ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 523–530

ПРИРОСТ ЭНТРОПИИ В p-АДИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ КАНАЛАХ

Е. И. Зеленов [*]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Предложена конструкция p-адического квантового линейного бозонного гауссовского канала. Вычислен прирост энтропии такого канала, получена адельная формула для прироста энтропии.

The construction of p-adic quantum Gaussian channel is suggested. Entropy gain is calculated. Adelic formula for the entropy gain is obtained.

PACS: 03.67.-a; 03.67.Hk

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с работ [1, 2] неархимедов анализ активно применяется для построения физических моделей. Возникло целое направление в математической физике — p-адическая математическая физика. Библиографические ссылки по этому вопросу можно найти в книге [3] и обзорах [4, 5].

Статья организована следующим образом. Разд. 1 содержит необходимые факты из p-адического анализа. В разд. 2 дается определение p-адического гауссовского состояния и p-адического гауссовского линейного бозонного канала и приводятся их свойства. Материал раздела следует, в основном, работе [6], результаты приводятся без доказательства. Новые результаты изложены в разд. 3 и 4. В разд. 3 доказывается формула для величины прироста энтропии в p-адическом гауссовском канале. Разд. 4 посвящен адельной формуле для прироста энтропии и возможным ее применениям.

1. p-АДИЧЕСКИЕ ЧИСЛА И СИМПЛЕКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В настоящем разделе приводится без доказательств ряд известных фактов относительно геометрии решеток в двумерном симплектическом пространстве над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Необходимые сведения из p-адического

[*] E-mail: evgeny.zelenov@gmail.com

анализа содержатся, например, в монографии [7]. Большинство утверждений относительно геометрии решеток можно найти в книге [8].

Пусть F — двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}_p$. На пространстве F задана невырожденная симплектическая форма $\Delta : F \times F \to \mathbb{Q}_p$. Свободный модуль ранга 2 над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, рассматриваемый как подмножество F, будем называть решеткой в F. Решетка является компактным множеством в естественной топологии на пространстве F.

На множестве решеток введем отношение двойственности. Пусть L — решетка, под двойственной решеткой L^* будем понимать подмножество пространства F следующего вида: $u \in L^*$ тогда, и только тогда, когда условие $\Delta(u, v) \in \mathbb{Z}_p$ выполнено для всех $v \in L$.

Если L совпадает с L^*, то решетку L будем называть самодвойственной.

Для любой самодвойственной решетки L существует такой симплектический базис (e_1, e_2) в пространстве F, что решетка L имеет вид

$$L = \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p e_2,$$

т. е. L является единичным шаром в этом базисе.

Через $Sp(F, \Delta)$ обозначим симплектическую группу — группу невырожденных линейных преобразований пространства F, сохраняющих форму Δ. Группа $Sp(F, \Delta)$ изоморфна группе $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

На пространстве F существует единственная с точностью до нормировки трансляционно-инвариантная мера (мера Хаара). Нормировать меру будем таким образом, что мера единичного шара равна единице. Действие симплектической группы сохраняет меру, следовательно, мера любой самодвойственной решетки равна единице. Меру решетки L будем обозначать через $|L|$. Если L — самодвойственная, то, как отмечалось, $|L| = 1$, верно и обратное: если $|L| = 1$, то решетка L — самодвойственная. Легко убедиться в справедливости соотношения $|L||L^*| = 1$.

Пусть $S \in Sp(F, \Delta)$, $L \subset F$ — произвольная решетка. Как уже отмечалось, действие симплектической группы сохраняет меру, т. е. $|SL| = |L|$. Верно и обратное: если L_1, L_2 — произвольные решетки в F одинаковой меры, $|L_1| = |L_2|$, то существует симплектическое преобразование $S \in Sp(F, \Delta)$, такое, что $SL_1 = L_2$.

2. p-АДИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ БОЗОННЫЕ КАНАЛЫ

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и будем считать его антилинейным по первому аргументу.

Состояние системы описывается матрицей плотности ρ в пространстве $\mathcal{H}$. Множество всех состояний обозначим через $\mathfrak{S}$.

