

РАСПУТЫВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ: ТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ

А. М. Поволоцкий *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва

Дано краткое описание нескольких результатов исследований систем взаимодействующих частиц и законов, которые характеризуют поведение таких систем на больших масштабах и являются универсальными для множества различных явлений, объединенных классом универсальности Кардара–Паризи–Жанга.

This review gives a survey of some results about systems of interacting particles and the laws characterizing their behavior on large scales, which are common for a number of phenomena unified under the notion of the Kardar–Parisi–Zhang universality class.

PACS: 44.25.+f; 44.90.+c

*Памяти моего Учителя и старшего друга
Вячеслава Борисовича Приезжева*

ВВЕДЕНИЕ

Равновесная статистическая физика позволяет описывать системы с большим числом степеней свободы, находящиеся в состоянии термодинамического равновесия. В основе этой теории, начала которой были заложены в пионерских работах Л. Больцмана и Дж. У. Гиббса, лежит представление о том, что типичная макроскопическая система в равновесии ведет себя, как случайная, причем каждое ее микроскопическое состояние реализуется с вероятностью, определяемой распределением Больцмана–Гиббса, зависящим только от энергии и еще, быть может, небольшого набора других параметров.

*E-mail: alexander.povolotsky@gmail.com

Вся последующая история развития статистической физики продемонстрировала необыкновенную общность этой картины.

Простейшей «игрушечной» системой, на примере которой можно проиллюстрировать работу этого формализма, является решеточный газ, в котором частицы расположены в узлах решетки \mathcal{L} , которая является подмножеством целочисленной d -мерной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$, в свою очередь вложенной в d -мерное пространство. Будем считать, что в каждом узле $i \in \mathcal{L}$ может в принципе находиться любое число частиц $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Тогда конфигурации системы $\mathbf{n} = \{n_i\}_{i \in \mathcal{L}}$ приписывается вероятность

$$\mathbb{P}(\mathbf{n}) = \frac{1}{Z(\beta, \mu)} e^{-\beta(H(\mathbf{n}) - \mu \|\mathbf{n}\|)},$$

где $Z(\beta, \mu)$ — статистическая сумма, играющая роль нормирующего множителя; β и μ — внешние параметры, обратная температура и химический потенциал соответственно; $\|\mathbf{n}\| = \sum_{i \in \mathcal{L}} n_i$ — полное число частиц, а $H(\mathbf{n})$ — энергия конфигурации частиц \mathbf{n} . Обычно $H(\mathbf{n})$ — это сумма вкладов, соответствующих взаимодействиям частиц внутри каждого узла, в соседних узлах, в следующих за соседними и т. д.

Вероятностная конструкция приводит к весьма общим заключениям о статистике системы при огульном рассмотрении. Утверждения, известные в теории вероятности как закон больших чисел (ЗБЧ) и центральная предельная теорема (ЦПТ), можно применить к описанию некоторых характеристик при весьма общих предположениях о виде энергии микросостояний [1–3]. В частности, это относится к ситуации, когда в системе присутствуют лишь силы ограниченного радиуса действия, т. е. когда энергия взаимодействия между различными частями системы быстро убывает при увеличении расстояния между ними. Тогда типичной* является ситуация, когда корреляционная длина конечна. Грубо говоря, если мы разделим систему на ящики с характерным размером больше некоторого характерного размера, называемого корреляционной длиной, то с точностью до исчезающих вкладов случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots , характеризующие разные ящики (например энергия, число частиц, спин и т. д.), можно считать независимыми. Предположим также, что все ξ_i одинаково распределены (это так, если функция $H(\mathbf{n})$ — трансляционно инвариантна), а два их первых момента конечны,

$$\rho = \mathbb{E}\xi_i, \quad \sigma^2 = \mathbb{D}\xi_i.$$

Тогда для специального класса так называемых аддитивных функций микросостояний, определяемых как сумма большого числа независимых случайных

*Под типичным мы понимаем выбор параметров вдали от точек фазовых переходов.

величин, характеризующих разные ящики,

$$S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i,$$

будут справедливы ЗБЧ и ЦПТ. Вместе они утверждают, что при $n \rightarrow \infty$ асимптотика случайной величины S_n в двух ведущих порядках складывается из линейной по n детерминистической части и нормально распределенной случайной величины порядка \sqrt{n} ,

$$S_n \sim n\rho + \sqrt{n}\sigma\mathcal{N} + o(\sqrt{n}). \quad (1)$$

Несложно понять смысл численных коэффициентов, возникающих в этом выражении. Коэффициент при линейной части дает термодинамическую величину плотности соответствующей физической наблюдаемой, а случайная часть говорит о распределении типичных флуктуаций этой наблюдаемой вблизи ее термодинамического значения. Важно, что вид формулы (1) универсален, т. е. справедлив для весьма широкого класса величин ξ_i , входящих только через пару численных параметров ρ и σ . Например, если выбрать в качестве величины ξ_i число частиц в ящике i , то ρ и σ будут выражаться через производные удельной свободной энергии

$$f(\beta, \mu) = - \lim_{\mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}^d} \frac{\beta^{-1}}{|\mathcal{L}|} \ln Z(\beta, \mu)$$

с помощью стандартных термодинамических соотношений

$$\rho = \frac{\partial f(\beta, \mu)}{\partial \mu}, \quad \sigma^2 = \beta^{-1} \frac{\partial^2 f(\beta, \mu)}{\partial \mu^2}. \quad (2)$$

Возвращаясь к нашему простому примеру решеточного газа, рассмотрим систему, в которой энергия содержит только взаимодействия нулевого радиуса, положив

$$H(\mathbf{n}) = \sum_{x \in \mathcal{L}} e(n_x),$$

где будем предполагать, что функции $e(n)$ убывают с ростом n . Тогда распределение Больцмана–Гиббса имеет факторизованный вид

$$\mathbb{P}(\mathbf{n}) = \prod_{x \in \mathcal{L}} \frac{f(n_x) e^{\beta \mu n_x}}{\mathfrak{z}(z)},$$

где $f(n) = e^{-\beta e(n)}$, $\mathfrak{z}(z) = \sum_{k \geq 0} f(k) z^k$ и в качестве независимых ящиков достаточно выбрать отдельные узлы, а в качестве величин ξ_i — числа частиц

в них. Тогда случайная величина, имеющая смысл полного числа частиц в некоторой большой области, содержащей $n \rightarrow \infty$ узлов, будет асимптотически задаваться формулой (1), где параметры выражаются формулами (2) через свободную энергию

$$f(\beta, \mu) = -\beta^{-1} \ln \mathfrak{z}(e^{\beta\mu}).$$

Заметим, что в этой предельно упрощенной ситуации пространственное положение ящиков не играет никакой роли из-за полной независимости их чисел заполнения. Нетрудно добавить в эту картину зависимость от пространственных координат, введя медленно меняющийся химический потенциал $\mu = \mu(x/a)$, где большой параметр a , задающий характерный размер пространственной неоднородности, можно выбрать порядка линейного размера системы. Определим теперь макроскопическую плотность частиц $s_a(r) = a^{-d} S_{n(ar)}/v$, поделив число частиц $S_{n(ar)}$ в ящике объема $a^d v$, содержащем точку с координатой ar , на объем. В пределе $a \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$, так что $a^d v \rightarrow \infty$, плотность $s_a(r)$ асимптотически ведет себя как

$$s_a(x) \sim \rho(x) + a^{-d/2} \sigma(x) \eta(x) + \dots,$$

где $\eta(x)$ — белый шум, т. е. случайное гауссово поле

$$\mathbb{E}\eta(x) = 0, \quad \mathbb{E}\eta(x)\eta(x') = \delta^d(x - x'),$$

а локальные параметры $\rho(x)$ и $\sigma(x)$ по-прежнему выражаются с помощью формул (2) через локальное значение потенциала $\mu(x)$ на макроскопической шкале.

Мы привели простейший пример универсального поведения, характерного для так называемого гауссова класса универсальности. Будучи тривиальным в случае взаимодействия нулевого радиуса, он имеет много более широкую область применимости, например к системам с межузельными взаимодействиями конечного радиуса или достаточно быстро убывающими с расстоянием и с ростом числа частиц в узлах. Качественно такое поведение ожидается в области аналитичности свободной энергии по параметрам, когда корреляционная длина конечна. Именно конечность корреляционной длины, т. е. асимптотическая независимость случайных величин, характеризующих части системы, находящиеся на больших, чем корреляционная длина, расстояниях, является ключевым фактом, ответственным за то, что при огрубленном рассмотрении случайные состояния системы выглядят как случайное гауссово поле.

В настоящем обзоре мы не собираемся делать точные утверждения о предельном поведении равновесных систем, а также обсуждать степень общности гауссова класса универсальности. Мы использовали данный пример, чтобы продемонстрировать, как при огрубленном рассмотрении широкого класса явлений в рамках равновесной статистической механики возникает универсальная предельная картина. Естественно задаться вопросом о том, какие еще

типы универсального поведения могут возникнуть при огрубленном рассмотрении многокомпонентных систем. Например, в равновесии более сложные типы универсального поведения возникают в критической точке в ситуации фазового перехода второго рода, когда корреляционная длина бесконечна. Заметим, что в этом случае простых аргументов (типа приведенных выше) оказывается недостаточно, и для получения точных предельных распределений необходимо развитие сложных математических техник, позволяющих описывать точную статистику моделей со специальной интегрируемой структурой.

Рассмотрим другой не менее важный вопрос — универсальность в неравновесных системах. Именно поиск примеров такой универсальности служит мотивацией для получения результатов, которые представлены в данном обзоре. К сожалению, не существует общего подхода к неравновесным системам, подобного теории Больцмана–Гиббса. Общим моментом для больших многокомпонентных систем является то, что такая система на больших временах часто ведет себя как случайная. Мы принимаем это допущение с самого начала, задавая простейшую стохастическую эволюцию модельной системы как марковскую цепь. При этом мы также будем рассматривать решеточные модели взаимодействующих частиц типа решеточного газа с локальной марковской динамикой. Идея состоит в том, чтобы задать такие динамические правила, которые позволили бы точно вычислять достаточно богатый спектр физических наблюдаемых. Перейдя после этого к огрубленному рассмотрению, т. е. взяв специальный скейлинговый предел полученных точных результатов, мы надеемся получить универсальное скейлинговое описание, применимое не только к конкретным точно решаемым моделям, но и к целому классу универсальности, выходящему за узкие рамки точно решаемых моделей.

В конце нашего исследования мы обнаружим универсальное поведение, возникающее в рамках класса универсальности Кардара–Паризи–Жанга [4], который объединяет множество таких неравновесных явлений, как случайный рост поверхностей различного генеза: границ между фазами вещества, поверхностей кристаллов, границ смачивания, высыхания и горения и т. д., а также различные неравновесные системы переноса [5]. Мы опишем один пример вероятностного распределения (распределение Трейси–Уидома [6]) и случайного процесса (процесса Эйри [7]), которые являются проявлением универсальности в классе Кардара–Паризи–Жанга. Заметим, что полученные универсальные распределения возникают не только в контексте неравновесной статфизики. Впервые они были получены при исследовании статистики собственных значений случайных матриц [8] и при изучении асимптотического поведения случайных перестановок и диаграмм Юнга [9], описывающих теорию представлений больших групп [10]. Те же универсальные распределения возникают при описании универсальных флуктуаций в окрестности предельных форм в таких равновесных системах, как димерные упаковки

и замощения различных плоских областей [11, 12], а также при изучении одномерных случайных блужданий или броуновского движения в ограниченной геометрии [13]. Еще один класс равновесных задач с подобным универсальным скейлинговым поведением — задачи о полимере в случайной среде. При нулевой температуре — это задача о перколяции последнего достижения, связанная с уже упомянутой статистикой случайных перестановок и диаграмм Юнга [14]. При конечной температуре распределение свободной энергии броуновского полимера в среде, где случайность задается белым шумом, может быть найдено с помощью метода реплик [15], который позволяет установить связь с точно решаемой квантово-механической задачей о бозонах с дельта-взаимодействием [16]. Решение приводит к результатам с таким же скейлинговым поведением [17–19]. Интересно, что свободная энергия полимера в этой равновесной задаче является решением нелинейного стохастического уравнения Кардара–Паризи–Жанга, описывающего, по сути, неравновесный рост фронта под действием случайной силы. Альтернативное решение последнего, эксплуатирующее связь с неравновесной системой взаимодействующих частиц, приводит, естественно, к тому же результату [20].

Выполнение нашей программы требует ряда шагов. Дело в том, что точное решение эволюционной задачи для системы с большим числом степеней свободы, как правило, является неразрешимой задачей. Исключение составляют модели, принадлежащие к классу так называемых интегрируемых систем. До недавнего времени в качестве интегрируемых систем выступали в основном квантовые системы многих частиц в пространственно-временной размерности $1 + 1$ или двумерные модели статистической физики [21]. Оказывается, однако, что ту же структуру можно найти и в стохастических системах взаимодействующих частиц [22]. Действительно, если от гамильтониана квантовой системы, такой как спиновая цепочка Гейзенберга, дополнительно потребовать выполнения специального свойства стохастичности, то уравнение эволюции (Шредингера), записанное в мнимом времени, будет описывать марковскую динамику системы взаимодействующих частиц. Чтобы провести аналогию с двумерными системами статистической физики, заметим, что часто такие системы можно сформулировать в терминах вероятностных (гиббсовских) мер на множестве направленных путей на решетке, в свою очередь определяемых через веса локальных конфигураций. Однако о двумерной решетке можно думать как о дискретизации пространства-времени размерности $1 + 1$. Тогда при условии стохастичности соответствующего оператора (трансфер-матрицы) можно рассматривать пути как траектории взаимодействующих частиц, вероятностные меры на которых имеют смысл переходных вероятностей марковской цепи. Именно этого подхода мы будем придерживаться далее.

Наш первый шаг — построение системы взаимодействующих частиц с возможно более общими динамическими правилами, обеспечивающими ин-

тегрируемость соответствующего эволюционного оператора. Технически это означает, что эволюционный оператор диагонализуем с помощью арсенала методов, которые принято объединять под названием анзац Бете (АБ) [23]. Пользуясь АБ, можно найти общее решение динамического уравнения, описывающего стохастическую эволюцию системы. Однако, как правило, из общего многоточечного распределения, содержащего полную информацию о многокомпонентной системе, трудно извлечь информацию о физике системы. Поэтому следующий шаг — вычисление информативных коллективных характеристик, таких как корреляционные функции или частные распределения. Эта задача требует применения новых методов, история развития которых восходит к теории случайных матриц [8]. Наконец, последний этап — асимптотический анализ скейлингового предела полученных точных формул. Результат оказывается аналогом ЗБЧ и ЦПТ для одномерных случайных многочастичных систем.

Исследования этих вопросов проводились в Дубне в группе Вячеслава Борисовича Приезжева на протяжении последних двадцати лет. Начнем наше изложение с объяснения того, какие особенности марковской динамики частиц ответственны за точную решаемость соответствующих эволюционных уравнений. При этом постараемся сделать акцент на подходе, который развивал Вячеслав Борисович, основанном на так называемом распутывании траекторий [24]. Основная идея этого подхода состоит в том, что всякая точно решаемая динамика взаимодействующих частиц в некотором смысле сводится к динамике невзаимодействующих частиц. А именно, мы конструируем производящие функции направленных взаимодействующих путей частиц на решетке, соединяющих фиксированные наборы вершин, из невзаимодействующих путей, добавляя к путям без взаимных пересечений пересекающиеся пути с переставленными и сдвинутыми началами или концами и модифицированными весами. Сначала мы иллюстрируем этот подход на примере простейшей модели недружелюбных блуждателей, где исключение конфигураций с пересекающимися путями приводит к свободнофермионным волновым функциям и определителям Карлина–Макгрегора–Линдстрема–Гесселя–Виенно [25–27]. Потом мы переходим к моделям с более сложными взаимодействиями и исследуем вопрос: «При каких взаимодействиях между частицами эволюцию взаимодействующих частиц все еще можно свести к эволюции невзаимодействующих?» В результате мы приходим к общей трехпараметрической модели частиц с факторизованным стационарным состоянием, содержащей множество интересных известных ранее и новых моделей как предельные случаи. Построение этой модели и краткий обзор ее предельных случаев — это основной результат, описанный в разд. 1.

Разд. 2 посвящен построению производящих функций путей, которые приводят нас к координатному АБ, из которого, в свою очередь, можно извлечь функции Грина, т. е. вероятности переходов между конфигурациями частиц.

Похожий подход, трактующий анзац Бете как производящие функции (статсуммы) путей на решетке, развивался также в работах [28, 29]. Вывод функции Грина сводится к вычислению коэффициента разложения АБ в ряд Лорана. Мы излагаем его как можно более простым языком, пренебрегая математической строгостью, чтобы сосредоточиться на его комбинаторной сути. Далее мы переходим к простому частному однопараметрическому случаю (модели с обратным последовательным обновлением), в котором функция Грина имеет детерминантный вид, и показываем, что в этом случае результат обобщается также на переходы между конфигурациями частиц, в которых различаются не только пространственные координаты, но и временные. Здесь же вводится понятие границы как линии, разделяющей пространственно-временную плоскость на две части, а обобщенная функция Грина трактуется как вероятность выхода частиц с границы в заданных точках.

Тогда как обобщенная функция Грина дает полную вероятность конфигурации N пространственно-временных позиций, через которые N частиц выходят с границы, интерес представляют частные распределения позиций выхода некоторых из этих частиц. Разд. 3 посвящен вычислению таких частных распределений. Для этого показывается, что обобщенную функцию Грина, полученную в предыдущем разделе, можно представить как частное распределение по детерминантному точечному процессу на расширенном пространстве. В результате мы получаем многоточечные распределения позиций выхода в виде определителей Фредгольма с явным ядром для системы с бесконечным числом частиц, которые начинают блуждать, выходя из единственного узла, заполненного бесконечным числом частиц. В процессе рассказа мы также приводим простое доказательство центрального утверждения теории детерминантных процессов, теоремы Эйнарта–Меты [30, 31], основанное на подсчете непересекающихся путей с помощью теоремы Карлина–Макгрегора–Линдстрема–Гесселя–Виенно.

В последнем разд. 4 мы обсуждаем асимптотический анализ полученных точных формул. При этом цель, которую мы ставим, — не описать технику асимптотического анализа, которая требует применения множества технических приемов, а мотивировать вид скейлингового предела исходя из общих принципов теории Кардара–Паризи–Жанга. В частности, мы описываем способ получения параметров, входящих в утверждения, аналогичные ЗБЧ и ЦПТ для распределений различных случайных величин, характеризующих системы частиц и ассоциированный с ними растущий фронт, и объясняем связь этих параметров с характеристиками стационарного состояния бесконечной системы. В результате мы приводим самую общую формулировку для скейлингового предела вероятностей выхода частиц с последовательности границ, аппроксимируемых гладкими кривыми из заданного однопараметрического семейства, в пространственно-временных позициях, ассоциированных с произвольным пространственно-подобным путем. Мы завершим наш путь от рас-

путывания траекторий до универсальных скейлинговых пределов, сформулировав вывод о сходимости вероятностей выхода на пространственно-подобных путях к универсальному предельному случайному процессу Эйри, сделал таким образом наиболее общее утверждение типа ЦПТ для нашей модельной системы, которое, как ожидается, распространяется на весь класс универсальности Кардара–Паризи–Жанга.

Перед тем как перейти к подробностям, заметим, что в обзоре мы не преследовали цели достичь наибольшей общности или строгости изложения, так же как не пытались сделать элементарное введение в предмет. На сегодня существует множество великолепно написанных обзоров, которые с блеском справляются с этой задачей [32–36]. Наша скромная цель — продемонстрировать несколько более общий взгляд на некоторые результаты, выбор которых продиктован как вкусами автора, так и историей его сотрудничества с Вячеславом Борисовичем Приезжевым. Технические детали можно найти в работах [37–42].

1. АНЗАЦ БЕТЕ КАК РАСПУТЫВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ

В этом разделе мы опишем, как построить интегрируемую стохастическую модель взаимодействующих частиц на одномерной решетке. Под интегрируемостью будем понимать обобщение того факта, что оператор марковской эволюции диагонализуется с помощью АБ. АБ был предложен Хансом Бете [23] как гипотеза о виде собственных функций гамильтониана квантовой цепочки Гейзенберга. Впоследствии выяснилось, что применимость этой гипотезы имеет под собой глубокие математические основания, а аналогия с хорошо известным понятием интегрируемости по Лиувиллю в классической механике привела к понятию квантовой интегрируемости. Развитие техник, связанных с АБ, дало мощный импульс такой области математики и математической физики, как теория представлений, и привело к появлению новых областей, например теории квантовых групп. Сам метод АБ получил множество разных интерпретаций: координатный анзац Бете, алгебраический анзац Бете, функциональный анзац Бете и т. д. Здесь нам хотелось бы сосредоточиться на комбинаторном подходе к координатному анзацу Бете, развитом Вячеславом Борисовичем Приезжевым. Суть этого подхода состоит в том, что при рассмотрении эволюции системы взаимодействующих частиц об их траекториях можно думать как о специальным образом перевзвешенных траекториях невзаимодействующих частиц, тогда как задача о невзаимодействующих частицах распадается на одночастичные задачи и потому значительно упрощается.

1.1. Задача о недружелюбных блуждателях и подсчет непересекающихся путей. Чтобы проиллюстрировать эту идею, обратимся к простейшей модели аннигилирующих частиц на одномерной решетке, известной под

названием недружелюбные блуждатели (НБ). В формулах мы также будем использовать латинскую аббревиатуру VW от оригинального английского названия vicious walkers.

Рассмотрим N частиц на бесконечной одномерной решетке $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$ в дискретном времени. В дальнейшем при рассмотрении этой модели и последующих мы будем считать частицы тождественными и интересоваться только их координатами, которые могут быть либо строго, либо нестрого упорядочены. Соответствующие множества конфигураций N частиц будем обозначать

$$D_N^> = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N : (x_1 > x_2 > \dots > x_N)\} \quad (3)$$

и

$$D_N^{\geq} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^N : (x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_N)\}. \quad (4)$$

В модели НБ процесс начинается с некоторой конфигурации частиц с координатами $\mathbf{x}^0 \in D_N^>$. На каждом шаге времени каждая частица либо делает шаг вправо с вероятностью p , либо стоит на месте с вероятностью $(1 - p)$. Если две частицы попадают в один узел, то они аннигилируют. Нас будут интересовать лишь те реализации случайного процесса, в которых не происходит ни одного события аннигиляции, т. е. в любой момент времени $\mathbf{x}(t) \in D_N^>$. Попробуем вычислить функцию Грина для модели НБ,

$$G_t^{\text{VW}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \mathbb{P}^{\text{VW}}(\mathbf{x}(t) = \mathbf{x} | \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0),$$

т. е. вероятность того, что все частицы проживут t шагов и в момент времени t будут иметь координаты $\mathbf{x} \in D_N^>$. Об этой вероятности можно думать как о статсумме направленных путей, идущих сверху вниз и слева направо по пространственно-временной решетке, изображенной на рис. 1. Решетка состоит из вертикальных и диагональных ребер. Прохождение пути по первому (второму) ребру соответствует тому, что частица стоит (прыгает) и вносит в вес пути множители $(1 - p)$ и p соответственно. Различные пути независимы, т. е. вес группы путей получается как произведение весов отдельных путей. Из того, что все частицы выжили, следует, что пути не могут пересекаться. Таким образом, функция Грина дается выражением

$$G_t^{\text{VW}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{\{\Pi\}_{x^0 \rightarrow x}^{\text{NI}}} (1 - p)^{v(\Pi)} p^{d(\Pi)},$$

где суммирование ведется по множеству $\{\Pi\}_{x^0 \rightarrow x}^{\text{NI}}$ групп из N направленных путей, попарно соединяющих узлы $((x_1^0, 0), \dots, (x_N^0, 0))$ и $((x_1, t), \dots, (x_N, t))$, не пересекаясь между собой (NI — non-intersecting), а $v(\Pi)$ и $d(\Pi)$ — соответственно числа вертикальных и диагональных ребер, через

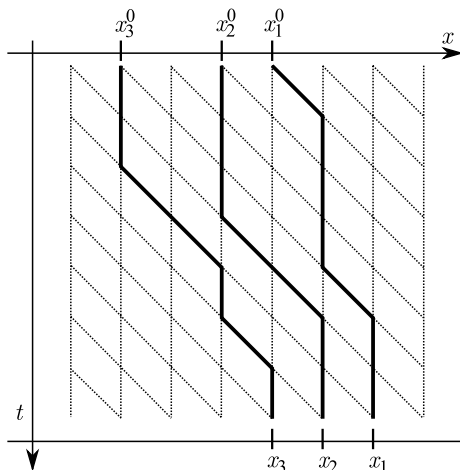


Рис. 1. Пути частиц на пространственно-временной решетке. Вертикальный шаг — частица стоит. Диагональный шаг — частица прыгает

которые проходят пути. Попробуем вычислить вероятность $G_t(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0)$. Очевидно, для одной частицы, $N = 1$, она дается биномиальным распределением

$$G_t(x - x^0) = p^{x-x^0} (1-p)^{t-x+x^0} \binom{t}{x-x^0},$$

т.е. числом способов сделать $(x - x^0)$ прыжков за t шагов, взятое с соответствующим весом, которое, очевидно, зависит только от разности начальной и конечной координат. Нетрудно также найти вероятность N полностью независимых путей, попарно соединяющих узлы $((x_1^0, 0), \dots, (x_N^0, 0))$ и $((x_1, t), \dots, (x_N, t))$ соответственно. Если никаких ограничений на такие пути не предполагается, то соответствующая вероятность будет равна произведению одночастичных вероятностей,

$$G_t^{\text{IP}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \prod_{i=1}^N G_t(x_i - x_i^0),$$

где верхний индекс IP говорит о том, что функция Грина вычислена для независимых частиц (independent particles).

