

КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ С ВЕРШИНАМИ, НАРУШАЮЩИМИ СИММЕТРИЮ ОТНОСИТЕЛЬНО ОБРАЩЕНИЯ ВРЕМЕНИ

*П. Экснер**

Институт ядерной физики Чешской АН, Ржеж, Чехия

Доплеровский институт математической физики и прикладной математики
Чешского технического университета, Прага

В этой работе мы обсуждаем квантовые графы с вершинной связью, которая нарушает инвариантность по отношению к обращению времени. Для простого типа этой связи, в которой нарушение в некотором смысле является максимальным, мы показываем, что оно приводит к спектральным свойствам, определяемым в режиме высоких энергий топологией графа. Мы проиллюстрируем этот эффект на примерах, включающих решеточные графы и цепочки петель, а также конечные графы, связанные с телами Платона. Кроме того, мы показываем, что транспортные свойства таких графов могут различаться в объеме графа и на его границе.

We discuss quantum graphs with the vertex coupling which violates the time-reversal invariance. For a simple type of this coupling in which the violation is in a sense maximum one we show that it leads to spectral properties determined in the high-energy regime by the graph topology. We illustrate this effect on examples which involve lattice graphs and loop arrays as well as finite graphs associated with Platonic solids. We also show that transport properties of such graphs may differ in the graph bulk and at the edges.

PACS: 03.65.Db; 03.65.Ge; 02.60Lj

Памяти моего друга и коллеги Славы Приезжева посвящается

ВВЕДЕНИЕ

Для начала позвольте мне сказать, что я знал Славу свыше трех с половиной десятилетий, с начала восьмидесятых годов, и за эти годы имел возможность наслаждаться многочисленными дискуссиями с ним. Его понимание физики было очень глубоким, и он всегда использовал свои замечательные

*E-mail: exner@ujf.cas.cz

технические способности, не теряя из виду глубокие вопросы. Позвольте мне по этому случаю представить некоторые результаты, которые касаются одного из таких вопросов, о направлении времени, в связи с понятиями теории графов, которую мы оба часто использовали, хотя и в совершенно разных контекстах.

Направление времени является одной из загадок физики. Основные уравнения движения инвариантны относительно него, но в большинстве физических процессов, которыми они управляют, такая инвариантность нарушается. Хорошо известными примерами являются второе начало термодинамики или космологическая ось времени. В квантовой механике мы также сталкиваемся с процессом, который в своей основе необратим, редукцией волнового пакета, связанной с измерениями, проводимыми в квантовой системе. Конечно, нарушение симметрии можно наблюдать и на элементарном уровне, например, когда система находится под воздействием магнитного поля. С другой стороны, бывают ситуации, когда инвариантность нарушается без очевидной причины, примером может служить аномальный эффект Холла [1], механизм которого, в отличие от механизма «обычного» квантового эффекта Холла, не совсем понятен; предполагается, что это происходит от внутренней намагниченности в сочетании со спин-орбитальным взаимодействием.

Возможный способ решения этой проблемы — поиск подходящей модели. Одна из таких моделей была предложена в [2], где авторы использовали концепцию квантовых графов [3], известную своей универсальностью: движение электронов на атомных орбиталях моделировалось сетью колец с δ -связью в их вершинах, которая топологически эквивалентна квадратной решетке, порождающей спектр типа Кронига–Пенни [4]. Однако у модели был недостаток, поскольку авторам пришлось сделать предположение о предпочтительной ориентации. Это трудно оправдать из первых принципов на ребрах графа, где частицы движутся, как на одномерных отрезках. С другой стороны, существует возможность связывать волновые функции в вершинах графа способом, который сохраняет самосопряженность [5] и в то же время нарушает временную симметрию. В этой статье я собираюсь описать несколько недавно построенных примеров таких графов и продемонстрировать необычную связь между спектральными свойствами и топологией, которая в них наблюдается.

1. СВЯЗЬ С «МАКСИМАЛЬНЫМ» НАРУШЕНИЕМ

Рассмотрим «звезду» с N полубесконечными ребрами, которые встречаются в одной вершине. Волновые функции $\Psi = \{\psi_j\}$ составляют гильбертово пространство $\bigoplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R}_+)$, а гамильтонианом системы является отрицательный лапласиан, $H\{\psi_j\} = \{-\psi_j''\}$, где, как обычно, мы используем систему

