

# ГЛАУБЕРОВСКАЯ МОНТЕ-КАРЛОВСКАЯ МОДЕЛЬ НА ПАРТОННОМ УРОВНЕ ДЛЯ $pp$ -СТОЛКНОВЕНИЙ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЭНЕРГИЙ

*В. П. Михайловский\*, В. Н. Коваленко*

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Предложена монте-карловская глауберовская модель для  $pp$ -столкновений на партонном уровне. Рассмотрены несколько вариантов пространственного распределения партонов в протоне. Продемонстрировано, что модель позволяет описать полное, неупругое и упругое сечения рассеяния, а также наклон дифракционного конуса в широком диапазоне энергий (от SPS до LHC). Из требований лоренц-инвариантности получен явный вид зависимости числа исходных партонов от энергии столкновений.

A Monte Carlo Glauber model for  $pp$  collisions at the partonic level has been proposed. Several spatial distributions of partons in protons were considered. It was shown that the model allows one to describe total, inelastic, and elastic cross section, as well as the diffraction cone slope in a wide energy range (from SPS to LHC). Using the Lorentz-invariance requirement, the explicit form of the dependence of the number of initial partons on the collision energy is obtained.

PACS: 14.20.Dh; 25.40.Ep

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время эксперименты по изучению рассеяния адронов и ядер при высоких энергиях проводятся на различных установках, в том числе на LHC и SPS (ЦЕРН) и RHIC (BNL). Из-за особенностей сильного взаимодействия построение полной модели столкновений адронов из первых принципов теории КХД является довольно сложной задачей. Поэтому на основе имеющихся экспериментальных данных разрабатываются различные эмпирические модели.

Основной моделью для описания взаимодействий с участием адронов и ядер является модель Глаубера [1, 2]. Изначально она сформулирована из квантово-механической теории рассеяния для сложных систем [1]. К релятивистским столкновениям ядер модель Глаубера применяется для

---

\* E-mail: vlad.mikhailovsky@gmail.com

описания геометрии сталкивающихся систем [2, 3]. В ней налетающие ядра рассматриваются как распределения нуклонов, каждый из которых движется по линейной траектории и испытывает независимые столкновения. С помощью модели Глаубера в релятивистских ядерных столкновениях осуществляется привязка экспериментальных распределений наблюдаемых величин, таких как множественность, поперечная энергия, сигнал калориметров нуля, к геометрическим параметрам: прицельному параметру, числу нуклонов участников, числу нуклон-нуклонных столкновений.

Для более детального описания особенностей ядерного взаимодействия эта модель все чаще используется на партонном уровне [4–6]. В большинстве работ главный акцент делается на столкновениях с участием тяжелых ионов, тогда как  $pp$ -взаимодействию уделяется недостаточно внимания. Однако, прежде чем переходить к описанию ядерно-ядерных столкновений, необходимо убедиться в том, что используемый подход адекватно описывает основные характеристики  $pp$ -рассеяния. В связи с этим работа посвящена систематическому исследованию  $pp$ -столкновений в широком диапазоне энергий на партонном уровне.

## 1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

**1.1. Рассматриваемые наблюдаемые величины.** В данной работе рассматриваются такие базовые характеристики  $pp$ -взаимодействия, как неупругое  $\sigma_{inel}$ , упругое  $\sigma_{el}$ , полное сечение рассеяния  $\sigma_{tot}$ , а также наклон дифракционного конуса  $B$ . Эти величины можно выразить через профильную функцию  $\sigma(b)$ , имеющую смысл вероятности взаимодействия двух протонов при прицельном параметре  $b$  [7]:

$$\sigma_{inel} = \int_0^{\infty} 2\pi b \sigma(b) db, \quad (1)$$

$$\sigma_{tot} = \int_0^{\infty} 4\pi b (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db, \quad (2)$$

$$\sigma_{el} = \sigma_{tot} - \sigma_{inel}, \quad (3)$$

$$B = \frac{\frac{1}{2} \int_0^{\infty} b^3 (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db}{\int_0^{\infty} b (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db}. \quad (4)$$

Формулы (1)–(4) справедливы в предположении, что амплитуда  $pp$ -взаимодействия чисто мнимая. На практике отношение вещественной

к мнимой части амплитуды не превышает 10% [8], что позволяет использовать данное приближение.