Для решения же задачи об аннигилирующих частицах или о непересекающихся путях нужно вычесть из этого произведения все реализации процесса с пересечениями, что на первый взгляд кажется трудной задачей. Однако существует простое решение, в основе которого лежит теорема Карлина–

Макгрегора–Линдстрема–Гесселя–Виенно (КМЛГВ) [25–27]. Для ее формулировки введем некоторые определения. Пусть $\mathcal{G} = (V, E)$ — направленный ациклический граф, где каждое направленное ребро $e \in E$ снабжено весом $w(e)$. Весом $W(\Pi)$ направленного пути Π , проходящего по ребрам графа, назовем произведение весов входящих в него ребер:

$$W(\Pi) = \prod_{e \in \Pi} w(e),$$

а весом перехода из вершины a в вершину b :

$$w(a \rightarrow b) = \sum_{\{\Pi\}_{a \rightarrow b}} W(\Pi),$$

— сумму весов всех путей, идущих из a в b вдоль направленных ребер. Обобщим эти определения для групп путей. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_N) \subset V$ и $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_N) \subset V$ — две группы по N вершин в каждой, которые мы будем называть началами и концами соответственно. Группу из N путей, идущих из a_i в b_i , $i = 1, \dots, n$, назовем N -путем и будем обозначать $\Pi_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}} = \{\Pi_{a_1 \rightarrow b_1}, \dots, \Pi_{a_N \rightarrow b_N}\}$, а вес N -пути определим как произведение весов входящих в него путей:

$$W(\Pi_{\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}}) = \prod_{i=1}^N W(\Pi_{a_i \rightarrow b_i}),$$

и соответственно определим вес $w(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b})$ как сумму весов всех возможных N -путей из \mathbf{a} в \mathbf{b} . Поскольку пути с различными началами и концами полностью независимы, очевидно, что

$$w(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N w(a_i \rightarrow b_i).$$

Введем также вес $w^{\text{NI}}(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b})$ перехода без пересечений как сумму весов таких N -путей из \mathbf{a} в \mathbf{b} , в которых никакие два пути не имеют общих вершин. Понятно, что последний вес нельзя представить в виде произведения, так как условие непересечения делает пути зависимыми.

Теорема 1. (КМЛГВ)

Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \det \{w(a_i \rightarrow b_j)\}_{1 \leq i, j \leq N} &= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma w(\mathbf{a} \rightarrow \sigma \mathbf{b}), \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^\sigma w^{\text{NI}}(\mathbf{a} \rightarrow \sigma \mathbf{b}), \end{aligned} \quad (5)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам концов, т. е. $w(\mathbf{a} \rightarrow \sigma \mathbf{b})$ — вес перехода из a_1 в b_{σ_1} , из a_2 в b_{σ_2} и т. д., $w^{\text{NI}}(\mathbf{a} \rightarrow \sigma \mathbf{b})$ означает то же самое, но без пересечений.

Доказательство этой теоремы элементарно. Оно основано на наблюдении, что если два пути в N -пути пересекаются хотя бы один раз, то найдется другой N -путь, отличающийся от исходного тем, что части этих двух путей после первого пересечения переставлены между собой. Очевидно, что вес такого N -пути совпадает с исходным, но соответствующий переход входит в сумму в левой части (5) с другим знаком. Таким образом, все N -пути с пересечениями сокращаются внутри суммы по перестановкам, и остается сумма в правой части (5).

Для решения поставленной задачи о функции Грина нам пригодится следствие из теоремы КМЛГВ, которое, в частности, применимо для рассмотренного случая планарной решетки.

Следствие. Если возможные переходы без пересечений сохраняют порядок путей, т. е. единственное ненулевое слагаемое в левой части (5) соответствует тождественной перестановке, то

$$w^{\text{NI}}(\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}) = \det [w(a_i \rightarrow b_j)]_{1 \leq i, j \leq N}.$$

Очевидно, это выполняется в случае, рассмотренном выше, откуда имеем

$$G_t^{\text{VW}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \det [G_t(x_i - x_j^0)]_{1 \leq i, j \leq N}. \quad (6)$$

Этот результат немедленно можно обобщить на более широкие классы N -путей, в которых у начал и концов путей различны не только пространственные координаты, но и временные. В соответствующих процессах на одномерной решетке частицы начинают и заканчивают блуждать в различных узлах и в различные моменты времени. Действительно, чтобы выполнялись условия сохранения порядка путей на пространственно-временной решетке, достаточно, чтобы никакие начала и концы путей не находились в областях (параллелограммах), посещаемых другими путями. Чтобы формализовать это утверждение, рассмотрим два набора пространственно-временных точек $(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0) = ((x_1^0, t_1^0), \dots, (x_N^0, t_N^0))$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = ((x_1, t_1), \dots, (x_N, t_N))$, такие, что $x_1 > \dots > x_N$, $x_1^0 > \dots > x_N^0$, $t_i \geq t_i^0$ для любых $i = 1, \dots, N$ и не существует пары чисел $1 \leq i \neq j \leq N$, таких, что выполнены неравенства

$$t_i^0 - x_i^0 \leq t_j^0 - x_j^0 \leq t_i - x_i, \quad x_i^0 \leq x_j \leq x_i$$

или

$$t_i^0 - x_i^0 \leq t_j - x_j \leq t_i - x_i, \quad x_i^0 \leq x_j \leq x_i.$$

Тогда обобщением следствия будет

Предложение.

$$\begin{aligned} G_t^{\text{VW}}((\mathbf{x}, \mathbf{t}), (\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0)) &= w^{\text{NI}}((\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0) \rightarrow (\mathbf{x}, \mathbf{t})) = \\ &= \det [G_{t_i - t_j^0}(x_i - x_j^0)]_{1 \leq i, j \leq N}. \end{aligned}$$

1.2. Производящие функции, свободные фермионы и метод изображений. Таким образом, мы выразили статсумму непересекающихся путей через знакпеременную комбинацию статсумм независимых путей с переставленными концами, или, что то же самое, описали статистику координат взаимодействующих частиц в терминах статистик не взаимодействующих частиц. В дальнейшем мы хотим использовать похожий подход для путей (частиц) с более сложным взаимодействием.

Удобный инструмент для работы с независимыми частицами (путями) — производящая функция координат частиц (концов путей). С точки зрения марковской цепи, стоящей за динамикой частиц, производящая функция — это частный случай функции состояний марковской цепи. Пусть $c(t)$ — однородная марковская цепь* на некотором конечном или счетном множестве конфигураций C , с переходными вероятностями

$$M_{c'c} = \mathbb{P}(c(t+1) = c' | c(t) = c)$$

и заданной начальной конфигурацией c_0 , т. е.

$$\mathbb{P}(c(0) = c_0) = 1.$$

Эволюция матожидания произвольной функции состояний $f(c)$ задается обратным уравнением Чапмена–Колмогорова

$$f_{t+1}(c) = M f_t(c) = \sum_{c'} M_{cc'} f_t(c'), \quad (7)$$

где

$$f_t(c) = \mathbb{E}(f(c(t)) | c(0) = c).$$

Если же было задано некоторое начальное распределение вероятности конфигураций \mathbb{P}_0 , то матожидание функции $f(c)$ будет иметь вид

$$\mathbb{E}(f(c(t))) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_0}(f_t(c)),$$

где усреднение в правой части проводится по начальному распределению.

В нашем случае конфигурации системы — это наборы упорядоченных координат частиц. Чтобы воспроизвести результат, полученный выше, мы введем производящую функцию их вероятностного распределения:

$$g_t(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \mathbb{E}(\mathbf{z}^{-\mathbf{x}(t)} | \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}} G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \mathbf{z}^{-\mathbf{x}}. \quad (8)$$

*Наш пример модели недружелюбных блуждателей, точнее, ее ограничение на процессы с постоянным числом частиц, строго говоря, не является марковской цепью, поскольку с течением времени часть процессов выпадает из рассмотрения, что приводит к несохранению вероятности. В пределах данного раздела, однако, сохранение вероятности неважно.

Здесь жирным шрифтом по-прежнему выделены N -компонентные мультииндексы: $\mathbf{x}^0, \mathbf{x} \in D_N^>$ — наборы упорядоченных начальных и конечных координат соответственно, $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ — набор параметров производящей функции, а $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}} = z_1^{-x_1} \dots z_N^{-x_N}$. Вообще говоря, $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ — это формальный степенной ряд Лорана по формальным переменным z_1, \dots, z_N . Однако в будущем нам будет также удобно думать, что z_1, \dots, z_N принимают значения в комплексной плоскости, а сумма ряда представляет функцию, аналитическую в области его сходимости. Тогда коэффициент $[\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}]g_t(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ ряда при мономе $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$, он же — функция Грина, будет даваться контурным интегралом

$$G_t(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = [\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}]g_t(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi i)^N} \oint_{\Gamma} \dots \oint_{\Gamma} g_t(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) \mathbf{z}^{\mathbf{x}} \frac{d\mathbf{z}}{\mathbf{z}}, \quad (9)$$

где $d\mathbf{z}/\mathbf{z} = \prod_{i=1}^N dz_i/z_i$. Если $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ — лорановский многочлен, то контуры интегрирования Γ можно замкнуть вокруг $z_i = 0$. В более общем случае бесконечного ряда подынтегральное выражение может содержать и другие особые точки, которые в нашем случае не будут зависеть от начальных условий \mathbf{x}^0 . Нам нужно зафиксировать правила обхода особенностей так, чтобы коэффициенты разложения функции $g_t(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ в области, где проходят контуры, соответствовали коэффициентам формального ряда для производящей функции. Для этого достаточно подобрать такие контуры, чтобы в начальный момент времени $t = 0$ интеграл в правой части (9) удовлетворял начальному условию

$$G_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$$

для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_N^>$. Поскольку для любого конечного времени функция $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ получается как конечная линейная комбинация таких же функций в предыдущие моменты, правила обхода не меняются со временем.

Далее мы попробуем предъявить примеры марковской динамики взаимодействующих частиц, для которых функция Грина может быть вычислена явно. Начнем с уже рассмотренного примера недружелюбных блуждателей, в которых траектории частиц статистически независимы при условии, что они не пересекаются, а затем перейдем к системам с более сложным взаимодействием.

Выпишем для начала производящую функцию распределения координаты x одной блуждающей частицы. Действие оператора M в правой части уравнения Чапмена–Колмогорова (7) на функцию координаты в этом случае имеет вид

$$Mf(x) = (1 - p)f(x) + pf(x + 1). \quad (10)$$

Для такой эволюции производящая функция, стартующая с начального условия

$$g_0(x^0; z) = z^{-x^0},$$

является собственной, т. е. эволюция за шаг времени задается умножением

$$g_t(x^0; z) = \Lambda(z)g_{t-1}(x^0; z) = \Lambda^t(z)z^{-x^0}$$

на собственное значение

$$\Lambda(z) = (1 - p) + p/z,$$

имеющее смысл производящей функции одного шага пути.

Аналогичная производящая функция n переменных $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, описывающая эволюцию N независимых частиц, дается произведением одночастичных функций

$$g_t^{\text{IP}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \prod_{i=1}^N g_t(x_i^0; z_i)$$

и, будучи собственной для N -частичной марковской матрицы, эволюционирует умножением на произведение одночастичных собственных значений

$$g_{t+1}^{\text{IP}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \Lambda_N(\mathbf{z})g_t^{\text{IP}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \Lambda_N^t(\mathbf{z})\mathbf{z}^{-\mathbf{x}^0}, \quad \Lambda_N(\mathbf{z}) = \prod_{i=1}^N \Lambda(z_i). \quad (11)$$

Следуя рецепту предыдущего подраздела, определим антисимметричную (AS) комбинацию таких функций,

$$g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma g_t^{\text{IP}}(\sigma \mathbf{x}^0; \mathbf{z}), \quad (12)$$

где антисимметризация проводится по перестановкам начальных положений частиц*. Коэффициент при $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$ в $g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ есть не что иное, как статсумма по путям, антисимметризованная по положению их начальных вершин, и в точности равен выражению (6) для $G_t^{\text{VW}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$, полученному выше с помощью теоремы КМЛГВ. Заметим, что производящей функцией в смысле определения (8) является лишь часть антисимметризованной функции $g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$, в которой показатели степеней мономов $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$ лежат в области определения, D_N^{\geq} , т. е. упорядочены, как в (3), относительно нумерации оснований. В дальнейшем мы будем называть такие мономы физическими, а остальные — нефизическими. Хотя нефизические члены не несут смысловой нагрузки, добавив их, мы добились того, что эволюция полученной функции $g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ имеет тот же вид, что и эволюция свободной функции Грина (11). Это следствие того, что функция $g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ — это линейная комбинация свободных

*Выше мы использовали суммирование по перестановкам концов путей, которые, однако, играют точно такую же роль, как и начала.

функций $g_t^{\text{IP}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ с переставленными началами (или, что то же самое, переставленными параметрами z_1, \dots, z_n), а собственное значение марковской матрицы $\Lambda_n(\mathbf{z})$ — симметричная функция параметров.

В построении выше мы руководствовались соображениями о глобальном перевзвешивании независимых путей, приводящем к сокращению их нежелательных реализаций. Такого же результата можно добиться, рассматривая эволюцию независимых частиц локально на одном шаге марковской динамики. При этом мы хотим придерживаться той же идеологии, что и раньше. Мы будем искать функцию, эволюционирующую как свободная, в виде линейной комбинации свободных функций Грина с переставленными начальными вершинами. При этом потребуем, чтобы та часть этой функции, в которую входят физические мономы $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$, давала нужную нам функцию Грина для системы взаимодействующих частиц.

Рассмотрим действие марковского оператора M на произвольную функцию конфигурации $f(\mathbf{x})$. В модели недружелюбных блуждателей динамика частиц совпадает со свободной, когда частицы не находятся в соседних узлах. Например, для двух частиц с координатами $x_1 > x_2 + 1$ будем иметь

$$Mf(x_1, x_2) = p^2 f(x_1 + 1, x_2 + 1) + p(1 - p)(f(x_1 + 1, x_2) + f(x_1, x_2 + 1)) + (1 - p)^2 f(x_1, x_2). \quad (13)$$

Вид правой части меняется в случае $x_1 - 1 = x_2 = x$, когда частицы оказываются в соседних узлах

$$Mf(x+1, x) = p^2 f(x+2, x+1) + p(1 - p)f(x+2, x) + (1 - p)^2 f(x+1, x). \quad (14)$$

Видно, что два выражения формально различаются наличием члена $\Psi(x + 1, x + 1)$, аргумент которого находится вне области определения $x_1 > x_2$. Поэтому, чтобы задать динамику недружелюбных блуждателей во всей области определения координат частиц, мы можем ограничиться свободным уравнением (13), снабдив его граничным условием

$$f(x + 1, x + 1) = 0. \quad (15)$$

Зададим начальное условие в виде линейной комбинации начальных условий для свободных производящих функций с переставленными начальными вершинами,

$$g_0((x_1^0, x_2^0); (z_1, z_2)) = z_1^{-x_1^0} z_2^{-x_2^0} + A z_1^{-x_2^0} z_2^{-x_1^0},$$

так, чтобы оно было согласовано с $g_0^{\text{VW}}((x_1, x_2); (z_1, z_2)) = z_1^{-x_1} z_2^{-x_2}$ на физических мономах. Из граничного условия (15) следует, что $A = -1$,

и мы снова приходим к антисимметричной функции $g_t^{\text{AS}}((x_1^0, x_2^0); (z_1, z_2))$, анонсированной выше.

Для n частиц дело обстоит совершенно аналогично. Действие оператора эволюции невзаимодействующих частиц запишется в виде

$$Mf(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \{0,1\}} p^{||k||} (1-p)^{n-||k||} f(x_1+k_1, \dots, x_n+k_n), \quad (16)$$

где $||k|| = k_1 + \dots + k_n$, тогда как граничные условия будут иметь точно такой же вид, как и в случае двух частиц:

$$f(\dots, x, x, \dots) = 0. \quad (17)$$

Зададим начальное условие в виде

$$g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \Psi^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}),$$

где функция $\Psi_n^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ определяется равенством

$$\Psi_n^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma (\sigma \mathbf{z})^{-\mathbf{x}}, \quad (18)$$

а аббревиатура BA в ее обозначении — заготовка для будущего использования в качестве анзаца Бете. Такое начальное условие согласуется с $g_0^{\text{VW}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$ на физическом мономе, соответствующем тождественной перестановке, когда $A_{Id} = 1$, а остальные A_σ не зависят от \mathbf{z} . Из граничного условия (17) действительно следует вид коэффициентов A_σ ,

$$A_\sigma = (-1)^\sigma, \quad (19)$$

который приводит к начальному условию для антисимметризованной функции (12),

$$g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = g_0^{\text{AS}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}),$$

каждое слагаемое которой эволюционирует как производящая функция путей свободных частиц умножением на $\Lambda_n^t(\mathbf{z})$:

$$g_t^{\text{AS}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \Lambda_n^t(\mathbf{z}) g_0^{\text{AS}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}).$$

Заметим также, что из-за простого вида (19) амплитуды A_σ начальное условие можно записать в виде определителя

$$g_0^{\text{AS}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \det \{z_i^{-x_j}\}_{1 \leq i, j \leq N},$$

в котором мы узнаем детерминант Слэтера, т. е. волновую функцию свободных фермионов на решетке. Возникновение детерминанта Слэтера при под-

счете непересекающихся путей было впервые обнаружено Фишером [43]. Коэффициент при физическом мономе z^{-x} можно вычислить в виде n -мерного контурного интеграла (9), сводящегося к определителю (6), который мы уже получили, используя теорему КМЛГВ.

Отметим, что принципиально важным моментом для обобщения точно решаемой динамики двух частиц на системы с произвольным числом частиц является тот факт, что все многочастичные взаимодействия сводятся к двухчастичным граничным условиям. Как мы видели, последние однозначно фиксировали свободу, возникающую при введении произвольных коэффициентов A_σ , тогда как наличие любых дополнительных условий сделало бы задачу переопределенной. Точно такие же требования будут в дальнейшем обеспечивать применимость АБ к системам с более сложными взаимодействиями.

Еще один способ думать о развитом формализме — провести параллель с восходящим к электростатике и имеющим множество применений в теории дифференциальных уравнений методом изображений. Суть этого метода применительно к нашей задаче станет ясна, если переформулировать задачу об одномерном движении N частиц с координатами из $D_N^>$ или D_N^{\geq} как задачу о блужданиях одной частицы в N -мерном положительном ортанте (или камере Вейля), т. е. области N -мерной решетки, где координаты (x_1, \dots, x_N) частицы так же упорядочены. Вдали от границ ортанта частица совершает свободное блуждание — либо стоит, либо прыгает, так что любые ее координаты могут увеличиваться на единицу. Что происходит при попадании на границу области, зависит от наложенных граничных условий. В частном случае модели НБ частица поглощается, попав на границу. Эту ситуацию можно смоделировать, рассматривая блуждание частицы во всем пространстве, разбитом на $N!$ ортантов, полученных из исходной области отражением относительно границ. При этом, чтобы блуждание в положительном ортанте соответствовало блужданию с поглощающими границами, мы также запустим блуждания частиц, стартующих с образа исходной позиции в каждом из ортантов, причем вес каждого блуждания будем брать со знаком, определяемым упорядочением координат в данном ортанте. Суммарный учет всех блужданий в положительном ортанте приводит к описанию блуждания в области с поглощающими границами. Далее мы попробуем найти возможно более общий класс моделей взаимодействующих частиц, соответствующих более общим граничным условиям. Оказывается, что этого можно достичь, добавляя не только зеркальные отражения исходного источника, но и новые источники. Такое обобщение оказывается эквивалентно анзацу Бете.

1.3. Взаимодействующие частицы и анзац Бете. Рассмотрим блуждания частиц на бесконечной решетке. Теперь будем считать, что координаты частиц слабо упорядочены:

$$x(t) \in D_N^{\geq}, \tag{20}$$

т. е. несколько частиц могут находиться в одном и том же узле. С одной стороны, это позволит нам ограничиться простейшим типом взаимодействий — взаимодействиями нулевого радиуса. С другой стороны, как будет объяснено ниже, с помощью несложных преобразований из таких систем можно получить и системы с взаимодействиями конечного радиуса и даже системы с дальнедействием. Когда частицы находятся далеко друг от друга, они движутся вправо, как свободные, по правилам, определенным выше. Динамика меняется, когда несколько частиц попадают в один узел. Под взаимодействием нулевого радиуса мы будем понимать следующие динамические правила. Если на некотором шаге k частиц оказались в одном узле, то на следующем шаге $0 \leq m \leq k$ частиц могут перепрыгнуть в следующий узел справа с вероятностью $\varphi(m|k)$, зависящей только от числа частиц в данном узле. Здесь $0 \leq \varphi(m|k) \leq 1$ — набор вероятностей, удовлетворяющих условию нормировки $\sum_{0 \leq m \leq k} \varphi(m|k) = 1$. Мы будем рассматривать параллельное обновление, т. е. на каждом шаге во всех узлах решения о том, сколько частиц прыгнут, принимаются независимо и одновременно. Поскольку правила прыжков из незанятых узлов и узлов с единственной частицей совпадают с определением динамики для невзаимодействующих частиц, имеем

$$\varphi(0|0) = 1, \quad \varphi(0|1) = (1 - p), \quad \varphi(1|1) = p.$$

Нам предстоит определить такое семейство вероятностей $\varphi(m|k)$, которое позволит выписать многочастичные уравнения для производящих функций как свободные уравнения, снабженные системой согласованных граничных условий. Согласованность в данном случае будет означать тот факт, что все многочастичные взаимодействия будут задаваться через двухчастичные граничные условия. Подобно тому, как это было в модели НБ, двухчастичные граничные условия фиксируют всю свободу, которая появляется из-за суммирования производящих функций по перестановкам начальных координат. Поэтому многочастичные взаимодействия не должны приводить к новым ограничениям.

