

MS⁴: АЛЬТЕРНАТИВА ТЕОРИИ БПХЦ

Н. Д. Леншина^{1,*}, *А. А. Радионов*², *Ф. В. Ткачев*²

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

² Институт ядерных исследований РАН, Москва

Изучается схема УФ-перенормировок MS⁴, возникшая при формализации рассуждений, давших в свое время ряд важных алгоритмов. MS⁴, гарантируя конечность перенормированных интегралов по построению, удовлетворяет аксиомам *R*-операции Боголюбова и оказывается 4-мерным аналогом MS-схемы 'т Хофта. Известный IBP-алгоритм портируется в MS⁴ с модификациями, но без особых затруднений. Особенности схемы MS⁴: прозрачность структуры, простота арифметики при $D = 4$, спектр вычислительных опций. Прямой вывод РГ-уравнений оперирует только явно конечными величинами и сразу приводит к выражениям для РГ-функций через явные конечные интегралы специального вида.

The UV renormalization scheme MS⁴ emerged in the formalization of the reasoning which yielded an array of important algorithms in the 80s. MS⁴ guarantees finiteness of renormalized integrals by construction, satisfies the Stueckelberg–Bogolyubov causality axiom for the *R*-operation, and turns out to be a 4-dimensional analog of 't Hooft's MS-scheme. The well-known IBP reduction algorithm can be ported to MS⁴ with modifications, but without problems. MS⁴ exhibits transparency of the structure, simplicity of the arithmetic at $D = 4$, and new calculational options. A straightforward derivation of RG equations runs in terms of explicitly finite quantities and expresses RG functions in terms of explicitly finite integrals.

PACS: 11.10.Gh

ВВЕДЕНИЕ

Проект начался как учебный ввиду отсутствия в литературе ясного изложения теории ультрафиолетовой *R*-операции. Теория БПХЦ [1] эзотерична и далека от вычислительной практики в MS-схеме в размерной регуляризации. С другой стороны, спиральные (helicity) методы расчетов радиационных поправок и теория суперсимметрии (ср. [2]) плохо совместимы с $D \neq 4$. Поэтому сделана попытка изучить на практических примерах остававшуюся вне внимания мейнстрима схему MS⁴ [3], возникшую при формализации [4] рассуждений, давших ряд прорывных результатов (*R**-операция [5], операторные

*E-mail: lenshina.nd14@physics.msu.ru

разложения для моделей с безмассовыми частицами вместе с эффективными формулами для коэффициентных функций [6], асимптотическая операция — евклидова [7] и неевклидова [8]). Однако проект вышел за рамки учебного упражнения, так как обнаружился ряд сюрпризов.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ДИЛЕММА ТЕОРИИ УФ R -ОПЕРАЦИИ [9]

Основное структурное требование для УФ R -операции вытекает из условий причинности [10] и состоит в том, что она должна сводиться к добавлению квазилокальных контрчленов:

$$R_{\cup V} T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z)) = T(\mathcal{L}(x) \mathcal{L}(y) \mathcal{L}(z)) + T(\Lambda(x, y) \mathcal{L}(z)) + \\ + T(\Lambda(x, z) \mathcal{L}(y)) + T(\Lambda(y, z) \mathcal{L}(x)) + \Lambda(x, y, z). \quad (1)$$

Для завершения определения нужно фиксировать вид контрчленов и доказать конечность получающихся петлевых интегралов.

Формула имеет обобщенно-функциональный характер и в то же время устроена рекурсивно. Рекурсивная структура теоретически может быть основой для компактных индуктивных доказательств, однако она может быть сохранена только при использовании аппарата обобщенных функций. Здесь и возникает дилемма.

А. Избавиться от обобщенных функций, сведя все к работе с обычными интегралами. Однако для этого придется разрешить рекурсию и потерять преимущества, которые она дает. Это подход теории БПХЦ, порождающий весьма громоздкий формализм (ср. громоздкость компьютерных программ, получающихся при разворачивании ветвящихся рекурсий в циклы). Доказательство конечности возникающих громоздких интегралов и составляет содержание теоремы Боголюбова–Парасюка–Хеппа.

Б. Попытаться сохранить рекурсивность формулы, для чего нужно разработать специальный обобщенно-функциональный аппарат для работы с произведениями сингулярных функций (см. ниже описание таких математических инструментов). При этом буквальная реализация этого подхода подразумевает работу в координатном представлении (см. детали в [12]).

