

# $\mathcal{R}$ -ОПЕРАЦИЯ БОГОЛЮБОВА В НЕПЕРЕНОРМИРУЕМЫХ ТЕОРИЯХ

*Д. И. Казаков* \*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

Показано, как обычная процедура  $\mathcal{R}$ -операции Боголюбова работает в неперенормируемых теориях. Ключевым моментом является замена мультипликативной перенормировки, применяемой в перенормируемых теориях, на операцию, когда константа перенормировки зависит от импульсов, по которым происходит интегрирование в подграфах. При этом условие локальности контрчленов, в точности как в перенормируемых теориях, приводит к рекуррентным соотношениям, связывающим лидирующие, подлидирующие и т. д. УФ-расходимости во всех порядках теории возмущений. Это позволяет получить обобщенные уравнения ренормгруппы для амплитуд рассеяния, которые имеют интегродифференциальный вид и приводят к суммированию лидирующих асимптотик, как и в перенормируемых теориях.

It is shown how the usual procedure of the Bogolyubov  $\mathcal{R}$ -operation works in nonrenormalizable theories. The key point is the replacement of the multiplicative renormalization used in renormalized theories with an operation where the renormalization constant depends on momenta for which the integration occurs in subgraphs. In this case, the condition of locality of counter-members, exactly as in renormalized theories, leads to recurrence relations that connect leading, subleading, etc., divergences in all orders of perturbation theory. This allows us to obtain generalized renormalization group equations for scattering amplitudes, which have an integro-differential form and lead to the summation of leading asymptotics as in renormalized theories.

PACS: 05.10.Cc

## ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель в физике элементарных частиц основана на перенормируемых взаимодействиях. Идея перенормируемости послужила определяющим началом для построения Стандартной модели, включая механизм

---

\*E-mail: kazakovd@theor.jinr.ru

спонтанного нарушения симметрии. В то же время теория гравитации принадлежит к неперенормируемому классу теорий и требует адекватного описания. Причина, по которой неперенормируемые взаимодействия считаются неприемлемыми, двояка. Во-первых, ультрафиолетовые расходимости порождают бесконечный класс новых структур, фиксация которых приводит к бесконечному произволу. Во-вторых, амплитуды рассеяния в таких теориях растут степенным образом, нарушая унитарность.

Мы предлагаем посмотреть на эту ситуацию несколько иначе и не требовать фиксации произвола у каждого нового слагаемого, а зафиксировать все выражение в целом. При этом обычная  $\overline{\text{MS}}$   $\mathcal{R}$ -операция [1], направленная на устранение УФ-расходимостей, остается неизменной. Расходимости по-прежнему устраняются введением локальных контрчленов, но, в отличие от перенормируемого случая, эта процедура не эквивалентна мультипликативной перенормировке функций Грина и параметров, а соответствует более сложной операции, когда константа перенормировки перестает быть константой, а зависит от кинематических переменных.

Что касается второй проблемы, то, основываясь на теореме Боголюбова–Парасюка [1] о локальности контрчленов, что равно справедливо в перенормируемом и неперенормируемом случае, можно получить рекуррентные соотношения, которые связывают между собой УФ-расходимости в  $n$ -м и  $(n - 1)$ -м порядках теории возмущений (ТВ), что позволит найти ведущие расходимости в любом порядке ТВ, исходя из однопетлевых выражений. Эти рекуррентные соотношения затем конвертируются в дифференциальные уравнения для полной суммы ряда ТВ, которые являются обобщением уравнений ренормгруппы на неперенормируемый случай. Решения этих уравнений соответствуют суммированию ведущих асимптотик, что позволяет изучить энергетическую зависимость амплитуд в конкретных теориях.

## 1. ПЕРЕНОРМИРОВКА, ЗАВИСЯЩАЯ ОТ КИНЕМАТИКИ

В неперенормируемых теориях в каждом порядке ТВ возникают новые структуры, содержащие высшие производные или дополнительные поля. Поэтому возникающие контрчлены нельзя поглотить в перенормировку исходного лагранжиана. Тем не менее формально процедуру устранения расходимостей и в неперенормируемом случае можно сформулировать как умножение амплитуды  $\Gamma_4$  на константу перенормировки  $Z_4$ , которая зависит от кинематических переменных и действует как оператор [2], и соответствующую перенормировку константы связи  $g$ :