**1.2. Распределения партонов в протонах.** Для монте-карловской реализации модели Глаубера на партонном уровне необходимо задать вид плотности распределения партонов. Нами рассматриваются три варианта распределения: гауссово, экспоненциальное и модели однородного шара:

$$\rho_{\text{Gauss}}(r) \sim \rho_0 \exp\left(\frac{-1,5r^2}{R^2}\right), \quad (5)$$

$$\rho_{\text{exp}}(r) \sim \rho_0 \exp\left(\frac{-2\sqrt{3}r}{R}\right), \quad (6)$$

$$\rho_{\text{United ball}}(r) \sim \begin{cases} 0, & \text{если } r > \sqrt{\frac{5}{3}}R, \\ \rho_0, & \text{если } r < \sqrt{\frac{5}{3}}R. \end{cases} \quad (7)$$

Числовые константы в формулах (5)–(7) выбирались так, чтобы для всех трех случаев параметр  $R$  являлся среднеквадратичным радиусом протона. Мы использовали значение  $R = 0,831$  фм [9], а партонное сечение выбрали равным  $\sigma_{\text{parton}} = 3,3$  мб [10].

**1.3. Монте-карловский алгоритм.** Моделирование процесса  $pp$ -столкновений начинается с генерации координат  $r_{A_1}$ ,  $r_{A_2}$  центров протонов в плоскости прицельного параметра с равномерным распределением в квадрате или круге площадью  $L^2$  или  $\pi L^2$ , причем величина  $L$  выбирается много больше, чем характерный радиус взаимодействия протонов, так чтобы при ее дальнейшем увеличении результаты от нее не зависели.

В каждой модели фиксируется прицельный параметр  $b$  и число партонов  $A_1$  и  $A_2$  в каждом протоне. На первом этапе генерируются пространственные координаты партонов согласно заданным распределениям. Далее определяются партоны-участники, т. е. партоны снаряда и мишени, оказавшиеся на расстоянии взаимодействия друг от друга. Если есть хотя бы одна пара провзаимодействовавших партонов, то считается, что имеется неупругое событие. Накапливается статистика по вероятности неупругого взаимодействия и, таким образом, вычисляется  $\sigma(b)$ . Затем по  $\sigma(b)$  вычисляются сечения и наклон дифракционного конуса.

Для расчета величины  $\sigma(b)$ , в зависимости от прицельного параметра, моделирования осуществлялись при фиксированном параметре в области от 0 до 20 фм с шагом 0,1 фм. При каждом значении прицельного параметра генерировались  $N_{\text{sim}} = 10^5$  моделей. Далее из  $\sigma(b)$  наблю-

даемые величины вычислялись по формулам (11)–(14). Статистическая погрешность и погрешность в связи с конечным шагом для  $\sigma(b)$  не превышают 5%.

## 2. НЕСИММЕТРИЧНЫЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

**2.1. Энергия несимметричного столкновения.** Рассмотрим энергии протона-мишени  $E_1$  и протона-снаряда  $E_2$ , движущихся вдоль оси  $z$ . Для симметричного случая энергия столкновения  $\sqrt{s} = E_1 + E_2 = 2E_1 = 2E_2$ , но в несимметричном случае просто как сумму их не представить. Поэтому перейдем к другой величине — быстроте:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E + p_z}{E - p_z} \right) = \ln \left( \frac{E + p_z}{M_T} \right). \quad (8)$$

Для протонного пучка поперечный импульс равен нулю, следовательно, знаменатель в формуле (8) равен массе протона:  $M_T = m_p$ . Общая быстрота  $Y = y_1 - y_2$  (минус стоит из-за того, что векторы импульсов направлены в противоположные стороны вдоль оси  $z$ ):

$$y_1 = \ln \left( \frac{E_1 + p_{1z}}{m_p} \right) = \ln \left( \frac{2E_1}{m_p} \right), \quad (9)$$

$$-y_2 = \ln \left( \frac{2E_2}{m_p} \right). \quad (10)$$

$$\text{Тогда } Y = \ln \left( \frac{2E_1}{m_p} \right) + \ln \left( \frac{2E_2}{m_p} \right) = \ln \left( \frac{\sqrt{s_{A_1 A_1}}}{m_p} \right) + \ln \left( \frac{\sqrt{s_{A_2 A_2}}}{m_p} \right).$$

Здесь  $\sqrt{s_{A_1 A_1}}$  и  $\sqrt{s_{A_2 A_2}}$  — это энергии симметричных столкновений с числом партонов в протонах  $A_1, B_1$  и  $A_2, B_2$ . Соответственно,  $\sqrt{s_{A_1 A_2}}$  — энергия столкновений, где в одном протоне  $A$ , а во втором  $B$  партонов.

