ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2024. Т. 55, вып. 4. С. 840–848

УРОВНИ ЭНЕРГИИ ПИОННОГО И КАОННОГО ГЕЛИЯ В ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ

В. И. Коробов [1,2,*], *Ф. А. Мартыненко* [2,**], *А. П. Мартыненко* [2,***], *А. В. Эскин* [2,****]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2] Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия

В рамках вариационного метода изучаются уровни энергии пионного ($\pi{-}e{-}\mathrm{He}$) и каонного ($K{-}e{-}\mathrm{He}$) гелия с электроном в основном состоянии и мезоном в возбужденном состоянии с главным и орбитальным квантовым числом $n \sim l + 1 \sim 20$. Матричные элементы основного гамильтониана и поправки к нему рассчитаны аналитически. Вычислен ряд уровней энергии и частот перехода между ними, которые могут быть изучены экспериментально.

In the variational method we study energy levels of pionic helium ($\pi{-}e{-}\mathrm{He}$) and kaonic helium ($K{-}e{-}\mathrm{He}$) with the electron in ground state and a meson in excited state with principal and orbital quantum numbers $n \sim l + 1 \sim 20$. Variational wave functions are taken in the Gaussian form. Matrix elements of the basic Hamiltonian and corrections to vacuum polarization and relativism are calculated analytically in a closed form. We calculate some bound state energies and transition frequencies which can be studied in experiment.

PACS: 36.10.Gv; 36.10.Ee; 31.30.jr

ВВЕДЕНИЕ

Экзотические связанные состояния (мюоний, позитроний, ион позитрония, мюонный водород и др.) на протяжении десятилетий привлекают внимание как экспериментаторов, так и теоретиков [1]. Хотя они и имеют короткое время жизни, тем не менее, изучая различные энергетические интервалы в энергетическом спектре таких систем, а также ширины их распада, год за годом удавалось получать в результате этих исследований все более точную информацию о значениях фундаментальных параметров Стандартной модели. Число таких экзотических систем в последние годы растет. Например, в [2, 3] было предложено изучать пионные атомы гелия, состоящие из отрицательного пиона, электрона и ядра гелия,

* E-mail: korobov@theor.jinr.ru
** E-mail: f.a.martynenko@gmail.com
*** E-mail: a.p.martynenko@samsu.ru
**** E-mail: eskin1992@gmail.com

методом лазерной спектроскопии. Из измерения пионных переходов между состояниями с большими значениями главного и орбитального квантовых чисел ($(n, l) = (17{,}16) \to (17{,}15)$) можно попытаться получить более точное значение массы пиона, чем при использовании других методов. В [4, 5] уже был проведен успешный эксперимент для почти круговых орбит $n \sim l + 1$, который дал значение частоты перехода 183 760 МГц. Чтобы найти более точное значение массы пиона из этих измерений, необходимо также принять во внимание систематические эффекты, такие как столкновительный сдвиг, уширение линий перехода и др. [6]. Работа в этом направлении находится в активной фазе. Наряду с атомами пионного гелия можно предлагать и изучать и другие атомы, например, каонный гелий, ставя целью исследования более точное определение массы K^--мезона. Будет полезно отметить, что существуют и другие подходы к определению значения массы π-мезона. Исследование, проведенное в [7], демонстрирует возможности спектроскопии искривленных кристаллов в области экзотических атомов. В данной работе одновременно в газообразной азотно-кислородной смеси были измерены переходы $5g$–$4f$ в пионном азоте и мюонном кислороде. Зная массу мюона, мюонную линию можно использовать для энергетической калибровки пионного перехода. Было получено значение массы отрицательно заряженного пиона, которое на 4,2 ppm превышает нынешнее среднее мировое значение $(139{,}57077 \pm 0{,}00017)$ МэВ [8].