$$\mathcal{A}_4 = Z_4(g^2) \mathcal{A}_4^{\text{bare}} \Big|_{g_{\text{bare}}^2 \rightarrow g^2 Z_4}, \quad (1)$$

$$g_{\text{bare}}^2 = \mu^\epsilon Z_4(g^2) g^2. \quad (2)$$

При этом константа перенормировки  $Z_4$  вычисляется поддиаграммно с помощью стандартной формулы [3]

$$Z = 1 - \sum_i \mathcal{K}\mathcal{R}'G_i, \tag{3}$$

где неполная  $\mathcal{R}$ -операция ( $\mathcal{R}'$ -операция) вычитает только подрасходимости в данном графе, а полная  $\mathcal{R}$ -операция определена соотношением

$$\mathcal{R}G = (1 - \mathcal{K})\mathcal{R}'G. \tag{4}$$

Продемонстрируем на простом примере, как работает такая операция. Рассмотрим суперсимметричную калибровочную теорию в восьми измерениях [4]. Такой экзотический выбор связан с тем, что в спинорно-киральном формализме [5] эта теория сводится к скалярным мастер-интегралам для амплитуды рассеяния, как это изображено на рис. 1, и содержит малое число диаграмм. В рамках размерной регуляризации однопетлевая диаграмма расходуется как  $1/\epsilon$  и константа перенормировки имеет вид

$$Z_4 = 1 + g^2 \frac{st}{\epsilon} \tag{5}$$

и, как видно, зависит от кинематики. При вычислении двухпетлевого контрчлена нужно учитывать умножение константы связи  $g^2$ , стоящей перед однопетлевой диаграммой, на  $Z_4$ , как это следует из (2). Но так как константа перенормировки зависит от кинематики, это не есть простое умножение. Кинематические параметры проникают внутрь однопетлевой диаграммы, как показано на рис. 2 [2].

Умножение константы связи на фактор  $Z$ , зависящий от кинематики, следует понимать как порождение новой вершины с высшими производными.

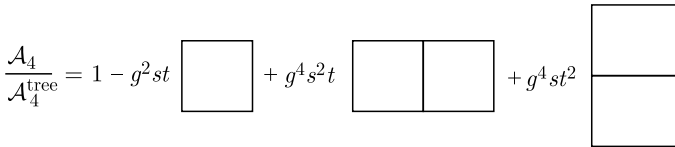


Рис. 1. Одно- и двухпетлевые диаграммы, дающие вклад в четырехточечную амплитуду в суперсимметричной калибровочной теории в спинорно-киральном формализме

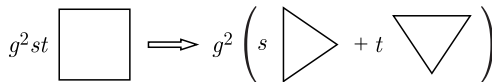


Рис. 2. Действие операции перенормировки, зависящей от кинематики

Произвол вычитания или конечный произвол в выборе константы перенормировки  $Z$  соответствует произволу в нормировке вновь возникающих операторов с высшими производными. Этот произвол оказывается бесконечным, но мы предлагаем не фиксировать его отдельно для каждого оператора, а фиксировать его один раз для всей амплитуды рассеяния в целом. Здесь есть аналогия с перенормируемым случаем. Там тоже имеется бесконечное число произвольных констант вычитания, появляющихся в каждом порядке ТВ, но потом все они сводятся к нормировке одного оператора. В перенормируемом случае эти произвольные константы появляются у новых операторов, поэтому они сводятся не к нормировке одного оператора, а к нормировке одной амплитуды.

## 2. ЛОКАЛЬНОСТЬ КОНТРЧЛЕНОВ И РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассмотрим теперь процедуру суммирования лидирующих расходимостей (лидирующих логарифмов) по аналогии с перенормируемым случаем. Ключевым моментом является локальность контрчленов после применения неполной  $\mathcal{R}$ -операции Боголюбова–Парасюка–Хеппа–Циммермана [1]. Действительно, применяя  $\mathcal{R}'$ -операцию к данному графу в  $n$ -м порядке ТВ, мы получаем последовательность членов, соответствующих учету одно-, двух- и т. д. вплоть до  $(n - 1)$ -петлевых контрчленов. В итоге получаем последовательность вида (мы удерживаем только лидирующие расходимости)

$$\mathcal{R}'G_n = \frac{\mathcal{A}_n^{(n)}(\mu^2)^{n\epsilon}}{\epsilon^n} + \frac{\mathcal{A}_{n-1}^{(n)}(\mu^2)^{(n-1)\epsilon}}{\epsilon^n} + \dots + \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}(\mu^2)^\epsilon}{\epsilon^n} +$$

+ члены более низкого порядка  $+\epsilon^0$ , (6)

где члены вида  $(\mathcal{A}_k^{(n)}(\mu^2)^{k\epsilon})/\epsilon^n$  возникают от вклада  $k$ -петлевых подграфов, которые выживают после вычитания  $(n - k)$ -петлевого контрчлена. Коэффициенты при расходимостях  $\mathcal{A}_k^{(n)}$  являются константами в случае перенормируемых теорий и полиномами по импульсным переменным в перенормируемом случае.