Однако имеется еще одна опция — схема MS⁴, позволяющая сохранить рекурсию и использовать ее преимущества, но формулируемая в импульсном представлении, наиболее естественном для решения физических задач.

БАЗОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИНСТРУМЕНТЫ

При построении схемы MS⁴ используются две специальные конструкции обобщенных функций (см. все детали в [4]).

1. R -операция, доставляющая обобщенную функцию для неинтегрируемого произведения сингулярных функций:

$$\mathbf{R} \circ G = \mathbf{r} \circ \mathbf{R}' \circ G, \quad \mathbf{R}' \circ G = \sum_{\Gamma \triangleleft G} (\chi_{\Gamma} G \setminus \Gamma) \{ \mathbf{R} \circ \Gamma \}, \quad (2)$$

где сумма ведется по старшим расходящимся подграфам (специальным подпроизведениям), функции χ_{Γ} составляют «конусное» разложение единицы, (...) — гладкий фактор; {...} — сингулярный фактор; \mathbf{r} — «вычитающий» оператор для сингулярности в изолированной точке, аналогичный применявшимся в [13], где такая операция называется «регуляризацией»; в квантовой теории поля операторы \mathbf{r} требуют некоторой конкретизации для учета структурной специфики многомерных пертурбативных интегралов (см. детали в [12]).

2. Асимптотическая операция (As -операция), доставляющая асимптотическое разложение в смысле обобщенных функций по некоторому параметру для сингулярного произведения:

$$\mathbf{As} \circ G = \mathbf{r} \circ \mathbf{As}' \circ G + c_G \delta_G, \quad \mathbf{As}' \circ G = \sum_{\Gamma \triangleleft G} (\chi_{\Gamma} \mathbf{T} \circ G \setminus \Gamma) \{ \mathbf{As} \circ \Gamma \}, \quad (3)$$

где \mathbf{T} — разложение Тейлора по параметру разложения. Формула для \mathbf{As} отличается от \mathbf{R} главным образом «подкруткой» \mathbf{r} на конечный контрчлен $c_G \delta_G$, где δ_G локализована в точке сингулярности, а c_G — специальным образом выбранный числовой коэффициент, который, как оказывается, содержит неаналитическую зависимость от параметра разложения [7].

Компактность этих не вполне банальных формул (существенно выходящих за рамки, например, формализма известной монографии [13]) есть следствие их рекурсивной структуры: задача последовательно сводится к таким же задачам для подпроизведений с меньшим числом множителей, обеспечивая эффективные доказательства по индукции.

СХЕМА МИНИМАЛЬНЫХ ВЫЧИТАНИЙ MS^4

В качестве УФ R -операции здесь берется явное выражение для конечных контрчленов c_G , автоматически возникающих в конструкции (3):

$$R_{UV} \int dp B(p; \kappa) \triangleq \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int^{\Lambda} dp [B(p; \kappa) - \mathbb{S}(p; \kappa)], \quad (4)$$

где p — совокупность петлевых импульсов; κ — совокупность внешних импульсов и масс; B — подынтегральное выражение без вычитаний (далее «голое выражение»); \mathbb{S} — так называемые теневые члены, определяемые и

обсуждаемые ниже. $\int dp = \int dp \Theta(p/\Lambda)$ — обрезание с помощью гладкой функции Θ , равной единице в окрестности нуля и нулю в окрестности бесконечности. Такие функции часто возникают при работе в схеме MS⁴. Заметим, что удобнее всего выбирать $\Theta(p)$ в виде произведений универсальных факторов $\Theta(p_i^2)$, соответствующих каждому пропагатору $D(p_i)$, что удобно в ряде отношений: например, так гарантируется согласованность обрезавших факторов для разных графов и подграфов, возникающих в рядах теории возмущений.

Ключевая особенность такого определения в том, что выражение в правой части (4) конечно по определению, поэтому вместо доказательства аналога теоремы БПХ нужно доказывать соответствие этого определения условию причинности (1), и делается это гораздо проще.

ТЕНЕВЫЕ ЧЛЕНЫ §

Это члены асимптотического разложения в смысле обобщенных функций для B при $p \rightarrow \infty$, порождающие расходимости в интеграле при $\Lambda \rightarrow \infty$. Они строятся следующим образом.

