

## АСПЕКТЫ РАССЕЯНИЯ НА НЕСФЕРИЧЕСКОМ ПОТЕНЦИАЛЕ

*П. М. Красовицкий*<sup>1,2,\*</sup>, *Ф. М. Пеньков*<sup>1,3</sup>

<sup>1</sup> Институт ядерной физики, Алма-Ата, Казахстан

<sup>2</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>3</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата, Казахстан

Создана модель решения задачи рассеяния на аксиально-симметричном потенциале. На ее основе проведено исследование взаимодействия изотопа  $^{238}\text{U}$  с нейтроном. Акцент сделан на корректном учете несферической формы ядра урана. В качестве модели использован оптический потенциал. Показано, что в данном случае сферически-симметричный и несферический потенциалы дают различные картины рассеяния, в частности различные резонансные особенности сечения.

The model of the calculation of the scattering problem on axial symmetrical potential has been developed. The interaction of  $^{238}\text{U}$  and a neutron has been realized. The correct including of non-spherical form of the uranium nuclei has been accented. The optical potential has been used as the model. It has been shown that spherical symmetrical and non-spherical potentials give different pictures of scattering, and, particularly, different resonance features of scattering.

PACS: 25.40.Dn; 24.10.Ht

В ядерной физике одно из направлений развития можно условно назвать экстенсивным. Прогресс в использовании численных методов приводит к необходимости наиболее полного включения всех возможных аспектов ядерных взаимодействий, в принципе, уже известных. Сравнительно недавно в программные пакеты, позволяющие рассчитывать ядерные реакции, наряду с другими необходимыми компонентами были включены возможные формы учета несферичной формы взаимодействия ядер [1, 2]. В первой работе расчет взаимодействия строится на использовании приближения TDHF [3], во второй — на расчете классических траекторий.

С одной стороны, в рабочие программы включен эффект несферичности, с другой стороны, расчет взаимодействия строится на приближенных, иногда даже не квантово-механических, схемах. В настоящем

---

\* E-mail: pavel.kras76@gmail.com

исследовании рассматриваются новые эффекты, возникающие при рассеянии на несферичном потенциале в рамках квантовой механики.

В качестве примера выбрана одна из широко используемых реакций ядерной энергетики — взаимодействие нейтрона с ядром  $^{238}\text{U}$ . Взаимодействие описывается с помощью одного из наиболее популярных простых потенциалов — оптического.

## 1. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛА С АКСИАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим уравнение Шредингера для потенциала, обладающего аксиальной симметрией, т. е. при определенном выборе системы координат, и не зависящего от полярного угла в сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ ,  $V = V(r, \theta)$ . В частности, таким уравнением может быть описано взаимодействие нейтрона с тяжелым ядром при нулевом параметре столкновения.

Уравнение Шредингера  $(H_0 + V - E)\Psi(\mathbf{r}) = 0$  для волновой функции  $\Psi$  в аксиально-симметричном потенциале записывается для рассеянной волны  $X(\mathbf{r})$ ,  $\Psi = e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} + X(\mathbf{r})$ , в следующем виде:

$$(H_0 + V - E)X(\mathbf{r}) = -V e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})}, \quad (1)$$

где  $H_0$  — оператор Гамильтона свободного движения;  $\mathbf{k}$  — волновой вектор, соответствующий падающей плоской волне;  $E = 2\mu k^2$  — энергия;  $\mu$  — приведенная масса в единицах, соответствующих  $\hbar = 1$ . Систему координат повернем так, чтобы потенциал не зависел от угла  $\varphi$ , и для определенности примем, что волновой вектор падающей волны лежит в полуплоскости  $\varphi = 0$ , составляя с осью  $\theta = 0$  угол  $\theta'$ . Решение уравнения (1) может быть записано в виде разложения по ортогональным волновым функциям третьей компоненты оператора углового момента:

$$\Psi = \sum_{m'} \frac{\psi_{m'}(r, \theta) e^{im'\varphi}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( e^{ikr \cos \theta'} + \sum_{m'} \chi_{m'} e^{im'\varphi} \right).$$

Подставляя это разложение в исходное уравнение, умножая обе стороны на  $e^{-im\varphi}/\sqrt{2\pi}$  и интегрируя по углу  $\varphi$ , получаем набор уравнений

$$\left[ H_{0,r\theta} + \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} + V(r, \theta) - E \right] \chi_m = -V(r, \theta) F(r, \theta, \theta', m), \quad (2)$$