единиц, в которой $\hbar = 2m = 1$. Условия, которые делают H самосопряженным, связывают граничные значения функций $\Psi \in \bigoplus_{j=1}^N H^2(\mathbb{R}_+)$ и их производные следующим образом,

$$(U - I)\Psi(0+) + i(U + I)\Psi'(0+) = 0, \tag{1}$$

где U — унитарная матрица $N \times N$. Рассмотрим пример, предложенный в [6], который описывает «максимальное вращение» при фиксированном значении импульса, выбранном как $k = 1$, полагая

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где U , очевидно, является унитарной матрицей. В компонентной форме, обозначая для простоты $\psi_j = \psi_j(0+)$ и $\psi'_j = \psi'_j(0+)$, $j = 1, \dots, N$, условие получим в виде

$$(\psi_{j+1} - \psi_j) + i(\psi'_{j+1} + \psi'_j) = 0, \quad j \in \mathbb{Z} \pmod{N}; \tag{2}$$

оно явно неинвариантно относительно обращения времени, представленного комплексным сопряжением. Легко видеть, что для оператора H , соответствующего условию (2), мы имеем $\sigma_{\text{ess}}(H) = [0, \infty)$ и дискретный спектр не пуст для любого $N \geq 3$ и состоит из собственных значений $-\kappa^2$ с $\kappa = \tan(\pi m)/N$, где m принимает значения $1, \dots, [N/2]$ для N нечетного и $1, \dots, [(N - 1)/2]$ для N четного. В частности, H имеет единственное отрицательное собственное значение для $N = 3, 4$, которое равно -1 и -3 соответственно. Нас интересуют транспортные свойства такой вершины. Напомним, что on-shell матрица рассеяния при импульсе k равна

$$S(k) = \frac{k - 1 + (k + 1)U}{k + 1 + (k - 1)U}, \tag{3}$$

в частности, $S(1) = U$. Может показаться, что перенос становится тривиальным при высоких энергиях, однако формальный предел $k \rightarrow \infty$ может привести к неверному выводу, если U имеет -1 среди своих собственных значений. Обозначая $\eta := (1 - k)/(1 + k)$, мы находим [6], что элементы S -матрицы при импульсе k равны

$$S_{ij}(k) = \frac{1 - \eta^2}{1 - \eta^N} \left\{ -\eta \frac{1 - \eta^{N-2}}{1 - \eta^2} \delta_{ij} + (1 - \delta_{ij}) \eta^{(j-i-1) \pmod{N}} \right\}. \tag{4}$$

Это показывает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} S(k) = I$ имеет место, если N нечетно, однако такое соотношение неверно, когда оно четно. Это говорит о том, что высокоэнергетические свойства квантовых графов с вершинной связью (2) зависят от топологии, в частности от четности степеней вершин. Мы собираемся проиллюстрировать это утверждение на нескольких примерах.

2. РЕШЕТОЧНЫЕ ГРАФЫ

Наш первый пример касается графов решеточного типа. Для простоты мы будем иметь дело с равносторонними графами, в которых каждое ребро имеет одинаковую длину $\ell > 0$. Предполагая, что связь одна и та же, заданная условием (2) в каждой вершине, мы имеем периодическую систему, которую можно проанализировать с помощью блоховского разложения [3, гл. 4], записывая гамильтониан в виде $H = \int_{Q^*} H(\theta) d\theta$ с компонентами $H(\theta)$ расслоения, действующими на $L^2(Q)$, где Q — это основная ячейка решетки и Q^* — двойственная ячейка, или зона Бриллюэна. Обратите внимание, что, в отличие от «обычных» периодических систем, спектр может быть не полностью абсолютно непрерывным, поскольку свойство единственного продолжения, в общем случае, на графах не выполняется.

Мы собираемся сравнить две решетки: квадратную и гексагональную, или сотовую. В первом случае элементарная ячейка содержит одну вершину, во втором — пару таких. Найти спектры соответствующих операторов $H(\theta)$ несложно: используется анзац $\psi_j(x) = a_j e^{ikx} + b_j e^{-ikx}$, и эти функции связываются через условия (2) в вершинах и через блоховские факторы $e^{i\theta_m}$, $m = 1, 2$, на ребрах ячейки, где $(1/\ell)\theta_r$ — компоненты квазиимпульса. Затем спектр определяется условиями разрешимости полученной системы линейных уравнений для коэффициентов a_j, b_j . Это упражнение по линейной алгебре, выполненное в [6], дает уравнения

$$16i e^{i(\theta_1 + \theta_2)} k \sin k\ell [(k^2 - 1)(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + 2(k^2 + 1) \cos k\ell] = 0 \quad (5)$$

для квадратной решетки и

$$16i e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} k^2 \sin k\ell [3 + 6k^2 - k^4 + 4d_\theta(k^2 - 1) + (k^2 + 3)^2 \cos 2k\ell] = 0 \quad (6)$$

для сотовой, где $d_\theta := \cos \theta_1 + \cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos \theta_2$ и $(1/\ell)(\theta_1, \theta_2) \in [-\pi/\ell, \pi/\ell]^2$, причем $k > 0$ и $k = i\kappa$ с $\kappa > 0$ для положительных и отрицательных энергий соответственно.