Согласно теореме Боголюбова–Парасюка [1] в результате неполной  $\mathcal{R}'$ -операции должно получаться выражение, которое является локальным, т. е. не содержит сингулярных членов вида  $\log^l \mu^2/\epsilon^k$ , для любых  $l$  и  $k$ . Это требование приводит к последовательности из  $n - 1$  уравнений для  $n$  переменных  $\mathcal{A}_i^{(n)}$ , которые могут быть разрешены в терминах низшего члена ряда  $\mathcal{A}_1^{(n)}$ :

$$\mathcal{A}_n^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}}{n}. \quad (7)$$

Полезно также найти локальное выражение для суммы контрчленов  $\mathcal{KR}'$ , равное

$$\mathcal{KR}'G_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\mathcal{A}_k^{(n)}}{\epsilon^n} \right) \equiv \frac{\mathcal{A}_n^{(n)'}}{\epsilon^n}. \tag{8}$$

Коэффициенты  $\mathcal{A}_n^{(n)'}$  даются аналогичными формулами [4]

$$\mathcal{A}_n^{(n)'} = (-1)^{n+1} \mathcal{A}_n^{(n)} = \frac{\mathcal{A}_1^{(n)}}{n}. \tag{9}$$

Тем самым все коэффициенты выражаются через коэффициент  $\mathcal{A}_1^{(n)}$ , который определяется однопетлевыми диаграммами, оставшимися после стягивания в точку  $(n - 1)$ -петлевых расходящихся подграфов. Для четырехточечной амплитуды уравнение (7) приобретает вид рекуррентного соотношения

$$n \text{ (loop with } \mathcal{A}_n) = -2 \text{ (triangle)} \text{ (loop with } \mathcal{A}_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-2} \text{ (loop with } \mathcal{A}_k) \text{ (loop)} \text{ (loop with } \mathcal{A}_{n-1-k}). \tag{10}$$

Данное рекуррентное соотношение позволяет вычислять все ведущие расходимости  $\mathcal{A}_n^{(n)}$ , начиная с однопетлевого члена  $\mathcal{A}_1^{(1)}$ . Конкретную реализацию в ряде моделей мы рассмотрим ниже.

Для суммирования лидирующих расходимостей (или, что то же самое, лидирующих логарифмов в конечной части амплитуды рассеяния) необходимо решить полученное рекуррентное соотношение, что в общем случае не представляется возможным. Это достигается переходом к дифференциальному уравнению для суммы ряда

$$\mathcal{A}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n \mathcal{A}_n^{(n)}. \tag{11}$$

Действительно, умножая (10) на множитель  $(-z)^n$  и суммируя по  $n$  от  $n = 2$  до  $\infty$ , получаем дифференциальное уравнение для функции  $\mathcal{A}(z)$  (11), которое условно можно записать как

$$\frac{d}{dz} \mathcal{A}(z) = -1 - 2 \int_{\Delta} \mathcal{A}(z) - \int_{\bigcirc} \mathcal{A}^2(z), \tag{12}$$

где интегрирование ведется по оставшимся однопетлевым диаграммам. Уравнение (12) и есть искомое уравнение ренормгруппы. Ниже мы приведем его явный вид в конкретном случае. Здесь же отметим, что в перенормируемом случае все интегралы исчезают и получается обычное дифференциальное уравнение, а в неперенормируемом случае имеет место интегродифференциальное уравнение.

Подчеркнем еще раз, что в перенормируемом случае  $\mathcal{R}$ -операция сводится к операции умножения амплитуды на константу  $Z$  и соответствующему умножению константы связи  $g$  (см. (2)), поэтому группа перенормировок есть просто группа умножения. В неперенормируемом же случае, как было показано выше,  $\mathcal{R}$ -операция не сводится к простому умножению, поэтому групповой характер изменяется.