Эту программу мы будем реализовывать шаг за шагом. Одночастичная задача — свободная, т. е. совпадает с рассмотренной ранее (10). Далее мы рассмотрим двухчастичный случай, а потом перейдем к системе произвольного числа частиц. Запишем действие марковской матрицы M на функцию состояния системы двух частиц с координатами $x_1 \geq x_2$. Когда $x_1 > x_2$, т. е. частицы находятся в разных узлах, действие матрицы M описывает независимую свободную эволюцию двух частиц и так же, как в (13), эквивалентно независимому действию одночастичных матриц на каждую координату по отдельности. Взаимодействие начинает играть роль, когда обе частицы попадают в один узел, $x_1 = x_2 = x$. Тогда будем иметь

$$Mf(x, x) = \varphi(0|2)f(x, x) + \varphi(1|2)f(x + 1, x) + \varphi(2|2)f(x + 1, x + 1).$$

Это равенство будет эквивалентно равенству (13) для двух не взаимодействующих частиц, если функция $f(x_1, x_2)$ удовлетворяет граничному условию

$$f(x, x + 1) = \alpha f(x + 1, x + 1) + \beta f(x + 1, x) + \gamma f(x, x),$$

где

$$\alpha = \frac{\varphi(2|2) - p^2}{p(1 - p)}, \quad \beta = \frac{\varphi(1|2) - p(1 - p)}{p(1 - p)}, \quad \gamma = \frac{\varphi(0|2) - (1 - p)^2}{p(1 - p)}.$$

Эти граничные условия нужно понимать как способ выразить слагаемое $f(x, x + 1)$, возникающее при формальной записи свободного уравнения и лежащее за пределами области определения координат частиц D_2^{\geq} .

Следующий шаг — записать уравнения для произвольного числа частиц. Свободное уравнение, применимое, когда все частицы находятся в разных узлах, $x_i \neq x_j$ для любых $1 \leq i \neq j \leq N$, совпадает с (16). Чтобы учесть взаимодействие, нужно выписать действие марковской матрицы для случая, когда несколько частиц попадают в один узел. Поскольку все узлы обновляются независимо, достаточно рассмотреть обновление одного узла. Пусть в узле с координатой x находятся k частиц. Действие марковской матрицы на соответствующую функцию конфигурации будет иметь вид

$$Mf(\dots, x^k, \dots) = \sum_{m=0}^k \varphi(m|k) f(\dots, (x + 1)^m, x^{k-m}, \dots), \quad (21)$$

где $x^k = (x, \dots, x)$ обозначает строку из координат k частиц, находящихся в узле x . Заметим, что если мы формально выпишем свободное уравнение (16) для этого случая, то оно будет содержать нежелательные члены, выходящие за пределы области определения координат (20). Нам бы хотелось, чтобы свободное уравнение сводилось к виду (21) последовательным применением двухчастичных граничных условий

$$f(\dots, x, x + 1, \dots) = \alpha f(\dots, x + 1, x + 1, \dots) + \beta f(\dots, x + 1, x, \dots) + \gamma f(\dots, x, x, \dots). \quad (22)$$

Понятно, что при заданных вероятностях $\varphi(m|k)$ с $k = 1, 2$ это требование однозначно фиксирует все остальные вероятности с $k > 2$. С учетом соотношения нормировки в задаче остаются всего три свободных параметра, в качестве которых можно выбрать p и любые два из α, β, γ , тогда как третий параметр определяется из условия

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \quad (23)$$

Задаче нахождения вероятностей $\varphi(m|k)$ можно придать чисто алгебраический смысл. Для этого посмотрим на последовательности координат $(x+1)$ и x в аргументах функций в правых частях формул (16) и (21), сопоставим им произведения некоммутирующих элементов A и B соответственно и запишем их суммы с коэффициентами, стоящими перед соответствующими функциями. Тогда из формулы (16) мы получим сумму всех возможных произведений k таких элементов с коэффициентами $p^m(1-p)^{k-m}$, где m — число операторов A в произведении, а из формулы (21) — сумму мономов вида $A^m B^{k-m}$, в которых все элементы A находятся левее B , с коэффициентами $\varphi(m|k)$. Таким образом, условие равенства правых частей (21) и (16) запишется в виде некоммукативного аналога биннома Ньютона

$$(pA + (1-p)B)^k = \sum_{m=0}^k \varphi(m|k) A^m B^{k-m}, \quad (24)$$

тогда как аналог граничного условия (22) будет иметь вид

$$BA = \alpha AA + \beta AB + \gamma BB. \quad (25)$$

Тогда задача о поиске вероятностей $\varphi(m|k)$ переформулируется как задача о поиске биномиальных коэффициентов обобщенной биномиальной формулы (24), где A и B — два генератора ассоциативной алгебры, удовлетворяющие однородному квадратичному соотношению (25) с параметрами α , β , γ , два из которых произвольны, а третий находится из соотношения (23). Ответ на последний вопрос был впервые получен в [44] и независимо перепроверен автором в контексте интегрируемых моделей взаимодействующих частиц в [42]. Выраженный через новые параметры q , ν и μ , которые дают удобную параметризацию для α , β , γ и p ,

$$\alpha = \frac{\nu(1-q)}{1-q\nu}, \quad \beta = \frac{q-\nu}{1-q\nu}, \quad \gamma = \frac{1-q}{1-q\nu}, \quad \mu = p + \nu(1-p), \quad (26)$$

результат представляется в виде

$$\varphi(m|n) = \mu^m \frac{(\nu/\mu; q)_m (\mu; q)_{n-m}}{(\nu; q)_n} \frac{(q; q)_n}{(q; q)_m (q; q)_{n-m}}, \quad (27)$$

где $(a; q)_k = (1-a)(1-qa)\cdots(1-q^{k-1}a)$ — q -символ Похгаммера. Также мы предполагаем, что величины α , β , γ выбраны таким образом, что $\nu \neq q^{-k}$ для любых $k \in \mathbb{N}$. При таком условии алгебраическое утверждение справедливо при любых комплексных значениях параметров μ , ν , q . Чтобы числам $\varphi(m|k)$ можно было придать смысл вероятности, они должны лежать в диапазоне $0 \leq \varphi(m|k) \leq 1$. Для этого достаточно, чтобы μ , ν и q были

действительными и удовлетворяли неравенствам $|q| < 1$ и $\nu < \mu < 1$. Далее будем рассматривать именно эту область параметров.

Полученное трехпараметрическое семейство оказывается довольно общим и содержит множество как исследованных ранее, так и новых моделей как предельные случаи. Перед тем как обсудить динамику моделей и их физические приложения, обсудим свойства построенного процесса.

Для начала заметим, что полученные вероятности прыжков имеют вид

$$\varphi(m|k) = \frac{v(m)w(k-m)}{f(k)}, \tag{28}$$

где

$$v(k) = \mu^k \frac{(\nu/\mu; q)_k}{(q; q)_k}, \quad w(k) = \frac{(\mu; q)_k}{(q; q)_k}, \tag{29}$$

а

$$f(k) = \sum_{n=0}^k v(n)w(k-n) \tag{30}$$

обеспечивает вероятностную нормировку $\varphi(m|k)$. В нашем случае эта сумма может быть вычислена явно в виде отношения двух q -символов Похгаммера

$$f(k) = \frac{(\nu; q)_k}{(q, q)_k}. \tag{31}$$

Как показано в работе [45], факторизованный вид (28) вероятностей перескоков обеспечивает факторизацию стационарной меры в модели на бесконечной или конечной периодической решетке.

А именно, модель, в которой N частиц живут на периодической решетке из L узлов, со временем эволюционирует к стационарному состоянию, в котором вероятность конфигурации с n_1, \dots, n_L частицами в узлах с номерами $1, \dots, L$ соответственно факторизуется в произведение одноузельных весов

$$\mathbb{P}_{\text{st}}(n_1, \dots, n_L) = \frac{1}{Z(N, L)} \prod_{i=1}^L f(n_i),$$

где вес $f(n)$ совпадает с нормировкой вероятностей прыжков (30), а статсумма $Z(N, L)$ — общий нормировочный множитель, получаемый суммированием произведений одноузельных весов по всем конфигурациям с условием $n_1 + \dots + n_L = N$. Последнее условие приводит к слабым корреляциям между различными узлами, которые исчезают в пределе $L \rightarrow \infty$ в случае достаточно хороших одноузельных весов. В результате трансляционно-инвариантные стационарные меры нашей модели на бесконечной решетке определяются одноузельными распределениями вида

$$\mathbb{P}_{\text{st}}(n_i = k) = \frac{z^k f(k)}{\mathfrak{z}(z)}, \tag{32}$$

где z — активность, параметризующая стационарную меру; $f(k)$ — одноузельный вес из (30); $\mathfrak{z}(z) = \sum_{k=z}^{\infty} z^k f(k)$ — одноузельная статсумма. Параметр активности z связан со средней плотностью частиц $\rho = \mathbb{E}n_i$ через первое равенство в (2), где активность связана с химическим потенциалом соотношением $z = e^{\beta\mu}$. При этом числа заполнения в разных узлах независимы. Мы видим, что стационарное состояние нашей модели имеет такой же вид, как и гиббсовская мера в примере, рассмотренном во введении. Однако, как станет ясно дальше, неравновесная динамика обнаруживает совершенно новую специфику. Заметим также, что именно поиск общей точно решаемой динамики, приводящей к факторизованной стационарной мере, служил мотивацией для формулировки модели в работе [42]. В данном обзоре мы подошли с противоположной стороны, поставив вопрос о точном вычислении производящей функции с помощью АБ, тогда как факторизованный вид стационарной меры явился побочным результатом. Тем не менее мы упоминаем здесь этот факт, поскольку далее он окажется полезным для анализа поведения системы на больших масштабах.

Предельные случаи. Рассмотрим связь построенного трехпараметрического семейства с другими известными моделями взаимодействующих частиц. Для этого сначала сформулируем два соответствия, устанавливающие связь между системами частиц, которые на первый взгляд могут казаться весьма различными. Первая, ВНР-ПЗ, связывает системы с взаимодействием нулевого радиуса (ВНР), где число частиц узла неограничено, с процессами с запретами (ПЗ), в которых взаимодействие между соседними узлами запрещает попадание более одной частицы в один узел. Преобразование состоит в замене узла, занятого n частицами, компактным кластером из n узлов, по одной частице в каждом, заканчивающимся еще одним пустым узлом (рис. 2). Соответственно, m частиц, выходящих из узла с n частицами в следующий узел в системе с ВНР, соответствуют сдвигу кластера из m частиц, отрывающегося от кластера из n частиц в системе типа ПЗ. Число узлов в конечной системе типа ПЗ равно сумме числа узлов и числа частиц в системе с ВНР.

Второе соответствие, преобразование частица–дырка, связывает две системы типа ПЗ, меняя местами занятые и свободные узлы. Прыжок частицы на m шагов в одной из систем соответствует сдвигу кластера из m частиц на один шаг в противоположном направлении в другой.

Также обратим внимание на то, что от моделей в дискретном времени часто можно перейти к моделям в непрерывном времени, если устремить вероятности прыжков к нулю. Делать это можно разными способами и с различным предельным результатом. Общим, однако, является тот факт, что множество моделей сужается, т. е. от различных моделей в дискретном времени мы зачастую приходим к одной и той же модели в непрерывном времени. Наиболее простой способ взять предел к непрерывному времени в нашей мо-

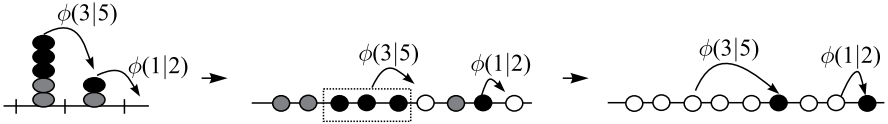


Рис. 2. Двойственности ВНР-ПЗ и частица–дырка. Первая сопоставляет узлу, содержащему n частиц, группу из n узлов, по одной частице в каждом, плюс один пустой узел справа. Вторая двойственность меняет частицы и дырки местами

дели — рассмотреть совместный предельный переход $\mu \rightarrow \nu$, т.е. $p \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$, такой, что новое непрерывное время $\tau = tp$ остается конечным. Если остальные параметры при этом держать постоянными, то вместо дискретных прыжков мы получим пуассоновские прыжки m частиц из узла с n частицами с интенсивностью

$$u(m|n) = \frac{\mu^{m-1}}{1 - q^m} \frac{(\mu, q)_{n-m} (q, q)_n}{(\mu, q)_n (q, q)_{n-m}}.$$

Процессы с подобными интенсивностями прыжков изучались в работе [46] под названием q -Хан АПЗ*, где, однако, было рассмотрено их обобщение с прыжками в обе стороны, а в работе [48] было показано, что соответствующую марковскую матрицу можно интерпретировать как гамильтониан XXZ цепочки, модели магнетика Гейзенберга с некомпактной группой симметрии спинов.

Другие пределы, как дискретные, так и непрерывные, можно также получить, накладывая ограничения на параметры вероятностей $\varphi(m|n)$. Приведем список моделей, получающихся из наших вероятностей скачков (27) в результате различных предельных переходов.

Свободные частицы, $q = 1$. При $q = 1$ зависимость от μ и ν по отдельности исчезает и остается биномиальное распределение с параметром p :

$$\lim_{q \rightarrow 1} \varphi(m|n) = \varphi_{\text{bin}}(m, n; p) = p^m (1 - p)^{n-m} \binom{n}{m}.$$

Эти вероятности перескоков описывают систему частиц, совершающих независимые направленные бернуллиевские случайные блуждания. Каждая частица пытается прыгнуть на один шаг вперед с вероятностью p . Биномиальный коэффициент учитывает число способов выбрать m из n частиц в узле. Описанный выше предел непрерывного времени приводит нас от бернуллиевских случайных блужданий в дискретном времени к пуассоновским случайным блужданиям.

*Прставка q -Хан впервые использовалась применительно к модели с вероятностями прыжков (27) в работе [47].

Случайные блуждания в случайной среде (СБСС), $q, \mu = q^\alpha, \nu = q^{\alpha+\beta} \rightarrow 1$. В этом пределе вероятности перескоков стремятся к бета-биномиальному распределению

$$\lim_{q=\mu^{1/\alpha}=\nu^{1/(\alpha+\beta)}\rightarrow 1} \varphi(m|n) = \varphi_{\text{B-bin}}(m, n; \alpha, \beta) = \frac{B(\alpha + m, \beta + n - m)}{B(\alpha, \beta)} \binom{n}{m},$$

которое является сверткой

$$\varphi_{\text{B-bin}}(m, n; \alpha, \beta) = \int_0^1 \varphi_{\text{bin}}(m, n; p) \varphi_{\text{B}}(p; \alpha, \beta) dp$$

биномиального распределения $\varphi_{\text{bin}}(m, n; p)$ с бета-распределением

$$\varphi_{\text{B}}(p; \alpha, \beta) = \frac{p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} \mathbb{I}_{p \in [0,1]}.$$

Биномиальное распределение указывает на то, что прыжки в этой модели по-прежнему совершаются независимо. Однако свертку с бета-распределением следует интерпретировать как случайность параметра p распределения Бернулли, который выбирается независимо из бета-распределения при каждом новом обновлении каждого узла. Иными словами, мы получили систему частиц, совершающих независимые СБСС, с беспорядком, моделируемым случайной, распределенной согласно бета-распределению вероятностью выхода частицы из узла. При этом полученные в рассматриваемом пределе бета-биномиальные вероятности перескоков есть уже результат усреднения по беспорядку. Эта модель была изучена в работе [49], где задача о СБСС была также проинтерпретирована на языке строгого метода реплик в приложении к задаче о полимере в случайной среде. Решение задачи об усредненной по беспорядку вероятности перехода n частиц между двумя узлами, соответствующей n -репличной полимерной статсумме, позволяет построить в виде детерминанта Фредгольма преобразование Лапласа распределения случайной вероятности перехода частицы в случайной среде с «бета»-беспорядком. На физическом языке такая вероятность соответствует случайной статсумме полимера в случайной среде для некоторых специальных начальных условий. Асимптотический анализ этого результата дает предельное распределение, которое описывает высоту фронта, эволюционирующего согласно уравнению Кардара–Паризи–Жанга.

ПАПЗ с обобщенным обновлением, $q = 0$. При $q = 0$ частицы в модели с НВР прыгают из узла, занятого n частицами, с вероятностями $\varphi(0|n) = (1-p)$, $\varphi(m|n) = (1-\mu)r\mu^{m-1}$ при $0 < m < n$ и $\varphi(n|n) = r\mu^{n-1}$. Удобно

дать интерпретацию этого процесса на языке процесса с запретами. После преобразования ВНР-ПЗ получаем полностью асимметричный вариант модели АПЗ (ПАПЗ) с прыжками слева направо и кластерно-ориентированным обратным последовательным обновлением. В этой модели частица, входящая в узел, помнит о том, был ли этот узел занят на предыдущем шаге или свободен. Во время обновления каждый кластер сканируется справа налево. Первая частица пытается прыгнуть на шаг вперед с вероятностью p . В случае успеха вторая пытается прыгнуть на шаг вперед с вероятностью μ , вообще говоря, отличной от p , так же происходит с третьей, четвертой и т. д. Если некоторая частица в этой последовательности отказывается прыгать, то все следующие частицы того же кластера стоят с вероятностью единица. При $\mu = p$ ($\nu = 0$) мы получим обычный ПАПЗ с (кластерно-ориентированным) обратным последовательным обновлением, тогда как $\mu = 0$ соответствует модели с параллельным обновлением, где все частицы принимают решение о прыжке на шаг вперед одновременно, исходя из текущей конфигурации. В диапазоне $0 < \mu < 1$ эффективное взаимодействие изменяется от отталкивающего до притягивающего, а предел $\mu \rightarrow 1$ соответствует модели с детерминистической агрегацией, в которой все частицы в конце концов слипаются в один кластер. В пределе $p \rightarrow 0$ при соответствующем перемасштабировании времени можно получить модель фрагментации кластеров в непрерывном времени, где кластер частиц может распасться пуассоновским прыжком на два, когда несколько его первых частиц делают шаг вперед, причем каждая следующая частица следует за предыдущей с вероятностью μ . Положив также и $\mu = 0$, получаем простой ПАПЗ в непрерывном времени, где частицы независимо совершают пуассоновские прыжки на шаг вперед, когда узел впереди не занят. Модели с $q = 0$ принадлежат к специальному классу моделей, вероятности перехода в которых можно представить как частное распределение некоторого детерминантного процесса, вероятностной меры на точечных конфигурациях, которая может быть полностью охарактеризована иерархией многоточечных корреляционных функций, имеющих простой детерминантный вид. Такая связь позволяет явным образом вычислять многоточечные распределения положений частиц в ПАПЗ и проводить их асимптотический анализ. Ниже мы кратко опишем эти вычисления.

Асимметричная диффузия с многочастичными прыжками и модель с длинными прыжками, $\nu \rightarrow \mu = q$. Здесь рассматривается предел непрерывного времени $p = dt \rightarrow 0$ со специальным условием $\mu = q$, при котором вероятности прыжков приводятся к виду $\varphi(m|n) \simeq dt/[m]_{1/q}$, где индекс $1/q$ показывает, что параметр деформации в q -числе равен q^{-1} , а не q . Модель с подобными вероятностями прыжков была предложена в [50]. Однако в ней допускались прыжки в обоих направлениях со степенью асимметричности, зависящей от параметра q . Ее обобщение, в котором зависимость вероятности прыжка от числа частиц в узле не связана со степенью асимметрии, было

рассмотрено в [51]. Полностью асимметричная версия последней модели и есть частный случай нашей модели в рассматриваемом пределе. С помощью преобразования НВР-ПЗ получим модель, предложенную в [52], где частица толкает кластер частиц вперед с интенсивностью $r_n = 1/[n]_{1/q}$, зависящей от числа $n - 1$ частиц перед ней. Эта модель дает интерполяцию между ПАПЗ и моделью «дроп-пуш» [53], которые получаются в пределах $q \rightarrow \infty$ и $q \rightarrow 0$ соответственно. В работе [54] было также показано, что предел $q \rightarrow 1$ этой модели, взятый совместно с пределом непрерывного пространства, приводит к интегральному гамильтониану, полученному в [55], который ранее возникал в задачах квантовой хромодинамики.

q-бозонный ПНРВ, q-ПАПЗ и асимметричный лавинный процесс, $\mu = q\nu$. В данном случае первый q -символ Похгаммера $(\nu/\mu; q)_m$ зануляется при $m > 1$. Поэтому разрешены только прыжки одной частицы из узла. Полученный процесс — это модель с НВР с дискретным временем, в котором одна частица прыгает из узла с n частицами с вероятностью $\varphi(1|n) = p \cdot [n]_q$. Соответствующая интегрируемая q -бозонная модель была впервые предложена в [56] на языке алгебраического анзаца Бете. Ее гамильтонова (с непрерывным временем) версия обсуждалась позже в [57]. Она снова рассматривалась в [58], где ставился следующий вопрос: «Каковы наиболее общие вероятности прыжков, делающие модель с НВР интегрируемой?». Далее тот же вопрос был адресован к модели с НВР в дискретном времени [59]. Как и ранее, модель с непрерывным временем можно получить из дискретной версии в пределе $p \rightarrow 0$. В модели с дискретным временем параметры могут принимать значения в диапазоне $|q| < 1, 0 < p < 1$, тогда как в случае с непрерывным временем q может быть любым действительным числом. В последнем случае предел $q \rightarrow \infty$ соответствует модели «дроп-пуш», в которой частица прыгает в ближайший незанятый узел после экспоненциально распределенного времени ожидания, или, что то же самое, подталкивает всех соседей справа на один шаг вперед. После последовательных преобразований НВР-ПЗ и частицы-дырки q -бозонная модель с НВР становится так называемым q -ПАПЗ, в котором $\varphi(1|n)$ — это вероятность того, что частица, от которой ближайшая частица слева отстоит на n пустых узлов, прыгнет влево на один шаг. Эта модель недавно была получена как предельный случай процесса Макдональда [60] и использована для изучения поведения полимера в случайной среде [61].

Еще одна модель с непрерывным временем (асимметричный лавинный процесс (АЛП) [62]) получается в пределе $\nu \rightarrow 0$ при $-1 < q < 0$. Полагая $1 - p = dt \rightarrow 0$ и переходя в движущуюся систему отсчета, на каждом временном шаге сдвигающуюся на шаг вперед, получаем модель типа АПЗ, в которой переходы между конфигурациями осуществляются посредством мгновенных нелокальных лавин. В движущейся системе отсчета динамика выглядит следующим образом. Из произвольной конфигурации частиц, в которой в любом

узле допускается не более одной частицы, некоторая частица прыгает на шаг вперед после экспоненциально распределенного времени ожидания. Если в следующем узле оказалась другая частица, то она либо присоединяется к пришедшей частице и они вместе делают шаг вперед с вероятностью $(1 - [2]_q)$, либо не присоединяется, и тогда пришедшая частица прыгает вперед в одиночку. Так начинается лавина, развивающаяся в дискретном времени, бесконечно быстром с точки зрения непрерывного пуассоновского времени. В непрерывном времени лавина заканчивается мгновенно и входит лишь в вероятности перехода между конфигурациями АПЗ-типа. В общем случае, если на некотором шаге лавины $n > 1$ частиц оказались в одном узле, то либо все n частиц идут вперед с вероятностью $(1 - [n])$, либо одна частица остается, тогда как остальные $(n - 1)$ идут дальше. Таким образом, на каждом шаге число частиц в лавине может либо увеличиться на единицу, либо уменьшиться на единицу, либо остаться неизменным. Лавина заканчивается, когда одна частица из пары попадает в незанятый узел. Интерес к этой модели был вызван фазовым переходом от прерывистого к непрерывному потоку, который происходит в бесконечной системе при плотности частиц $\rho_c = 1/(1 - q)$. В пределе $q \rightarrow 0$ из АЛП снова получается модель «дроп-пуш».

Геометрический q-ПАПЗ, $\nu = 0$. В работе [63] были предложены два обобщения модели ПАПЗ. В одном из них, названном геометрическим q-ПАПЗ, частица прыгает вперед в любой свободный узел, по пути к которому нет занятых узлов, с вероятностью $p_{n,\mu}(l)$ длины прыжка l , зависящей от расстояния до следующего занятого узла, которая получается из $\varphi(l|n)$ при $\nu = 0$. Этот процесс можно получить из нашего с помощью преобразований НВР-ПЗ и частицы-дырки. Отметим, что этот процесс был получен в [63] как редукция процесса Макдональда, а использованная техника была ограничена на случай ступенчатых начальных условий. Там же был поставлен вопрос о возможности применения к данному процессу техники анзаца Бете, которая бы позволила рассматривать произвольные начальные условия. Ответ на этот вопрос был дан в работе автора [42], причем предложенные там вероятности перескоков оказались даже более общими, зависящими от трех параметров.

