000. V. 101. P. 359–426.
144. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix Factorizations and Link Homology // Fund. Math. 2008. V. 199. P. 1–91; arXiv: math.QA/0401268.
145. *Melnikov D., Mironov A., Mironov S. et al.* Towards Topological Quantum Computer. arXiv: hep-th/1809.04574.
146. *Фейнман Р. Ф.* Квантово-механические ЭВМ // УФН. 1986. Т. 149. С. 671–688.
147. *Nayak Ch., Simon S. H., Stern A. et al.* Non-Abelian Anyons and Topological Quantum Computation // Rev. Mod. Phys. 2008. V. 80. P. 1083; arXiv: 0707.1889.
148. *Шапиро Д. А.* Представления групп и их применение в физике. Новосибирск: КТФ Новосибирск. гос. ун-та, 2004. С. 123; <http://ind.pskgu.ru/ebooks/shapiro-daal2.html>.
149. *Арнольд В. И.* Геометрия комплексных чисел, кватернионов и спинов. М.: МЦНМО, 2002.
150. Википедия. Экспонента матрицы. https://ru.wikipedia.org/wiki/Экспонента_матрицы (дата обращения: 03.06.18).