1. Выполняется асимптотическое разложение в смысле обобщенных функций на пространстве с выколотой точкой $p = 0$:

$$B(p; \kappa) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbf{As}' \circ B(p; \kappa). \quad (5)$$

2. Удерживаются члены, дающие расходимость при интегрировании при $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\mathbf{As}' \circ B(p; \kappa) \rightarrow \mathbf{As}'_0 \circ B(p; \kappa) \quad (6)$$

3. Слагаемые, дающие логарифмическую расходимость при интегрировании при $\Lambda \rightarrow \infty$, также дают логарифмическую расходимость при интегрировании в окрестности $p = 0$ (ср. интеграл $\int_0^\infty dx/x$). Поэтому применяется дополнительный вычитающий оператор \mathbf{r} для доопределения обобщенной функции на все пространство, включая точку $p = 0$:

$$\mathbf{As}'_0 \circ B(p; \kappa) \rightarrow \mathbf{r} \circ \mathbf{As}'_0 \circ B(p; \kappa) \triangleq \mathbb{S}. \quad (7)$$

Этим заканчивается определение теневых членов.

СВОЙСТВА ТЕНЕВЫХ ЧЛЕНОВ

Прежде всего выражение $\mathbf{As}' \circ B$ определено однозначно, поэтому операция \mathbf{As}' коммутирует с линейными преобразованиями над B и его умножением на полиномы $\mathcal{P}(p)$ [4].

Оператор \mathbf{r} содержит конечный произвол, который частично (почти полностью) устраняется требованиями, специфичными для пертурбативной КТП:

- 1) некоторые простые ограничения для соответствия структуре пКТП;
- 2) стандартные ограничения, чтобы удовлетворить калибровочным тождествам;
- 3) точная коммутация с умножением B на полиномы от p (и тогда приходится вычислять коммутатор \mathbf{r} с производными).

Теперь легко понять, почему у «теневых членов» такое название: при выбранных ограничениях для \mathbf{r} выполняется следующее свойство. Если $B = \mathcal{P}_1 B_1 + \mathcal{P}_2 B_2$, где \mathcal{P}_i — любые полиномы по p , то $(B - \mathbb{S}) = \mathcal{P}_1 (B_1 - \mathbb{S}_1) + \mathcal{P}_2 (B_2 - \mathbb{S}_2)$.

Рекурсия заложена в асимптотической операции, которая содержит в качестве числовых коэффициентов (c_G) аналогичные интегралы, но с меньшим числом множителей в подынтегральном выражении (известная структура граф \rightarrow подграф).

Конечность интеграла (4) гарантируется способом построения теневых членов и перехода к пределу $\Lambda \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что значение предела не зависит от выбора обрезывающей функции $\Theta(p/\Lambda)$.

СООТВЕТСТВИЕ АКСИОМАМ УФ R -ОПЕРАЦИИ

Покажем на примере 2-петлевой диаграммы, как воспроизводится структура УФ R -операции (1) (добавление контрчленов, умноженных на интегралы для графов со сжатыми в точку УФ подграфами). Обозначим $B(p; q) = p^{-2}(p - q)^{-2}$ (одна петля) и $B(p, q; k) = B(p; q)B(q; k)$ (две петли), где k — внешний импульс. Прямым вычислением, пользуясь формулой (7) и свойствами \mathbf{r} и Θ , получаем, что под пределом $\Lambda \rightarrow \infty$

$$\int^{\Lambda} dp dq [B(p, q; k) - \mathbb{S}] = \int^{\Lambda} dp dq B(p, q; k) + Z_1(\Lambda) \int^{\Lambda} dq B(q; k) + Z_2(\Lambda) + o(1), \quad (8)$$

где $Z_1(\Lambda)$ и $Z_2(\Lambda)$ — контрчлены, расходящиеся при $\Lambda \rightarrow \infty$. $B(q; k)$ соответствует графу со сжатым в точку УФ подграфом, что и требовалось показать.