Можно также рассматривать и другие частные случаи нашей модели, в которых вероятности переходов имеют более простой вид. Выше перечислены те, что описывались в литературе ранее. Кроме того, были предложены несколько моделей с частично асимметричной динамикой, такие как двухпараметрическая модель с длинными прыжками [52], многочастичная диффузия с запретами [50], «пуш-АПЗ» [64] и АЛП с двухсторонними прыжками [65]. Они не могут быть получены как частные случаи нашей полностью асимметричной модели. Однако, учитывая общность модели, можно ожидать, что ее трансфер-матрица может быть производящей функцией различных гамильтонианов, в том числе и отвечающих прыжкам в обе стороны (см., например, [66]).

Также нельзя не упомянуть несколько важных развитий и обобщений нашей модели. Во-первых, это вершинные модели с высшими спинами [67], формулируемые в терминах направленных путей на квадратной решетке, в которых число путей, проходящих по вертикальным и горизонтальным ребрам, ограничены целыми параметрами I и J . Веса вершин в этой модели имеют более сложный вид, будучи выраженными через q -многочлены Рака, а ее трансфер-матрица получается сверткой трансфер-матрицы нашей модели со специальными выбранными параметрами с подобной транспонированной трансфер-матрицей. В обратную сторону трансфер-матрица нашей модели восстанавливается при некотором специальном аналитическом продолжении весов по параметрам I и J . Также мы отметим уже упомянутую модель q -Хан АПЗ с двусторонними прыжками [46] и q -Хан пуш-ПАПЗ [68].

2. ФУНКЦИИ ГРИНА И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ В МОДЕЛИ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Хотя задачи, подобные вычислению функций Грина, такие как вычисление статсумм вершинных моделей на ограниченной области с фиксированными граничными условиями, решались и раньше, первый результат в контексте стохастических моделей взаимодействующих частиц был получен Шютцем для ПАПЗ в непрерывном времени [69]. Было показано, что в этом случае функция Грина имеет детерминантный вид. Такой же детерминантный вид приобретает и функция Грина в случае ПАПЗ с дискретным временем и обратным последовательным обновлением [37], называемым также процессом фрагментации [70]. Следующий шаг был сделан в [39], где впервые функция Грина в виде отношения детерминантов была получена для системы с нетривиальным стационарным состоянием, ПАПЗ с параллельным обновлением. Впоследствии это вычисление было обобщено для ПАПЗ с обобщенным обновлением [71]. Все эти примеры могут быть получены как частные случаи предела $q \rightarrow 0$ модели, рассмотренной выше. Как будет ясно далее, в этом случае вероятности перехода отличаются специальным марковским свойством: эволюция частицы зависит только от частиц с меньшими и не зависит от частиц с большими номерами. Технически это приводит к специальной факторизации амплитуды рассеяния, в результате чего формулы значительно упрощаются, а функции Грина имеют детерминантный вид.

Для моделей, не обладающих этим свойством, эта задача была впервые решена Трейси и Уидомом для АПЗ с частично асимметричной динамикой [72]. Для q -бозонного процесса с НВР функция Грина впервые получена в [73] как результат решения более общей задачи построения теории Планшереля для собственных функций марковского генератора. Гипотеза для вида функции Грина для нашей общей трехпараметрической модели была предложена в [42], а доказана в [47], где также была построена теория Планшереля для

соответствующих собственных функций. Ниже мы сначала проиллюстрируем идею доказательства [47] для общего q , а потом обсудим упрощение в случае $q = 0$.

Обратимся к задаче о построении производящих функций путей. Опишем эволюцию матожидания

$$g_t(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = \mathbb{E}(g_0(\mathbf{x}(t); t) | \mathbf{x}(0) = \mathbf{x})$$

функции с начальным условием, взятым в виде АБ,

$$g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \Psi_N^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}),$$

согласно формуле (18), и потребуем, чтобы оно удовлетворяло граничному условию (22). В результате получим рекуррентное соотношение для коэффициентов A_σ :

$$S(z_i, z_j) \equiv \frac{A_{\dots ij \dots}}{A_{\dots ji \dots}} = -\frac{\alpha + \beta z_i + \gamma z_i z_j - z_j}{\alpha + \beta z_j + \gamma z_i z_j - z_i}, \quad (33)$$

которое при задании начального условия $A_{id} = 1$ для тождественной перестановки приводит к общему выражению

$$A_\sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq N: \sigma_j < \sigma_i} S(z_{\sigma_i}, z_{\sigma_j}). \quad (34)$$

Для функции $S(z_1, z_2)$ будем использовать термин амплитуда рассеяния, передающий смысл этой величины в контексте рассеяния частиц в квантовой механике.

Ключевое отличие этого результата от рассмотренного выше свободно-фермионного случая НБ — теперь A_σ есть функция переменных z_1, \dots, z_N . Чтобы проинтерпретировать $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ на языке производящих функций путей, нужно превратить всю функцию в ряд Лорана. Такая процедура добавит множество новых путей к уже введенным путям с переставленными началами. Умножение $(\sigma z)^{-x}$ на мономы из лорановских разложений дает новые пути, начала которых сдвинуты по отношению к исходным. Из них физические, т. е. те, в которых показатели степени упорядочены согласно (20), будут составлять искомую производящую функцию взаимодействующих путей.

Заметим, что процедура разложения мероморфной функции в ряд Лорана неоднозначна. Результат определяется областями в комплексных плоскостях переменных z_1, \dots, z_N , в которых то или иное разложение сходится. От вида разложения выражений (34) зависит, какие именно мономы входят в начальные условия для производящей функции и, соответственно, производящая функция какой величины получается как физическая его часть. Рассуждение ниже нужно понимать как один из рецептов превращения рациональных

функций (33), (34) в ряды Лорана. После того как это разложение получено, можно думать о нем как о формальном ряде, т. е. наборе коэффициентов разложения. Действительно, ведь эволюция функции $g_t^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ на любое конечное число временных шагов сводится к умножению начальной функции на многочлен. Соответствующие линейные преобразования коэффициентов затрагивают лишь конечное число членов ряда и, следовательно, хорошо определены. Это же справедливо и относительно граничных условий (15), которые гарантируют, что физическая часть этой функции эволюционирует как производящая функция, описывающая систему взаимодействующих путей.

Далее мы получим разложение $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$, в котором единственный физический моном будет пропорционален $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$. Чтобы превратить $S(z_1, z_2)$ в ряд Лорана, удобно воспользоваться представлением (26) параметров α , β и γ через ν и q и записать амплитуду рассеяния в виде

$$S(z_1, z_2) = \frac{q - \frac{(z_1 - 1)(z_2 - \nu)}{(z_1 - \nu)(z_2 - 1)}}{1 - q \frac{(z_1 - 1)(z_2 - \nu)}{(z_1 - \nu)(z_2 - 1)}}.$$

Рассмотрим случай $0 < \nu < 1$, хотя общие выводы, видимо, справедливы также и для любых значений $\nu < 1$. Будем считать, что переменные z_1 и z_2 меняются на окружности $|z_i - 1| = \epsilon |z_i - \nu|$, где $\nu < \epsilon < 1$. При таком выборе множитель при q в знаменателе равен по модулю единице. Памятуя о том, что $|q| < 1$, разложим дробь как геометрическую прогрессию по степеням $q \frac{(z_1 - 1)(z_2 - \nu)}{(z_1 - \nu)(z_2 - 1)}$, после чего заметим, что, не проходя через полюса $z = 1, \nu$ этого отношения, контур можно деформировать так, чтобы он находился в кольце $\nu < |z| < 1$. В таком кольце каждый член полученного ряда можно разложить по неотрицательным степеням z_1^{-1} и z_2 . Вычисляя почленно первую сумму, приходим к следующему разложению:

$$S(z_1, z_2) = \sum_{m, l \geq 0} z_1^{-m} z_2^l s_{l, m} = \frac{q - \nu}{\nu q - 1} - z_2 \frac{(1 - q^2)(1 - \nu)}{(1 - \nu q)^2} - \frac{1}{z_1} \frac{(1 - \nu)\nu(1 - q^2)}{(1 - \nu q)^2} + \frac{z_2}{z_1} \frac{(1 - q^2)(1 - \nu)^2(1 + \nu q)}{(1 - \nu q)^3} + \dots \quad (35)$$

Принципиально важный для дальнейшего анализа момент — наличие только неположительных степеней первого аргумента и неотрицательных степеней второго в этом разложении.

Для работы с многочастичными производящими функциями требуется также рассматривать произведения нескольких таких разложений. Такие ма-

нипуляции не вполне безупречны с точки зрения математической теории формальных рядов, поскольку ряды содержат бесконечное число членов как с положительными, так и с отрицательными степенями. В общем случае алгебраические операции с такими рядами сводятся к вычислению бесконечных сумм произведений их коэффициентов и не всегда корректно определены. Тем не менее в нашем случае результат однозначен, возникающие бесконечные суммы сходятся и могут быть явно вычислены. Это следствие того, что наши ряды получены разложением конкретных функций в областях их аналитичности. На этом же факте основана и возможность представить итоговое выражение для функции Грина в виде контурного интеграла вдоль контуров, расположенных в этих областях. Более подробный анализ аналитической структуры получаемых выражений можно найти в [47], тогда как в нашем изложении мы будем придерживаться принципов экономии, жертвуя, где это оправданно, математической строгостью. В частности, в зависимости от удобства об одних и тех же объектах мы будем думать то как о формальных рядах, то как об аналитических функциях.

Дадим интерпретацию физической части функции $g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ и, в частности, ее значению $g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ в начальный момент. Заметим, что слагаемое в $\Psi^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$, соответствующее перестановке начал путей σ , дается мономом $(\sigma\mathbf{z})^{-\mathbf{x}}$, умноженным на коэффициент A_σ , о котором можно думать как о произведении функций $S(z_{\sigma_i}, z_{\sigma_j})$, записанных в виде разложения (35). При этом произведение (34) — это произведение по инверсиям перестановки σ : в нем присутствуют только множители, отвечающие парам номеров $i < j$, для которых выполнено неравенство $\sigma_i > \sigma_j$. Другими словами, в отличие от исходного порядка в физической конфигурации, где номера частиц возрастают справа налево, в таких парах частица с большим номером находится в той же позиции или правее, чем частица с меньшим номером. Из вида разложения (35) видно, что домножение монома на $S(z_{\sigma_i}, z_{\sigma_j})$ порождает новые мономы, в которых частица с номером σ_i (σ_j) либо остается на месте, либо смещается правее (левее).

В качестве примера попробуем найти физические мономы функции $\Psi^{\text{BA}}((x_1, x_2); (z_1, z_2))$ в случае двух частиц на решетке. Кроме физического монома, соответствующего тождественной перестановке, в сумму (18) входит моном, соответствующий единственной нетривиальной перестановке $\sigma = (21)$, транспозиции, меняющей местами частицы в узлах x_1 и x_2 . Очевидно, что если частицы находятся в разных узлах, $x_1 > x_2$, перестановка обращает их порядок, превращая физический моном $z_1^{-x_1} z_2^{-x_2}$ в нефизический моном $z_1^{-x_2} z_2^{-x_1}$. Далее, умножая последний на $S(z_2, z_1)$, получим его же с коэффициентом $(q - \nu)/(\nu q - 1)$ плюс мономы $z_1^{-(x_2-1)} z_2^{-x_1}$, $z_1^{-x_2} z_2^{-(x_1+1)}$, $z_1^{-(x_2-1)} z_2^{-(x_1+1)}$ и т.д. с соответствующими коэффициентами разложения (35). Таким образом, умножение нефизического монома на

$S(z_2, z_1)$ может только усугубить ситуацию, увеличив (уменьшив) показатель степени $z_1(z_2)$, тем самым сдвинув правую (левую) частицу еще правее (левее), так что добавившиеся мономы будут по-прежнему нефизическими. Исключением является случай $x_1 = x_2 = x$, в котором транспозиция не меняет монома $(z_1 z_2)^{-x}$, а из мономов разложения $S(z_2, z_1)$ лишь свободный член не нарушает физического порядка показателей степеней. В результате коэффициент при единственном физическом мономе $\mathbf{z}^{\mathbf{x}}$ в $\Psi_2^{\text{BA}}((x_1, x_2); (z_1, z_2))$ будет иметь вид

$$[\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}] \Psi_2^{\text{BA}}((x_1, x_2); (z_1, z_2)) = z_1^{-x_1} z_2^{-x_2} \left(1 - \delta_{x_1, x_2} \frac{q - \nu}{\nu q - 1} \right).$$

На этом примере мы увидели, что в мономах, соответствующих перестановкам частиц, домножение на амплитуду рассеяния сдвигает частицы, переместившиеся в результате соответствующей инверсии налево (направо), еще левее (правее) соответственно. Для произвольного числа частиц и перестановок, отвечающих множественным инверсиям, одна и та же частица может играть роль правой и левой частицы в различных инверсиях одновременно. В этом случае она домножается на несколько амплитуд рассеяния, в которых соответствующая переменная может быть как первым, так и вторым аргументом, а соответствующая частица последовательно сдвигается как направо, так и налево. Хотя общая картина довольно сложна, самая правая (самая левая) из инвертированных частиц по-прежнему сдвигается только в одну сторону, еще правее (левее) соответственно. Поэтому если в перестановке есть хоть одна инверсия, затрагивающая частицы в разных узлах, домножение соответствующего нефизического монома на амплитуды рассеяния будет порождать только нефизические мономы. Исключением являются лишь перестановки, меняющие порядок частиц внутри узлов, но не переставляющие частицы между узлами. По той же причине среди порождаемых амплитудами рассеяния сдвигов частиц из узла к физическим мономам приводят только те, суммарным результатом которых будет возвращение частиц в исходный узел. Результат можно сформулировать следующим образом. Пусть \mathbf{x} и \mathbf{y} — два физических набора координат. Тогда

$$[\mathbf{z}^{-\mathbf{y}}] \Psi_N^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} C(\mathbf{x}),$$

т. е. единственный физический моном в $\Psi_N^{\text{BA}}(\mathbf{x}; \mathbf{z})$ пропорционален $\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}$, где $C(\mathbf{x})$ — коэффициент пропорциональности, зависящий от \mathbf{x} , который возник в результате суммирования по перестановкам частиц внутри узлов.

Чтобы вычислить $C(\mathbf{x})$, сначала заметим, что $C(\mathbf{x}) = 1$ для конфигурации $\mathbf{x} = (x_1 > \dots > x_N)$, в которой все частицы находятся в разных узлах, поскольку в этом случае все слагаемые в (18), кроме одного, соответствующего тождественной перестановке, содержат только нефизические мономы.

Для произвольной конфигурации \mathbf{x} вида

$$\mathbf{x} = (x_1 \dots = x_{n_1} > x_{n_1+1} = \dots = x_{n_1+\dots+n_{k-1}} > x_{n_1+\dots+n_{k-1}+1} \dots = x_{n_1+\dots+n_k}),$$

в которой есть всего k занятых узлов с n_1, \dots, n_k частицами, суммирования в (18) по перестановкам внутри разных узлов независимы. Поэтому $C(\mathbf{x})$ факторизуется в произведение одноузельных множителей

$$C(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^k c(n_i),$$

где $c(n)$ — результат суммирования по перестановкам n частиц внутри узла. Поскольку перестановки внутри узлов не меняют собственно физического монома, для нахождения коэффициента достаточно вычислить свободный член соответствующих произведений амплитуд рассеяния

$$c(n) = [\text{CT}] \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma_j < \sigma_i\}} S(z_{\sigma_i}, z_{\sigma_j}),$$

где $[\text{CT}]f$ — свободный член (constant term), т. е. слагаемое нулевой степени, ряда f . Для вычисления $c(n)$ сначала перепишем произведение под суммой в виде

$$\prod_{\{1 \leq i < j \leq n \mid \sigma_j < \sigma_i\}} S(z_{\sigma_i}, z_{\sigma_j}) = \text{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{u_{\sigma_i} - qu_{\sigma_j}}{u_i - qu_j},$$

где для краткости мы ввели новые переменные

$$u_i = \frac{z_i - 1}{z_i - \nu}. \tag{36}$$

Поскольку знаменатель не зависит от перестановки, достаточно вычислить сумму в числителе:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_{\sigma_i} - qu_{\sigma_j}) = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j).$$

Для доказательства этого равенства заметим, что результат суммирования будет однородным многочленом степени $n(n-1)/2$, антисимметричным по всем n переменным. С точностью до общего множителя единственный такой многочлен — это $\Delta(\mathbf{u}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (u_i - u_j)$. Общий множитель можно найти, вычислив множитель при любом мономе, например при $u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}$.

Раскрывая скобки в каждом слагаемом, находим коэффициенты при таких мономах, дающиеся произведениями $n(n-1)/2$ сомножителей, каждый из которых либо единица, либо $-q$, в зависимости от того, первое или второе слагаемое из данной скобки вошло в произведение. Например в слагаемом, соответствующем тождественной перестановке, в моном $u_1^{n-1}u_2^{n-2}\dots u_{n-1}$ входят только первые слагаемые, так что соответствующий коэффициент равен единице. Для нетождественной перестановки представим перестановку как список инверсий. Каждая инверсия заменяет первое слагаемое из соответствующей скобки на второе и, соответственно, единицу в произведении на $-q$. Таким образом, в слагаемом, отвечающем перестановке σ , коэффициент при заданном мономе будет равен $(-q)^{\#\text{inv}(\sigma)}$, где $\#\text{inv}(\sigma)$ — число инверсий в σ . Замечая, что знак этого коэффициента компенсирует знак $\text{sgn}(\sigma)$ в сумме по перестановкам, мы обнаруживаем, что искомым коэффициентом есть не что иное, как производящая функция числа инверсий, которая явно вычисляется в виде q -факториала [74]

$$\sum_{\sigma \in S_n} q^{\#\text{inv}(\sigma)} = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n}.$$

Теперь в исходных переменных наша задача сводится к нахождению свободного члена разложения простой рациональной функции

$$c(n) = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} [\text{CT}] \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1 - \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}{1 - q \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}. \quad (37)$$

Будем вычислять его шаг за шагом. Сначала вычислим часть разложения с нулевой степенью z_n , потом ее часть с нулевой степенью z_{n-1} и т. д. Согласно рецепту разложения, сформулированному выше, переменная z_n входит в правую часть (37) только в меньших или равных нулю степенях. Поэтому член с нулевой степенью z_n дается пределом этого выражения при $z_n \rightarrow \infty$

$$c(n) = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} [\text{CT}] \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1-\nu}{1-\nu q} \frac{1}{1-z_k} \frac{1}{(1-q)} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} \frac{1 - \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}{1 - q \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}. \quad (38)$$

Теперь во втором произведении в правой части z_{n-1} появляется только в меньших или равных нулю степенях. Однако, так как $|(1-q)/(1-\nu q)| < 1$,

сомножители первого произведения раскладываются по положительным степеням z_k при $|z_k| < 1$. Для нахождения свободного от z_{n-1} члена нужно перемножить два таких ряда. Простой вид первого сомножителя позволяет провести это вычисление явно. При этом мы используем следующее простое следствие интегральной формулы Коши. Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} f_k$ — ряд по неположительным степеням, абсолютно сходящийся при $|z| > 1/a - \epsilon$ при некоторых $a, \epsilon > 0$. Тогда

$$[\text{CT}] \frac{1}{1-az} f(z) = [\text{CT}] \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^{-k} \sum_{l=0}^{\infty} (az)^l = \sum_{l=0}^{\infty} f_l a^l = f(1/a).$$

Таким образом, вычисление свободного от z_{n-1} члена сводится к замене $z_{n-1} \rightarrow (1 - \nu q)/(1 - q)$ в (38) или, эквивалентно, $(z_{n-1} - 1)/(z_{n-1} - \nu) \rightarrow q$:

$$c(n) = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} \frac{1-\nu}{1-\nu q} [\text{CT}] \prod_{k=1}^{n-2} \frac{1-\nu}{1-\nu q^2} \frac{1}{1-z_k \frac{(1-q^2)}{(1-\nu q^2)}} \times \\ \times \prod_{1 \leq i < j \leq n-2} \frac{1 - \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}{1 - q \frac{(z_i - \nu)(z_j - 1)}{(z_i - 1)(z_j - \nu)}}.$$

Последнее выражение имеет вид, подобный (38), с точностью до замены $q \rightarrow q^2$ в первом произведении, что позволяет итеративно повторять замену $(z_{n-k} - 1)/(z_{n-k} - \nu) \rightarrow q^k, k = 2, 3, \dots$, что приводит к окончательному результату

$$c(n) = \frac{(q; q)_n}{(\nu; q)_n} \left(\frac{1-\nu}{1-q} \right)^n.$$

Оказывается, что полученный результат можно выразить через одноузельные стационарные веса

$$c(n) = \frac{f(1)^n}{f(n)},$$

а общий коэффициент обратно пропорционален стационарному весу конфигурации частиц

$$C(\mathbf{x}) = f_{\text{st}}^{-1}(\mathbf{x}) = f(1)^N \prod_{i \in \mathcal{L}} f^{-1}(n_i),$$

нормированному так, чтобы вес тех конфигураций, в которых все частицы находятся в разных узлах, был равен единице.

Вспоминая обсуждение производящих функций в начале раздела, мы заключаем, что наша функция, стартующая с начального условия

$$g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \Psi_N(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \mathbf{z}^{-\mathbf{x}} f_{\text{st}}^{-1}(\mathbf{x}) + (\text{non-phys.}),$$

где в (non-phys.) собраны нефизические мономы, эволюционируя как свободная, приходит к выражению

$$g_t(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \Lambda_n^t(\mathbf{z}) g_0(\mathbf{x}; \mathbf{z}) = \mathbb{E} g_0(\mathbf{x}(t) | \mathbf{z}) = \mathbb{E} \frac{\mathbf{z}^{-\mathbf{x}(t)}}{f_{\text{st}}(\mathbf{x}(t))} + (\text{non-phys.}), \quad (39)$$

физической частью которого является производящая функция отношения вероятности конфигураций частиц к их стационарному весу $f_{\text{st}}(\mathbf{x}(t))$. Соответственно функция Грина дается выражением

$$\begin{aligned} G_t(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) &= f_{\text{st}}(\mathbf{x}) [\mathbf{z}^{-\mathbf{x}}] \Lambda_N^t(\mathbf{z}) \Psi^{\text{BA}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) = \\ &= f_{\text{st}}(\mathbf{x}) \oint \cdots \oint \Lambda_N^t(\mathbf{z}) \Psi_N^{\text{BA}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z}) \mathbf{z}^{\mathbf{x}} D\mathbf{z}, \quad (40) \end{aligned}$$

которое можно представить в виде многократного контурного интеграла по окружностям с центром в начале координат и радиусом $\nu < |z| < 1$, где под мерой интегрирования мы понимаем $D\mathbf{z} = \prod_{i=1}^N dz_i / (2\pi i z_i)$.

Детерминантные формулы и обобщенная функция Грина. Когда $q = 0$, полученные формулы для функции Грина приобретают простой детерминантный вид. Причина этого — специальный факторизованный вид амплитуды рассеяния

$$S(z_1, z_2) = -\frac{h(z_1)}{h(z_2)},$$

где

$$h(z) = \frac{z - 1}{z - \nu}.$$

Благодаря такой факторизации многократные интегралы от каждого слагаемого в $\Psi^{\text{BA}}(\mathbf{x}^0; \mathbf{z})$ в правой части (40) расцепляются, распавшись в произведение однократных интегралов, в результате чего функция Грина превращается в отношение

$$G_t(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \frac{\det\{F_{i-j}(x_i - x_j^0, t)\}_{0 \leq i, j \leq N}}{\det\{F_{i-j}(x_i - x_j, 0)\}_{0 \leq i, j \leq N}} \quad (41)$$

детерминантов матриц $N \times N$. Их матричные элементы задаются в терминах функции

$$\begin{aligned}
 F_n(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{0,\nu}} (h(z))^{-n} \Lambda^t(z) z^{x-1} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_0} \frac{(1-u\mu)^t (1-u\nu)^{x-t-1}}{u^n (1-u)^{x+1}} du = \\
 &= \frac{(1-\nu)(x-1)_n}{n!} F_1(-n; -t, t-x+1; 2-x-n; \mu, \nu), \quad (42)
 \end{aligned}$$

определяемой через контурный интеграл от рациональной функции. В первой строчке этой формулы интегрирование производится по контуру, охватывающему особенности $z = 0, \nu$. После замены переменных $u = h(z)$ этот интеграл приводится к интегралу во второй строчке по контуру вокруг $z = 0$, который явно вычисляется в виде обрывающегося ряда для гипергеометрической функции Аппеля $F_1(-n; \beta, \beta'; \gamma; x, y)$ двух переменных.

