

АНАЛИЗ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МЕТОДАХ K -МАТРИЦЫ И БРЕЙТА–ВИГНЕРА

В. К. Хеннер^{1,2,3,*}, *Т. С. Белозерова*¹

¹ Пермский государственный университет, Пермь, Россия

² Пермский государственный политехнический университет, Пермь, Россия

³ Луисвиллский университет, Луисвилл, США

K -матричный метод наиболее часто используется при анализе перекрывающихся резонансов. Он обеспечивает унитарность матрицы рассеяния, но его параметры не являются физическими величинами, резонансные и фоновые вклады невозможно разделить, а амплитуды рассеяния имеют нули между положениями резонансов. Параметрами функций Брейта–Вигнера (БВ) являются непосредственно массы и ширины резонансов, но сумма таких функций нарушает унитарность. Мы строим унитарную S -матрицу с учетом интерференции функций БВ. На рассматриваемых примерах приводится сравнение двух подходов.

The K -matrix approach is the most often used when analyzing overlapping resonances. It provides unitarity of the scattering matrix, but its parameters are not physical quantities, the resonant and background contributions cannot be separated, and the scattering amplitudes have zeros between the positions of the resonances. The parameters of the Breit–Wigner (BW) function are masses and widths of the resonances, but the sum of such functions violates the unitarity. We construct a unitary S matrix taking into account the interference of BW functions. In the examples presented in the paper, these two approaches are compared.

PACS: 25.70.Ef

ВВЕДЕНИЕ

Анализ параметров изолированного резонанса в конечном счете основан на функции БВ:

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i \frac{m_r \sqrt{\Gamma_{ri} \Gamma_{rj}}}{m_r^2 - s - im_r \Gamma_r}, \quad \Gamma_r = \sum_i^M \Gamma_{ri}. \quad (1)$$

*E-mail: vkhenner@yandex.ru

Обычная сумма таких функций нарушает унитарность. Идея написания в общем виде S -матрицы как суммы резонансных членов, которая должна удовлетворять ограничениям унитарности, сформулирована в работе [1]. Мы показываем, что это можно сделать в виде

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i \sum_{r=1}^N e^{i\varphi_{ij}^r} \frac{m_r \sqrt{\Gamma_{ri} \Gamma_{rj}}}{m_r^2 - s - im_r \Gamma_r}, \quad (2)$$

где интерференция между резонансными состояниями учитывается через фазы φ_{ij}^r . В работе [1] это выражение записано с комплексными числителями вместо таких фаз, обе формы эквивалентны. Схема (2) реализована в работе [2] для двух резонансов с постоянной шириной.

При рассмотрении энергозависимых ширин и пороговых эффектов в амплитуды рассеяния F_{ij} должны быть включены фазовые факторы ρ_i :

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2iF_{ij} = \delta_{ij} + 2i\sqrt{\rho_i} T_{ij} \sqrt{\rho_j}. \quad (3)$$

В K -матричном методе

$$S = \frac{I + i\rho K}{I - i\rho K}. \quad (4)$$

Из $SS^\dagger = I$ и T -инвариантности следует, что K — действительный и симметричный оператор. Для оператора T_{ij} из (4) следует

$$T = K(I - i\rho K)^{-1}. \quad (5)$$

Для нескольких состояний обычно используют параметризацию [3]:

$$K_{ij} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha} \Gamma_{\alpha}^0 \gamma_{\alpha i} \gamma_{\alpha j}}{m_{\alpha}^2 - s}. \quad (6)$$

Для N -состояний и M -открытых каналов число независимых параметров равно $N(M + 1)$. Параметр m_{α} часто называют «номинальной» массой, $\gamma_{\alpha i}$ — константами связи состояния α с каналом i . По аналогии с функцией Брейта–Вигнера (БВ) их обычно нормируют, $\sum_i \gamma_{\alpha i}^2 = 1$ и $\gamma_{\alpha i}$ рассматривают как брэнчинги распадов.