СРАВНЕНИЕ С ОБЫЧНОЙ MS-СХЕМОЙ

Во-первых, схема MS^4 существенно эквивалентна схеме минимальных вычитаний при $D \neq 4$, что видно при формальном введении $D \neq 4$: вычитательный оператор \mathbf{r} играет роль вычитания полюсов по $D - 4$. Во-вторых,

в промежуточных вычислениях схема MS⁴ позволяет использовать любую удобную регуляризацию, чем можно эффективно пользоваться. Сравним вычисление простого интеграла от $B(p, q; k)$ (возникающего, например, в методе IBP [14]), проведенное, с одной стороны, в схеме MS⁴ со вспомогательной аналитической регуляризацией ($B_\alpha(p, q; k) = B_\alpha(p; q)B(q; k)$, где параметр α введен только в один пропагатор: $p^2 \rightarrow p^{2(1+\alpha)}$) и, с другой стороны, в MS-схеме с размерной регуляризацией (где меняется не подынтегральное выражение, а (вольность речи) мера интегрирования: $d^4p \rightarrow d^Dp$; $\varepsilon = (4 - D)/2$).

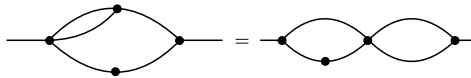
$$\int d^4q B(q; k) \int d^4p B_\alpha(p; q) \sim k^{-2\alpha} [\alpha(1 - \alpha)]^{-2}, \tag{9}$$

$$\int d^Dq B(q; k) \int d^Dp B(p; q) \sim \frac{1}{k^{4\varepsilon}} \frac{1}{2\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon)(1 - 3\varepsilon)} \frac{\Gamma^3(1 - \varepsilon)\Gamma(1 + 2\varepsilon)}{\Gamma(1 - 3\varepsilon)}. \tag{10}$$

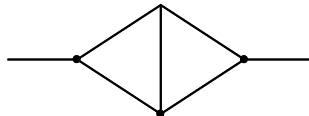
Видно, что собственно арифметика заметно проще в MS⁴, причем следует ожидать, что эта разница будет нарастать с числом петель.

О ПОРТИРОВАНИИ IBP-АЛГОРИТМОВ В СХЕМУ MS⁴

Обсудим широко применяемые алгоритмы IBP редукции [14]. В целом тождества выписываются примерно так же, как и в размерной регуляризации, но есть ряд нюансов. В схеме MS⁴ появляются новые тождества, например (это тождество легко проверить прямым расчетом):



При этом все тождества значительно проще (коэффициенты всегда рациональные числа, а не рациональные функции от D). С другой стороны, увеличивается число нередуцируемых базовых интегралов; зато их можно вычислять с любой удобной регуляризацией (даже и с размерной, что, впрочем, не является оптимальным выбором). Например, в число нередуцируемых попадает известный интеграл



В целом можно ожидать, что вычисления здесь потребуют больше аналитической подготовки, но будут выполняться быстрее. В частности, в MS^4 отсутствует свойственное размерной регуляризации перемешивание зависимостей от параметров регуляризации в коэффициентах тождеств и в ответах для базовых интегралов; такое перемешивание заметно усложняет арифметику вычислений (именно этим была порождена ошибка в первой версии расчета [15]).

РГ-УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения ренормгруппы в MS^4 выводятся самым непосредственным образом — прямым дифференцированием по параметру μ , скрытому в определении вычитательных операторов \mathbf{r} . Запишем перенормированный интеграл (4) с учетом введенных определений, показав зависимость от μ :

$$A_\mu(\kappa) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int dp \Theta(p/\Lambda) [B(p; \kappa) - \mathbf{r}_\mu \circ \mathbf{As}'_0 \circ B(p; \kappa)]. \quad (11)$$

В вычислении используется тот факт, что голое выражение B и операция \mathbf{As} не зависят от μ . Учитывая определение вычитательного оператора \mathbf{r} , получаем

$$A_\mu(\kappa) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left[\{ \dots \} + \int dp \Theta \left(\frac{p}{\mu} \right) \mathbf{as}'_0 \circ B(p; \kappa) \right], \quad (12)$$

где фигурные скобки содержат члены, не зависящие от μ , а \mathbf{as}'_0 удерживает только те члены из \mathbf{As}'_0 , которые соответствуют логарифмической расходимости. Дифференцирование по μ сразу дает

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} A_\mu(\kappa) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int dp \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Theta \left(\frac{p}{\mu} \right) [\mathbf{as}'_0 \circ B(p; \kappa)]. \quad (13)$$

Заменим производную по μ на производную по

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Theta \left(\frac{p}{\mu} \right) = (-) p^\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \Theta \left(\frac{p}{\mu} \right) = (-) \hat{\partial} \Theta \left(\frac{p}{\mu} \right) \quad (14)$$