### 3. ИЛЛЮСТРАЦИЯ

Продемонстрируем теперь, как вышеприведенные формулы реализуются в конкретном случае в теории  $g\phi_D^4$  для  $D = 4, 6, 8, 10$  [6] и в суперсимметричной калибровочной теории  $\text{SYM}_D$  для  $D = 6, 8, 10$  [4, 7, 8]. Рассмотрим четырехточечную амплитуду на массовой поверхности

$$\Gamma_4(s, t, u) = g(1 + \Gamma_s(s, t, u) + \Gamma_t(s, t, u) + \Gamma_u(s, t, u)). \quad (13)$$

Парциальные функции  $\Gamma_i(s, t, u)$  разлагаются в ряд теории возмущений по константе связи

$$\Gamma_s = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n S_n, \quad \Gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n T_n, \quad \Gamma_u = \sum_{n=1}^{\infty} (-z)^n U_n, \quad z \equiv \frac{g}{\epsilon}, \quad (14)$$

причем мы удерживаем только лидирующие полюсные члены. Тогда для амплитуды рассеяния  $\mathcal{A}_n^{(n)} = S_n + T_n + U_n$  имеем рекуррентное соотношение (10), причем интегрирование по однопетлевому подграфу можно выполнить явно в общем виде, вводя фейнмановские параметры. Результат имеет вид

$$\begin{aligned} nS_n(s, t, u) &= \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \times \\ &\quad \times (S_{n-1}(s, t', u') + T_{n-1}(s, t', u') + U_{n-1}(s, t', u')) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2-1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{(D/2-2)k} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p+D/2-2)!} \times \\ &\times \frac{d^p}{dt^l du'^{p-l}} (S_k + T_k + U_k) \frac{d^p}{dt^l du'^{p-l}} (S_{n-k-1} + T_{n-k-1} + U_{n-k-1}) s^p \times \\ &\quad \times [x(1-x)]^p t^l u'^{p-l}, \quad (15) \end{aligned}$$

где  $t' = -xs, u' = -(1-x)s$ . И то же самое для остальных парциальных амплитуд  $T_n$  и  $U_n$  с циклической заменой аргументов.

Рекуррентное соотношение (15) может быть превращено в дифференциальное уравнение для функции  $\Gamma_s(s, t, u)$ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{d\Gamma_s(s, t, u)}{dz} &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D - 2)} s^{D/2-2} + \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \times \\
 &\times [\Gamma_s(s, t', u') + \Gamma_t(s, t', u') + \Gamma_u(s, t', u')] \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} + \\
 &+ \frac{1}{2} \frac{s^{D/2-2}}{\Gamma(D/2 - 1)} \int_0^1 dx [x(1-x)]^{D/2-2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=0}^p \frac{1}{p!(p + D/2 - 2)!} \times \\
 &\times \left( \frac{d^p}{dt^l du^{p-l}} (\Gamma_s + \Gamma_t + \Gamma_u) \Big|_{\substack{t' = -xs, \\ u' = -(1-x)s}} \right)^2 s^p [x(1-x)]^p t^l u^{p-l}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

с граничным условием  $\Gamma_s(z = 0) = 0$ , и аналогично для  $\Gamma_t$  и  $\Gamma_u$ .

Похожие уравнения получаются и в суперсимметричной калибровочной теории [4, 7, 8]. Там удобно перейти к упорядоченным по цвету амплитудам в каналах  $(s, t)$ ,  $(t, u)$  и  $(u, s)$ . Соответствующее рекуррентное соотношение в  $(s, t)$ -канале имеет вид

$$D = 6 : nS_n(s, t) = -2s \int_0^1 dx \int_0^x dy (S_{n-1}(s, t') + T_{n-1}(s, t')), \quad n \geq 4, \quad (17)$$

где  $t' = tx + y$ ,  $u = -s - t$  и начальные значения равны  $S_3 = -s/3$ ,  $T_3 = -t/3$ . ( $D = 6$  является вырожденным случаем, здесь расходимости начинаются с трех петель.)

$$\begin{aligned}
 D = 8 : nS_n(s, t) &= \\
 &= -2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy y(1-x) (S_{n-1}(s, t') + T_{n-1}(s, t')) \Big|_{t'=tx+uy} + \\
 &+ s^4 \int_0^1 dx x^2(1-x)^2 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{2k-2} \frac{1}{p!(p+2)!} \frac{d^p}{dt'^p} (S_k(s, t') + T_k(s, t')) \times \\
 &\times \frac{d^p}{dt'^p} (S_{n-1-k}(s, t') + T_{n-1-k}(s, t')) \Big|_{t'=-sx} (tsx(1-x))^p, \quad (18)
 \end{aligned}$$