В системе центра масс

$$y_1 = \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right) = -y_2. \quad (11)$$

Тогда

$$Y = 2 \ln \left( \frac{\sqrt{s}}{m_p} \right) \quad (12)$$

(или  $\sqrt{s} = \exp(Y/2)m_p$ ). В таком случае для несимметричного сечения

$$\begin{aligned} \sqrt{s_{A_1 A_2}} = \exp \left( \frac{Y}{2} \right) m_p = \exp \left( \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{\sqrt{s_{A_1 A_1}}}{m_p} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \ln \left( \frac{\sqrt{s_{A_2 A_2}}}{m_p} \right) \right) \right) m_p = (s_{A_1 A_1} \cdot s_{A_2 A_2})^{1/4}. \quad (13) \end{aligned}$$

**2.2. Зависимость неупругого сечения от числа партонов.** Найдем общий вид  $\sigma_{inel}(A_1, A_2)$  при условии выполнения лоренц-инвариантности. Из общих соображений следует, что неупругое сечение должно расти с ростом  $A_1$  и  $A_2$ , быть симметричным относительно них и при  $A_1 + A_2 = \text{const}$  иметь максимум в случае  $A_1 = A_2$ . То есть в формулу  $A_1$  и  $A_2$  должно входить произведение, а не сумма. Данное предположение подтверждают явные расчеты (рис. 1).

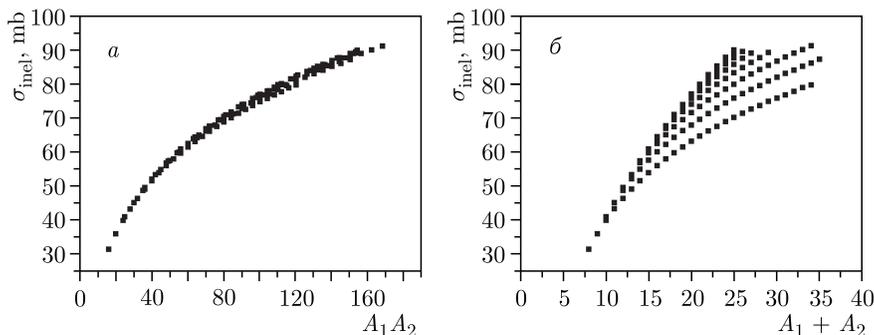


Рис. 1. Зависимость неупругого сечения от разных комбинаций числа партонов в двух протонах: а) от произведения; б) от суммы

В качестве аппроксимирующей функции можно выбрать

$$\sigma_{inel} = 10,9(A_1 A_2)^{0,42} \text{ мб} \quad (14)$$

или

$$\sigma_{inel} = (-76,53 + 32,29 \ln(A_1 A_2 + 12,84)) \text{ мб}. \quad (15)$$

**2.3. Связь между энергией столкновения, упругим сечением и числом партонов.** При помощи генератора случайных событий были получены неупругое, полное и упругое сечения рассеяния, а также наклон дифракционного конуса в зависимости от числа партонов в протонах. В статье [10] приведены экспериментальные данные зависимости сечений от энергии (рис. 2).