1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ УНИТАРНОГО БВ-МЕТОДА

Кратко опишем конструирование унитарной S -матрицы. Процедура унитаризации становится технически проще, если, следуя работам [1, 2], ввести векторы парциальных ширин \mathbf{g}_r с компонентами $g_{ri} = e^{i\varphi_{ri}} |g_{ri}|$,

$i = 1, \dots, M, r = 1, \dots, N$, тогда

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i\sqrt{\rho_i(s)} \left(\sum_{r=1}^N e^{i\varphi_{ij}^{(r)}} \frac{m_r \Gamma_r^0 |g_{ri}| |g_{rj}|}{m_r^2 - s - im_r \Gamma_r(s)} \right) \sqrt{\rho_j(s)} \quad (7)$$

или

$$T_{ij}(s) = \sum_{r=1}^N \frac{m_r \Gamma_r^0 g_{ri} g_{rj}}{m_r^2 - s - im_r \Gamma_r(s)} \quad (8)$$

(здесь $\varphi_{ij}^r = \varphi_{ri} + \varphi_{rj}$ и Γ_r^0 введены для обезразмеривания векторов \mathbf{g}_r , можно принять $\Gamma_r^0 = \Gamma_r(m_r^2)$). Выражение (7) T -инвариантно, $S_{ij} = S_{ji}$.

Бренчинг распада резонанса r в канал i равен

$$B_{ri} = \frac{|g_{ri}|^2}{|\mathbf{g}_r|^2} = \frac{|g_{ri}|^2}{\sum_{k=1}^M |g_{rk}|^2}, \quad (9)$$

парциальные ширины равны $\Gamma_{ri} = \Gamma_r B_{ri}$. Полные и парциальные ширины могут зависеть от энергии: $\Gamma_r(s) = \sum_i \Gamma_{ri}(s)$.

Далее формулы становятся проще, если использовать переменную E . Для выражения

$$T_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{\Gamma_r^0 g_{ri} g_{rj} / 2}{m_r - E - i\Gamma_r(E) / 2} \quad (10)$$

сформулируем условия, которые должны быть наложены на векторы \mathbf{g}_r для сохранения унитарности $S_{ij}(E)$. Из $T^\dagger - T = iT^\dagger \rho T$ следует

$$i \sum_{r=1}^N \left[\frac{g_{ri}^* g_{rj}^*}{m_r - E + i\Gamma_r(E) / 2} - \frac{g_{ri} g_{rj}}{m_r - E + i\Gamma_r(E) / 2} \right] + \sum_{l=1}^N \sum_{r=1}^N V_{lr} \frac{g_{ri} g_{lj}^*}{(m_r - E + i\Gamma_r(E) / 2) (m_r - E + i\Gamma_r(E) / 2)} \equiv 0, \quad (11)$$

где используется обозначение

$$V_{lr} = \sqrt{\Gamma_l^0 \Gamma_r^0} \sum_{k=1}^M \rho_k(E) g_{lk}^* g_{rk}. \quad (12)$$

Ограничения (11) являются сложными нелинейными уравнениями. Предложенный нами способ позволяет преодолеть трудности, которые ограничивали описание двумя [3] или тремя [4] резонансам даже при $\rho_k \equiv 1$. Векторы $\mathbf{g}_r = \mathbf{g}_r^x + i\mathbf{g}_r^y$ конструируются таким образом, что их мнимые части \mathbf{g}_r^y становятся комбинациями их реальных частей \mathbf{g}_r^x : $\mathbf{g}_r^y = U\mathbf{g}_r^x$ или

$$\mathbf{g}_r^y = u_{r1}\mathbf{g}_1^x + u_{r2}\mathbf{g}_2^x + \dots + u_{rN}\mathbf{g}_N^x, \quad (13)$$

где U — действительная антисимметричная матрица, имеющая простой вид для конкретных N и M . Вместо нахождения всех компонент векторов \mathbf{g}_r можно определить только их действительные части и затем получать их мнимые части с помощью матрицы U . Сразу отметим, что число свободных параметров в этом описании такое же, как и в методе K -матрицы: $N(M+1)$.