и однопетлевые значения равны  $S_1 = 1/12$ ,  $T_1 = 1/12$ .

$$\begin{aligned}
D = 10 : nS_n(s, t) &= \\
&= -s^3 \int_0^1 dx \int_0^x dy y^2 (1-x)^2 (S_{n-1}(s, t') + T_{n-1}(s, t')) \Big|_{t'=tx+yu} + \\
&+ s^5 \int_0^1 dx x^3 (1-x)^3 \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{p=0}^{3k-2} \frac{1}{p!(p+3)!} \frac{d^p}{dt'^p} (S_k(s, t') + T_k(s, t')) \times \\
&\times \frac{d^p}{dt'^p} (S_{n-1-k}(s, t') + T_{n-1-k}(s, t')) \Big|_{t'=-sx} (tsx(1-x))^p, \quad (19)
\end{aligned}$$

где  $S_1 = s/5!$ ,  $T_1 = t/5!$ .

Соответствующие дифференциальные уравнения для суммы лидирующих вкладов приобретают вид

$$\begin{aligned}
D = 6 : \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) &= \\
&= s - \frac{2}{z} \Sigma(s, t, z) + 2s \int_0^1 dx \int_0^x dy (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=xt+yu}. \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = 8 : \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) &= \\
&= -\frac{1}{12} + 2s^2 \int_0^1 dx \int_0^x dy y(1-x) (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=tx+uy} - \\
&- s^4 \int_0^1 dx x^2 (1-x)^2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+2)!} \times \\
&\times \left( \frac{d^p}{dt'^p} (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=-sx} \right)^2 (tsx(1-x))^p. \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = 10 : \frac{d}{dz} \Sigma(s, t, z) &= \\
&= -\frac{s}{5!} + s^3 \int_0^1 dx \int_0^x dy y^2 (1-x)^2 (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=tx+yu} - \\
&- s^5 \int_0^1 dx x^3 (1-x)^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(p+3)!} \times \\
&\times \left( \frac{d^p}{dt'^p} (\Sigma(s, t', z) + \Sigma(t', s, z)) \Big|_{t'=-sx} \right)^2 (tsx(1-x))^p. \quad (22)
\end{aligned}$$



Приведенные уравнения являются искомым обобщенным уравнением ренорм-группы для неперенормируемых теорий. Нахождение решений этих уравнений представляет сложную задачу. Тем не менее в отдельных случаях можно получить аналитические решения или исследовать их численно.

Так, в теории  $\phi_D^4$  решение для полной четырехчастичной амплитуды в режиме, когда  $s \sim t \sim u \sim E^2$ , может быть записано в виде [6]

$$\Gamma_4(s, t, u) = \mathcal{P} \frac{g}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D - 2)} g (s^{D/2-2} + t^{D/2-2} + u^{D/2-2}) \log \left( \frac{\mu^2}{E^2} \right)}, \quad (23)$$

где символ  $\mathcal{P}$  означает упорядочение в смысле (15). Отметим при этом однозначное соответствие между расходимостями  $1/\epsilon$  и логарифмами  $\log \mu^2$ .

Решение (23) воспроизводит ряд теории возмущений для ведущих логарифмов и в то же время позволяет найти высокоэнергетическое поведение функции  $\Gamma_4$ , изучая сингулярности под знаком  $\mathcal{P}$ -упорядочения. Действительно, как легко видеть, в знаменателе (23) коэффициент при логарифме всегда положителен (исключение составляет случай  $D = 6$ , где в силу условия  $s + t + u = 0$  на массовой поверхности все лидирующие расходимости сокращаются). Поэтому при  $E \rightarrow \infty$  возникает полюс, который является не чем иным, как полюсом Ландау при всех значениях  $D$ , как это имеет место при  $D = 4$ .

В случае суперсимметричных теорий можно получить аналитическое решение для последовательности лестничных диаграмм. В  $D = 6$  в  $s$ -канале оно имеет вид

$$\Sigma_L(s, z) = \frac{2}{s^2 z^2} \left( e^{sz} - 1 - sz - \frac{s^2 z^2}{2} \right), \quad (24)$$

и то же самое в  $t$ -канале. Как следует из (24), амплитуда экспоненциально растет в одном направлении и падает в другом. Это же поведение следует из численного анализа полного уравнения.