Как указано выше, обе решетки имеют вырожденные зоны: наличие множителя $\sin k\ell$ означает, что условия (5) и (6) имеют решения, независимые от

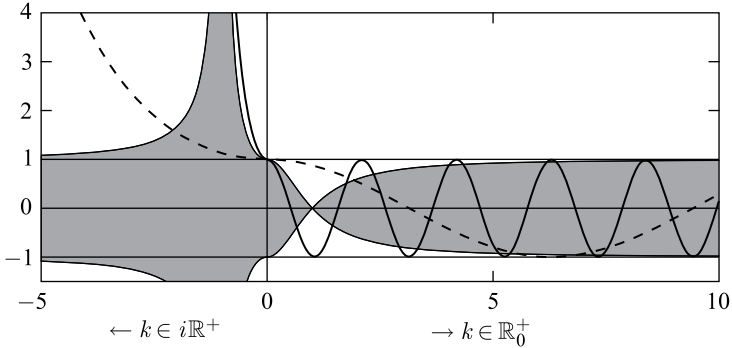


Рис. 1. Графическое решение задачи о спектре квадратной решетки

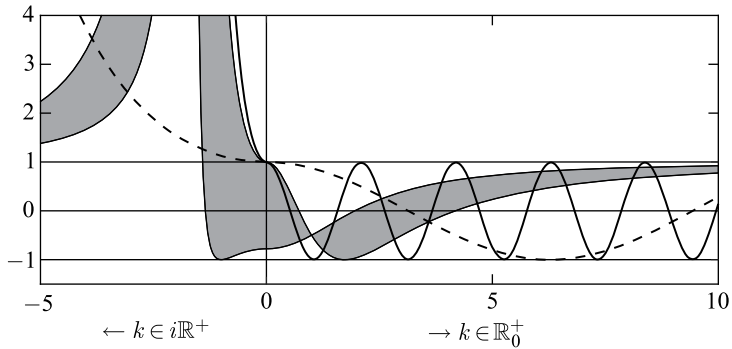


Рис. 2. Графическое решение задачи о спектре гексагональной решетки

θ , и следовательно, соответствующие гамильтонианы имеют бесконечно вырожденные собственные значения. Остальная часть спектра состоит из абсолютно непрерывных зон, относящихся к зануляющимся квадратным скобкам в левых частях уравнений. Чтобы наглядно показать решения графически, перепишем их на соответствующие условия в виде $\cos jkl = f_j(\theta_1, \theta_2; k)$, $j = 1, 2$, с подходящим образом выбранными функциями f_j ; для отрицательной части спектра мы заменяем k на κ , а тригонометрические функции на гиперболические. Указав области значения $f_j(\cdot, \cdot; k)$ в виде серых областей на рис. 1 и 2 соответственно, мы можем определить искомые решения как значения k , или κ , для которого значение $\cos kl$ или, соответственно, $\cosh \kappa l$ находится в этих областях. Конечно, спектр зависит от ℓ . На рис. 1 и 2 показаны два возможных варианта: $\ell = 3/2$, обозначенный сплошной кривой, и $\ell = 1/4$, обозначенный штриховой кривой.

Глядя на две решетки, мы обнаруживаем некоторые сходства. Обе имеют бесконечное число спектральных лакунов, положительные лакуны встречаются

в парах с вырожденной зоной посередине, и при определенных значениях ℓ может случиться так, что одна из зон станет вырожденной. Кроме того, отрицательный спектр не пуст для любого ℓ , одна зона для квадратной решетки и пара из них для сотовой. Они становятся экспоненциально узкими, в пределе $\ell \rightarrow \infty$ сходясь к собственным значениям звездоподобного графа с $N = 4$ и $N = 3$ соответственно. В то же время спектральная картина при высоких энергиях заметно отличается:

- для квадратной решетки зоны доминируют в спектре, а ширины лакун (в энергетической переменной) стремятся к ненулевой константе при увеличении индекса лакуны,

- наоборот, в спектре гексагональных решеток преобладают лакуны и зоны имеют асимптотически постоянную ширину.