Существуют некоторые различия в использовании вариационного метода для нахождения энергетических уровней трехчастичных систем. Они связаны с выбором координат и представлением гамильтониана для описания системы, с выбором базисных волновых функций. Так, в [2] использовался экспоненциальный базис, а координаты электрона и мезона определялись относительно ядра. В работах [9–11] при расчете энергетических уровней мезомолекул водорода, мюонного гелия и др. мы используем координаты Якоби. Целью данной работы является расчет энергетических уровней в пионных и каонных атомах гелия, а также переходов между уровнями, на которых мезон находится в возбужденном состоянии с большим орбитальным квантовым числом.

ОБЩИЙ ФОРМАЛИЗМ

Для изучения трехчастичных систем разработаны различные подходы. Существует аналитический метод теории возмущений, позволяющий аналитически исследовать как лэмбовский сдвиг, так и сверхтонкую структуру спектра [11–17]. Другими методами, применяемыми для многочастичных систем, являются вариационный метод и метод гиперсферических координат, которые позволяют с очень высокой точностью находить уровни энергии и волновые функции [18–20]. Поскольку для мезонного гелия рассматриваются состояния атома с большими значениями орбитальных моментов мезона, при которых электрон и мезон находятся на одинаковом расстоянии от ядра, то использовать метод аналитической теории возмущений практически невозможно. Поэтому далее мы изучаем эту систему в рамках вариационного метода. В качестве базиса волновых функций используется гауссов базис.

Для расчета уровней энергии трехчастичной системы введем координаты Якоби $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$, которые связаны с радиусами-векторами частиц $\mathbf{r}_1$ (ядро), $\mathbf{r}_2$ (мезон), $\mathbf{r}_3$ (электрон) следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{r}_3 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

где m_1, m_2, m_3 — массы ядра He, $\pi^-(K^-)$-мезона и электрона.

Для решения задачи вариационным методом выберем пробную волновую функцию основного состояния системы в гауссовом виде:

$$\begin{gathered}\Psi(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A) = \sum_{i=1}^{K} C_i \psi_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A^i), \\ \psi_i(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A^i) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(A^i_{11}\boldsymbol{\rho}^2 + 2A^i_{12}\boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda} + A^i_{22}\boldsymbol{\lambda}^2\right)\right],\end{gathered} \tag{2}$$

где C_i — линейные вариационные параметры; A^i — матрица нелинейных вариационных параметров; K — размер базиса.

В нерелятивистском приближении гамильтониан трехчастичного атома в координатах Якоби определяется выражением

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2\mu_1}\nabla^2_{\boldsymbol{\rho}} - \frac{1}{2\mu_2}\nabla^2_{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{e_1 e_2}{|\boldsymbol{\rho}|} + \frac{e_1 e_3}{\left|\boldsymbol{\lambda} + \dfrac{m_2}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right|} + \frac{e_2 e_3}{\left|\boldsymbol{\lambda} - \dfrac{m_1}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right|}, \tag{3}$$

где введены обозначения $m_{12} = m_1 + m_2$, $\mu_1 = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, $\mu_2 = \dfrac{(m_1 + m_2)m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, e_1, e_2, e_3 — заряды частиц.

Для произвольных состояний мезона и электрона с орбитальными угловыми моментами l_1 и l_2 используется базис в виде биполярных сферических гармоник:

$$[Y_{l_1}(\theta_\rho, \phi_\rho) \otimes Y_{l_2}(\theta_\lambda, \phi_\lambda)]_{LM} = \sum_{m_1, m_2} C^{LM}_{l_1 m_1 l_2 m_2} Y_{l_1 m_1}(\theta_\rho, \phi_\rho) Y_{l_2 m_2}(\theta_\lambda, \phi_\lambda), \tag{4}$$

где θ_ρ, ϕ_ρ и $\theta_\lambda, \phi_\lambda$ представляют собой сферические углы, определяющие направление векторов $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$. Так как π^-- или K^--мезон находятся в возбужденном состоянии с орбитальным моментом l в пионном (каонном) гелии, а электрон — в основном состоянии, вариационная волновая функция системы выбирается в виде

$$\Psi_{lm}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\lambda}, A) = \sum_{i=1}^{K} C_i Y_{lm}(\theta_\rho, \phi_\rho)\rho^l \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2}\left(A_{11}^i \boldsymbol{\rho}^2 + 2A_{12}^i \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{\lambda} + A_{22}^i \boldsymbol{\lambda}^2\right)\right], \quad (5)$$

где сферическая функция $Y_{lm}(\theta_\rho, \phi_\rho)$ описывает угловую часть орбитального движения пиона (каона).