При $|m_r - m_{r'}| \gg \Gamma_r + \Gamma_{r'}$ матричные элементы $u_{rk} \rightarrow 0$ и векторы \mathbf{g}_r становятся действительными и ортогональными: $(\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_q) = 0$.

Приведем условия, которым должны удовлетворять векторы \mathbf{g}_r :

$$\sum_{k=1}^M \Gamma_r^0 \rho_k(E) |g_{rk}|^2 = -\frac{1}{S} [S + 2Q_r] \Gamma_r, \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^M \Gamma_r^0 \rho_k(E) \operatorname{Re} (g_{qk}^* g_{rk}) = -\frac{1}{S} [2F_{qr} (m_q - m_r) - iG_{qr} (\Gamma_q + \Gamma_r)], \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^M \Gamma_r^0 \rho_k(E) \operatorname{Im} (g_{qk}^* g_{rk}) = -\frac{1}{S} [2G_{qr} (m_q - m_r) + iF_{qr} (\Gamma_q + \Gamma_r)], \quad (16)$$

$$r = 1, \dots, N; \quad q = r + 1, \dots, N.$$

Ширины находятся из уравнений (14):

$$\Gamma_r(E) = -\frac{S}{S + 2Q_r} \Gamma_r^0 \sum_{k=1}^M \rho_k(E) |g_{rk}|^2. \quad (17)$$

Формулами (14)–(17) задается алгоритм метода. Постоянные коэффициенты S, Q_r, F_{qr}, G_{qr} определяются матричными элементами матрицы U . Детали метода могут быть найдены в работах [5, 6].

В случае двух резонансов и одного канала этот подход приводит к тем же выражениям для амплитуд T , что и K -матричный метод.

Рассмотрим данный метод на примере двух резонансов и двух каналов: $N = 2, M = 2$. Все, что необходимо, это найти векторы \mathbf{g}_r . Для $M = 2$ матрица U такая:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

(α — действительный параметр, $0 \leq \alpha < 1$), т. е.

$$\mathbf{g}_1^y = -\alpha \mathbf{g}_2^x, \quad \mathbf{g}_2^y = \alpha \mathbf{g}_1^x. \tag{19}$$

Коэффициенты в условиях (14)–(16) следующие:

$$S = 1 - \alpha^2, \quad Q_1 = Q_2 = \alpha^2, \quad F_{12} = -\alpha, \quad G_{12} = 0. \tag{20}$$

Всего есть 13 величин: $m_1, m_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \alpha$, связанных четырьмя уравнениями (19) и тремя уравнениями (14)–(16), т. е. шесть действительных величин можно взять в качестве независимых параметров при фитировании экспериментальных данных. Ими могут быть массы m_1, m_2 , параметр α и три компоненты векторов \mathbf{g}_r^x , например g_{11}^x, g_{12}^x и g_{22}^x . Оставшаяся компонента g_{21}^x определяется из соотношений (15), (16):

$$g_{21}^x = \frac{1}{\rho_1(m_2)g_{11}^x} \left[\frac{2\alpha}{\Gamma_1^0(1 - \alpha^2)^2} (m_1 - m_2) - \rho_2(m_2)g_{12}^x g_{22}^x \right]. \tag{21}$$

Затем из (19) можно найти компоненты \mathbf{g}_r^y . Это завершает конструирование амплитуд (10), в которых ширины даются соотношениями (17):

$$\Gamma_r(E) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \Gamma_r^0 \sum_{k=1}^2 \rho_k(E) |g_{rk}|^2. \tag{22}$$

Обычно $\rho_2(E)$ при $E < E_2$ полагается равным нулю. Если вместо этого использовать аналитическое продолжение $\rho_2 \rightarrow i\sigma_k |\rho_2|$ (при рассмотрении разных римановых листов $\sigma_k = \pm 1$), то для резонанса, расположенного ниже порога $E < E_2$,

$$\Gamma_r(E) = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \Gamma_1^0 \rho_1(E) |g_{r1}|^2, \tag{23}$$

а m_r в (10) заменяется на $\tilde{m}_r(E) = m_r + \Delta(E)$, где сдвиг массы

$$\Delta = \frac{1 - \alpha^2}{2(1 + \alpha^2)^2} \Gamma_2^0 \sigma_2 |\rho_2(E)| |g_{r2}|^2. \tag{24}$$