и проведем замену $p \rightarrow \mu p$, опуская ставший тривиальным предел по Λ :

$$(13) = - \int dp \hat{\partial} \Theta(p) \mathbf{as}'_0 \circ B(p; \kappa/\mu). \quad (15)$$

В итоге получаем дифференциальное РГ-уравнение для отдельной диаграммы:

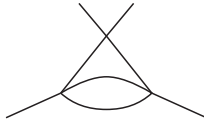
$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} A_\mu(\kappa) + \int dp \hat{\partial} \Theta(p) \mathbf{as}'_0 \circ B(p; \kappa/\mu) = 0. \quad (16)$$

Теперь раскроем определение as'_0 :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} A_\mu(\kappa) + \sum_{\substack{\gamma=\emptyset, \dots, \Gamma \\ \gamma \neq \Gamma}} c_\gamma^* \left(\frac{\kappa}{\mu} \right) \times \\ \times \left(\int dp_{\Gamma \setminus \gamma} \left[\widehat{\partial}_{\Gamma \setminus \gamma} \Theta(p_{\Gamma \setminus \gamma}) \right] \mathbf{R}'_{\mu=1} \circ \mathbf{t}_0 \circ B_{\Gamma \setminus \gamma}(p_{\Gamma \setminus \gamma}; 0) \right) = 0, \quad (17)$$

где Γ — граф (произведение); γ — полные сингулярные подпроизведения [7]; $\Gamma \setminus \gamma = \prod_i G_i$ — произведение УФ подграфов G_i ; c_γ^* — интеграл Γ со всеми G_i , стянутыми в точку (тут работает та же комбинаторика, которая обеспечивала согласие определения (4) с условием Боголюбова (1)); \mathbf{t}_0 удерживает только те члены разложения Тейлора по внешним импульсам подграфа, которые соответствуют логарифмической расходимости при $p_{\Gamma \setminus \gamma} = 0$; наконец, интеграл $(\int dp_{\Gamma \setminus \gamma} \dots)$ автоматически распадается в произведение аналогичных интегралов для УФ подграфов G_i ; нетрудно понять, что факторы этого произведения суть вклады в ренормгрупповые функции (β, γ, \dots) от G_i .

Для примера конкретизируем полученное уравнение для 2-петлевого графа модели $g\varphi^4$ с УФ подграфом (и граф, и подграф расходятся логарифмически)



Получим

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} A_\mu(k, k') + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int^\Lambda dq [B(q; k) - \mathbb{S}_\mu] \times \\ \times \int dp \left(p^\alpha \frac{\partial}{\partial p^\alpha} \Theta(p) \right) B(p; 0) = 0. \quad (18)$$

Видно, что первый интеграл — это в точности перенормированный в соответствии с новым определением интеграл, получающийся сжатием в точку УФ подграфа, и тогда второй интеграл соответствует (с точностью до числового коэффициента) низшему вкладу в β -функцию модели $g\varphi^4$.

После суммирования всего ряда теории возмущений РГ-функции будут собираться из конечных по построению интегралов следующего вида:

$$\Delta_G = \int dp \widehat{\partial} \Theta(p) \times \mathbf{R}'_{\mu=1} \circ \mathbf{t}_0 \circ B(p; 0), \quad (19)$$

где G — УФ подграф; p — совокупность его петлевых импульсов; $\hat{\partial}$ — оператор Эйлера по p ; t_0 удерживает только те члены разложения Тейлора по всем массам и внешним импульсам подграфа, которые соответствуют логарифмической расходимости при $p = 0$, а $\Theta(p)$ — гладкая функция, равная единице в окрестности нуля и нулю в окрестности бесконечности; ее производные равны нулю там и там, поэтому не возникает проблем с расходимостью интеграла в нуле и на бесконечности, а расходимости в подпроизведениях устраняет \mathbf{R}' . Обратим внимание на то, что $\mathbf{R}'_{\mu=1}$ берется при $\mu = 1$, т. е. Δ_G , а значит, и РГ-функции, это безразмерные величины, что характерно и для MS-схемы (точнее, это свойство является характеристическим для всего класса схем, которому принадлежат MS [16], $\overline{\text{MS}}$ [17], G [18], MS^4 и др.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, вычитательная процедура MS^4 , гарантирующая конечность результирующих интегралов по построению, оказывается корректной ультрафиолетовой R -операцией, удовлетворяющей условиям Штюкельберга–Боголюбова. В ней не требуется вводить промежуточные регуляризации поверх естественных обрезаний, которые и так всегда подразумеваются в определении несобственных интегралов. Схема четко структурирована: технические детали «упакованы» в универсальные инструменты (Θ , r , R , As). Схема прямо связывается с актуальной практикой: при формальном введении размерной регуляризации восстанавливается семейство MS-схем. Стандартные IBP-алгоритмы, обычно формулируемые для $D \neq 4$, портируются в схему MS^4 без затруднений, хотя и с модификациями. В отличие от размерной регуляризации для работы с MS^4 требуется понимание небанального формализма, зато собственно арифметика вычислений (в том числе IBP-тождеств) оказывается явно проще, чем в случае $D \neq 4$, причем разница растет с числом петель. Другими словами, выясняется, что внешняя простота размерной регуляризации имеет свою скрытую цену. Для РГ-функций получаются новые и необычные явные выражения через конечные интегралы; здесь можно ожидать новых и необычных вычислительных опций. С операторными разложениями и т. п. в новом формализме нет проблем, поскольку сама схема MS^4 возникла при решении именно этих задач в рамках теории асимптотической операции [7, 4].