Совокупность экспериментальных данных можно аппроксимировать следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{el} &= 11,4 - 1,52 \ln s + 0,130 \ln^2 s, \\ \sigma_{inel} &= 30,915 - 0,937 \ln s + 0,188 \ln^2 s, \\ \sigma_{tot} &= \sigma_{inel} + \sigma_{el} \end{aligned}$$

и аналогично для наклона дифракционного конуса [12, 13]

$$B = 0,00477 \ln^3 s - 0,13706 \ln^2 s + 1,76793 \ln s + 5,26921.$$

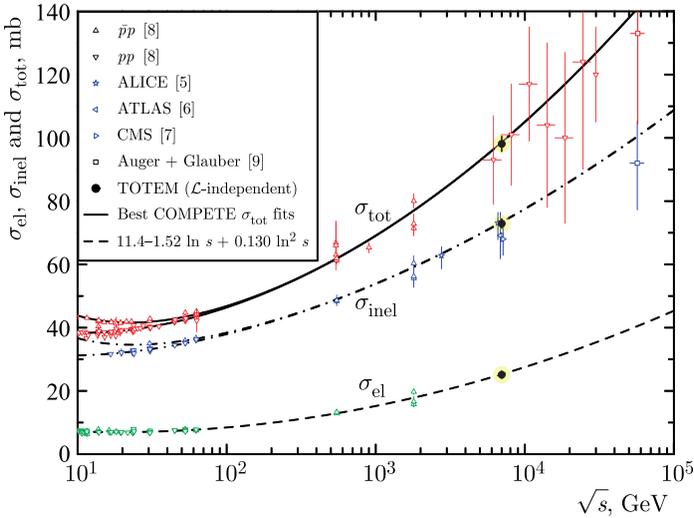


Рис. 2. Совокупность экспериментальных данных по зависимости сечений от энергии [10]

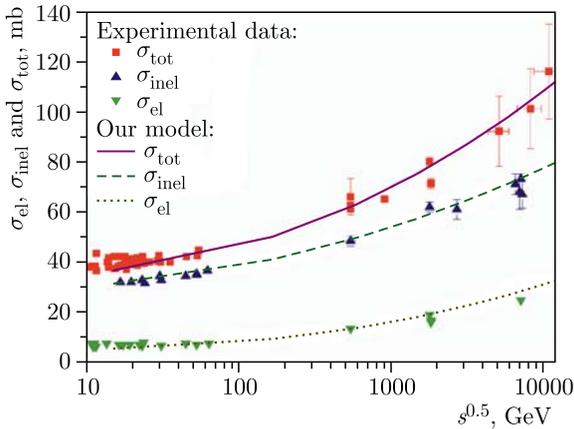


Рис. 3. Сравнение с экспериментальными данными [10] зависимости сечений от энергии для экспоненциального распределения

Будем фиксировать параметры модели по неупругому сечению, так как экспериментальные данные для этой величины являются наиболее точными, а сравнивать предсказания модели будем с данными только по упругому и полному сечениям, а также по наклону дифракционного конуса. Сравнение расчетов модели с экспериментальными данными показано на рис. 3–8.

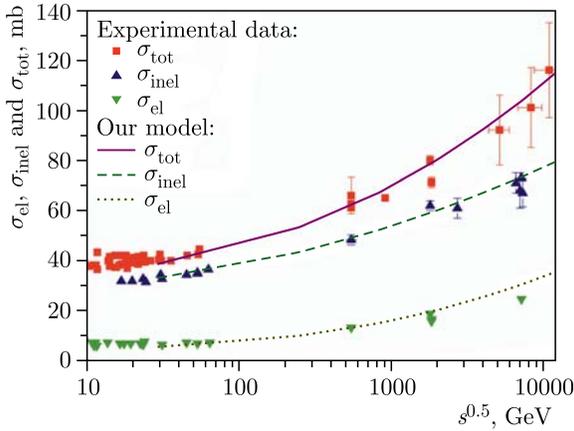


Рис. 4. Сравнение с экспериментальными данными [10] зависимости сечений от энергии для распределения Гаусса

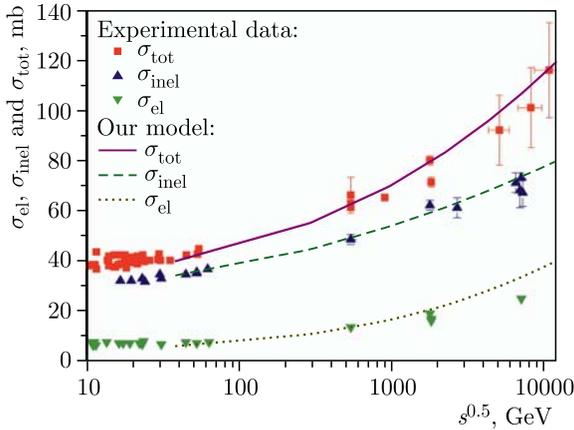


Рис. 5. Сравнение с экспериментальными данными [10] зависимости сечений от энергии для распределения однородного шара

В результате получена связь между числом партонов и энергией. Ниже она приведена для случая экспоненциального распределения (для простоты расчетов значения энергии приведены для целочисленных значений числа партонов  $A_1$  и  $A_2$ ) (табл. 1).