До сих пор мы интересовались вероятностями переходов между конфигурациями частиц в фиксированные моменты времени. Однако, думая о функции Грина как о статсумме направленных путей на решетке, можно обобщить полученные формулы на переходы, в которых начальные и конечные вершины путей образуют более сложные пространственно-временные множества. Такая постановка задачи впервые возникла в работе [37] и впоследствии была использована в работах [40, 41] для исследования корреляционных функций токов и обобщенных вероятностей выхода траекторий частиц из заданных пространственно-временных областей в ПАПЗ с обратным последовательным обновлением ($q = \nu = 0$). Ниже мы кратко изложим эти результаты. Детали вывода можно найти в работах [37, 40, 41].

Определим множество допустимых N -точечных конфигураций на пространственно-временной решетке

$$\mathcal{D}_N = \{(\mathbf{x}, \mathbf{t}) : \mathbf{x} = (x_1 \geq \dots \geq x_N), \mathbf{t} = (t_1 \leq \dots \leq t_N)\}. \quad (43)$$

В общем случае точки таких конфигураций можно расположить на ломаной линии, прямые участки которой проходят по вертикальным и горизонтальным ребрам решетки справа налево и сверху вниз:

$$\mathcal{B} = \{b(\tau) = (x, t) \in \mathbb{Z}^2 : b(\tau + 1) = (x - 1, t) \text{ или } b(\tau + 1) = (x, t + 1)\}_{\tau \in \mathbb{Z}}.$$

Множество точек квадратной решетки, лежащих на такой линии, будем называть границей. В таком случае будем говорить, что конфигурация (\mathbf{x}, \mathbf{t}) лежит

на границе \mathcal{B} , и записывать $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \subset \mathcal{B}^*$. Простейшими примерами границ являются подмножества вершин решетки, лежащие на горизонтальной или вертикальной прямой, что соответствует множествам с фиксированной пространственной $b(\tau) = (x, \tau)$ и временной $b(\tau) = (-\tau, t)$, $\tau \in \mathbb{Z}$, координатами.

Также будем говорить, что конфигурация $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathcal{D}_N$ предшествует конфигурации $(\mathbf{x}', \mathbf{t}') \in \mathcal{D}_N$, и обозначать $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \preceq (\mathbf{x}', \mathbf{t}')$, если точки (\mathbf{x}, \mathbf{t}) лежат либо (нестрого) выше, либо (нестрого) левее точек $(\mathbf{x}', \mathbf{t}')$, т. е. для всех $i = 1, \dots, N$ выполнено хотя бы одно из неравенств $x_i \leq x'_i$, $t_i \geq t'_i$. Подобным образом можно определить то же соотношение для конфигурации $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathcal{D}_N$ и границы \mathcal{B} или для двух границ \mathcal{B} и \mathcal{B}' : в первом случае запись $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \preceq \mathcal{B}$ означает, что соотношение $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \preceq (\mathbf{x}', \mathbf{t}')$ выполнено для любой конфигурации $(\mathbf{x}', \mathbf{t}') \subset \mathcal{B}$, а во втором, $\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}'$, что это верно для любой пары конфигураций $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \subset \mathcal{B}$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{t}') \subset \mathcal{B}'$, лежащих на границах соответственно.

По аналогии с функцией Грина $G_t(\mathbf{x}|\mathbf{x}^0)$, описывающей вероятность конфигурации частиц в фиксированный момент времени, можно для любой пары пространственно-временных конфигураций $(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0), (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathcal{D}_N$ определить обобщенную функцию Грина $G((\mathbf{x}, \mathbf{t})|(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0))$ как статсумму взаимодействующих путей, попарно соединяющих точки этих конфигураций. Оказывается, в случае $q = \nu = 0$ для пары пространственно-временных конфигураций $(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0) \preceq (\mathbf{x}, \mathbf{t}')$ такая статсумма также имеет детерминантный вид

$$G((\mathbf{x}, \mathbf{t})|(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0)) = \det \{F_{i-j}(x_i - x_j^0, t_i - t_j^0)\}_{0 \leq i, j \leq N}, \quad (44)$$

где функция $F_n(x, t)$, введенная в (42), должна быть доопределена для отрицательных времен

$$F_n(x, t) = 0, \quad t < 0. \quad (45)$$

Эта формула дает вероятность того, что частицы, начавшие блуждать в узлах (x_1^0, \dots, x_N^0) в моменты (t_1^0, \dots, t_N^0) и прыгающие вперед по правилам ПАПЗ с обратным почастичным последовательным обновлением**, окажутся в узлах (x_1, \dots, x_N) к моментам (t_1, \dots, t_N) соответственно. При этом, правда, подразумевается, что если некоторая частица (с номером i) выбыла из эволюции в момент t_i , то, начиная с этого момента, т. е. при $t \geq t_i$, оставшиеся частицы с номерами $j > i$ движутся как система $(N - i)$ частиц, ничего не

*Строго говоря, знак \subset , обозначающий подмножество, в данном случае использован не совсем корректно, поскольку точки в (\mathbf{x}, \mathbf{t}) могут совпадать. Тем не менее будем использовать его для обозначения того факта, что все точки (\mathbf{x}, \mathbf{t}) лежат на границе \mathcal{B} .

**То есть частица может прыгнуть вперед с вероятностью p , либо если в данный момент в том же узле нет частиц с меньшими номерами, либо если все такие частицы также решили прыгать.

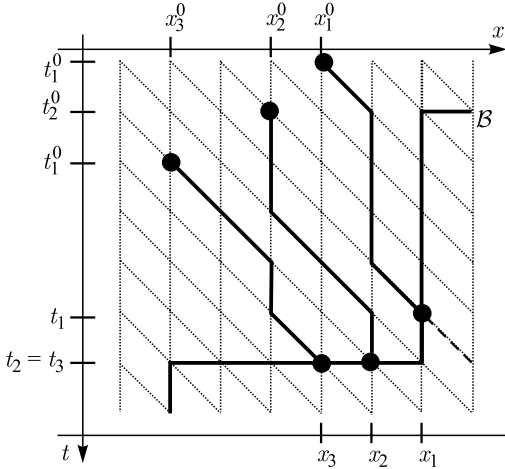


Рис. 3. Переход из начальной пространственно-временной конфигурации $((x_1^0, t_1^0), (x_2^0, t_2^0), (x_3^0, t_3^0))$ в конечную конфигурацию $((x_1, t_1), (x_2, t_2), (x_3, t_3))$ на границе \mathcal{B} , изображенной черной ломаной линией, проходящей по решетке с северо-востока на юго-запад. Рассмотрены события, в которых частицы делают обязательный шаг вперед (показан штриховой линией) из вершин на вертикальных участках границы

знающих о выбывших частицах. Другими словами, если следующая частица окажется в узле x_i в момент $t \geq t_i$, то для нее вероятности выпрыгнуть из узла или остаться в узле будут равны p и $(1 - p)$ соответственно, безотносительно к тому факту, что в этом узле присутствовала выбывшая частица. Этому условию можно удовлетворить естественным образом, если потребовать, чтобы выбывающая частица выпрыгивала из узла в следующий узел в момент выбывания. С учетом пространственно-временного упорядочения конечных координат частиц такое условие обеспечивает отсутствие взаимодействия между частицей с номером i с частицами с номерами $j > i$ в моменты времени $t_j \geq t \geq t_i$.

Удобно переформулировать условия выбывания частиц в терминах перехода через заданную границу (рис. 3). Очевидно, для любой границы \mathcal{B} и конфигурации $(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0) \in \mathcal{D}_{\mathcal{N}}$ такой, что $(\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0) \preceq \mathcal{B}$, частицы выйдут за пределы пространственно-временной области, ограниченной границей \mathcal{B} , с вероятностью единица. Введем вероятность $G^{\mathcal{B}}((\mathbf{x}, \mathbf{t}) | (\mathbf{x}^0, \mathbf{t}^0))$ конфигурации $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathcal{B}$ позиций, через которые частицы покинут пространственно-временную область $\{(x, t) \preceq \mathcal{B}\}$, ограниченную границей \mathcal{B} . Условия выбывания частиц при такой формулировке означают следующее. При уходе с границы через точку $b(\tau) = (x, t)$, из которой граница продолжается вниз, $b(\tau + 1) = (x, t + 1)$, частица обязана сделать прыжок вперед с вероятностью p ,

тогда как через горизонтальный участок границы, $b(\tau + 1) = (x - 1, t)$, оба возможных исхода с общей вероятностью 1 приводят к уходу с границы. Таким образом, искомая вероятность выхода за границу через конфигурацию $\mathbf{b} = (\mathbf{x}, \mathbf{t})$ имеет вид

$$G^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}|\mathbf{b}^0) \equiv \pi^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) G(\mathbf{b}|\mathbf{b}^0), \quad (46)$$

где $\pi^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^N \pi^{\mathcal{B}}(b_i)$, $b_i = (x_i, t_i)$ и

$$\pi^{\mathcal{B}}(b(i)) = \begin{cases} p, & \text{если } b(i+1) = (x, t+1), \\ 1, & \text{если } b(i+1) = (x+1, t). \end{cases}$$

Одним из полезных свойств таким образом определенной функции Грина является марковское свойство, обобщающее марковское свойство обычных функций Грина: свертка двух функций Грина дает снова функцию Грина. Другими словами, если заданы две границы $\mathcal{B}' \preceq \mathcal{B}$ и две конфигурации $\mathbf{b}^0 \preceq \mathcal{B}'$ и $\mathbf{b} \subset \mathcal{B}$, то имеет место равенство

$$G^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}|\mathbf{b}^0) = \sum_{\mathbf{b}' \in \mathcal{D}_N: \mathbf{b}' \subset \mathcal{B}'} G^{\mathcal{B}'}(\mathbf{b}|\mathbf{b}') G^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}'_+|\mathbf{b}^0), \quad (47)$$

где

$$(b'_+)_i = \begin{cases} b'_i, & \text{если } \pi^{\mathcal{B}}(b'_i) = 1, \\ b'_i + (1, 1), & \text{если } \pi^{\mathcal{B}}(b'_i) = p. \end{cases}$$

В заключение заметим, что обобщенная функция Грина позволяет изучать статистику событий, происходящих не только в разных точках пространства, но и в разные моменты времени.

3. ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ПРОЦЕСС И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Хотя полученные формулы для функций Грина дают точные вероятности N -частичных пространственно-временных конфигураций, они содержат множество избыточной информации для описания физики происходящих явлений. С этой точки зрения более информативным являлось бы описание поведения отдельных частиц, в ситуации, когда общее число частиц на решетке очень велико. В работах [75–78] был разработан метод вычисления многоточечных распределений пространственно-временных положений произвольного числа частиц в системах с бесконечным числом частиц, основанный на теории детерминантных процессов. Здесь мы кратко изложим результаты,

полученные в работах [40, 41], о вычислении таких распределений для наиболее общих пространственно-временных областей, существенно использующие понятия границ и обобщенных функций Грина.

Начнем с рассмотрения системы с конечным числом частиц N , чтобы впоследствии перейти к пределу $N \rightarrow \infty$. Для вывода распределения положения одной частицы нужно совместное распределение положений всех частиц, задаваемое функцией Грина в случае фиксированной начальной конфигурации, просуммировать по возможным положениям всех остальных частиц. Подобное суммирование, проведенное в работах [70, 79], позволило прийти к аналогу формул, полученных ранее при рассмотрении статистики диаграмм Юнга и неубывающих подпоследовательностей в обобщенных перестановках [14]. Однако более эффективным оказывается другой подход — представить функцию Грина как частное распределение формального распределения большого числа случайных величин, которое, будучи детерминантным точечным процессом, дает возможность вычислять сразу все многоточечные корреляционные функции.

Для этого заметим сначала, что если задана некоторая граница \mathcal{B} , то все ее вершины $b = (x, t) \in \mathcal{B}$ можно параметризовать одним параметром $\tau = t - x$, пробегающим множество целых чисел \mathbb{Z} . Тогда N -точечная конфигурация $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_N$, лежащая на границе, $\mathbf{b} \subset \mathcal{B}$, задается N -компонентным набором целых чисел $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1 \leq \dots \leq \tau_N)$ таких, что $b_i = (x(\tau_i), t(\tau_i))$, а о функции Грина (46) можно думать как о распределении вероятностей таких наборов.

Оказывается, что это распределение можно переписать через распределение точечных конфигураций на так называемой N -границе $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_N)$, являющейся дизъюнктивным объединением N копий исходной границы \mathcal{B} , или, что то же самое, на подмножествах $\mathbb{Z} \times \{1, \dots, N\}$. Рассмотрим знакопеременную меру вида

$$\mathcal{M}(\mathcal{T}) = \frac{1}{Z_N} \prod_{n=0}^{N-1} \det [\phi_n(\tau_i^n, \tau_j^{n+1})]_{i,j=1}^{n+1} \det [\Psi_{N-i}^N(\tau_j^N)]_{i,j=1}^N, \quad (48)$$

которая присваивает вероятности точечным множествам

$$\mathcal{T} = \bigsqcup_{1 \leq n \leq N} \{\tau_n^n < \tau_{n-1}^n < \dots < \tau_1^n\} \subset \mathbb{Z}_{\geq \tau_0} \times \{1, \dots, N\}. \quad (49)$$

Здесь мы использовали функции

$$\phi_n(z, y) = \begin{cases} \pi^{\mathcal{B}_{n+1}}(b_{n+1}(y)), & y \geq z, \\ 0, & y < z \end{cases} \quad (50)$$

для целых чисел $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}$, параметризующих точки $b_k(y) \in \mathcal{B}_k$, $k = 1, \dots, N$, на соответствующих копиях границы \mathcal{B} и функции

$$\Psi_k^N(\tau) = (-1)^k \tilde{F}_{-k}^{\sim}(b_N(\tau) - b_{N-k}^0), \quad (51)$$

определяемые интегральным представлением (42) при любых целых значениях параметра $t \in \mathbb{Z}$, в отличие от исходных функций $F_n(x, t)$, совпадающих с $\tilde{F}_n(x, t)$ при $t \geq 0$ и равных нулю при $t < 0$. Числа τ_i^j принимают целые значения, ограниченные снизу целым числом τ_0 , выбранным так, что $\Psi_k^N(\tau_0) = 0$. В терминах границы \mathcal{B} число τ_0 — это такой номер узла ($b(\tau_0)$) границы, что все узлы с меньшими номерами недостижимы частицами, будучи расположены либо слишком далеко от начального положения в пространстве, либо раньше, чем время отправления. По построению границы такое значение всегда существует. Z_N — нормировочная константа.

Числа $\tau_i^n, i = 1, \dots, n$, отображаются в положения $b_n(\tau_i^n)$ на \mathcal{B}_n . Поэтому мера на точечных подмножествах N -границы \mathcal{B} определяется как образ $\mathcal{M}(T)$ под действием этого отображения. Координаты на решетке $b_n(\tau_j^n), 1 \leq j \leq n \leq N$, можно рассматривать как координаты вспомогательных частиц, нумеруемых индексом j , живущих на границе \mathcal{B}_n . Кроме того, мы ввели фиктивную переменную $\tau_n^{n-1}, 1 \leq n \leq N$, с фиксированным значением $\tau_n^{n-1} = \tau_0$. Для любого значения $\tau_i^j \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}$ выполнено следующее равенство:

$$\phi_n(\tau_{n+1}^n, \tau_j^{n+1}) \equiv \pi^{\mathcal{B}_{n+1}}(b_{n+1}(\tau_j^{n+1})), \quad j = 1, \dots, n + 1. \tag{52}$$

Чтобы связать функцию Грина $G^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}|\mathbf{b}^0)$ (46) с мерой $\mathcal{M}(T)$ (48), формулы (44), (46) переписываются в виде суммы

$$G^{\mathcal{B}}(\mathbf{b}|\mathbf{b}^0) = \sum_A \prod_{1 \leq i \leq n \leq N} \pi^{\mathcal{B}_n}(b_n(\tau_i^n)) \times (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \times \det [\tilde{F}_{-N+1+i}(b_N(\tau_{j+1}^N) - b_{N-i}^0)]_{i,j=0}^{N-1} \tag{53}$$

по множеству

$$A = \{\tau_i^j \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}, 2 \leq i \leq j \leq N | \tau_i^j \geq \tau_i^{j-1}, \tau_i^j > \tau_{i+1}^{j+1}\}.$$

Для вычисления суммы в каждой строке матрицы под знаком определителя мы замечаем, что функции $\tilde{F}_n(x, t)$ удовлетворяют следующим соотношениям смежности:

$$\tilde{F}_n(x, t) = \tilde{F}_{n+1}(x - 1, t) - \tilde{F}_{n+1}(x, t), \tag{54}$$

$$p\tilde{F}_n(x, t) = \tilde{F}_{n+1}(x, t + 1) - \tilde{F}_{n+1}(x, t), \tag{55}$$

которые в терминах координат на границах могут быть записаны как одно соотношение:

$$\pi^{\mathcal{B}}(b(\tau))\tilde{F}_n(b(\tau)) = \tilde{F}_{n+1}(b(\tau + 1)) - \tilde{F}_{n+1}(b(\tau)). \tag{56}$$

Используя это соотношение, мы видим, что каждое суммирование уменьшает на единицу нижний индекс в функциях \tilde{F}_n , а граничные члены сокращаются

с соседней строкой во всех суммированиях, кроме самого последнего, в котором граничные члены зануляются в силу выбора τ_0 . Последний шаг — убедиться, что суммирование в (53) можно распространить на большее множество

$$\tilde{A} = \{\tau_i^j \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}, 2 \leq i \leq j \leq N | \tau_i^j < \tau_{i-1}^j\},$$

потребовав, чтобы слагаемые совпадали со слагаемыми в (53) в $A \cap \tilde{A}$ и занулялись в $\tilde{A} \setminus A$. Это требование и обеспечивается произведением определителей в (48). В итоге утверждение о связи функции Грина и меры $\mathcal{M}(T)$ имеет вид

$$\mathcal{G}^{\mathcal{B}}(\mathbf{b} | \mathbf{b}^0) = \mathcal{M} \left(\bigcup_{k=1}^N \{\tau_1^k = \tau_k\} \right).$$

Ключевое утверждение, которое делает переход к мере $\mathcal{M}(T)$ замечательно эффективным, — наблюдение, что мера $\mathcal{M}(T)$ детерминантна. Это означает, что n -точечная корреляционная функция

$$\rho_n(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{M}((a_1, \dots, a_n) \subset T),$$

определяемая как вероятность того, что в случайной точечной конфигурации T присутствует подмножество $a = (a_1, \dots, a_n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, дается детерминантом матрицы $n \times n$

$$\rho_n(a_1, \dots, a_n) = \det \{K(a_i, a_j)\}_{1 \leq i, j \leq n}, \tag{57}$$

матричные элементы которой выражаются через единственную функцию $K(a, a')$ двух переменных на $\tilde{A} \times \tilde{A}$, называемую корреляционным ядром.

Интерес представляют вероятности, характеризующие происходящее в заданных подмножествах \tilde{A} . Простейшей из таких вероятностей является вероятность пустоты, т. е. вероятность того, что в случайной точечной конфигурации T не содержится точек множества $A' \subset \tilde{A}$. Такая вероятность может быть выражена через корреляционные функции с помощью принципа включения исключения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(A' \cap T = \emptyset) = 1 - \sum_{a_i \in A'} \rho_1(a_1) + \sum_{a_1 \neq a_2 \in A'} \rho_2(a_1, a_2) - \\ - \sum_{a_1 \neq a_2 \neq a_3 \in A'} \rho_3(a_1, a_2, a_3) + \dots \end{aligned}$$

Подставив вместо корреляционных функций их детерминантный вид (57), заметим, что бесконечная сумма сворачивается в детерминант Фредгольма оператора с ядром $K(x, y)$, действующего на функции на A' ,

$$\mathcal{M}(A' \cap T = \emptyset) = \det(1 - K)_{l^2(A')}. \tag{58}$$

Утверждение о детерминантности меры $\mathcal{M}(\mathcal{T})$ известно как теорема Эйнарта–Меты [30]. Его можно обосновать, используя аргументы, основанные на теореме 1, которые также позволяют вывести явное выражение для ядра [31, 76]. Для этого введем свертки

$$\phi^{(n_1, n_2)}(x, y) = \begin{cases} (\phi_{n_1} * \phi_{n_1+1} * \dots * \phi_{n_2-1})(x, y), & n_1 < n_2, \\ 0, & n_1 \geq n_2, \end{cases} \quad (59)$$

где $(a * b)(x, y) = \sum_{z \in \mathbf{Z}_{\geq \tau_0}} a(x, z) b(z, y)$, и

$$\Psi_{n-j}^n(\tau) = (\phi^{n, N} * \Psi_{N-j}^N)(\tau). \quad (60)$$

О точечных конфигурациях \mathcal{T} можно думать как о наборе координат вспомогательных частиц, а о каждом определителе в формуле (48) — как о статсумме непересекающихся путей в смысле теоремы КМЛГВ. Тогда произведение в (48) будет описывать следующую картину (рис. 4). Сначала пути N частиц распространяются по двумерной решетке, не пересекаясь, пока не достигнут границы \mathcal{B} , трактуемой как \mathcal{B}_N . Далее все частицы переходят, сохраняя порядок, из точек на \mathcal{B}_N в точки на \mathcal{B}_{N-1} , причем первая частица уходит в позицию с номером $\tau_{N-1}^{N-1} = \tau_0$. Остальные частицы перескакивают на следующую границу \mathcal{B}_{N-2} , в том числе вторая частица достигает $\tau_{N-2}^{N-2} = \tau_0$. Оставшиеся $N - 2$ частицы переходят на \mathcal{B}_{N-3} и т.д., пока каждая частица не отправится в позицию с номером τ_0 вдоль соответствующей границы, заканчивая последней частицей, уходящей в точку с номером τ_0 фиктивной границы \mathcal{B}_0 , целиком состоящей из этой единственной точки.

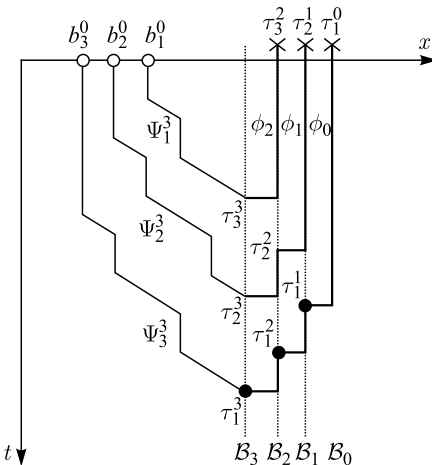


Рис. 4. Детерминантный процесс в терминах непересекающихся путей для системы с $N = 3$ частицами. Копии $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_3$ границы \mathcal{B} — вертикальные линии, показанные пунктиром, а граница \mathcal{B}_0 состоит из единственной точки с номером $\tau_1^0 = \tau_0$. Пути, соединяющие точки начальной конфигурации b_1^0, \dots, b_3^0 с точками $\tau_1^3, \dots, \tau_3^3$ границы \mathcal{B}_3 , имеют вес $\Psi_1^3, \dots, \Psi_3^3$ соответственно. Вес перехода между вершинами с номерами τ_1^i, τ_2^{i+1} соседних копий \mathcal{B}_{i+1} и \mathcal{B}_i равен $\phi_i(\tau_1^i, \tau_2^{i+1})$. Черные кружки показывают положения частиц исходного процесса

Таким образом, функция $\phi_n(z, y)$ будет играть роль веса перехода между точками $b_{n+1}(y)$ и $b_n(x)$ двух соседних границ \mathcal{B}_{n+1} и \mathcal{B}_n . Соответственно, $\phi^{(n_1, n_2)}(x, y)$ будет иметь смысл веса перехода между точками границ \mathcal{B}_{n_1} и \mathcal{B}_{n_2} , параметризуемыми числами x и y в (59). В свою очередь, аргумент функции $\Psi_{n-j}^n(\tau)$ параметризует точки границы \mathcal{B}_n , а сама функция (60) играет роль веса перехода из начальной точки b_j^0 в точку $b(\tau)$ границы \mathcal{B}_n . Конфигурации N частиц нашего исходного процесса в такой картине соответствуют N положениям частицы с номером 1 на каждой из N границ.