Через $\mathcal{B}(F)$ обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств пространства F, через $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ — алгебру ограниченных операторов на пространстве $\mathcal{H}$. Квантовая наблюдаемая M: $\mathcal{B}(F) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ есть проекторно-значная мера на $\mathcal{B}(F)$. Множество квантовых наблюдаемых обозначим через $\mathfrak{M}$.

Распределение вероятностей наблюдаемой M в состоянии ρ задается формулой Борна – фон Неймана

$$\mu_\rho^M = \operatorname{Tr}\left(\rho M(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}(F).$$

По существу, мы не выходим за рамки стандартной статистической модели квантовой механики [9], поскольку множество вещественных чисел и множество p-адических чисел борелевски изоморфны.

Пусть W — отображение из пространства F в множество унитарных операторов на пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющее соотношению

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z, z')\right) W(z + z')$$

для всех $z, z' \in F$. Здесь $\chi(x) = \exp\left(2\pi i\{x\}_p\right)$, где $\{x\}_p$ — p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Дополнительно будем считать отображение W непрерывным в сильной операторной топологии. Отображение W называется представлением канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля.

Как отмечалось ранее, состояние квантовой системы описывается матрицей плотности ρ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть в этом пространстве задано неприводимое представление ККС $\{W(z),\, z \in F\}$. Каждому оператору плотности можно поставить в соответствие функцию π_ρ на пространстве F по следующей формуле:

$$\pi_\rho(z) = \operatorname{Tr}\left(\rho W(z)\right).$$

Функция π_ρ называется характеристической функцией квантового состояния ρ и определяет это состояние однозначно. Состояние ρ восстанавливается по своей характеристической функции с помощью соотношения

$$\rho = \int\limits_F \pi_\rho(z) W(-z)\, dz.$$

Характеристическая функция квантового состояния обладает свойством Δ-положительной определенности: для любых конечных наборов $z_1, z_2, \ldots, z_n$

точек пространства F и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ комплексных чисел выполнено неравенство
$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \pi_\rho(z_i - z_j) \chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j)\right) \geqslant 0.$$

Как и в случае представления ККС над вещественным симплектическим пространством, для p-адического случая справедлив некоммутативный аналог теоремы Бохнера–Хинчина, которая устанавливает взаимно-однозначное соответствие между состояниями и Δ-положительно определенными функциями [10].

Дадим следующее определение.

Определение 1. *Состояние ρ будем называть p-адическим гауссовским состоянием, если его характеристическая функция π_ρ есть характеристическая функция некоторой решетки, т. е.*

$$\pi_\rho(z) = \mathrm{Tr}\,(\rho W(z)) = h_L(z) = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in L; \\ 0, & \text{если } z \notin L. \end{cases}$$

Определение является естественным в следующем смысле. Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(F)$, определяемое формулой

$$\mathcal{F}\,[f]\,(z) = \int\limits_F \chi\,(\Delta(z, s))\, f(s)\, ds,$$

L — решетка в F. Тогда справедлива формула

$$|L|^{-1/2} \mathcal{F}\,[h_L] = |L^*|^{-1/2} h_{L^*}.$$

Другими словами, преобразование Фурье переводит характеристическую функцию решетки в характеристическую функцию двойственной решетки с точностью до множителя. В частности, характеристическая функция самодвойственной решетки инвариантна относительно действия преобразования Фурье. В этом смысле характеристическая функция решетки является аналогом гауссовской функции в вещественном анализе.

p-адические гауссовские состояния устроены очень просто. А именно, справедливы следующие утверждения.

Предложение 1. *Для того, чтобы характеристическая функция h_L решетки L определяла квантовое состояние, необходимо и достаточно выполнение условия $|L| \leqslant 1$.*

Гауссовское состояние ρ, имеющее характеристическую функцию $\pi_\rho = h_L$, есть $|L| P_L$, где P_L — ортогональный проектор ранга $1/|L|$.

Некоторые очевидные свойства гауссовских состояний приведены ниже.