Анализ графиков (рис.3–8) показывает, что наилучшее согласие предсказаний нашей модели с экспериментальными данными достигается при использовании экспоненциального распределения.

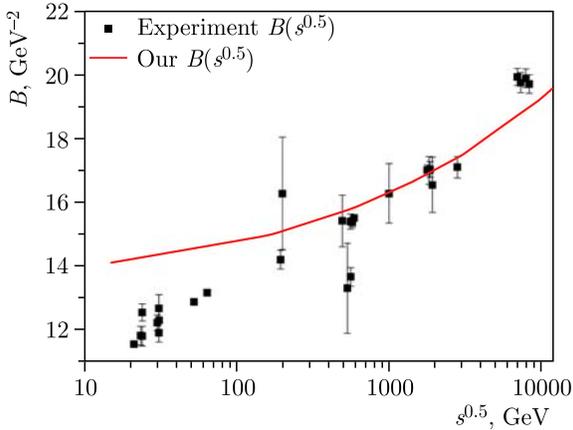


Рис. 6. Сравнение с экспериментальными данными [12, 13] зависимости наклона дифракционного конуса от энергии для экспоненциального распределения

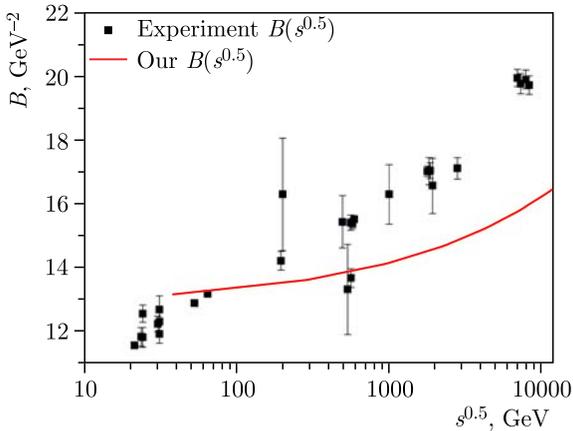


Рис. 7. Сравнение с экспериментальными данными [12, 13] зависимости наклона дифракционного конуса от энергии для распределения Гаусса

Нами была проведена вариация партонного сечения от 1,65 до 6,6 мб с одновременным изменением числа начальных партонов  $A_1 = A_2$  так, чтобы при фиксированной энергии  $\sigma_{\text{inel}}$  оставалось неизменным. Оказалось, что значения сечений  $\sigma_{\text{inel}}$ ,  $\sigma_{\text{tot}}$  оставались неизменными, а наклон дифракционного конуса незначительно увеличивался с ростом партонного сечения.

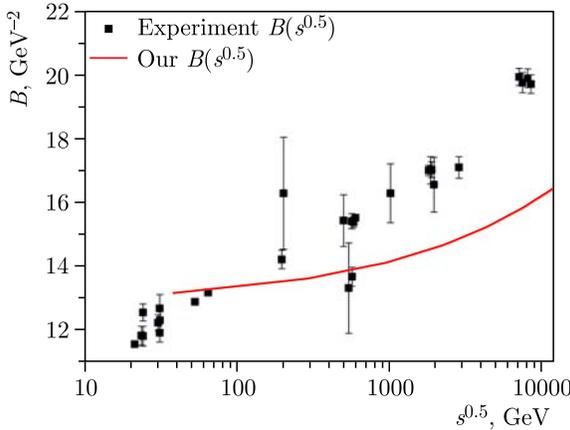


Рис. 8. Сравнение с экспериментальными данными [12, 13] зависимости наклона дифракционного конуса от энергии для распределения однородного шара

Таблица 1

Число партонов	$\sqrt{s}$ , ГэВ						
	14,97	165,5	583,3	1468	3067	5713	9495
$A_1 = A_2$	4	5	6	7	8	9	10