В рамках вариационного подхода решение уравнения Шредингера сводится к решению следующей матричной задачи для вариационных параметров C_i:

$$H \cdot C = EB \cdot C, \quad (6)$$

где матричные элементы гамильтониана H_{ij} и нормировки волновой функции B_{ij} можно вычислить аналитически в базисе из гауссовых волновых функций. Так, нормировка волновой функции определяется выражением

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j 2^{l+2} \pi^{3/2} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \frac{B_{22}^l}{(\det B)^{l+3/2}}, \quad B_{kn} = A_{kn}^i + A_{kn}^j. \quad (7)$$

Рассмотрим аналитические выражения для матричных элементов гамильтониана. Оператор кинетической энергии содержит два члена. Матричный элемент оператора Лапласа по координате $\boldsymbol{\lambda}$ имеет вид

$$\langle \Psi | \nabla_{\boldsymbol{\lambda}}^2 | \Psi \rangle = \sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j 2^{l+2} \pi^{3/2} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right) \frac{B_{22}^{l-1}}{(\det B)^{l+5/2}} \times \\ \times \left[3A_{22}^i (A_{22}^i - B_{22}) \det B + (2l+3)(A_{22}^i B_{12} - A_{12}^i B_{22})^2\right]. \quad (8)$$

Аналогичный матричный элемент оператора Лапласа по координате $\boldsymbol{\rho}$ также выражается в терминах нелинейных вариационных параметров:

$$\langle \Psi | \nabla_{\boldsymbol{\rho}}^2 | \Psi \rangle = \sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j 2^{l+1} \pi^{3/2} \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right) \frac{B_{22}^{l-1}}{(\det B)^{l+5/2}} \times \\ \times \Big[(2l+1) \det B(-(2l+3)A_{11}^i B_{22} + 3(A_{12}^i)^2 + 2l A_{12}^i B_{12}) + \\ + (2l+1)(2l+3)(A_{12}^i B_{12} - A_{11}^i B_{22})^2\Big]. \quad (9)$$

Оператор потенциальной энергии в нерелятивистском гамильтониане состоит из парных кулоновских взаимодействий частиц U_{ij}

$(i,\ j = 1,\,2,\,3)$. Удобство использования гауссова базиса и в этом случае заключается в простом аналитическом представлении матричных элементов потенциальной энергии (в электронных атомных единицах):

$$\langle\Psi|U_{12}|\Psi\rangle = -Z\sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j \frac{2^{l+3/2}\pi^{3/2}\Gamma((l+1)B_{22}^{l-1}}{(\det B)^{l+1}}, \tag{10}$$

$$\langle\Psi|U_{13}|\Psi\rangle = -Z\sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j \frac{2^{l+5/2}\pi\Gamma\left(l+\dfrac{3}{2}\right)B_{22}^{l+1/2}}{(\det B)^{l+3/2}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{(F_2^{23})^2}{\det B}\right), \tag{11}$$

$$\langle\Psi|U_{23}|\Psi\rangle = \sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j \frac{2^{l+5/2}\pi\Gamma\left(l+\dfrac{3}{2}\right)B_{22}^{l+1/2}}{(\det B)^{l+3/2}}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{(F_2^{13})^2}{\det B}\right), \tag{12}$$

$$F_2^{13} = B_{12} + \frac{m_1}{m_{12}}B_{22}, \quad F_2^{23} = B_{12} - \frac{m_2}{m_{12}}B_{22}, \tag{13}$$

где ${}_2F_1(\alpha,\beta,x)$ — гипергеометрическая функция.