Это различие легко понять из того, что мы сказали о транспортных свойствах вершин со связью (2). В квадратной решетке степень вершины равна четырем, и соотношение (4) показывает, что частица, приближающаяся к вершине с высокой энергией, имеет примерно одинаковый шанс покинуть ее во всех четырех направлениях. По-другому дело обстоит в сотовой решетке, где отражение такой быстрой частицы почти запрещено, и частица с большой вероятностью вынуждена оставаться на одном ребре. Поведение отрицательных зон для больших ℓ также легко объяснить, учитывая тот факт, что ребра в данном случае являются классически запрещенными областями и перенос возможен только благодаря туннелированию.

3. ЦЕПОЧКА ПЕТЕЛЬ

Наш следующий пример касается еще более простого класса графов, цепочек петель, каждая из которых имеет длину окружности 2π , как показано на рис. 3. Мы различаем две ситуации: «растянутую» цепь с $\ell > 0$ и «плотную» цепь, в которой соединительные звенья сжимаются до нуля, а соседние кольца связаны через точки соприкосновения; во всех вершинах мы накладываем условие (2). Начнем с плотного случая. Анализ Блоха аналогичен предыдущему примеру, теперь зона Бриллюэна представляет собой отрезок $(-\pi, \pi)$. Спектральное условие имеет форму

$$k^3(k^2 + 1) \sin k\pi (\cos k\pi - \cos \theta) = 0 \quad (7)$$

для положительных энергий и

$$\kappa^3(\kappa^2 - 1) \sinh \kappa\pi (\cosh \kappa\pi - \cos \theta) = 0 \quad (8)$$

для отрицательных. Условия (7) и (8) показывают, что абсолютно непрерывный спектр совпадает с полуосью $[0, \infty)$ и, кроме того, существуют вырожденные зоны, одна с энергией $-\kappa^2 = -1$, и семейство собственных чисел, погруженных в континуум, состоящее из положительных целых.

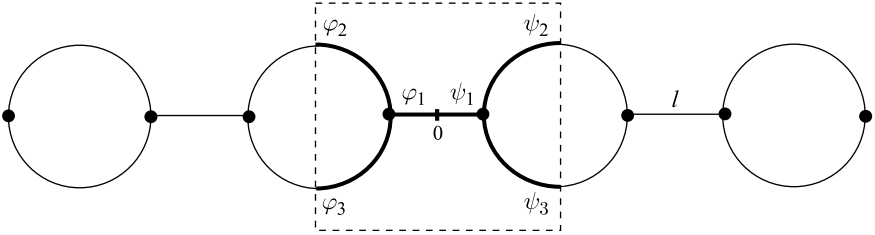


Рис. 3. Цепочка петель с $l > 0$

Спектр растянутых цепочек немного сложнее. Соответствующее спектральное условие в этом случае имеет форму

$$k^5 \sin k\pi ((k^4 + 2k^2 + 5) \sin k\pi \sin k\ell - 4(k^2 + 1)(\cos k\pi \cos k\ell - \cos \theta)) = 0 \quad (9)$$

для положительных энергий и

$$\kappa^5 \sinh \kappa\pi (4(1 - \kappa^2)(\cosh \kappa\pi \cosh \kappa\ell - \cos \theta) + (\kappa^4 - 2\kappa^2 + 5) \sinh \kappa\pi \sinh \kappa\ell) = 0 \quad (10)$$

для отрицательных. Снова легко найти вырожденные зоны, для остальной части спектра анализ идеологически прост, но технически немного трудоемок [7]. Он приводит к следующему результату.

Спектр оператора H_ℓ имеет при фиксированном $\ell > 0$ следующие свойства.

- Любое неотрицательное целое число является собственным значением бесконечной кратности.
- За исключением неотрицательных целых чисел спектр является абсолютно непрерывным, имеющим зонную структуру.
- Отрицательный спектр содержится в $(-\infty, -1)$. Он состоит из одной зоны, если $\ell = \pi$, в противном случае есть пара зон и $-3 \notin \sigma(H_\ell)$.
- Положительный спектр имеет бесконечно много лакун.
- Вероятность принадлежности к (положительному) спектру в смысле определения, приведенного в [8], равна

$$P_\sigma(H_\ell) := \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} |\sigma(H_\ell) \cap [0, K]| = 0 \quad \text{для любого } \ell > 0.$$

Последнее утверждение интересно в свете результатов работы [9]. В ней исследовалось поведение спектра, когда некоторые длины ребер графа стремятся к нулю. Эти выводы применимы и здесь, поэтому спектр оператора

H_ℓ сходится в смысле множеств к спектру H_0 при $\ell \rightarrow 0$, однако мы видим, что сходимость довольно неоднородна, если принять во внимание, что $P_\sigma(H_0) = 1$. Это можно понять, если мы посмотрим на условие (9). При больших энергиях это первый от θ независимый член, который доминирует, поэтому можно ожидать, что спектральные зоны будут узкими, а лакуны широкими. Однако чем меньше будет параметр ℓ , тем позже этот режим наступит.