**2.4. Несимметричные столкновения при учете требования лоренц-инвариантности.** Число партонов в протонах можно описать как функцию от быстроты  $A_1 = g(y)$ ,  $A_2 = g(Y - y)$ , тогда  $\sigma_{inel}(A_1, A_2) = \sigma_{inel}(g(y), g(Y - y))$ . Из условия лоренц-инвариантности следует, что должно выполняться условие  $\sigma_{inel}(g(y), g(Y)) = \sigma_{inel}(g(Y/2), g(Y/2))$ , что эквивалентно  $\sigma_{inel}(g(y), g(Y - y)) = \text{const}(Y)$ . Поскольку, как было доказано выше,  $\sigma_{inel}$  является функцией от произведения  $A_1 A_2$ , то, соответственно,

$$g(y) g(Y - y) = \text{const}(Y). \tag{16}$$

Продифференцируем по  $y$ :

$$g'(y) g(Y - y) - g(y) g'(Y - y) = 0, \tag{17}$$

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = \frac{g'(Y - y)}{g(Y - y)}, \tag{18}$$

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = a = \text{const}. \tag{19}$$

Проинтегрируем по  $y$  и возьмем экспоненту по обеим частям равенства:

$$g(y) = e^{ay + \text{const}} = b e^{ay} \tag{20}$$

$$A_1 A_2 = g(y) g(Y - y) = b^2 e^{aY}. \quad (21)$$

Если теперь воспользоваться уравнением (12) и построить графики зависимостей для различных распределений, то из них мы найдем неизвестные коэффициенты  $a$  и  $b$ :

$$\begin{cases} a = 0,41 \pm 0,01, & b = 5,5 \pm 0,6, & \text{если экспоненциальное распределение,} \\ a = 0,17 \pm 0,01, & b = 5,7 \pm 1,1, & \text{если распределение однородного шара,} \\ a = 0,18 \pm 0,02, & b = 4,3 \pm 1,2, & \text{если распределение Гаусса.} \end{cases} \quad (22)$$

Связь между энергией и числом партонов имеет вид

$$\sqrt{s} = \left( \frac{A_1 A_2}{b^2} \right)^{1/2\alpha} m_p. \quad (23)$$

Теперь благодаря этой формуле мы можем получить все параметры несимметричного столкновения частиц. Попробуем воспользоваться ею для проверки применимости ограничений Фруассара.

**2.5. Поведение сечений при больших энергиях.** Теорема Фруассара утверждает, что в пределе высоких энергий полное (а значит, и неупругое) сечение может расти не быстрее, чем квадрат логарифма энергии. В связи с этим представляет интерес изучить поведение нашей модели в пределе больших энергий. Рассмотрим сначала случай, если в нашей модели протоны — однородные шары. Тогда  $\sigma(b)$  в пределе высоких энергий приближается к ступеньке. Для такой профильной функции легко можно вычислить величины сечений и наклона дифракционного конуса по формулам (1)–(4). Прицельный параметр ограничен величиной  $b_{\max} = 2(0,831\sqrt{5/3} + 0,162)$  фм = 2,4697, где  $0,831\sqrt{5/3}$  фм — радиус границы протона, а 0,162 фм — радиус партона, если брать партонное сечение 3,3 мб. С учетом этого можно получить примерные значения неупругого, полного, упругого сечений и наклона дифракционного конуса:

$$\sigma_{\text{inel}} = \int_0^{\infty} 2\pi b \sigma(b) db = \int_0^{b_{\max}} 2\pi b db = \pi b_{\max}^2 = 191,624 \text{ мб}, \quad (24)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = \int_0^{\infty} 4\pi b (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db = \int_0^{b_{\max}} 4\pi b db = 2\pi b_{\max}^2 = 383,248 \text{ мб}, \quad (25)$$

$$\sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{inel}} = \pi b_{\max}^2 = 191,624 \text{ мб}, \quad (26)$$