Таким образом, схема MS^4 является полноценной альтернативой теории БПХЦ, имеет важные методические и технические преимущества на уровне формализма, а также прямую связь с приложениями. Специфические особенности схемы MS^4 представляют интерес для вычислительных приложений.

Благодарности. Авторы благодарят Р. Ш. Меняшеву за поддержку нашего участия в конференции и Д. И. Казакова за организационную помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bogoliubow N.N., Parasiuk O.S.* // Acta Math. 1957. V.97. P.227–266; К. Hepp. Commun. Math. Phys. 1966. V.2, No.4. P.301–326;
Zimmermann W. // Commun. Math. Phys. 1969. V.15. P.208–234.
2. *Dixon L. et al.* // JHEP. 2011. V.035; arXiv:1010.3991; CERN-2014-008. P.31–67; arXiv:1310.5353.
3. *Kuznetsov A.N., Tkachov F.V.* // Intern. Seminar “Quarks-88”, Tbilisi, USSR, 1988; Proc. of Intern. Conf. “Renormalization Group’91”, Dubna, Sept.3–6, 1991. Singapore: World Sci., 1992; arXiv:hep-th/9612038.
4. *Kuznetsov A.N., Tkachov F.V., Vlasov V.V.* arXiv:hep-th/9612037.
5. *Chetyrkin K.G., Tkachov F.V.* // Phys. Lett. B. 1982. V.114. P.340–344.
6. *Tkachov F.V.* // Phys. Lett. B. 1983. V.124. P.212–216;
Gorishnii S.G., Larin S.A., Tkachov F.V. // Ibid. P.217–220.
7. *Tkachov F.V.* Preprint IYal-P-0332. 1983; Intern. J. Mod. Phys. A. 1993. V.8. P.2047–2117;
Pivovarov G.B., Tkachov F.V. Preprint IYal-P-0370. 1984. 32 p.; Intern. J. Mod. Phys. A. 1993. V.8. P.2241–2286.
8. *Tkachov F.V.* // Phys. Lett. B. 1997. V.412. P.350–358.
9. *Tkachov F.V.* // Sov. J. Part. Nucl. 1994. V.25. P.649.
10. *Stueckelberg E.C.G., Peterman A.* // Helv. Phys. Acta. 1953. V.26. P.499.
11. *Боголюбов Н.Н.* // Докл. АН СССР. 1952. Т.82. С.217.
12. *Tkachov F.V., Vlasov V.V.* // Proc. of Intern. Seminar “Quarks-88”, Tbilisi, USSR, 1988. World Sci., 1988. P.151–164.
13. *Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними I. М.: Физматгиз, 1959.
14. *Tkachov F.V.* // Phys. Lett. B. 1981. V.100. P.65–68.
15. *Gorishnii S.G., Kataev A.L., Larin S.A.* // Phys. Lett. B. 1988. V.212. P.238–244; 1991. V.259. P.144–150.
16. *'t Hooft G.* // Nucl. Phys. B. 1973. V.61. P.455–468.
17. *Bardeen W.A. et al.* // Phys. Rev. D. 1978. V.18. P.3998.
18. *Chetyrkin K.G., Kataev A.L., Tkachov F.V.* // Nucl. Phys. B. 1980. V.174. P.345.