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения.*

• *Гауссовское состояние является чистым тогда, и только тогда, когда соответствующая ему решетка является самодвойственной.*

• *Энтропия гауссовского состояния, определяемого решеткой L, равна $-\log|L|$.*

• *Гауссовские состояния ρ_1 и ρ_2 унитарно эквивалентны тогда, и только тогда, когда соответствующие им решетки L_1 и L_2 имеют одинаковую меру.*

• *Энтропия гауссовского состояния определяет это состояние однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

• *Гауссовское состояние имеет максимальную энтропию среди всех состояний фиксированного ранга p^m, $m \in \mathbb{N}$.*

Будем использовать обозначение $\gamma(L)$ для оператора плотности гауссовского состояния, определяемого решеткой L. Мы рассмотрели только центрированные гауссовские состояния. Можно аналогичным образом рассмотреть гауссовские состояния $\gamma(L,\alpha)$ общего вида, которые задаются характеристической функцией вида

$$\pi_{\gamma(L,\alpha)} = \chi\left(\Delta(\alpha, z)\right) h_L(z).$$

Легко заметить, что

$$\gamma(L,\alpha) = W(\alpha)\gamma(L)W(-\alpha).$$

Пусть W — неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ — множество состояний.

По аналогии с вещественным случаем [11], линейным бозонным каналом (в представлении Шредингера) будем называть линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi : \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что характеристическая функция π_ρ любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ преобразуется по формуле

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z) \tag{1}$$

для некоторого линейного преобразования K пространства F и некоторой комплекснозначной функции k на F.

Вообще говоря, выражение (1) далеко не всегда определяет канал, для этого необходимы дополнительные условия на преобразование K и функцию k.

p-адическим гауссовским каналом будем называть линейный бозонный канал, для которого функция k есть характеристическая функция некоторой решетки $L \subset F$, т. е. $k(z) = h_L(z), z \in F$.

Справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *Пусть K — невырожденное линейное преобразование пространства F, L — решетка в пространстве F, $k(z) = h_L(z)$. В этом случае выражение (1) определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|1 - \det K|_p |L| \leqslant 1. \tag{2}$$

Заметим, что в случае $\det K = 1$ преобразование K является симплектическим и, следовательно, унитарно представимым. Далее рассматриваем случай $\det K \neq 1$.

3. ПРИРОСТ ЭНТРОПИИ

Энтропия $H(\rho)$ состояния ρ определяется следующим выражением:

$$H(\rho) = -\mathrm{Tr}\,\rho \log \rho.$$

Приростом энтропиии по определению называется следующая величина:

$$G(\Phi) = \inf_{\rho} \left(H(\Phi[\rho]) - H(\rho)\right).$$

Теорема 1. *Справедлива следующая формула для прироста энтропии p-адического гауссовского бозонного линейного канала:*

$$G(\Phi) = \log|\det K|_p.$$

Пусть K — невырожденное линейное преобразование и L — решетка. При этом считаем, что K и L задают канал, т. е. удовлетворяют условию (2). Через L_n, $n \in \mathbb{N}$, обозначим решетку $L_n = p^n L$. Заметим, что $L_n \subset L$, и при достаточно больших n выполнено условие $|L_n| < 1$, поскольку $|L_n| = p^{-n}|L|$. При всех таких n, в соответствии с предложением 1, определено гауссовское состояние $\gamma(L_n)$. Заметим также, что найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ одновременно выполнены условия $L_n \subset L$ и $K^{-1}L_n \subset L$. Не представляет труда вычислить прирост энтропии для состояния $\gamma(L_n)$, $n \geqslant N$. Действительно, из определения гауссовского канала (1) непосредственно вытекает

$$\pi_{\Phi[\gamma(L_n)]}(z) = \pi_{\gamma(L_n)}(Kz)h_L(z) = h_{L_n}(Kz)h_L(z) = h_{K^{-1}p^nL}(z).$$

Таким образом,

$$\Phi\left[\gamma(L_n)\right] = \gamma\big(K^{-1}L_n\big) \tag{3}$$

и, в соответствии с предложением 1,

$$H(\Phi\left[\gamma(L_n)\right]) - H(\gamma(L_n)) = \log|\det K|_p. \tag{4}$$

Из последней формулы сразу вытекает оценка для минимального прироста энтропии: $G(\Phi) \leqslant \log|\det K|_p$.

Далее напомним (предложение 1), что оператор $|L_n|^{-1}\gamma(L_n)$ есть ортогональный проектор и последовательность этих операторов сильно сходится к единичному оператору I при $n \to \infty$. Следовательно, можно корректно определить $\Phi[I]$ (канал является регулярным), при этом из формулы (3) и предложения 1 следует $\|\Phi[I]\| = |\det K|_p^{-1}$. Далее воспользуемся оценкой минимального прироста энтропии для регулярного канала, полученной в работе [12]: $-\log\|\Phi[I]\| \leqslant G(\Phi)$. Теорема доказана.