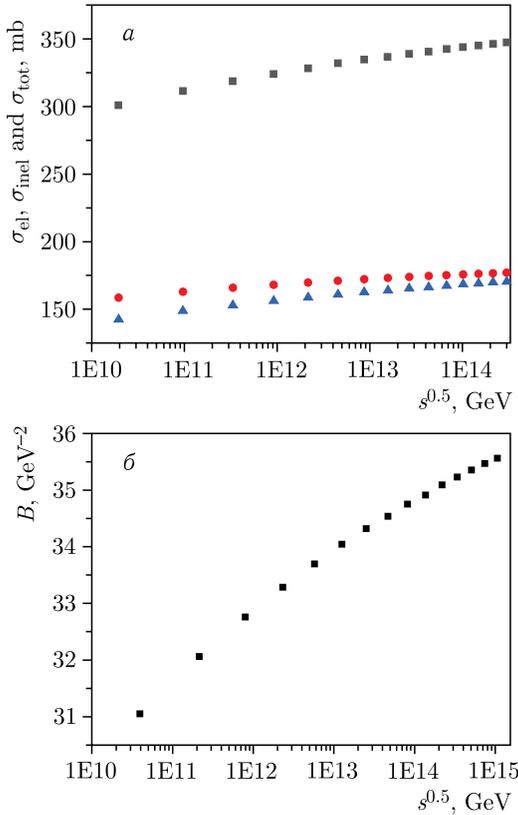


Рис. 9. Поведение сечений (а) и наклона дифракционного конуса (б) для распределения однородного шара в пределе высоких энергий

$$B = \frac{1}{2} \frac{\int_0^\infty b^3 (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db}{\int_0^\infty b (1 - \sqrt{1 - \sigma(b)}) db} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{b_{\max}} b^3 db}{\int_0^{b_{\max}} b db} = \frac{b_{\max}^2}{4} = 39,16 \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (27)$$

Если аппроксимировать график (рис. 9) гиперболической функцией, то можно получить предельное значение сечений и наклона дифракционного конуса:

$$\sigma_{\text{inel}} = (181,0 \pm 3) \text{ мб}, \quad (28)$$

$$\sigma_{\text{tot}} = (358,0 \pm 0,7) \text{ мб}, \quad (29)$$

$$\sigma_{\text{el}} = (177,2 \pm 0,5) \text{ мб}, \quad (30)$$

$$B = (36,57 \pm 0,07) \text{ ГэВ}^{-2}. \quad (31)$$

Отклонение аппроксимации от расчетов не выше 7%.

Чтобы проверить выполнение ограничений Фруассара, аппроксимируем приведенные выше графики формулой  $\sigma_{\text{inel}} = C_0 - C_1 \ln(s_0) + C_2 \ln^2(s/s_0)$ , где  $s_0 = 1 \text{ ГэВ}^2$  (табл. 2).

Таблица 2

Распределение	$C_0$ , мб	$C_1$ , мб	$C_2$ , мб
Однородного шара	$41 \pm 1$	$7,14 \pm 0,01$	$-0,009 \pm 0,001$
Экспоненциальное	$7,6 \pm 0,8$	$5,63 \pm 0,06$	$0,210 \pm 0,001$
Гаусса	$-8,2 \pm 0,7$	$8,91 \pm 0,05$	$0,0067 \pm 0,0009$

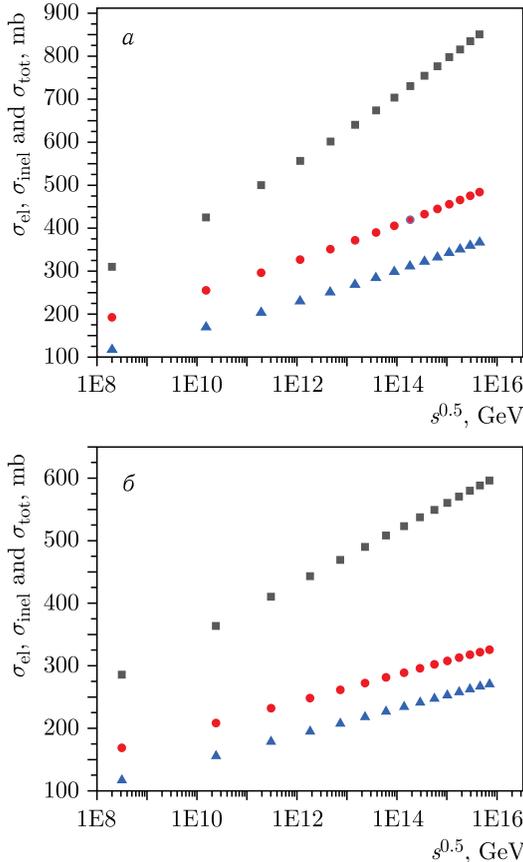


Рис. 10. Поведение сечений при больших энергиях для экспоненциального партонного распределения (а) и распределения Гаусса (б)