Зафиксируем $1 \leq k \leq N$ различных целых чисел ($1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k < N$) и набор из $s = s_1 + \dots + s_k$ точек на соответствующих границах с номерами $\tau = \{(\tau_1^{n_1} < \dots < \tau_{s_i}^{n_i})\}_{i=1}^k$.

Наша задача — вычислить корреляционную функцию для меры \mathcal{M} , которая в терминах путей есть вероятность того, что наши пути пройдут через точки из множества τ . Перед тем как обратиться к вычислению такой вероятности, попробуем вычислить нормировочный коэффициент Z_N меры \mathcal{M} , или статсумму ансамбля непересекающихся путей. Согласно теореме КМЛГВ она дается определителем матрицы

$$Z_N = \det M,$$

матричные элементы которой

$$M_{ij} = \sum_{\tau} \phi_{j-1}(\tau_j^{j-1}, \tau) \Psi_{j-i}^j(\tau), \quad 1 \leq i, j \leq N \quad (61)$$

даются весами переходов из начальных точек $\mathbf{b}^0 = (b_1^0, \dots, b_N^0)$ в конечные точки $\mathbf{b}(\tau_0) = (b^{N-1}(\tau_0), \dots, b^0(\tau_0))$ в позициях с номером τ_0 границ $\mathcal{B}_{N-1}, \dots, \mathcal{B}_0$ соответственно.

Чтобы теперь вычислить искомую вероятность, добавим к множествам начальных и конечных точек путей точки на границах с номерами из множества τ (рис. 5) и вычислим статсумму непересекающихся путей из $(\mathbf{b}^0, \mathbf{b}(\tau))$ в $(\mathbf{b}(\tau_0), \mathbf{b}(\tau))$, где под $\mathbf{b}(\tau)$ в обеих скобках мы понимаем множество вершин границ, соответствующих номерам из набора τ . С точностью до знака такая статсумма дается определителем блочной матрицы вида

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} [\mathbf{b}^0 \rightarrow \mathbf{b}(\tau_0)] & [\mathbf{b}(\tau) \rightarrow \mathbf{b}(\tau_0)] \\ [\mathbf{b}^0 \rightarrow \mathbf{b}(\tau)] & [\mathbf{b}(\tau) \rightarrow \mathbf{b}(\tau)] \end{pmatrix},$$

где матричные элементы блоков даются весами переходов между точками множеств в квадратных скобках. Соответственно имеем

$$[\mathbf{b}^0 \rightarrow \mathbf{b}(\tau_0)] = M$$

— исходная матрица (61),

$$[\mathbf{b}^0 \rightarrow \mathbf{b}(\tau)]_{i,(n,j)} = \Psi_{n-i}^n(\tau_j^n).$$

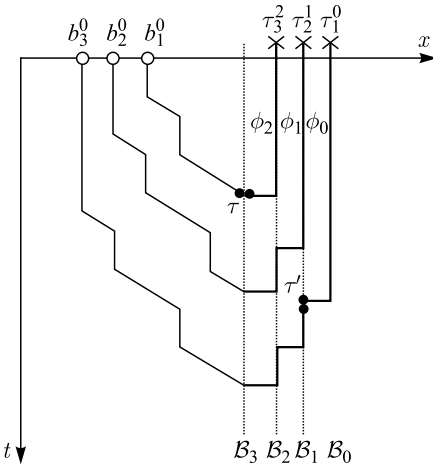


Рис. 5. Пути на графе, используемые для вычисления двухточечной корреляционной функции $\rho_2((\tau, 3), (\tau', 1))$. Вычисление состоит в нахождении (нормированной) статсуммы путей, проходящих через точки τ, τ' на границах B_3 и B_1 соответственно. Для этого мы фиксируем дополнительные пары начальных и конечных точек (черные кружки)

Здесь второй матричный индекс состоит из двух компонент, поскольку элементы множества τ нумеруются двумя числами, номером границы n и номером точки на границе j . Вес переходов между точками множества τ имеет вид

$$[\mathbf{b}(\tau) \rightarrow \mathbf{b}(\tau)]_{(x,n_1),(y,n_2)} = \phi^{n_1,n_2}(x, y).$$

Наконец, переход из точки с номером τ_j^n границы B_n в точку с номером τ_0 границы $l = 0, \dots, N - 1$ дается сверткой

$$[\mathbf{b}(\tau) \rightarrow \mathbf{b}(\tau_0)]_{(n,j),l+1} = (\phi_l * \phi^{l+1,n})(\tau_0, \tau_j^n).$$

Вообще говоря, возможны разные варианты построения непересекающихся путей из $(\mathbf{b}^0, \mathbf{b}(\tau))$ в $(\mathbf{b}(\tau_0), \mathbf{b}(\tau))$. Поэтому, как следует из теоремы 1, определитель матрицы \tilde{M} равен знакопеременной сумме по всем вариантам из правой части формулы (5). Однако, посмотрев внимательно на возможные переходы, можно увидеть, что все ненулевые слагаемые соответствуют перестановкам, четность которых равна четности $s = |\tau|$ числа точек в множестве τ . Тогда искомая вероятность имеет вид

$$\mathcal{M}(\tau \subset T) = (-1)^s \frac{\det \tilde{M}}{\det M},$$

откуда, используя формулу для определителя блочной матрицы

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \det (D - CA^{-1}B),$$

получаем следующую теорему.

Теорема 2. (Эйнард–Мега [30], Бородин–Райнс [31])

$$\mathcal{M}(\tau \subset T) = \det_{\substack{1 \leq m, l \leq k \\ 1 \leq i_n, j_n \leq r_n, n=1, \dots, k}} \{K(n_k, \tau_{i_m}^{n_m}; n_l, \tau_{j_l}^{n_l})\},$$

где

$$K(n_1, x; n_2, y) = -\phi^{(n_1, n_2)}(x, y) + \sum_{1 \leq i, j \leq N} \Psi_{n_1-i}^{n_1}(x) M_{ij}^{-1}(\phi_{j-1} * \phi^{j, n_2})(\tau_0, y),$$

где вразрез с определением (59) свертка под суммой в случае $j = n_2$ понимается как $(\phi_{n_2-1} * \phi^{j, n_2})(\tau_0, y) = \phi_{n_2-1}(\tau_0, y)$ и $(\phi_{n_2-1} * \phi^{j, n_2})(\tau_0, y) = 0$ при $j > n_2$. Поэтому в сумму по j вносят вклад лишь члены с $1 \leq j \leq n_2$.

Эта формула сложна ввиду того, что обращение матрицы M — непростая задача. Однако заметим, что свертка последнего сомножителя под знаком суммы с функцией $\Psi_{n-j}^n(x)$ дает матричный элемент

$$M_{ji} = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}} (\phi_{j-1} * \phi^{j, n})(\tau_0, y) \Psi_{n-j}^n(y)$$

для $j < n \leq N$ и так как $\sum_{i=1}^N M_{ki}^{-1} M_{ij} = \delta_{kj}$, функция

$$\Phi_{n-i}^n(x) = \sum_{j=1}^{n_2-1} M_{ij}^{-1}(\phi_{j-1} * \phi^{j, n})(\tau_0, x)$$

удовлетворяет соотношению ортогональности

$$\sum_{\tau \in \mathbb{Z}_{\geq \tau_0}} \Phi_i^n(\tau) \Psi_j^n(\tau) = \delta_{i, j} \tag{62}$$

и может быть построена с помощью процесса ортогонализации Грамма–Шмидта.

Следствие. Рассмотрим систему функций

$$\{(\phi_0 * \phi^{(1, n)})(\tau_1^0, \tau), \dots, (\phi_{n-2} * \phi^{n-1, n})(\tau_{n-1}^{n-2}, \tau), \phi_{n-1}(\tau_n^{n-1}, \tau)\}, \tag{63}$$

которые, будучи линейно-независимыми, образуют базис в n -мерном линейном пространстве V_n . Используя соотношения ортогональности (62), построим другой базис V_n $\{\Phi_j^n(\tau), j = 0, \dots, n-1\}$. Если $\phi_n(\tau_{n+1}^n, \tau) = c_n \Phi_0^n(\tau)$ с некоторыми $c_n \neq 0$, $n = 1, \dots, N$, то ядро будет иметь вид

$$K(n_1, \tau_1; n_2, \tau_2) = -\phi^{(n_1, n_2)}(\tau_1, \tau_2) + \sum_{k=1}^{n_2} \Psi_{n_1-k}^{n_1}(\tau_1) \Phi_{n_2-k}^{n_2}(\tau_2). \tag{64}$$

Таким образом, задача построения корреляционного ядра сводится к задаче построения функций $\Phi_i^n(\tau)$, ортогональных функциям $\Psi_j^n(\tau)$. Она может быть решена явно для нескольких специальных типов начальных условий. В частности, мы приведем результаты для случая, когда в начальный момент времени все частицы находятся в одном узле:

$$\mathbf{b}^0 = ((0, 0), \dots, (0, 0)).$$

Заметим, что в случае процесса с ВНР с обратным последовательным обновлением, который мы рассматриваем, движение первых N частиц не зависит от частиц с большими номерами. Поэтому о полученных результатах можно думать как о статистике первых N частиц в системе, где в начальный момент в одном узле содержится бесконечное число частиц. Опуская подробности, приведем сразу ответ для ядра

$$\begin{aligned}
 K(n_1, \tau_1; n_2, \tau_2) &= \oint_{\Gamma_1} \frac{dv}{2\pi iv} \oint_{\Gamma_{0,v}} \frac{dw}{2\pi iw} \times \\
 &\quad \frac{\left(1 - p \left(\frac{w-1}{w}\right)\right)^{t(\tau_1)}}{\left(1 - p \left(\frac{v-1}{v}\right)\right)^{t(\tau_2)}} \frac{(w-1)^{n_1} w^{x(\tau_1)}}{(v-1)^{n_2} v^{x(\tau_1)}} \\
 &\quad \times \frac{1}{(w-v)(1/v + 1/\pi_2 - 1)} - \\
 &\quad - 1(n_2 > n_1) \oint_{\Gamma_{0,1}} \frac{dw}{2\pi iw^2} \frac{\left(1 - p \left(\frac{w-1}{w}\right)\right)^{t(\tau_1)-t(\tau_2)} w^{x(\tau_1)-x(\tau_2)}}{(w-1)^{n_2-n_1}(1/w + 1/\pi_2 - 1)}, \quad (65)
 \end{aligned}$$

где $\pi_2 \equiv \pi^B(b(\tau_2))$, а интегрирование проводится по замкнутым контурам Γ_ω , где ω — набор особенностей подынтегрального выражения, которые должны попадать внутрь контура.

Чтобы вернуться к статистике положений частиц процесса с ВНР, можно использовать выражение для вероятности пустоты, полученное в виде детерминанта Фредгольма (58). Взяв в качестве подмножества A' множество

$$A' = \left\{ \bigcup_{i=1}^k \{\tau_1^{n_i} > a_k\} \right\},$$

получим распределение точек $\mathbf{b} = (b_1(\tau_1^1), \dots, b_N(\tau_1^N))$ выхода через границу частиц в процессе с ВНР с номерами n_1, \dots, n_k :

$$\mathbb{P} \left(\mathbf{b} | \{\tau_{n_1} \leq a_1\} \cap \dots \cap \{\tau_{n_k} \leq a_k\} \right) = \det(1 - \chi_a K \chi_a)_{l^2(\{n_1, \dots, n_m\} \times \mathbb{Z})},$$

где $\chi_a(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k \mathbb{I}_{x > a_i}$ — проекторы на полубесконечные подмножества целых чисел.

К сказанному в этом разделе следует добавить, что этот результат обобщается с одной границы на произвольную последовательность вложенных границ. Так же как для одной границы мы стартовали с формулы для функции Грина, от которой переходили к сумме по координатам вспомогательных частиц, для рассмотрения нескольких границ нужно стартовать со свертки вдоль этих границ нескольких функций Грина, подобной свертке в формуле (47), которая превращается в расширенную сумму по вспомогательными переменным, имеющую вид частного распределения детерминантного процесса. В результате удается выразить в виде фредгольмовских детерминантов такие совместные распределения частиц на границах, в которых номера частиц строго возрастают в пределах одной границы и нестрого возрастают при переходе между двумя соседними границами. Такая конструкция позволяет избавиться от требования упорядоченности времен выхода, так что остается лишь требование слабой упорядоченности пространственных координат. Выражение (65) для корреляционного ядра при этом остается неизменным, кроме присутствия неявной зависимости координат $x_i(\tau)$ и времени $t_i(\tau)$ как функций τ , от того, на какой именно границе живут данные координаты.

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ: ПРЕДЕЛЬНАЯ ГИДРОДИНАМИКА И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ

Как уже обсуждалось во введении, поведение термодинамической системы на больших масштабах может быть охарактеризовано типичными значениями термодинамических величин и их универсальными флуктуациями вокруг этих значений. Как было показано, в отсутствие длинных корреляций сценарий такого поведения весьма прост. Имеются два характерных масштаба, термодинамический и флуктуационный, поведение на которых диктуется ЗБЧ и ЦПТ соответственно.

В отличие от систем в состоянии термодинамического равновесия в неравновесных системах есть потоки, которые переносят информацию о флуктуациях между различными частями системы, что может значительно повлиять на сценарий поведения системы на больших масштабах, приводя к появлению новых характерных масштабов и универсальных распределений. Один из характерных примеров неравновесного универсального поведения дают системы, объединяемые в класс универсальности Кардара–Паризи–Жанга. Исторически понятие этого класса возникло при описании скейлингового поведения случайного роста поверхностей, таких как границы между различными фазами вещества, фронты горения, высыхания, смачивания, кристаллизации,

границы колоний бактерий и т. д. В общем и целом предполагается, что этот класс объединяет упругие поверхности или линии под действием случайной силы с ограниченными корреляциями.

В теории форма растущего фронта описывается высотой $h_t(x)$, функцией пространственных координат x , параметризующих точки подложки, и времени t . Скейлинговое поведение функции высоты в системах класса универсальности Кардара–Паризи–Жанга характеризуется двумя независимыми критическими индексами, которые могут быть выбраны, например, как индекс шершавости ζ и динамический индекс z . В системе с линейным размером L это, например, проявляется в том, что на больших временах, $t \gg t_c$, ширина $w_t = \sqrt{\mathbb{E}(h_t(x)^2 - \bar{h}_t^2)}$ сначала плоского фронта, $w_0 = 0$, стабилизируется на величинах порядка L^ζ , тогда как на малых временах, $t \ll t_c$, она не зависит от L и растет со временем по степенному закону. Здесь \bar{h}_t — средняя по пространству высота фронта. Переход, происходящий на характерных временах $t_c \asymp L^z$, называется ошершавливанием. Два асимптотических режима можно объединить в рамках единого скейлингового анзаца Фэмили–Висека [80]

$$w_t = L^\zeta \Phi\left(\frac{t}{L^z}\right),$$

где $\Phi(x)$ — скейлинговая функция с асимптотиками $\Phi(x) \asymp x^{1/z}$, $x \rightarrow 0$ и $\Phi(x) \rightarrow \text{const}$, $x \rightarrow \infty$. В бесконечной системе вместо ζ и z удобнее использовать другую пару критических индексов $\alpha = \zeta/z$ и $\beta = 1/z$, отвечающих за степенной рост флуктуаций $h_t - \bar{h}_t \asymp t^\alpha$ и динамической корреляционной длины $\xi(t) \asymp t^\beta$, которая определяет характерный масштаб расстояний, на которых различные участки фронта нетривиально скоррелированы между собой.

Попытка найти минимальную и наиболее универсальную модель, принадлежащую к классу Кардара–Паризи–Жанга, привела к появлению одноименного уравнения [4]

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \eta(x, t). \quad (66)$$

Здесь $h(x, t)$ — высота растущего фронта, а $\eta(x, t)$ — белый шум, т. е. случайное гауссово поле с нулевым средним

$$\mathbb{E}\eta(x, t) = 0$$

и ковариацией

$$\mathbb{E}\eta(x, t)\eta(x', t') = D\delta(x - x')\delta(t - t'),$$

а λ , ν и D — размерные параметры задачи. Точные критические индексы ζ и z , описывающие скейлинговое поведение решения этого уравнения в случае пространства-времени размерности $d = 1+1$, были найдены с использованием аргументов, основанных на симметриях этого уравнения и ренормгруппе, уже в статье [4]. Значение $\zeta = 1/2$ отражает тот факт, что стационарное решение в бесконечной системе есть просто броуновское движение $h_{\text{st}}(x) = \sqrt{A}B_x$ с амплитудой

$$A = D/(2\nu), \tag{67}$$

и, в частности,

$$\mathbb{V}(h_{\text{st}}(x) - h_{\text{st}}(y)) = A|x - y|, \tag{68}$$

где $\mathbb{V}(\xi)$ — дисперсия случайной величины ξ . В нестационарном режиме статистика решения уравнения (66) демонстрирует более богатое скейлинговое поведение, общий вид которого, однако, можно предсказать исходя из простого анализа размерностей. Ожидается, что на больших временах, $t \rightarrow \infty$, флуктуации высоты вокруг среднего растут со временем, измеряемым в единицах, пропорциональных $(|\lambda|A^2)^{-1}$, по степенному закону с показателем α . Запишем это через следующую скейлинговую гипотезу:

$$h_t(x) - \mathbb{E}h_t(x) = \left(\frac{|\lambda|A^2}{2}t\right)^\alpha \mathcal{X} + o(t), \tag{69}$$

где двойка в знаменателе добавлена для красоты дальнейших формул. Результат деления отклонения функции высоты от среднего на соответствующий масштабный (размерный) фактор дает безразмерную случайную величину \mathcal{X} , которая претендует на роль универсальной в рамках класса Кардара–Паризи–Жанга. Как показывает новейшая история развития теории, распределение этой величины все еще зависит от глобальной формы начальных условий, выживающей в скейлинговом пределе. Однако оно оказывается нечувствительно к микроскопическим деталям динамики фронта. Случайная величина \mathcal{X} все еще зависит от координаты x . Если на больших временах мы будем рассматривать растущий со временем пространственный масштаб, измеряя расстояние в единицах динамической корреляционной длины

$$\xi(t) = \frac{1}{A} \left(\frac{|\lambda|A^2}{2}t\right)^\beta, \tag{70}$$

то получим однопараметрическое семейство случайных величин $\mathcal{X}(u)$, претендующее на роль универсального для теории Кардара–Паризи–Жанга случайного процесса. В зависимости от конкретного вида начальных условий одноточечное распределение $\mathcal{X}(u)$ может зависеть или не зависеть от u , но при различных значениях параметра u эти случайные величины оказываются

нетривиально скоррелированы между собой. Чтобы полностью охарактеризовать случайный процесс $\mathcal{X}(u)$, нужно найти все совместные распределения величин $(\mathcal{X}(u_1), \dots, \mathcal{X}(u_k))$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Более общий вопрос касается и совместных распределений функции высоты фронта в различных точках пространственно-временной плоскости. Подобные универсальные случайные процессы также возникают и при рассмотрении скейлинговых пределов функции высоты (или других наблюдаемых) вдоль путей на пространственно-временной плоскости.

Решение уравнения Кардара–Паризи–Жанга в смысле нахождения всех многоточечных распределений — непростая задача, которая до сих пор не решена полностью. Однако все сказанное выше относительно скейлингового поведения его решений может быть в равной степени отнесено и к другим моделям в том же классе универсальности. Именно поиск универсальных распределений и процессов послужил мотивацией для поиска точных решений систем взаимодействующих частиц. В нашем случае мы ожидаем, что скейлинговый предел многоточечных распределений, полученных в предыдущем подразделе, будет также универсальным. Чтобы сформулировать эти утверждения, обсудим сначала скейлинговые гипотезы о том, как устроена динамика фронта, связанного с нашей системой частиц, на больших масштабах.

Чтобы соотнести наши результаты со скейлинговыми предсказаниями для растущего фронта, описываемого уравнением Кардара–Паризи–Жанга, сопоставим конфигурации частиц $\mathbf{n}(t) = \{n_i(t)\}_{i \in \mathcal{L}}$ на целочисленной решетке $\mathcal{L} = \mathbb{Z}$ и невозрастающую ступенчатую функцию высоты $h_t(x) \in \mathbb{Z}$ на \mathbb{R} , принимающую только целые значения, которые меняются скачком, уменьшаясь на $n_i(t)$ в целочисленных значениях $x = i$, т. е.

$$h_t(i+0) - h_t(i) = n_i(t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

(рис. 6). Задав значение функции высоты в какой-нибудь одной точке, по этому соотношению можно однозначно восстановить всю функцию. Например, для конфигураций, ограниченных справа, где $n_i(t) = 0$ для достаточно больших i , можно считать, что $\lim_{x \rightarrow \infty} h_t(x) = 0$. Тогда в начальный момент рассмотренной выше эволюции, когда бесконечное число частиц находится в узле $i = 0$,

$$h_0(x) = \begin{cases} \infty, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

фронт состоит из двух лучей, выходящих из одной точки под прямым углом. Дальнейшая эволюция фронта следует из правил эволюции частиц. На каждом шаге времени мы проходим всю систему справа налево и в каждый внутренний угол в позиции i добавляем m_{i-1} единичных квадратиков с вероят-

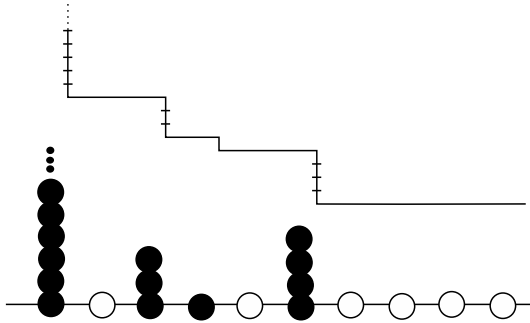


Рис. 6. Соответствие конфигурации частиц и линии растущего фронта. Показана конфигурация, в которой самый левый узел содержит бесконечно много частиц. Если подразумевается, что все узлы справа от показанных пусты, то оставшиеся за пределами рисунка части фронта — два луча, расходящиеся вправо и вверх под прямым углом

ностью $\varphi(m_{i-1}|n_{i-1})$,

$$h_{t+1}(x) = h_t(x) + m_{i-1}, \quad x \in [i - 1, i).$$

Тот факт, что $0 \leq m_{i-1} \leq n_{i-1}$, сохраняет функцию высоты невозрастающей. В частности, в рассмотренном нами случае $\nu = 0$ каждый следующий квадратик в данной позиции добавляется с вероятностью p , пока либо добавление не остановится с вероятностью $(1 - p)$, либо высота в данной позиции не дорастет до высоты на предыдущем единичном полуинтервале.