где  $F(r, \theta, \theta', m) = 1/(2\pi) \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos \tilde{\theta}(\theta, \theta', \varphi)} e^{-im\varphi} d\varphi$ ;  $H_{0,r\theta}$  — оператор Гамильтона, соответствующий свободному движению в двумерном пространстве полуплоскости с фиксированным углом  $\varphi = \text{const}$ ;  $\tilde{\theta}(\theta, \theta', \varphi)$  — угол между волновым вектором и радиус-вектором  $r$ , являющийся функцией всех углов задачи.

Функция  $F$  выражается через функцию Бесселя 1-го рода. В выбранной системе координат

$$F(r, \theta, \theta', m) = \exp\left(ikr \cos \theta \cos \theta' + \frac{\pi}{2}m\right) J_m(kr \sin \theta \sin \theta').$$

## 2. ЧИСЛЕННО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для решения поставленной задачи используем численную схему решения двумерных дифференциальных уравнений в задаче рассеяния. Считаем потенциал взаимодействия ядра с нейтроном аксиально-симметричным, т. е. пренебрегаем сложными эффектами триаксиальной деформации. Кроме того, для простоты пренебрегаем высшими параметрами деформации, кроме первого —  $\beta_2$ . В этом приближении можно считать, что форме ядра соответствует эллипсоид вращения с соотношением между большой и малой полуосями  $(a - b)/R_0 = 1,06\beta_2$ , где  $R_0$  — радиус ядра [4]. Для изотопа урана с массой 238 авторы некоторых работ (см. [5] и цитируемые в ней работы) считают знак деформации положительным.

В данной работе используются две модели: эллипсоид вращения вокруг большой полуоси и вокруг малой полуоси эллипса (внутренний квадрупольный момент или знак деформации больше нуля и меньше нуля соответственно).

За основу взят оптический потенциал, названный авторами глобальным и показавший хорошее соответствие расчетов с экспериментальными данными [6]. В указанной работе используется потенциал Вудса–Саксона с зависящей от энергии глубиной, ширина потенциальной ямы для ядра  $^{238}\text{U}$  постоянна. Для настоящей работы параметр ширины является переменной, зависящей от полярного угла, функция зависимости — эллипс. Параметры данного эллипса рассчитаны таким образом, чтобы объем построенного на его основе эллипсоида вращения был равен объему шара с радиусом, определяемым согласно стандартной формуле из радиуса  $R_0 = r_0 A^{1/3}$  с параметром  $r_0$  из работы [6].

Решение двумерного уравнения Шредингера (2) производится численно методом конечных элементов, матричной прогонкой. Результатом решения является амплитуда рассеяния  $f(\theta, \varphi)$  на расстояниях, где справедлива асимптотика:

$$\Psi(\mathbf{r}) = e^{ikr \cos \bar{\theta}} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (3)$$

Для решения была модифицирована программа двумерного рассеяния, использованная для расчета резонансной дифракции молекул, а также предварительных расчетов рассеяния на несферическом ядре. Вид функции (3) является одним из условий (3-го рода) краевой задачи Коши на границе  $r = r_{\max}$ . Другими условиями являются свойства четности функции  $F(r, \theta, \theta', m)$  на границах  $\theta = 0, \pi$ , а также использование стандарт-