2. ПРИМЕРЫ K -МАТРИЦЫ И УНИТАРНОГО БВ-МЕТОДА

Рассмотрим случай двух резонансов и двух каналов. В методе БВ

$$S_{ij} = \delta_{ij} + 2i\sqrt{\rho_i\rho_j} \sum_{r=1}^2 \frac{m_r\Gamma_r(m_r)g_{ri}g_{rj}}{m_r^2 - s - im_r\Gamma_r(s)} \quad (25)$$

шесть независимых параметров (один из способов их выбора показан в предыдущем разделе). В методе K -матрицы выражение (6)

$$K_{ij} = \gamma_{1i}\gamma_{1j} \frac{m_1\Gamma_1^0}{m_1^2 - s} + \gamma_{2i}\gamma_{2j} \frac{m_2\Gamma_2^0}{m_2^2 - s} \quad (26)$$

содержит такое же число независимых параметров: m_r , Γ_r^0 и два γ_{ri} (с учетом нормировки $\sum_i \gamma_{ri}^2 = 1$). Амплитуды

$$F = \frac{\sqrt{\rho}K\sqrt{\rho}}{1 - i\rho K} = \frac{\begin{pmatrix} \rho_1(K_{11} - i\rho_2 D) & \sqrt{\rho_1\rho_2}K_{12} \\ \sqrt{\rho_1\rho_2}K_{21} & \rho_2(K_{22} - i\rho_1 D) \end{pmatrix}}{1 - \rho_1\rho_2 D - i(\rho_1 K_{11} + \rho_2 K_{22})}, \quad (27)$$

где $D = K_{11}K_{22} - K_{12}^2$.

Начнем с утверждения, что K -матричные амплитуды обращаются в нуль или имеют очень близкие к нулю значения между точками резонансов. Это существенная особенность метода, тот же вывод верен и для $N \geq 3$, $M \geq 3$. В случае двух резонансов нуль уравнения $T_{12}(E) = 0$ (т. е. $K_{12}(E) = 0$) определяется линейным уравнением, в случае $N = 3$ — квадратным уравнением, и этот результат непосредственно следует из выражений (6) и (27). Нули T_{11} и T_{22} несколько смещены от этих значений. Если относительно узкие резонансы находятся далеко друг от друга и фон отсутствует, то амплитуды, приблизительно представленные суммой изолированных функций БВ, действительно обращаются в нуль между резонансными пиками. Но в ситуации, когда резонансы перекрываются, такое поведение K -матричных амплитуд является проблемой, которая может затруднить описание экспериментальных данных по сечениям рассеяния. Пики амплитуд всегда изолированы — резонансы в K -методе фактически не перекрываются.

В качестве иллюстрации методов приведем простые примеры.

Рассмотрим широкие перекрывающиеся состояния вблизи 1,3 и 1,6 ГэВ в амплитудах $|F_{ij}(E)|^2$. Для краткости возьмем только одно положение порога — $E_2 = 1,22$ (1-й порог зафиксирован при $E_1 = 0,5$, все величины в ГэВ). Затем генерируем данные, которые качественно соответствуют этим

ситуациям. Технически берем гладкие кривые (можно рассматривать различные высоты и ширины пиков), дискретизируем и рандомизируем их (коридоры ошибок генерируются случайным образом с верхним пределом 0,05). Пики перекрываются, по крайней мере, в одном канале и не очень хорошо разрешены, как это часто бывает в реальных ситуациях. Затем сопоставляем эти данные с формулами БВ (25) и K -матрицы (27).

В расчетах используем $\rho_i(s) = \sqrt{1 - (E_i/E)^2}$ (в них можно включить барьерные факторы, чтобы избежать деталей и сделать предмет более ясным). Заметим, что в методе K -матрицы аналитическое продолжение ρ_i ниже порогов ($\rho_i \rightarrow i|\rho_i|$) несовместимо с унитарностью S -матрицы, что непосредственно следует из выражения (4).