Как выглядит типичная форма такого фронта на большом масштабе и больших временах? Оказывается, что так же, как и в равновесной ситуации, в системе есть два характерных масштаба, отвечающих за предельную форму (ЗБЧ) и характерные флуктуации (ЦПТ). На масштабе ЗБЧ, $x \sim t \rightarrow \infty$, типичная форма фронта определяется эйлеровской гидродинамикой системы частиц, которая диктуется законами сохранения системы. В нашем случае единственный закон сохранения — это закон сохранения частиц, который предполагает, что плотность частиц $\rho(x)$ на решетке удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\partial_t \rho(x, t) + \partial_x j(x, t) = 0.$$

Здесь $j(x, t)$ — ток частиц через точку x в момент времени t . Ключевой факт, позволяющий замкнуть это уравнение, — гипотеза локальной квазистационарности, которая предполагает, что на больших масштабах нестационарная система частиц локально ведет себя как бесконечная стационарная

трансляционно-инвариантная система с плотностью частиц, равной локальной плотности в нестационарной системе. В частности, это выражается в том, что ток $j(x, t)$ зависит от координат и времени только через зависимость от плотности $\rho(x, t)$, а вид этой зависимости дается соотношением между током и плотностью частиц в бесконечной системе, в которой установилось трансляционно-инвариантное стационарное состояние

$$j(x, t) = j_{\text{st}}(\rho(x, t)).$$

Далее будем предполагать, что $j_{\text{st}}(\rho)$ — выпуклая функция при $\rho > 0$ и $j_{\text{st}}(0) = 0$. В результате получим уравнение для плотности

$$\partial_t \rho + j'_{\text{st}}(\rho) \partial_x \rho = 0, \quad (71)$$

которое решается методом характеристик. Для начальных условий $\rho(x, 0) = \infty \cdot \mathbb{I}_{x \leq 0}$ все характеристики — это лучи в плоскости $x - t$, выходящие из начала координат $(x, t) = (0, 0)$ в первый квадрант. Решение для функции плотности $\rho(x, t) = \rho(\chi)$ — функция переменной $\chi = x/t$, получаемая обращением соотношения

$$j'_{\text{st}}(\rho) = \chi \quad (72)$$

в области $0 < \chi < j'_{\infty}(0)$ и

$$\rho(\chi) = 0$$

при $\chi \geq j'_{\infty}(0)$.

Чтобы связать это решение с положением $x_n(t)$ частицы с номером n в момент времени t , заметим, что ровно n частиц находятся нестрого правее узла $x_n(t)$. Предположим, что положение частицы является функцией $x_n(t) = t\chi(\theta)$ отношения $\theta = n/t$. Тогда

$$\theta = \int_{\chi}^{j'_{\text{st}}(0)} \rho(y) dy = -\chi\rho - \int_{\chi}^{j'_{\text{st}}(0)} y\rho'(y) dy = -\chi\rho + j_{\text{st}}(\rho), \quad (73)$$

где мы использовали замену переменных $y \rightarrow \rho(y)$, задаваемую соотношением (72), интегрированием по частям. Сопоставляя уравнения (72) и (73), заключаем, что

$$\theta(\chi) = \inf_{\rho \in (0, \infty)} (-\chi\rho + j_{\text{st}}(\rho))$$

— минус преобразование Лежандра функции $j(\rho)$. Поскольку высота ассоциированного фронта в позиции $x = \chi t$ есть не что иное как число частиц, прошедших через данную точку, $\theta(\chi)$ есть не что иное как его предельная форма, появляющаяся в аналоге ЗБЧ:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t(\chi t)}{t} = \theta(\chi). \quad (74)$$

В обратную сторону, поскольку при ненулевой плотности $\theta(\chi)$ — монотонная функция, $d\theta/d\chi = -\rho < 0$, ее можно обратить в области $0 < \chi < j'_\infty(0)$, так что в результате мы получаем функцию $\chi(\theta)$, возникающую в аналоге ЗБЧ для $x_n(t)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_{\theta t}(t)}{t} = \chi(\theta). \tag{75}$$

Здесь, поскольку используемые аргументы имеют чисто эвристический характер, мы не делаем утверждений о типе сходимости случайных величин. Существующие доказательства для конкретных примеров предполагают сходимость почти наверное.

Для получения явных формул для функций, связывающих ρ , χ и θ , для моделей с НРВ с вероятностями перескока (28) воспользуемся тем фактом, что в стационарном состоянии в бесконечной системе числа заполнения независимы, а одноузельное распределение имеет вид (32):

$$\mathbb{P}_{\text{st}}(n_i = k) = \frac{z^k f(k)}{\mathfrak{z}(z)},$$

где стационарный вес $f(k) = \sum_{l=0}^k v(l)w(k-l)$ есть свертка двух наборов параметров $v(l)$ и $w(l)$, через произведения которых определяются вероятности перескоков $\varphi(m|n) = v(m)w(n-m)/f(n)$, z — активность, параметр распределения, значение которого определяет среднюю плотность частиц, а $\mathfrak{z}(z)$ — одноузельная статсумма, определяемая как производящая функция стационарных весов $\mathfrak{z}(z) = \sum_{n \geq 0} z^n f(n)$. Связь средней плотности частиц с активностью дается стандартным термодинамическим соотношением

$$\rho = \mathbb{E}n_i = z f'(z),$$

где, как и во введении, мы ввели свободную энергию на один узел $f(z) = \log \mathfrak{z}(z)$. Ток в стационарном состоянии, соответствующем активности z , можно вычислить как среднее число частиц, выходящих из узла

$$j_{\text{st}}(\rho(z)) = \mathbb{E} \sum_{m=0}^{n_i} m \varphi(m|n_i) = z \frac{d}{dz} \log \mathfrak{v}(z),$$

где $\mathfrak{v}(z) = \sum_{n \geq 0} z^n v(n)$ — производящая функция параметра $v(n)$. Подставляя для случая $q = \nu = 0$ и $\mu = p$

$$\mathfrak{z}(z) = \frac{1}{1-z},$$

$$\mathfrak{v}(z) = \frac{1}{1-pz},$$

получаем следующие величины:

$$\rho = \frac{z}{1-z}, \quad (76)$$

$$j_{st} = \frac{pz}{1-pz}, \quad (77)$$

$$\theta = \frac{(1-p)pz^2}{(pz-1)^2}, \quad (78)$$

$$\chi = \frac{p(z-1)^2}{(pz-1)^2}, \quad (79)$$

как функции активности z , принимающей значения в диапазоне $z \in [0, 1)$, когда значения плотности пробегают от нуля до бесконечности. При необходимости нахождения явной зависимости любой из величин от любой другой необходимо исключить параметр z из уравнений. В данном случае это решаемая задача, сводимая к решению квадратных уравнений. Однако в общем случае, например при ненулевых параметрах q и ν , выражение функций в параметрическом виде через взаимную зависимость от параметра z — это единственный способ записать их в относительно простом виде. Далее мы часто будем пользоваться какой-либо из этих величин, рассматривая ее как функцию одной из оставшихся, а также ее производными. В этом случае мы будем писать, например, $\chi(\theta)$ или $\theta(\chi)$, $\chi'(\theta)$ и т. д., так, чтобы из обозначений было ясно, какая из величин играет роль функции, а какая — аргумента.

Обратимся теперь к флуктуирующей части обсуждаемых случайных величин, отвечающих ЦПТ. Чтобы соотнести точные результаты со скейлинговой гипотезой (69), основанной на анализе уравнения Кардара–Паризи–Жанга, необходимо выразить размерные константы через параметры фронта, сопоставленного системе частиц. Гипотеза, которая позволяет это делать, основана на простом наблюдении [81, 82]: из трех параметров уравнения Кардара–Паризи–Жанга можно построить два размерных инварианта, которые не меняются при масштабных преобразованиях. Один из них — A , определенный в (67), а второй — коэффициент нелинейности λ из исходного уравнения (66). Вся размерная зависимость средних величин, характеризующих статистику флуктуаций растущего фронта, описываемого уравнением Кардара–Паризи–Жанга, выражается через комбинации этих двух параметров, что, в частности, согласуется со скейлинговой гипотезой (69). Резонно ожидать, что этот факт справедлив для всех растущих фронтов в целом классе универсальности. Однако, чтобы им воспользоваться, нужно придать инвариантам универсальный смысл, не ограниченный применимостью уравнения (66). Действительно, параметр A можно понимать как амплитуду дисперсии (68). Чтобы проинтерпретировать коэффициент нелинейности, можно рассмотреть решение уравнения Кардара–Паризи–Жанга с начальным условием, полученным из стацио-

нарного добавлением постоянного наклона κ , $h_0(x) = B_x + \kappa x$. Такой фронт будет двигаться с постоянной скоростью $v_{\text{int}}(\kappa) = \mathbb{E}(dh_t(x)/dt)$ со следующей зависимостью от наклона: $\lambda = v_{\text{int}}''(\kappa)$. В терминах системы частиц средняя скорость ассоциированного фронта соответствует току, $v_{\text{int}} = j_{\text{st}}(\rho)$, а наклон — плотности частиц, $\rho = \kappa$, так что для коэффициента нелинейности будем иметь

$$\lambda = \frac{d^2 j_{\text{st}}(\rho)}{d\rho^2}.$$

Для нашей системы с НРВ величины A и λ также можно вычислить в терминах характеристик стационарного состояния системы частиц и записать через активность z . В частности, разность высот фронта в двух точках под знаком дисперсии равна сумме чисел заполнения между двумя узлами $h_t(x) - h_t(y) = \sum_{i=x+1}^y n_i$. Поскольку в стационарном состоянии числа заполнения разных узлов независимы, то дисперсия суммы дается суммой дисперсий в каждом узле, т. е.

$$A = \mathbb{V}n_i = \left(z \frac{d}{dz}\right)^2 f(z) = z \frac{d\rho}{dz}.$$

Подставляя в последние два соотношения уравнения (76)–(79), получаем

$$A = \frac{z}{(1-z)^2}$$

и

$$\lambda = -\frac{2(1-p)p(1-z)^3}{(1-pz)^3}.$$

Зафиксируем положение $x = \chi t$ на макроскопической шкале и посмотрим на семейство случайных величин, которые получаются при рассмотрении высоты фронта в различных точках в окрестности этого положения на расстояниях порядка корреляционной длины (70). После суммирования всего вышесказанного наша скейлинговая гипотеза для высоты фронта принимает вид суммы двух частей, — детерминистической порядка t и случайной порядка $t^{1/3}$:

$$h_t(\chi t + u\sigma_c(\chi)t^{2/3}) = \theta(\chi)t + \sigma_f(\chi)t^{1/3}\mathcal{X}(u) + o(t^{1/3}), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь флуктуационный и корреляционный размерные параметры имеют вид

$$\sigma_f = \left(\frac{|\lambda|A^2}{2}\right)^{1/3} = \frac{((1-p)p)^{1/3} z^{2/3}}{(1-pz)(1-z)^{1/3}},$$

$$\sigma_c = \frac{1}{A} \left(\frac{|\lambda|A^2}{2}\right)^{2/3} = \frac{((1-p)p)^{2/3} z^{1/3}(1-z)^{4/3}}{(1-pz)^2}.$$

В частности, для одноточечного распределения это эквивалентно утверждению о существовании предельного распределения

$$F_{\mathcal{X}}(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{h_t(\chi t) - t\theta(\chi)}{\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a \right), \quad (80)$$

а для многоточечного

$$F_{\mathcal{X}}^{u_1, \dots, u_n}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \left[\frac{h_t(\chi_i t) - t\theta(\chi_i)}{\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a_i \right] \right), \quad (81)$$

где мы использовали обозначение $\chi_i = \chi + t^{-1/3}\sigma_c u_i$ для различных точек, разделенных расстояниями порядка корреляционной длины. Заметим, что размерные параметры $\sigma_f(\chi)$ и $\sigma_c(\chi)$ зависят от точки $\chi = x/t$ на макроскопической шкале. Тем не менее, как мы увидим из точного решения, левые части уравнений (80), (81) не зависят от этой точки, свидетельствуя об универсальности полученных распределений.

В предыдущем разделе мы сделали утверждение о виде совместного распределения точек выхода частиц с границы, простейшим примером которого является распределение координат нескольких частиц в фиксированный момент времени. От распределения высоты фронта можно перейти к распределению различных наблюдаемых, характеризующих ассоциированную систему частиц. Например, заметим, что событие $x_n(t) < a$ эквивалентно событию $h_t(a) < n$ или $\mathbb{P}(x_n(t) < a) = \mathbb{P}(h_t(a) < n)$. Поэтому для (80) будем иметь

$$\mathbb{P}(h_t(\chi t) < t\theta(\chi) + a\sigma_f(\chi)t^{1/3}) = \mathbb{P}(x_{t\theta(\chi) + a\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < \chi t).$$

Исходя из закона больших чисел (75) для $x_n(t)$ предположим, что

$$x_{\theta t}(t) = t\chi(\theta) + \xi_{\theta},$$

где $\xi_{\theta} = O(t^{1/3})$ — случайная величина. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x_{t\theta(\chi) + a\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < \chi t) &= \\ &= \mathbb{P}(t\chi(\theta(\chi)) + a\sigma_f(\chi)t^{-2/3} + \xi_{\theta(\chi) + a\sigma_f(\chi)t^{-2/3}} < \chi t) \simeq \\ &\simeq \mathbb{P}(\xi_{\theta(\chi)} < a\rho^{-1}\sigma_f(\theta)t^{1/3}), \end{aligned}$$

где мы воспользовались тем фактом, что $d\chi/d\theta = -1/\rho$, а пренебрегли сдвигом в аргументе ξ_{θ} . В результате из (80) имеем

$$F_{\mathcal{X}}(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{x_{\theta t}(t) - t\chi(\theta)}{\rho^{-1}\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a \right).$$

В аналогичных аргументах для многоточечных распределений мы должны учесть сдвиги точек рассмотрения от исходной макроскопической позиции на расстояния порядка динамической корреляционной длины $\xi(t) = \sigma_c t^{3/2}$:

$$F_{\mathcal{X}(u)}^{u_1, \dots, u_n}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \left[\frac{x_{t\theta_i}(t) - t\chi(\theta_i)}{\rho^{-1}\sigma_f t^{1/3}} < a_i \right] \right),$$

где $\theta_i = \theta - \rho u_i \sigma_c t^{-1/3}$. Заметим, что в смещении от макроскопической позиции θ появился множитель $(-\rho) = d\theta/d\chi$.

Чтобы объяснить, как, зная совместные распределения высот при фиксированном времени, получить разновременные распределения, воспользуемся явлением медленной декорреляции, открытым в работах [83, 84]. Как уже было замечено, характерная корреляционная длина, на которой происходит декорреляция случайных величин, описывающих растущий фронт в классе Кардара–Паризи–Жанга, имеет порядок роста $\xi(t) \asymp t^{2/3}$. Флуктуации высот в точках, разделенных расстояниями, много меньшими $\xi(t)$, полностью скоррелированы, т. е. их можно считать идентичными случайными величинами. Флуктуации в точках на расстоянии порядка $\xi(t)$ уже различные, не тривиально скоррелированные случайные величины, а на расстояниях, много больших $\xi(t)$, флуктуации высоты можно считать независимыми. Это останется справедливым, если мы будем рассматривать различные точки в разные моменты времени, с разницей времен такого же порядка при условии, что рассматриваемые точки не лежат на одной и той же характеристике уравнения Эйлера (71):

$$x = j'(\rho)t.$$

Вдоль характеристики наблюдается медленная декорреляция, т. е. флуктуации высоты $\delta h_t(x) = (h_t(x) - t\theta(x/t))$ остаются полностью скоррелированы вплоть до масштаба порядка $O(t)$. Направления вдоль характеристик называют времяподобными, а все остальные — пространственно-подобными. Пользуясь медленной декорреляцией, можно свести совместные распределения флуктуаций высот в разных точках пространственно-временной плоскости, разделенных пространственно-подобными интервалами, к совместным распределениям при фиксированном времени. Действительно, утверждение об идентичности записывается как

$$h_{t+\delta t}(\chi t) - (t + \delta t)\theta \left(\frac{\chi t}{t + \delta t} \right) = h_t \left(\chi t \left(1 + \frac{\delta t}{t} \right)^{-1} \right) - t\theta \left(\frac{\chi t}{t + \delta t} \right).$$

В частности, взяв $\delta t = s\sigma_c \chi^{-1} t^{2/3}$, где s — безразмерный параметр, задающий отклонения времени на характерной шкале, получим

$$h_{t+s\sigma_c \chi^{-1} t^{2/3}}(t\chi + u\sigma_c t^{2/3}) = h_t \left(\frac{\chi t + u\sigma_c t^{2/3}}{1 + s\sigma_c \chi^{-1} t^{-1/3}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + s\sigma_c\chi^{-1}t^{2/3}\theta\left(\frac{\chi t + u\sigma_c t^{2/3}}{t + s\sigma_c\chi^{-1}t^{2/3}}\right) \simeq \\
& \simeq \left(t + s\sigma_c\chi^{-1}t^{2/3}\right)\theta\left(\frac{\chi + u\sigma_c t^{-1/3}}{1 + s\sigma_c\chi^{-1}t^{-1/3}}\right) + \delta h_t(\chi t + (u - s)\sigma_c t^{2/3}).
\end{aligned}$$

Зафиксируем n пространственно-временных позиций $(b_1, \dots, b_n) = ((x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n))$, где

$$\begin{aligned}
x_i &= t\chi_i = t\chi + u_i\sigma_c t^{2/3}, \\
t_i &= t + s\sigma_c\chi^{-1}t^{2/3},
\end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \left[\frac{h_{t_i}(x_i) - t_i\theta(x_i/t_i)}{\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a_i \right]\right) = F_{\mathcal{X}(u)}^{u_1 - s_1, \dots, u_n - s_n}(a_1, \dots, a_n).$$

Эквивалентное утверждение о совместной функции распределения положений частиц в разные моменты времени будет иметь вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \left[\frac{x_{t_i\theta(x_i/t_i)}(t_i) - x_i}{\rho^{-1}\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a_i \right]\right) = F_{\mathcal{X}(u)}^{u_1 - s_1, \dots, u_n - s_n}(a_1, \dots, a_n).$$

Мы видим, что отклонения от макроскопической шкалы во времени и пространстве входят совместно в виде разности.

Заметим, что явление медленной декорреляции было открыто с помощью чисто вероятностных аргументов. Далее продемонстрируем формулы для скейлингового предела распределений точек выхода частиц с границ. Результат будет иллюстрацией явления медленной декорреляции, полученной напрямую из точного решения.

О распределении вероятности высоты фронта $h_t(x)$ можно думать как о распределении времени, которое нужно частице номер h , чтобы уйти дальше координаты x , а о совместном распределении $(h_{t_1}(x), \dots, h_{t_n}(x))$ — как о его многочастичном аналоге. С другой стороны, как мы обсудили выше, распределение величин $(h_t(x_1), \dots, h_t(x_n))$ связано с распределением координат, достигаемых частицами за время t . Вспоминая результаты предыдущего раздела, видим, что оба эти примера дают частные случаи распределения позиций выхода частиц с фиксированной границы, где границы соответствуют прямым линиям $x = \text{const}$ и $t = \text{const}$ соответственно. Используя аргументы, приведенные выше, попробуем сформулировать утверждение о предельном распределении координаты выхода с произвольной границы \mathcal{B} , естественно параметризуемой координатой $\tau = t - x$. Точнее, будем рассматривать последовательность границ $\{\mathcal{B}^{(L)}\}_{L \in \mathbb{N}}$, которые на большом масштабе $\tau = [L\psi]$,

$L \rightarrow \infty$, аппроксимируются некоторой гладкой кривой \mathcal{C} ,

$$b(\tau) = (x(\tau), t(\tau)) \simeq L \left(\frac{\zeta(\psi) - \psi}{2}, \frac{\zeta(\psi) + \psi}{2} \right).$$

Здесь $\zeta(\psi)$ — некоторая гладкая функция, определяющая предельную форму границы, а приближительное равенство означает, что поточечная разница правой и левой частей порядка $o(t^{1/3})$, т. е. мала по сравнению с флуктуационным масштабом. Геометрия границы накладывает на функцию $\zeta(\psi)$ ограничения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \frac{\zeta'(\psi) - 1}{2} \leq 0, \\ \frac{dt}{d\tau} &= \frac{\zeta'(\psi) + 1}{2} \geq 0, \end{aligned}$$

т. е.

$$|\zeta'(\psi)| \leq 1. \tag{82}$$

Обозначим $T_n^{\mathcal{B}}$ случайную величину, равную номеру узла τ , через который частица с номером n выходит с границы \mathcal{B} , а

$$\psi(\eta) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{T_{[nL]}^{\mathcal{B}}}{L}$$

— его перемасштабированную предельную величину в смысле ЗБЧ. Она может быть определена как решение уравнения

$$(\zeta(\psi) - \psi) = \chi \left(\frac{2\eta}{\zeta(\psi) + \psi} \right) (\zeta(\psi) + \psi), \tag{83}$$

полученного переписыванием ЗБЧ (75) в терминах ψ .

Далее, применив аргумент, аналогичный использованному выше для связи распределений $h_t(x)$ и $x_n(t)$, $\mathbb{P}(T_n^{\mathcal{B}} < a) = \mathbb{P}(h_{t(a)}(x(a)) < n)$, получим

$$F_{\mathcal{X}}(a) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{T_{[nL]}^{\mathcal{B}} - L\psi(\eta)}{\psi'(\eta)\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a \right). \tag{84}$$

Здесь размерный фактор $\psi'(\eta)$ следует из дифференцирования соотношения (83) и равен

$$\psi'(\eta) = \frac{2\rho^{-1}}{(\zeta'(\psi) + 1)(\chi + \theta\rho^{-1}) + (1 - \zeta'(\psi))},$$

где значения θ , $\rho = \rho(\theta)$ и $\chi = \chi(\theta)$ вычислены при значении аргумента

$$\theta = \frac{n}{t} = \frac{2\eta}{\zeta(\psi) + \psi}.$$

Чтобы записать прямое обобщение формулы (84) для многоточечных распределений, которые потом можно будет интерпретировать в терминах случайных процессов на пространственно-подобных путях, рассмотрим вместо одной кривой, которая была задана функцией $\zeta(\psi)$, однопараметрическое семейство кривых $\mathcal{C}_{\omega, \omega \in \mathbb{R}}$, задаваемых функциями $\zeta(\psi, \omega)$. При фиксированном значении параметра ω функция $\zeta(\psi, \omega)$, как и раньше, задает гладкую кривую в плоскости $x - t$. Когда параметр ω пробегает все действительные значения, кривая гладко деформируется, сдвигаясь при увеличении ω вправо и вниз, так что $\mathcal{C}_{\omega_1} \preceq \mathcal{C}_{\omega_2}$ для любых двух значений $\omega_1 < \omega_2$. Номер макроскопической позиции выхода частиц $\psi(\eta, \omega)$ с номером $n = [\eta L]$ с границы $\mathcal{B}_{\omega}^{(L)} \simeq LC_{\omega}$ будет по-прежнему даваться решением уравнения (83), хотя теперь кроме зависимости от номера частицы он будет функцией еще и параметра границы ω .

Теперь рассмотрим гладкий путь $\Gamma = \{\eta(r), \omega(r)\}_{r \in \mathbb{R}}$ в плоскости $\eta - \omega$ такой, что $\omega'(r) \geq 0$, $\eta'(r) > 0$. Таким образом, каждой кривой $\mathcal{C}_{\omega(r)}$ сопоставляем частицу с номером $[L\eta(r)]$, выходом которой за границу $\mathcal{B}_{\omega(r)}^{(L)} \simeq LC_{\omega(r)}$ мы будем интересоваться. Возьмем n точек r_1, \dots, r_n на пути Γ так, чтобы соответствующие точки в плоскости $x - t$ отстояли друг от друга на расстояния порядка $O(L^{2/3})$,

$$r_i = r_0 + u_i \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \sigma_c L^{-1/3}. \quad (85)$$

Здесь, руководствуясь тем же принципом, что был использован выше, чтобы переходить между распределениями различных случайных величин, мы включили в шкалу параметра r размерный множитель

$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{\zeta^{(0,1)}(1 - \chi - \theta\rho^{-1})\omega' + 2\rho^{-1}\eta'}{(\zeta^{(1,0)} + 1)(\chi + \theta\rho^{-1}) + (1 - \zeta^{1,0})} \Big|_{r=r_0}, \quad (86)$$

который снова получается дифференцированием формулы (83), только теперь по отношению к r с учетом зависимости $\zeta(\psi, \omega)$ от второго аргумента. После этого точки, нумерующие частицы, и границы берутся в виде (рис. 7)

$$\omega_i = \omega(r_i), \quad \eta_i = \eta(r_i).$$

Тогда многоточечный аналог формулы (84) будет иметь следующий вид:

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \left[\frac{T_{[\eta_i L]}^{LC_{\omega_i}} - L\psi(\eta_i, \omega_i)}{(\partial\psi/\partial\eta)\sigma_f(\chi)t^{1/3}} < a_i \right] \right) = F_{\mathcal{X}^{(u)}}^{u_1, \dots, u_n}(a_1, \dots, a_n). \quad (87)$$

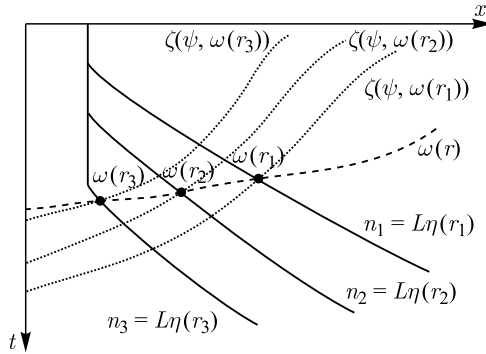


Рис. 7. Распределение позиций выхода с границ на пространственно-подобном пути в плоскости $x - t$. Сплошными линиями показаны макроскопические детерминистические траектории частиц с номерами $n_i = [L\eta(r_i)]$, $i = 1, 2, 3$. Пунктирными кривыми обозначены гладкие предельные линии трех границ, $\mathcal{B}_{\omega(r_i)}^{(L)} \simeq LC_{\omega(r_i)}$, положение которых $(x, t) \simeq L \left(\frac{\zeta(\psi, \omega(r_i)) - \psi}{2}, \frac{\zeta(\psi, \omega(r_i)) + \psi}{2} \right)$ определяется функцией $\zeta(\psi, \omega)$ при фиксированных значениях второго аргумента. Точки их пересечений задают координаты $\psi(r_i)$ как решения уравнения (83). Штриховой линией отмечен пространственно-подобный путь: задав функции $\omega(r)$ и $\eta(r)$, мы соответственно определяем $\psi(r)$ для семейства границ. Флуктуации точки в окрестности $\psi(r)$ сходятся к одному универсальному пределу почти для всех пространственно-временных путей

Заметим, что коэффициент при параметре u в формуле (83) расходится, когда числитель в формуле (86) обращается в нуль. Это соответствует ситуации, когда путь Γ лежит на характеристике уравнения Эйлера, т. е. времениподобен, и отсутствие зависимости получающегося случайного процесса от координаты на пути на рассматриваемом масштабе отражает явления медленной декорреляции.