Что касается отрицательного спектра оператора H_ℓ , верхняя отрицательная зона сжимается до точки -1 в пределе $\ell \rightarrow \infty$, а нижняя «убегает» в $-\infty$, см. подробности в [7, теорема 3].

4. АСИМПТОТИКА ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Наша следующая цель — показать, что четность степени вершины проявляется также в дискретном спектре графов. С этой целью мы рассмотрим несколько простых конечных графов, которые образованы ребрами пяти платоновых тел, предполагая, что длина каждого ребра равна единице. Задача нахождения спектра такого графа может быть снова сведена к линейной алгебре. Проводя анализ наиболее непосредственным способом, мы столкнемся с техническими трудностями. К счастью, задачу можно упростить использованием симметрии рассматриваемых графов, следуя общим предписаниям [10].

В нашем случае отсутствует необходимость использовать полную симметрию каждого из платоновых тел, мы применяем только симметрию вращения вдоль надлежащим образом выбранной оси и разлагаем спектр, используя представления этой группы вращений. Проиллюстрируем это в простейшем случае, относящемся к тетраэдру. Ось вращения определяется «вершиной» пирамиды, обозначенной буквой A , и центром «базового» треугольника. Вращая тетраэдр вокруг этой оси на угол $(2/3)\pi$, волновые функции нужно умножать на $\omega_j = e^{2\pi i j/3}$, $j = 0, 1, 2$, согласно выбору неприводимого представления. Тогда достаточно рассмотреть «компонентный граф», состоящий из ребра от A до «базовой» вершины B и смежного «базового» ребра, замкнутого в петлю, как показано на рис. 4. Условие (2), наложенное на вершину пирамиды, требует $f'_1(0) = 0$ для $j = 0$ и $f'_1(0) = (-1)^j \sqrt{3} f_1(0)$ для $j = 1, 2$. В вершине B , однако, накладывается условие (2) с заменой $f_1(1)$ на $\omega_j f_1(1)$, и то же самое для производных. Таким образом, мы приходим к спектральному условию

$$k \sin^2 \frac{k}{2} \left[k^2 \cos^2 \frac{k}{2} + 3 \cos^2 \frac{k}{2} - 1 \right] = 0 \quad (11)$$

для $j = 0$ и

$$k \sin \frac{k}{2} \left[k \sin \frac{k}{2} - (-1)^j \sqrt{3} \cos \frac{k}{2} \right] \left[k^2 \cos^2 \frac{k}{2} + 3 \cos^2 \frac{k}{2} - 1 \right] = 0 \quad (12)$$

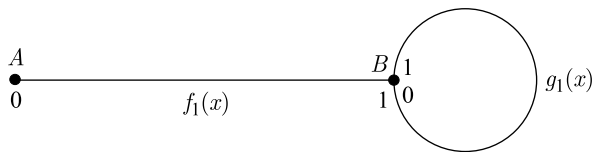


Рис. 4. Граф, являющийся носителем компонентных операторов для тетраэдра

для $j = 1, 2$. Отметим, что $k = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}$, очевидно, является решением. Другие решения не могут быть записаны в явном виде, но при больших значениях k первые члены в квадратных скобках доминируют, и можно ожидать, что решения будут найдены в окрестностях точек, где соответствующие тригонометрические функции обращаются в нуль.

Аналогичным образом можно рассматривать и другие четыре графа. Для куба существует альтернатива, а именно использование его зеркальной симметрии, которая позволяет свести задачу к рассмотрению трехконечной звезды с длиной ребра $1/2$, со связью (2) в вершине и различными комбинациями условий Дирихле и Неймана в конечных точках. Проводя анализ с учетом погрешностей [11], мы приходим к следующему выводу:

Спектр платоновых графов с вершинной связью (2) состоит из точек k^2 таких, что

- k находится в окрестности πn , $n \in \mathbb{N}$, в частности

$$k \in (n\pi - ck^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2}), n\pi + ck^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2})), \quad n \in \mathbb{Z},$$

выполняется, когда $k \rightarrow \infty$, где $c = 2\sqrt{3}$ для тетраэдра, куба и октаэдра, $c \approx 5,51$ для додекаэдра и $c \approx 10,84$ для икосаэдра.