В формулах (25) значения независимых параметров следующие: $m_1 = 1,35$, $m_2 = 1,65$, $\alpha = 0,07$, $g_{11}^x = -0,43$, $g_{12}^x = 0,41$, $g_{22}^x = 0,49$; значение $\chi^2/d = 0,49$ (d — число степеней свободы). Остальные параметры находятся с использованием этих шести независимых. (После того, как значения g_{ri} найдены, параметр α , который является техническим, больше не нужен.)

В K -матричных формулах (27) следующие значения независимых параметров: $m_1 = 1,36$, $m_2 = 1,63$, $\Gamma_1 = 0,27$, $\Gamma_2 = 0,37$, $\gamma_{11} = 0,77$, $\gamma_{21} = 0,68$; значение $\chi^2/d = 8,72$ отражает тот факт, что метод K -матрицы

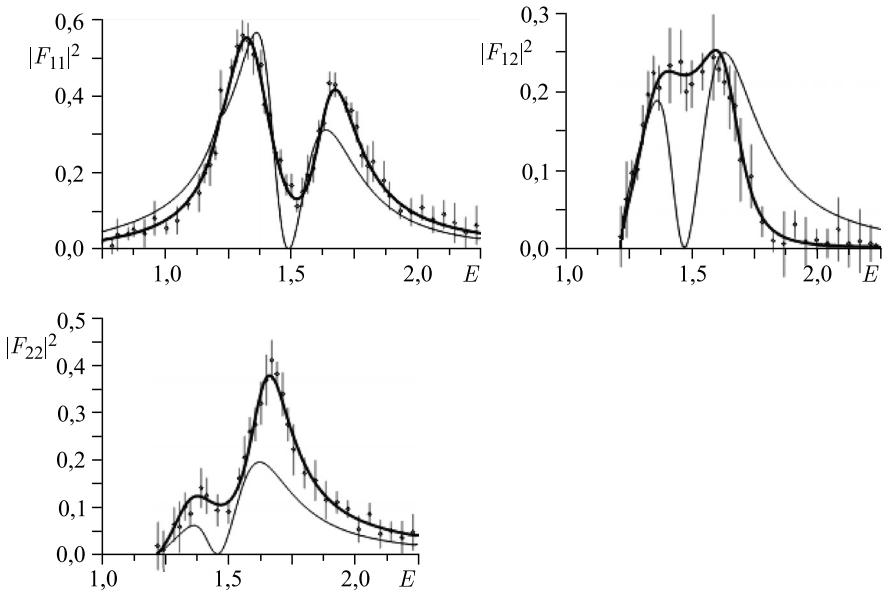


Рис. 1. Жирные кривые — БВ-формулы (25), тонкие кривые — K -матрица (27)