Выше мы продемонстрировали набор скейлинговых гипотез о сходимости различных многоточечных распределений к одному универсальному пределу. Чтобы описать этот предел, нам необходимо воспользоваться результатами точного решения, описанного в предыдущем разделе. Там приведено точное выражение для вероятностей выхода с границ в виде определителя Фредгольма. Чтобы исследовать, к чему сходится это выражение в скейлинговом пределе (87), нужно произвести асимптотический анализ определителя Фредгольма, техническая часть которого состоит в анализе интегрального представления корреляционного ядра методом перевала и доказательстве равномерной сходимости ряда, представляющего определитель Фредгольма. Здесь мы опустим подробности асимптотического анализа. Интересующийся читатель может найти их в работах [40, 41, 76–78]. Мы сформулируем лишь ответ, предъявив явные формулы предельных распределений.

Определим случайный процесс Эйри₂, $\mathcal{A}_2(u)$, как стационарный случайный процесс со следующими конечномерными распределениями:

$$\text{Prob}(\mathcal{A}_2(u_1) < s_1, \dots, \mathcal{A}_2(u_m) < s_m) = \det(1 - \eta_s K_{\text{Airy}_2} \eta_s)_{L^2(\{n_1, \dots, n_m\} \times \mathbb{R})}, \quad (88)$$

где K_{Airy_2} — интегральный оператор с ядром

$$K_{\text{Airy}_2}(\xi_1, \zeta_1; \xi_2, \zeta_2) = \begin{cases} \int_0^\infty d\lambda e^{\lambda(\xi_2 - \xi_1)} \text{Ai}(\lambda + \zeta_1) \text{Ai}(\lambda + \zeta_2), & \xi_2 \leq \xi_1, \\ - \int_{-\infty}^0 d\lambda e^{\lambda(\xi_2 - \xi_1)} \text{Ai}(\lambda + \zeta_1) \text{Ai}(\lambda + \zeta_2), & \xi_2 > \xi_1. \end{cases} \quad (89)$$

Одноточечным распределением этого процесса является знаменитое распределение Трейси–Уидома [6], которое задается аналогичным детерминантом Фредгольма на $L^2(\mathbb{R})$ от оператора с ядром Эйри

$$K_{\text{Airy}}(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}(y)\text{Ai}'(x)}{x - y}.$$

Распределение Трейси–Уидома впервые было открыто в теории случайных матриц [8], где оно описывает распределение должным образом перемасштабированного максимального (и минимального) собственного значения случайной эрмитовой матрицы из гауссова унитарного ансамбля. Матричные элементы матриц из такого ансамбля — независимые нормально распределенные случайные величины. Если же думать о матричных элементах как о независимых броуновских движениях с таким же одновременным распределением [85], то зависимость максимального собственного значения от времени будет описываться ансамблем Эйри₂.

Используя обозначения, введенные после формулы (87), сформулируем следующее утверждение (теорема 2.2 [41]).

Пусть

$$r = r_0 + u \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^{-1} \sigma_c L^{-1/3}, \\ \eta_u = \eta(r), \quad \omega_u = \omega(r).$$

Следующий предел имеет место в смысле конечномерных распределений

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{T_{[L\eta_u]}^{LC\omega_u} - L\psi(\eta_u, \omega_u)}{\psi'(\eta)\sigma_f(\chi)t^{1/3}} = \mathcal{A}_2(u).$$

Отсюда видно, что случайные величины, описывающие положения, в которых траектории взаимодействующих частиц пересекают линии из различных

однопараметрических семейств, после правильного выбора единиц измерения сходятся к одному и тому же универсальному случайному процессу. Для семейства кривых, заданного функцией $\zeta(\psi, \omega)$, масштабные модельно-зависимые параметры легко восстанавливаются из приведенных формул для почти любого выбора пути $(\eta(r), \omega(r))$, кроме случая времениподобных путей, когда корреляционная длина имеет другой масштаб. Самые простые примеры функции $\zeta(\psi, \omega)$ воспроизводят частные случаи статистик, которые изучались ранее. Например, для случая одной чисто пространственной границы, позволяющего охарактеризовать совместное распределение положений частиц в фиксированный момент времени t , положим $\zeta(\psi, \omega) = 2t/L - \psi$. Чтобы исследовать корреляционные функции токов [40], т. е. распределения времен достижения заданной координаты x различными частицами, нужно рассмотреть $\zeta(\psi, \omega) = \psi - 2x/L$. Чтобы рассмотреть положения частиц вдоль пространственно-подобных путей [64, 86], можно включить в $\zeta(\psi, \omega)$ нетривиальную зависимость от ω , $\zeta(\psi, \omega) = \omega - \psi$. Заметим, что результаты в [64, 86] предполагали дополнительное временное упорядочение точек на рассмотренных пространственно-подобных путях, тогда как в нашем случае использование обобщенных функций Грина позволяет избавиться от этого ограничения. Еще один случай, который может быть получен как частный для наших формул, — случай совместного многоточечного распределения положений выделенной частицы, изучавшийся в [87]. Он соответствует специальному выбору пути, $\eta(r) = \text{const}$.

Таким образом, мы проиллюстрировали сходимость широкого класса статистик, описывающих вероятности выхода взаимодействующих частиц за произвольные пространственно-временные границы, к предельному процессу Эйри₂, который, предположительно, является универсальным в классе Кардара–Паризи–Жанга. Существуют также и другие предельные процессы, соответствующие другой глобальной форме начальных условий. Их описание выходит за рамки нашего обзора.

Благодарности. Автор хотел бы отметить глубокое влияние, которое оказал Вячеслав Борисович Приезжев как на развитие статистической физики, так и на формирование самого автора. Он благодарен судьбе за предоставленную возможность находиться рядом с замечательным ученым, человеком и старшим товарищем, духовно обогащаться от общения и взаимодействия с ним. Автор также признателен Олегу Заборонскому за внимательное чтение текста и плодотворные обсуждения. Работа поддержана РФФИ, грант № 19-01-00726.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khinchin A. Ya.* Statistical Mechanics as a Problem of the Theory of Probability // *Usp. Mat. Nauk.* 1950. V. 5, No. 3. P. 3–46.
2. *Dobrushin R. L., Tirozzi B.* The Central Limit Theorem and the Problem of Equivalence of Ensembles // *Commun. Math. Phys.* 1977. V. 54, No. 2. P. 173.

3. *Campanino M., Del Grosso G., Tirozzi B.* Local Limit Theorem for Gibbs Random Fields of Particles and Unbounded Spins // *J. Math. Phys.* 1979. V. 20, No. 8. P. 1752.
4. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y. C.* Dynamic Scaling of Growing Interfaces // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56, No. 9. P. 889.
5. *Halpin-Healy T., Zhang Y. C.* Kinetic Roughening Phenomena, Stochastic Growth, Directed Polymers and All That. Aspects of Multidisciplinary Statistical Mechanics // *Phys. Rep.* 1995. V. 254, Nos. 4–6. P. 215–414.
6. *Tracy C. A., Widom H.* Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel // *Commun. Math. Phys.* 1994. V. 159, No. 1. P. 151–174.
7. *Prähofer M., Spohn H.* Scale Invariance of the PNG Droplet and the Airy Process // *J. Stat. Phys.* 2002. V. 108, Nos. 5–6. P. 1071–1106.
8. *Mehta M. L.* *Random Matrices.* Elsevier, 2004.
9. *Baik J., Deift P., Johansson K.* On the Distribution of the Length of the Longest Increasing Subsequence of Random Permutations // *J. Amer. Math. Soc.* 1999. V. 12, No. 4. P. 1119.
10. *Vershik A. M., Kerov S. V.* Asymptotics of the Plancherel Measure of the Symmetric Group and the Limiting Form of Young Tableaux // *Proc. AN USSR.* 1977. V. 233, No. 6. P. 1024–1027.
11. *Jockusch W., Propp J., Shor P.* Random Domino Tilings and the Arctic Circle Theorem. arXiv:math/9801068. 1998.
12. *Johansson K.* The Arctic Circle Boundary and the Airy Process // *Ann. Prob.* 2005. V. 33, No. 1. P. 1–30.
13. *Ferrari P. L., Spohn H.* Constrained Brownian Motion: Fluctuations Away from Circular and Parabolic Barriers // *Ibid.* No. 4. P. 1302–1325.
14. *Johansson K.* Shape Fluctuations and Random Matrices // *Commun. Math. Phys.* 2000. V. 209, No. 2. P. 437.
15. *Kardar M.* Directed Paths in Random Media. arXiv:cond-mat/9411022. 1994.
16. *Lieb E. H., Liniger W.* Exact Analysis of an Interacting Bose Gas I. The General Solution and the Ground State // *Phys. Rev.* 1963. V. 130, No. 4. P. 1605.
17. *Amir G., Corwin I., Quastel J.* Probability Distribution of the Free Energy of the Continuum Directed Random Polymer in $1 + 1$ Dimensions // *Commun. Pure App. Math.* 2011. V. 64, No. 4. P. 466–537.
18. *Calabrese P., Le Doussal P., Rosso A.* Free-Energy Distribution of the Directed Polymer at High Temperature // *Europhys. Lett.* 2010. V. 90, No. 2. P. 20002.
19. *Dotsenko V.* Two-Temperature Statistics of Free Energies in $(1 + 1)$ Directed Polymers // *Europhys. Lett.* 2017. V. 116, No. 4. P. 40004.
20. *Sasamoto T., Spohn H.* One-Dimensional Kardar–Parisi–Zhang Equation: An Exact Solution and Its Universality // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104, No. 23. P. 230602.
21. *Korepin V. E., Bogoliubov N. M., Izergin A. G.* *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions.* Cambridge Univ. Press, 1997.
22. *Gwa L. H., Spohn H.* Six-Vertex Model, Roughened Surfaces, and an Asymmetric Spin Hamiltonian // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68, No. 6. P. 725.
23. *Bethe H.* On the Theory of Metals. I. Eigenvalues and Eigenfunctions of a Linear Chain of Atoms // *Selected Works of Hans A. Bethe: With Commentary.* 1997. World Sci. Series in 20th Century Phys. V. 18. P. 155–183.

24. *Litvin A. A., Priezzhev V. B.* The Bethe Ansatz for the Six-Vertex Model with Rotated Boundary Conditions // *J. Stat. Phys.* 1990. V. 60, Nos. 3–4. P. 307–321.
25. *Karlin S., McGregor J.* Coincidence Probabilities // *Pacific J. Math.* 1959. V. 9, No. 4. P. 1141–1164.
26. *Lindström B.* On the Vector Representations of Induced Matroids // *Bull. London Math. Soc.* 1973. V. 5, No. 1. P. 85–90.
27. *Gessel I. M., Viennot X.* Determinants, Paths, and Plane Partitions. Preprint 1989; <http://people.brandeis.edu/gessel/homepage/papers/pp.pdf>.
28. *Brak R., Essam J., Osborn J., Owczarek A. L., Rechnitzer A.* Lattice Paths and the Constant Term // *J. Phys.: Conf. Ser.* 2006. V. 42, No. 1. P. 47.
29. *Brak R., Galleas W.* Constant Term Solution for an Arbitrary Number of Osculating Lattice Paths // *Lett. Math. Phys.* 2013. V. 103, No. 11. P. 1261–1272.
30. *Eynard B., Mehta M. L.* Matrices Coupled in a Chain. I. Eigenvalue Correlations // *J. Phys. A.* 1998. V. 31, No. 19. P. 4449.
31. *Borodin A., Rains E. M.* Eynard–Mehta Theorem, Schur Process, and Their Pfaffian Analogs // *J. Stat. Phys.* 2005. V. 121. No. 3–4. P. 291–317.
32. *Krug J.* Origins of Scale Invariance in Growth Processes // *Adv. Phys.* 1997. V. 46, No. 2. P. 139–282.
33. *Ferrari P. L.* From Interacting Particle Systems to Random Matrices // *J. Stat. Mech.* 2010. P. 10016.
34. *Borodin A., Gorin V.* Lectures on Integrable Probability. Probability and Statistical Physics in St. Petersburg // *Proc. of Symp. Pure Math.* 2016. V. 91. P. 155–214.
35. *Quastel J.* Current Developments in Mathematics. Somerville, MA: Int. Press, 2011. P. 125–94.
36. *Corwin I.* The Kardar–Parisi–Zhang Equation and Universality Class // *Random Matrices: Theory and Applications.* 2012. V. 1. P. 1130001.
37. *Brankov J. G., Priezzhev V. B., Shelest R. V.* Generalized Determinant Solution of the Discrete-Time Totally Asymmetric Exclusion Process and Zero-Range Process // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 69, No. 6. P. 066136.
38. *Priezzhev V. B.* Non-Stationary Probabilities for the Asymmetric Exclusion Process on a Ring // *Pramana.* 2005. V. 64, No. 6. P. 915.
39. *Povolotsky A. M., Priezzhev V. B.* Determinant Solution for the Totally Asymmetric Exclusion Process with Parallel Update // *J. Stat. Mech.* 2006. P. 07002.
40. *Povolotsky A. M., Priezzhev V. B., Schütz G. M.* Generalized Green Functions and Current Correlations in the TASEP // *J. Stat. Phys.* 2011. V. 142, No. 4. P. 754.
41. *Poghosyan S. S., Povolotsky A. M., Priezzhev V. B.* Universal Exit Probabilities in the TASEP // *J. Stat. Mech.* 2012. P. 08013.
42. *Povolotsky A. M.* On the Integrability of Zero-Range Chipping Models with Factorized Steady States // *J. Phys. A.* 2013. V. 46. P. 465205.
43. *Fisher M. E.* Walks, Walls, Wetting, and Melting // *J. Stat. Phys.* 1984. V. 34, Nos. 5–6. P. 667–729.
44. *Rosengren H.* A Non-Commutative Binomial Formula // *J. Geom. Phys.* 2000. V. 32, No. 4. P. 349–363.
45. *Evans M. R., Majumdar S. N., Zia R. K.* Factorized Steady States in Mass Transport Models // *J. Phys. A.* 2004. V. 37, No. 25. P. L275.

46. Barraquand G., Corwin I. The q -Hahn Asymmetric Exclusion Process // *Ann. Appl. Prob.* 2016. V. 26, No. 4. P. 2304–2356.
47. Borodin A., Corwin I., Petrov L., Sasamoto T. Spectral Theory for Interacting Particle Systems Solvable by Coordinate Bethe Ansatz // *Commun. Math. Phys.* 2015. V. 339, No. 3. P. 1167–1245.
48. Frassek R. The Non-Compact XXZ Spin Chain as Stochastic Particle Process // *J. Phys. A.* 2019. V. 52, No. 33. P. 335202.
49. Barraquand G., Corwin I. Random-Walk in Beta-Distributed Random Environment // *Probability Theory and Related Fields.* 2017. V. 167, Nos. 3–4. P. 1057–1116.
50. Sasamoto T., Wadati M. One-Dimensional Asymmetric Diffusion Model without Exclusion // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, No. 4. P. 4181.
51. Alimohammadi M., Karimipour V., Khorrami M. Exact Solution of a One-Parameter Family of Asymmetric Exclusion Processes // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57, No. 6. P. 6370.
52. Alimohammadi M., Karimipour V., Khorrami M. A Two-Parametric Family of Asymmetric Exclusion Processes and Its Exact Solution // *J. Stat. Phys.* 1999. V. 97, Nos. 1–2. P. 373–394.
53. Schütz G. M., Ramaswamy R., Barma M. Pairwise Balance and Invariant Measures for Generalized Exclusion Processes // *J. Phys. A.* 1996. V. 29, No. 4. P. 837.
54. Frassek R., Giardinà C., Kurchan J. Non-Compact Quantum Spin Chains as Integrable Stochastic Particle Processes // *J. Stat. Phys.* 2020. V. 180, No. 1. P. 135–171.
55. Derkachov S. E. Baxter's Q -Operator for the Homogeneous XXX Spin Chain // *J. Phys. A.* 1999. V. 32, No. 28. P. 5299.
56. Bogoliubov N. M., Bullough R. K. A q -Deformed Completely Integrable Bose Gas Model // *J. Phys. A.* 1992. V. 25, No. 14. P. 4057.
57. Sasamoto T., Wadati M. Exact Results for One-Dimensional Totally Asymmetric Diffusion Models // *J. Phys. A.* 1998. V. 31, No. 28. P. 6057.
58. Povolotsky A. M. Bethe Ansatz Solution of Zero-Range Process with Nonuniform Stationary State // *Phys. Rev. E.* 2004. V. 69, No. 6. P. 061109.
59. Povolotsky A. M., Mendes J. F. Bethe Ansatz Solution of Discrete Time Stochastic Processes with Fully Parallel Update // *J. Stat. Phys.* 2006. V. 123, No. 1. P. 125–166.
60. Borodin A., Corwin I. Macdonald Processes // *Probability Theory and Relative Fields.* 2014. V. 158, Nos. 1–2. P. 225–400.
61. Borodin A., Corwin I., Ferrari P. Free Energy Fluctuations for Directed Polymers in Random Media in $1 + 1$ Dimension // *Commun. Pure Appl. Math.* 2014. V. 67, No. 7. P. 1129–1214.
62. Priezzhev V. B., Ivashkevich E. V., Povolotsky A. M., Hu C. K. Exact Phase Diagram for an Asymmetric Avalanche Process // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87, No. 8. P. 084301.
63. Borodin A., Corwin I. Discrete Time q -TASEPs // *Intern. Math. Res. Notices.* 2015. V. 2015, No. 2. P. 499–537.
64. Borodin A., Ferrari P. Large Time Asymptotics of Growth Models on Space-Like Paths I: PushASEP // *Electron. J. Probability.* 2008. V. 13. P. 1380–1418.
65. Povolotsky A. M., Priezzhev V. B., Hu C. K. The Asymmetric Avalanche Process // *J. Stat. Phys.* 2003. V. 111, Nos. 5–6. P. 1149–1182.
66. Van Diejen J. F. Diagonalization of an Integrable Discretization of the Repulsive Delta Bose Gas on the Circle // *Commun. Math. Phys.* 2006. V. 267, No. 2. P. 451–476.

67. *Corwin I., Petrov L.* Stochastic Higher Spin Vertex Models on the Line // *Commun. Math. Phys.* 2016. V. 343, No. 2. P. 651–700.
68. *Corwin I., Matveev K., Petrov L.* The q -Hahn PushTASEP // *Intern. Math. Res. Notices*. 2018. rnz106, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnz106>.
69. *Schütz G.M.* Exact Solution of the Master Equation for the Asymmetric Exclusion Process // *J. Stat. Phys.* 1997. V. 88, Nos.1–2. P. 427–445.
70. *Rákos A., Schütz G.M.* Current Distribution and Random Matrix Ensembles for an Integrable Asymmetric Fragmentation Process // *J. Stat. Phys.* 2005. V. 118, Nos. 3–4. P. 511.
71. *Derbyshev A. E., Poghosyan S. S., Povolotsky A. M., Priezhev V. B.* The Totally Asymmetric Exclusion Process with Generalized Update // *J. Stat. Mech.* 2012. P. 05014.
72. *Tracy C.A., Widom H.* Integral Formulas for the Asymmetric Simple Exclusion Process // *Commun. Math. Phys.* 2008. V. 279, No. 3. P. 815–844.
73. *Borodin A., Corwin I., Petrov L., Sasamoto T.* Spectral Theory for the q -Boson Particle System // *Compositio Mathematica*. 2015. V. 151, No. 1. P. 1–67.
74. *Stanley R. P.* Enumerative Combinatorics. V. 1. Second ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 2011.
75. *Sasamoto T.* Spatial Correlations of the 1D KPZ Surface on a Flat Substrate // *J. Phys. A*. 2005. V. 38, No. 33. P. L549.
76. *Borodin A., Ferrari P. L., Prähofer M., Sasamoto T.* Fluctuation Properties of the TASEP with Periodic Initial Configuration // *J. Stat. Phys.* 2007. V. 129, Nos. 5–6. P. 1055–1080.
77. *Borodin A., Ferrari P. L., Prähofer M.* Fluctuations in the Discrete TASEP with Periodic Initial Configurations and the Airy1 Process // *Intern. Math. Res. Papers*. 2007. rpm002, <https://doi.org/10.1093/imrp/rpm002>.
78. *Borodin A., Ferrari P. L., Sasamoto T.* Transition between Airy1 and Airy2 Processes and TASEP Fluctuations // *Commun. Pure Appl. Math.* 2008. V. 61, No. 11. P. 1603.
79. *Nagao T., Sasamoto T.* Asymmetric Simple Exclusion Process and Modified Random Matrix Ensembles // *Nucl. Phys. B*. 2004. V. 699, No. 3. P. 487–502.
80. *Family F., Vicsek T.* Scaling of the Active Zone in the Eden Process on Percolation Networks and the Ballistic Deposition Model // *J. Phys. A*. 1985. V. 18, No. 2. P. L75.
81. *Amar J. G., Family F.* Critical Cluster Size: Island Morphology and Size Distribution in Submonolayer Epitaxial Growth // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74, No. 11. P. 2066.
82. *Krug J., Meakin P., Halpin-Healy T.* Amplitude Universality for Driven Interfaces and Directed Polymers in Random Media // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 45, No. 2. P. 638.
83. *Ferrari P. L.* Slow Decorrelations in Kardar–Parisi–Zhang Growth // *J. Stat. Mech.* 2008. P. 07022.
84. *Corwin I., Ferrari P. L., Pécchè S.* Universality of Slow Decorrelation in KPZ Growth // *Ann. Inst. Henri Poincaré Prob. Stat.* 2012. V. 48, No. 1. P. 134–150.
85. *Dyson F. J.* A Brownian Motion Model for the Eigenvalues of a Random Matrix // *J. Math. Phys.* 1962. V. 3, No. 6. P. 1191–1198.
86. *Borodin A., Ferrari P. L., Sasamoto T.* Large Time Asymptotics of Growth Models on Space-Like Paths II: PNG and Parallel TASEP // *Commun. Math. Phys.* 2008. V. 283, No. 2. P. 417–449.
87. *Imamura T., Sasamoto T.* Dynamics of a Tagged Particle in the Asymmetric Exclusion Process with the Step Initial Condition // *J. Stat. Phys.* 2007. V. 128, No. 4. P. 799–846.