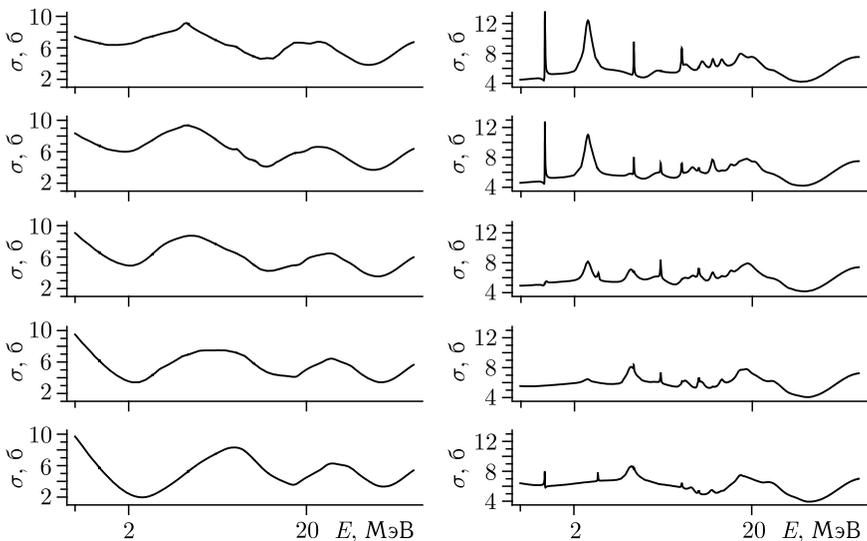


Рис. 1. Результаты расчета рассеяния на несферическом потенциале при разных углах  $\theta'$ . Начиная с левого нижнего графика вверх, далее от правого нижнего графика вверх угол  $\theta'$  меняется от  $\pi/20$  до  $\pi/2$  с шагом  $\pi/20$

ной замены  $X(\mathbf{r}) = \widetilde{X}(\mathbf{r})/r$ . С этой заменой на границе  $r = 0$  функция равна нулю. Основные подробности можно найти в работах [7, 8].

Отдельные решения находятся для различных углов  $\theta'$ . Образец таких расчетов приведен на рис. 1.

Для каждого угла справедлива оптическая теорема, в данном случае имеющая вид

$$\sigma_{\theta'} = \int |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = \text{Im } f(\theta = \theta', \varphi = 0),$$

где  $\sigma_{\theta'}$  — сечение рассеяния. Ее выполнение является критерием точности расчетов.

Сечение рассеяния нейтрона на ядре определяется усреднением по углам  $\theta'$ :

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sigma_{\theta'} \sin \theta' d\theta' \approx \sum C_j \sigma_{\theta'_j} \sin \theta'_j \Delta\theta',$$

где  $C_j$  — поправка для численного интегрирования при используемом методе Симпсона в данном случае равна  $2/3$  для четных и  $1/3$  для нечетных  $j$ .

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

На рис. 2 приведены результаты расчета сечения для рассеяния нейтрона на  $^{238}\text{U}$ .

Приведены две модели: сферически-симметричного и аксиально-симметричного потенциала. Для второго случая предполагается положительный знак деформации, форма ядра — вытянутый эллипсоид вращения. Описание сечения для обоих потенциалов не совпадает с экспериментальными данными.

Для сферически-симметричного потенциала это объясняется тем, что в расчет не включена мнимая часть потенциала, а также спин-орбитальное взаимодействие. Однако обе модели примерно одинаково отличаются от «правильного» в исследуемом диапазоне. Возникающие резонансы объясняются в основном вкладом в усреднение рассеяния при больших углах.

На рис. 3 приведены результаты расчетов рассеяния на аксиально-симметричном потенциале с разными знаками деформации. Предполагается возможность описания деформированного ядра с указанными ранее параметрами, а также и в виде сплюснутого эллипсоида вращения.

Обращают на себя внимание резонансы, возникающие из-за существования аналога центрбежного барьера в случае аксиальной

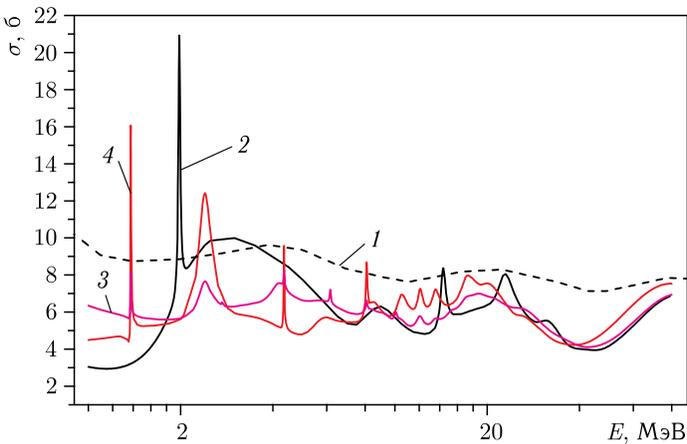


Рис. 2. Результаты расчетов сечения для рассеяния нейтрона на  $^{238}\text{U}$  в сферически-симметричном и аксиально-симметричном потенциалах: 1 — исходный расчет из [6] со сдвигом вверх на 5 б, основанный на оптическом потенциале; 2 — расчет в сферически-симметричном потенциале только с реальной его частью; 3 — усредненный расчет с реальной частью в аксиально-симметричном потенциале; 4 — расчет в аксиально-симметричном потенциале при  $\theta' = \pi/2$