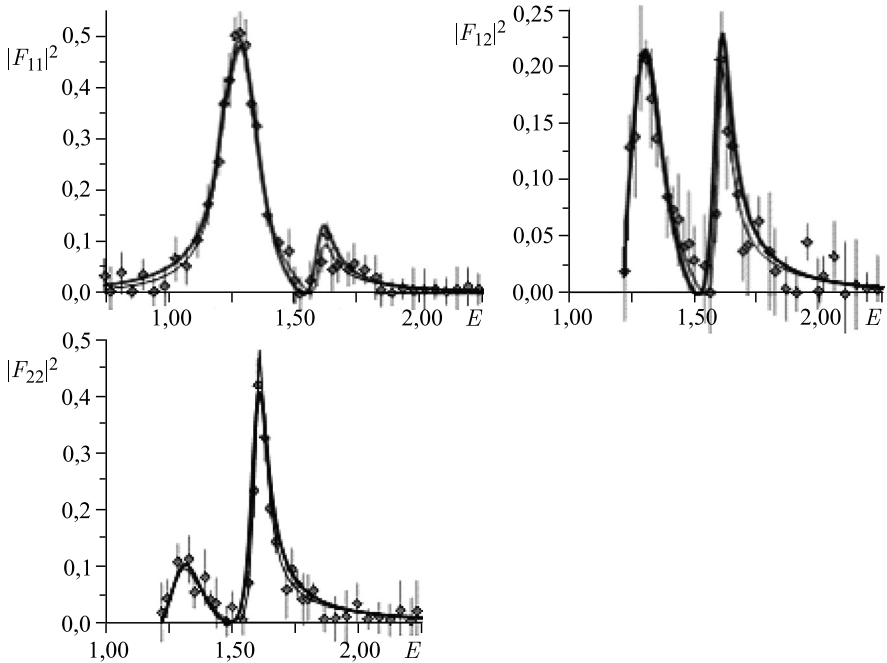


Рис. 2. Жирные кривые — БВ-формулы (25), тонкие кривые — K -матрица (27)

неадекватно описывает область между резонансами, если все амплитуды (сечения) не близки к нулю в этих областях. Амплитуды представлены на рис. 1.

Если амплитуды имеют не только полюсы, но и нули, другими словами, когда резонансы хорошо разрешены и не перекрываются, то как K -матрица, так и БВ-описания приводят к близким результатам. Ситуация, в которой данные имеют существенные провалы между резонансами во всех трех каналах, представлена на рис. 2. Качество фитов практически одинаковое: в каждом методе $\chi^2/d \approx 0,5$. Параметры резонансов в обоих методах для этого случая собраны в таблице.

БВ- и K -матричные параметры (6 независимых) согласно данным рис. 2

Метод	Параметр					
	m_r	Γ_r	B_{r1}	B_{r2}	g_{r1}	g_{r2}
БВ	1,30	0,19	49	51	$-0,39-i0,02$	$-0,37-i0,03$
	1,60	0,09	18	82	$-0,11-i0,05$	$-0,25+i0,06$
K	1,30	0,28	45	55	—	—
	1,60	0,12	27	73	—	—

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Очевидно, что интерференция между резонансами является центральной частью анализа и интерпретации. Подход, основанный на функциях БВ, обеспечивает параметризацию в терминах, имеющих прямой физический смысл. Фон может быть включен в схему в стандартном виде через фазовые сдвиги [5, 6]. БВ-амплитуды содержат интерференцию резонансных состояний, и такие интерференционные фазы есть в скрытой форме и в K -матричном методе, что проявляется в амплитудах рассеяния [5]. Каналы рождения в схеме БВ не нуждаются в специальном описании, соответствующие g_{rp} (p обозначает эти каналы) просто могут иметь другой порядок величины по сравнению с g_{ri} .

В K -матричном методе амплитуды не могут быть разделены на резонансные и фоновые вклады. Также важно сознавать, что нули в амплитудах K -матрицы между резонансами могут быть препятствием при описании экспериментальных данных. Добавление неполюсных слагаемых к K_{ij} в (6) практически не меняет ситуацию с появлением таких нулей (или очень глубоких провалов) в амплитудах. Единственный способ избавиться от этого (фактически дефекта метода) — это добавление гладких слагаемых к амплитудам (5), однако при этом будет нарушена унитарность S -матрицы (4), на которой базируется сама идея K -матричного подхода.

Несмотря на то, что K -матричный метод обеспечивает унитарную параметризацию S -матрицы, названия его параметров — массы, ширины, вероятности распадов — заимствованы из сопоставления с формулой БВ для случая изолированного резонанса. Использование для описания перекрывающихся резонансов сохраняющего унитарность метода, основанного на формулах БВ, может быть хорошим дополнением или альтернативой методу K -матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Humblet J., Rosenfeld L.* // Nucl. Phys. 1961. V. 26. P. 529.
2. *McVoy K. W.* // Ann. Phys. 1969. V. 54. P. 552.
3. *Chung S. U., Brose J., Hackmann R., Klempert E., Spanier S., Strassburger C.* // Ann. Phys. 1995. V. 4. P. 404.
4. *Durand L.* // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 14.
5. *Belozeroва T. S., Henner V. K.* // Phys. Part. Nucl. 1998. V. 29. P. 63.
6. *Belozeroва T. S., Henner V. K.* // Eur. Phys. J. A. 2003. V. 18. P. 309.