• Для октаэдра приведенное выше утверждение можно уточнить, и, кроме того, имеется дополнительный спектр, в частности, квадратные корни собственных значений составляют $k = 2\pi n$ (с кратностью восемь) и $k = \pm(2/3)\pi + 2\pi n$ (с кратностью два), где $n \in \mathbb{Z}$. Кроме того, существуют квадратные корни из собственных значений, расположенных следующим образом:

$$k \in \left[\pi + 2\pi n - \sqrt{10}k^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2}), \pi + 2\pi n + \sqrt{10}k^{-1} + \mathcal{O}(k^{-2}) \right],$$

$$k \in \left[\frac{\pi}{2} + \pi n - 5k^{-2} + \mathcal{O}(k^{-4}), \frac{\pi}{2} + \pi n + 5k^{-2} + \mathcal{O}(k^{-4}) \right],$$

где $n \in \mathbb{Z}$, когда импульсная переменная $k \rightarrow \infty$.

Этот результат подтверждает наши ожидания. Для четырех платоновых тел с нечетной степенью вершин, три или пять, спектр асимптотически накапливается вокруг собственных значений лапласиана Дирихле на единичном

отрезке. Интервалы сокращаются в импульсной переменной, по отношению к энергии они асимптотически имеют постоянную ширину, а именно $4c$, и в то же время расстояния между этими кластерами собственных значений увеличиваются. Для октаэдра, с другой стороны, существуют дополнительные семейства собственных значений, соответствующие собственным функциям, локализованным преимущественно на более чем одном ребре графа.

Подчеркнем, что это различие действительно связано с конкретными свойствами вершинной связи (2). Чтобы проиллюстрировать этот факт, та же проблема была проанализирована в работе [11] с условием (2), замененным δ -связью. Полученные спектры различны для разных графов, однако ни один из них не состоит исключительно из семейства, асимптотически ведущего себя как спектр лапласиана Дирихле на интервале.

5. ТРАНСПОРТ В ОБЪЕМЕ И НА ГРАНИЦЕ ГРАФА

Вернемся к вопросу о транспорте и отметим, что если бесконечный периодический граф имеет границу, то может случиться, что степени вершин там отличаются от степеней в «объеме» графа, и это может естественно влиять на транспортные свойства. Мы собираемся показать, что это действительно так, сравнивая два типа решеток, из которых в обоих случаях мы вырезали «вертикальную» полосу, как показано на рис. 5.

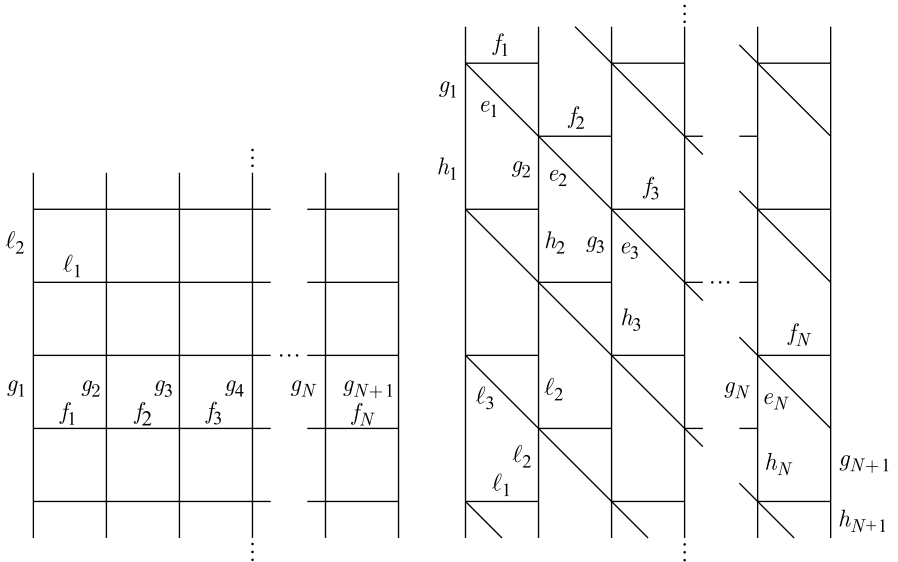


Рис. 5. Граф в форме полосы, вырезанной из прямоугольной «кирпичной» решетки

В первом примере рассматривается прямоугольная решетка с длинами ребер $\ell_j, j = 1, 2$, с нечетной степенью вершин, три, на краях полосы, в то время как те, что внутри полосы, имеют четную степень, четыре. Как и в разд. 2 и 3, спектр соответствующего гамильтониана может иметь точечную компоненту при условии, что $\ell_1/\ell_2 \in \mathbb{Q}$, однако за исключением значений $(\pi/\ell_j)^2, j = 1, 2$, положительный спектр является абсолютно непрерывным, и, исходя из предыдущего опыта, мы ожидаем, что при высоких энергиях соответствующие обобщенные собственные функции будут малы в непосредственной близости от краев.