Это означает, что наши вычисления удовлетворяют ограничениям Фруассара; кроме того, они согласуются с более сильным утверждением, что коэффициент перед  $\ln^2(s)$  не превышает

$$\frac{\pi}{m_{\pi}^2} \approx 172,43 \text{ ГэВ}^{-2} = 67,14 \text{ мб [13].}$$

Для экспоненциального распределения поведение сечений в пределе высоких энергий показано на рис. 10.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана и реализована глауберовская монте-карловская модель протон-протонных столкновений на партонном уровне. Проанализированы различные виды партонных распределений, а также несколько значений элементарного сечения. Показано, что модель удовлетворительно описывает такие величины, как полное, упругое и неупругое сечения, наклон дифракционного конуса в диапазоне энергий от SPS до LHC, при этом наилучшее соответствие с экспериментом получается для экспоненциальной формы пространственного партонного распределения.

Проанализировано поведение протон-протонных сечений в пределе больших энергий, для постоянной партонной плотности, проведено сравнение с аналитическими оценками.

Получен явный вид зависимости числа начальных партонов от энергии пучка, который обеспечивает лоренц-инвариантность сечений и наклона дифракционного конуса, и определены значения входящих в нее параметров.

Разработанный подход в дальнейшем может послужить основой более детальных моделей как  $pp$ -, так и  $AA$ -столкновений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Glauber R. J.* Cross Sections in Deuterium at High Energies // *Phys. Rev.* 1955. V. 100. P. 242–248.
2. *Miller M. L., Reygers K., Sanders S. J., Steinberg P.* Glauber Modeling in High-Energy Nuclear Collisions // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2007. V. 57. P. 205–243.
3. *Дрожжова Т. А., Коваленко В. Н., Серяков А. Ю., Феофилов Г. А.* Центральность и множественное рождение частиц в ультрарелятивистских ядерных столкновениях // *ЯФ.* 2016. Т. 79. С. 508.
4. *Eremin S., Voloshin S.* Nucleon Participants or Quark Participants? // *Phys. Rev. C.* 2003. V. 67. P. 064905.
5. *Deliyergiyev M., Rybczyński M.* Multiplicity Fluctuations in the Glauber Monte Carlo Approach // *Phys. Rev. C.* 2020. V. 101. P. 014909.
6. *Deb Suman, Sarwar Golam, Thakur Dhananjaya, Pavish S., Raghunath Sahoo, Jan-e Alam.* Glauber Model for a Small System Using the Aniso-

- tropic and Inhomogeneous Density Profile of a Proton // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. P. 014004.
7. Коваленко В.Н. Дипольное описание  $pp$ -взаимодействия // ТМФ. 2015. Т. 184, № 3. С. 465–474; Theor. Math. Phys. 2015. V. 184, No. 3. P. 1295–1303.
  8. Karr J.-P., Marchand D. Progress on the Proton-Radius Puzzle // Nature. 2019. V. 575. P. 61–62.
  9. Amelin N. S., Armesto N., Pajares C., Sousa D. Monte Carlo Model for Nuclear Collisions for SPS to LHC Energies // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 22. P. 149–163.
  10. Antchev G., Aspell P. et al. Luminosity-Independent Measurements of Total, Elastic and Inelastic Cross-Sections at  $\sqrt{s} = 7$  TeV // Phys. Rev. D. 2013. V. 101. P. 21004.
  11. Schegelsky V. A., Ryskin M. G. The Diffraction Cone Shrinkage Speed Up with the Collision Energy // Phys. Rev. D. 2012. V. 85. P. 094024.
  12. Khoze V. A., Ryskin M. G., Tasevsky M. High Energy Soft QCD and Diffraction // Zyla P. A. et al. (Particle Data Group). The Review of Particle Physics (2020). Prog. Theor. Exp. Phys. 2020. V. 2020. P. 083C01.
  13. Pancheri G., Srivastava Y.N. Introduction to the Physics of the Total Cross Section at LHC // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77. P. 150.