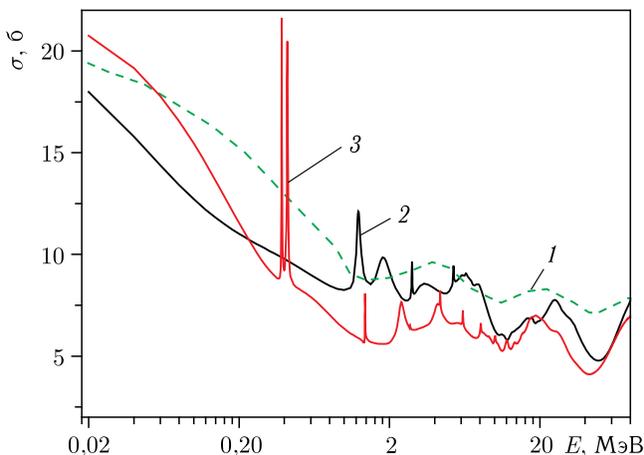


Рис. 3. Результаты расчетов для разных знаков  $\beta_2$ : 1 — данные исходного расчета из [6], основанного на оптическом потенциале, совпадающие с экспериментальными данными (аналогично линии 1 рис. 2); 2 — расчет на аксиально-симметричном потенциале для  $\beta_2 > 0$ ; 3 — для  $\beta_2 < 0$

симметрии:

$$\frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta}.$$

Этот барьер имеет более сложную форму, отличную от центробежного барьера, для сферически-симметричного случая. Поэтому квазисвязанные состояния существенно различаются, особенно для разных моделей аксиальной симметрии.

В сечении рассеяния нейтрона на  $^{238}\text{U}$  резонансы неупругого рассеяния находятся выше по энергии. Однако применяемая модель, рассчитываемая для  $^{238}\text{U}$ , достаточно хорошо соответствует также  $^{235}\text{U}$ . Незначительное различие в массе влияет только на глубину потенциала (поправка  $\sim 5\%$ ) и ширину (меньше  $1\%$ ). Для  $^{235}\text{U}$  резонансы подходят достаточно хорошо.

Часть расчетов была выполнена на кластере HybriLIT (ОИЯИ, Дубна).

Работа частично профинансирована за счет гранта полномочного представителя правительства Республики Казахстан в ОИЯИ (№ 391 от 20.07.2020 г.).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Umar A. S., Oberacker V. E. Time-Dependent Hartree–Fock Fusion Calculations for Spherical Deformed Systems // Phys. Rev. C. 2006. V. 74, No. 2. P. 024606.
2. Saiko V. V., Karpov A. V. Analysis of Multinucleon Transfer Reactions with Spherical and Statically Deformed Nuclei Using a Langevin-Type Approach // Phys. Rev. C. 2019. V. 99. P. 014613.

3. *Maruhn J. A., Reinhard P.-G., Stevenson P. D., Umar A. S.* The TDHF Code Sky3D // *Comp. Phys. Commun.* 2014. V. 185. P. 2195–2216.
4. *Немец О. Ф., Гофман Ю. В.* Справочник по ядерной физике. Киев: Наук. думка, 1975. 416 с.
5. *Юшков А. В.* Поверхность  $\beta(Z, N)$  ядерной деформации для ядер с  $Z = 2-102$  // *ЭЧАЯ*. 1993. Т. 24, вып. 2. С. 348.
6. *Yinlu Han, Yongli Xu, Haiying Liang, Hairui Guo, Qingbiao Shen.* Global Phenomenological Optical Model Potential for Nucleon–Actinide Reactions at Energies up to 300 MeV // *Phys. Rev. C*. 2010. V. 81. P. 024616.
7. *Красовицкий П. М., Пеньков Ф. М.* Определение амплитуды рассеяния в ограниченной области расчетов // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2019. Т. 83. С. 469.
8. *Красовицкий П. М., Пеньков Ф. М.* Асимптотическое поведение решений в конечно-разностных схемах // *Изв. РАН. Сер. физ.* 2018. Т. 82. С. 1.