В  $D = 8$  последовательность лестничных диаграмм в  $s$ -канале описывается решением уравнения Риккати и имеет вид

$$\Sigma_L(s, z) = -\sqrt{\frac{5}{3}} \frac{4 \tan(zs^2/(8\sqrt{15}))}{1 - \tan(zs^2/(8\sqrt{15}))\sqrt{5/3}}. \quad (25)$$

Получившаяся функция имеет бесконечную периодическую последовательность полюсов Ландау. Численное решение полного уравнения показывает, что такое поведение присуще и общему решению [7, 8].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наш главный вывод состоит в том, что неперенормируемые теории отличаются от перенормируемых только в техническом воплощении. В них можно провести процедуру устранения расходимостей, фиксировать имеющийся произвол и просуммировать ведущие асимптотики, так же как это происходит в перенормируемых теориях.

**Благодарности.** Эта работа поддержана Российским научным фондом, грант № 16-12-10306.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoliubov N., Parasiuk O.* Uber die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder // *Acta Math.* 1957. V. 97. P. 227–266;  
*Hepp K.* Proof of the Bogolyubov–Parasiuk Theorem on Renormalization // *Commun. Math. Phys.* 1966. V. 2. P. 301–326;  
*Zimmermann W.* Local Field Equation for A4-Coupling in Renormalized Perturbation Theory // *Commun. Math. Phys.* 1967. V. 6. P. 161–188;  
*Zimmermann W.* Convergence of Bogoliubov’s Method of Renormalization in Momentum Space // *Commun. Math. Phys.* 1969. V. 15. P. 208–234;  
*Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1957; 1973; 1976; 1984;  
*Bogolyubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields. 3rd ed. New York: Wiley, 1980;  
*Завьялов О. И.* Перенормированные диаграммы Фейнмана. М.: Наука, 1979;  
*Zvyalov O. I.* Renormalized Quantum Field Theory. Dordrecht: Kluwer, 1990.
2. *Kazakov D. I.* Kinematically Dependent Renormalization // *Phys. Lett. B.* 2018. V. 786. P. 327; arXiv:1804.08387 [hep-th].
3. *Васильев А. Н.* Квантово-полевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. СПб.: ПИЯФ, 1998;  
*Vasiliev A. N.* The Field Theoretic Renormalization Group in Critical Behavior Theory and Stochastic Dynamics. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2004.
4. *Bork L. V., Kazakov D. I., Kompaniets M. V., Tolkachev D. M., Vlasenko D. E.* Divergences in Maximal Supersymmetric Yang–Mills Theories in Diverse Dimensions // *JHEP.* 2015. V. 1511. P. 059; arXiv:1508.05570 [hep-th].
5. *Bern Z., Dixon L. J., Kosower D. A.* On-Shell Methods in Perturbative QCD // *Ann. Phys.* 2007. V. 322. P. 1587; arXiv:0704.2798 [hep-ph];  
*Britto R.* Loop Amplitudes in Gauge Theories: Modern Analytic Approaches // *J. Phys. A.* 2011. V. 44. P. 454006; arXiv:1012.4493 v2 [hep-th];  
*Bern Z., Huang Yu-tin.* Basics of Generalized Unitarity // *J. Phys. A.* 2011. V. 44. P. 454003; arXiv:1103.1869 v1 [hep-th];  
*Elvang H., Huang Yu-tin.* Scattering Amplitudes. arXiv:1308.1697 v1 [hep-th].

6. *Kazakov D. I.* RG Equations and High Energy Behaviour in Non-Renormalizable Theories // *Phys. Lett. B.* 2019. V. 797. P. 134801; arXiv:1904.08690 [hep-th].
7. *Borlakov A. T., Kazakov D. I., Tolkachev D. M., Vlasenko D. E.* Summation of All-Loop UV Divergences in Maximally Supersymmetric Gauge Theories // *JHEP.* 2016. V. 1612. P. 154; arXiv:1610.05549v2 [hep-th].
8. *Borlakov A. T., Kazakov D. I., Tolkachev D. M., Vlasenko D. E.* The Structure of UV Divergences in Maximally Supersymmetric Gauge Theories // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 97. P. 125008; arXiv:1712.04348 [hep-th].