Во втором примере мы используем другой тип полосы, вырезая ее из «кирпичной» решетки с длинами ребер $\ell_j, j = 1, 2, 3$, в которой только вершины на левом краю полосы имеют четную степень, четыре, а степень всех остальных вершин нечетная, пять. Снова исключая из рассмотрения значения энергии, которые могут привести к собственным значениям, мы ожидаем, что в этом случае обобщенные собственные функции гамильтониана будут при высоких энергиях локализованы в окрестности левого края.

В обоих случаях граф является периодическим в вертикальном направлении, и с помощью блоховского разложения мы сводим задачу к исследованию «одноклеточного слоя» полосы. Мы используем анзац $a e^{ikx} + b e^{-ikx}$ для волновых функций e, f_j, g_j, h_j с соответствующими коэффициентами на ребрах графов, налагая условие (2) на вершины и учитывая множитель $e^{i\theta}$, относящийся к значениям функций (и производных) на верхнем и нижнем краях такого слоя. Используя простую оценку решений соответствующей алгебраической задачи, мы приходим к следующему выводу [12].

Транспорт в графах на рис. 5 имеет следующие свойства.

- В квадратной решетке для фиксированного $K \in (0, 1/2\pi)$ рассмотрим импульсы $k > 0$ такие, что $k \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} ((n\pi - K)/\ell_2, (n\pi + K)/\ell_2)$. Если предположить, что сужение обобщенной собственной функции, соответствующей энергии k^2 , на одноклеточный слой нормировано, то ее компоненты на крайнем левом и правом вертикальном краях имеют порядок $\mathcal{O}(k^{-1})$ при $k \rightarrow \infty$.

- В «кирпичной» решетке для фиксированного $K \in (0, 1/2\pi)$ рассмотрим такие импульсы $k > 0$, что

$$k \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{n\pi - K}{\ell_1}, \frac{n\pi + K}{\ell_1} \right) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{n\pi - K}{\ell_2}, \frac{n\pi + K}{\ell_2} \right) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{n\pi - K}{\ell_3}, \frac{n\pi + K}{\ell_3} \right).$$

Предполагая ту же нормировку, что и выше, и обозначая через $q_j^{(m)}$, $m = 1, \dots, 8$, коэффициенты компонент волновой функции (как линейной комби-

нации экспоненциальных функций) для ребер, направленных вниз и вправо из вершин j -й вертикальной линии, мы имеем $q_j^{(m)} = \mathcal{O}(k^{1-j})$, когда $k \rightarrow \infty$.

Проще говоря, этот результат подтверждает нашу гипотезу. За исключением энергий из указанных узких интервалов, вертикальный перенос в первом случае подавлен на краях полосы, в то время как во втором случае его основной вклад поступает от левого края, и он подавлен в сторону объема; в работе [12] также можно найти численные примеры, иллюстрирующие эти утверждения. Следует также подчеркнуть, что, несмотря на сходство, второй граф не является топологическим изолятором в обычном смысле [13], поскольку транспорт вдоль ребер не является топологически защищенным. Чтобы это увидеть, нужно вычислить ток вероятности, который для волновой функции $a e^{ikx} + b e^{-ikx}$ на ребре графа равен $|a|^2 - |b|^2$; на примерах, подобных тому, который был проанализирован в [12], можно проверить, что эта величина меняет знак, когда квазиимпульс θ пробегает зону Бриллюэна.

6. ДРУГИЕ СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Описанные выше результаты далеко не исчерпывают список интересных вопросов, связанных с нарушениями симметрии по отношению к обращению времени в квантовых графах. Не вдаваясь в подробности, мы кратко назовем еще несколько.

- Условие связи (2) — не единственный способ нарушить временную симметрию. Его довольно простая модификация состоит в том, чтобы изменить шкалу длины, предполагая, что $(\psi_{j+1} - \psi_j) + i\ell(\psi'_{j+1} + \psi'_j) = 0$ для $j \in \mathbb{Z} \pmod{N}$ и некоторого $\ell > 0$. Это не важно в обсуждениях разд. 2, но это уже повлияет на результаты разд. 3, где масштаб длины задается фиксированным периметром кольца. Более общий способ сопоставления волновых функций представлен интерполяцией между (2) и δ -связью, обсуждаемой в [14], но это все еще небольшое подмножество среди всех самосопряженных связей, инвариантных по отношению к обращению времени.