Заметим, что выражение для прироста энтропии в p-адическом линейном бозонном гауссовском канале дается формулой, аналогичной соответствующему выражению для вещественного линейного гауссовского бозонного канала, полученному в работе [12].

4. АДЕЛЬНЫЕ КАНАЛЫ И ПРИРОСТ ЭНТРОПИИ

Пусть теперь F — двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а Δ — невырожденная симплектическая форма на F, принимающая значения в поле $\mathbb{Q}$, и K — невырожденное линейное преобразование пространства F.

Для каждого простого p построим соответствующий гауссовский линейный бозонный канал Φ_p и вычислим прирост энтропии $G(\Phi_p)$ такого канала. Также мы можем построить вещественный гауссовский линейный бозонный канал Φ_∞ и вычислить прирост энтропии $G(\Phi_\infty)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.

$$\sum_{\{p\ \text{простое}\}\cup\{p=\infty\}} G(\Phi_p) = 0.$$

Заметим, что $\det K \in \mathbb{Q}$. Дальнейшее следует из простой адельной формулы, справедливой для произвольного ненулевого рационального числа (см., например, [7]):

$$|\det K| \prod_{p\ \text{простое}} |\det K|_p = 1.$$

Теорему 2 можно интерпретировать следующим образом. Рассмотрим адельный линейный гауссовский бозонный канал, порожденный линейным преобразованием K двумерного векторного пространства над полем рациональных чисел, т. е. тензорное произведение каналов Φ_p по всем простым p и вещественного канала Φ_∞. В каждой компоненте этого адельного канала возможен нетривиальный прирост энтропии $G(\Phi_p)$, однако суммарный прирост энтропии в адельном канале нулевой. Происходит нетривиальный обмен информацией между компонентами адельного канала при сохранении общей энтропии.

Если принять гипотезу о том, что «на фундаментальном уровне наш мир... является адельным» [13], то теорему 2 можно использовать, например, для интерпретации информационного парадокса черной дыры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Volovich I. V.* Number Theory as the Ultimate Physical Theory. Preprint CERN-TH-4781-87. Geneva: CERN, 1987.
2. *Volovich I. V.* p-Adic String // Class. Quant. Grav. 1987. V. 4, No. 4. P. L83–L87.
3. *Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p-Adic Analysis and Mathematical Physics. Singapore: World Sci., 1994.
4. *Dragovich B., Khrennikov A. Yu., Kozyrev S. V., Volovich I. V.* On p-Adic Mathematical Physics // p-Adic Numbers, Ultram. Anal. Appl. 2009. V. 1, No. 1. P. 1–17; arXiv:0904.4205 [math-ph].
5. *Dragovich B., Khrennikov A. Yu., Kozyrev S. V., Volovich I. V., Zelenov E. I.* p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years // p-Adic Numbers, Ultram. Anal. Appl. 2017. V. 9. P. 87–121; arXiv:1705.04758 [math-ph].
6. *Zelenov E. I.* p-Adic Model of Quantum Mechanics and Quantum Channels // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. V. 285. P. 132–144.
7. *Schikhof W. H.* Ultrametric Calculus. An Introduction to p-Adic Analysis. Cambridge Univ. Press, 1984.
8. *Serre J.-P.* Trees. Springer-Verlag, 1980.
9. *Holevo A. S.* Statistical Structure of Quantum Theory. Springer-Verlag, 2001.
10. *Zelenov E. I.* Representations of Commutations Relations for p-Adic Systems of Infinitely Many Degrees of Freedom // J. Math. Phys. 1992. V. 33, No. 1. P. 178–188.
11. *Холево А. С.* Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.
12. *Holevo A. S.* The Entropy Gain of Infinite-Dimensional Quantum Channels. arXiv:1003.5765 [math-ph]. 2010.
13. *Manin Yu. I.* Reflections on Arithmetical Physics // Proc. of Summer School “Conformal Invariance and String Theory”, Poiana Brasov, Romania, Sept. 1–12, 1987. Acad. Press, 1989.