- В отличие от примера из разд. 3 спектр периодического графа может быть нетривиальным, даже если $P_\sigma(H) = 1$. Недавно было обнаружено, что квантовые графы могут обладать свойством, связанным с гипотезой Бете–Зоммерфельда, т. е. их спектр может иметь ненулевое, но конечное число открытых лакун [15]. Утверждение о существовании было продемонстрировано с помощью графов с δ -связью определенной силы. И естественно возникает вопрос: разрушит ли асимметрия времени это свойство?

- В конечных графах без симметрий, например, с несоизмеримыми ребрами, распределение собственных значений представляет интерес, в частности, с точки зрения квантового хаоса. Из настоящего обсуждения очевидно, что замена условия Кирхгофа в вершинах асимметричного графа тетраэдра,

изученного в [16], на условие (2) изменит распределение. Более тонкий вопрос касается статистики собственных значений в графах с вершинами четных степеней.

Благодарности. Работа частично поддержана Европейским Союзом в рамках проекта CZ.02.1.01/0.0/0.0/16 019/0000778. Автор благодарен Владимиру Лоторейчику за помощь с набором русской версии этой статьи и анонимному рецензенту за очень тщательный просмотр текста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nagaosa N., Sinova J., Onoda A., MacDonald A.H., Ong N.P.* Anomalous Hall Effect // *Rev. Mod. Phys.* 2018. V. 82. P. 1539–1593; arXiv:0904.4154 [cond-mat].
2. *Středa P., Kučera J.* Orbital Momentum and Topological Phase Transformation // *Phys. Rev. B.* 2015. V. 92, No. 23. P. 235152.
3. *Berkolaiko G., Kuchment P.* Introduction to Quantum Graphs. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2013.
4. *Exner P.* Lattice Kronig–Penney Models // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74, No. 18. P. 3503–3506.
5. *Kostrykin V., Schrader R.* Kirchhoff’s Rule for Quantum Wires // *J. Phys. A: Math. Gen.* 1999. V. 32, No. 4. P. 595–630; arXiv:math-ph/9806013.
6. *Exner P., Tater M.* Quantum Graphs with Vertices of a Preferred Orientation // *Phys. Lett. A.* 2018. V. 382, No. 5. P. 283–287; arXiv:1710.02664 [math-ph].
7. *Baradaran M., Exner P., Tater M.* Ring Chains with Vertex Coupling of a Preferred Orientation // *Rev. Math. Phys.* 2020. V. 32 (in press); arXiv:1912.03667 [math.SP].
8. *Band R., Berkolaiko G.* Universality of the Momentum Band Density of Periodic Networks // *Phys. Rev. Lett.* 2013. V. 113, No. 13. P. 130404; arXiv:1304.6028 [math-ph].
9. *Berkolaiko G., Latushkin Y., Sukhtaiev S.* Limits of Quantum Graph Operators with Shrinking Edges // *Adv. Math.* 2019. V. 352. P. 632–669; arXiv:1806.00561 [math.SP].
10. *Band R., Berkolaiko G., Joyner C.H., Liu W.* Quotients of Finite-Dimensional Operators by Symmetry Representations. arXiv:1711.00918 [math-ph]. 2017.
11. *Exner P., Lipovský J.* Spectral Asymptotics of the Laplacian on Platonic Solids Graphs // *J. Math. Phys.* 2019. V. 60, No. 12. P. 122101; arXiv:1906.09091 [math.SP].
12. *Exner P., Lipovský J.* Topological Bulk-Edge Effects in Quantum Graph Transport // *Phys. Lett. A.* 2020. V. 384, No. 18. P. 126390; arXiv:2001.10735 [math-ph].
13. *Hasan M.Z., Kane C.L.* Topological Insulators // *Phys. Lett. A.* 2010. V. 82, No. 4. P. 3045–3067; arXiv:1002.3895 [cond-mat.mes-hall].
14. *Exner P., Turek O., Tater M.* Quantum Graphs with Vertices of a Preferred Orientation // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2018. V. 51, No. 28. P. 285301; arXiv:1804.01414 [math-ph].
15. *Exner P., Turek O.* Periodic Quantum Graphs from the Bethe–Sommerfeld Perspective // *J. Phys. A: Math. Theor.* 2017. V. 50, No. 45. P. 455201; arXiv:1705.07306 [math-ph].
16. *Kottos T., Smilansky U.* Quantum Chaos on Graphs // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 79, No. 24. P. 4794–4797.