При $l = 1$ выражения (11)–(13) совпадают с ранее полученными результатами [21]. Используя матричные элементы $\widehat{H}_0$, мы выполнили расчет уровней энергии для π^--мезонного и K^--мезонного гелия в системе Matlab с помощью нашей программы численного расчета, которая ранее применялась при изучении уровней энергии различных мюонных систем в КЭД. Результаты расчета представлены в таблице.

Для увеличения точности расчета мы рассмотрели основные поправки к гамильтониану $\widehat{H}_0$. Парное электромагнитное взаимодействие частиц в КЭД определяется гамильтонианом Брейта, среди различных членов которого можно выделить релятивистские поправки, контактное взаимодействие и поправки на поляризацию вакуума. Релятивистские поправки определяются в спектре энергии следующими слагаемыми в электронных атомных единицах:

$$\Delta U_{\rm rel} = -\frac{\alpha^2}{8}\left(\frac{\mathbf{p}_1^4}{m_1^3} + \frac{\mathbf{p}_2^4}{m_2^3} + \frac{\mathbf{p}_3^4}{m_3^3}\right). \tag{14}$$

Основная релятивистская поправка в (14) связана с движением электрона. Величина матричного элемента $\Delta U_{\rm rel}^e$ может быть представлена

Уровни энергии мезонного атома в нерелятивистском приближении и значения основных поправок в электронных атомных единицах

Состояние	$E_{\rm nr}$	$-\dfrac{\alpha^2}{8}\mathbf{p}_e^4$	$\Delta U_{\rm vp}$	$\Delta U_{\rm cont}$
Атом $({}^3_2\mathrm{He}-\pi^- - e)$				
(17,16)	−2,6423822152	−0,0000568853	−0,0000003596	0,0000021185
(17,15)	−2,6698284795	−0,0000578381	−0,0000003646	0,0000021477
Атом $({}^4_2\mathrm{He}-\pi^- - e)$				
(17,16)	−2,6567689659	−0,0000560957	−0,0000003549	0,0000020904
(17,15)	−2,6842422023	−0,0000571739	−0,0000003606	0,0000021242
Атом $({}^3_2\mathrm{He}-K^- - e)$				
(20,19)	−4,6806222136	−0,0000194273	−0,0000001272	0,0000007495
(20,18)	−4,6932218265	−0,0000178752	−0,0000001159	0,0000006829
(21,20)	−4,3133610685	−0,0000238657	−0,0000001466	0,0000008638
(21,19)	−4,3238629798	−0,0000230792	−0,0000001498	0,0000008827
Атом $({}^4_2\mathrm{He}-K^- - e)$				
(20,19)	−4,8328936568	−0,0000190789	−0,0000001231	0,0000007252
(20,18)	−4,8578478878	−0,0000172623	−0,0000001161	0,0000006552
(21,20)	−4,4499843007	−0,0000207687	−0,0000001490	0,0000008777
(21,19)	−4,4601685694	−0,0000219706	−0,0000001409	0,0000008299

таким же образом, как (8) в терминах вариационных параметров:

$$\langle\Psi| -\frac{\alpha^2}{8}\nabla^4_{\boldsymbol{\lambda}}|\Psi\rangle = -\frac{\alpha^2 2^{l+1}\pi^{1/2}\Gamma\left(l+\dfrac{3}{2}\right)}{8}\sum_{i,j=1}^{K} C_i C_j \frac{B_{22}^{l-2}}{(\det B)^{l+7/2}}\times$$
$$\times\Big[15(A^i_{22})^2(\det B)^2(A^i_{22}-B_{22})^2+10(2l+3)\det B A^i_{22}(A^i_{22}-B_{22})\times$$
$$\times(A^i_{22}B_{12}-A^i_{12}B_{22})^2+(2l+3)(2l+5)(A^i_{22}B_{12}-A^i_{12}B_{22})^4\Big]. \quad (15)$$

При вычислении поправки на поляризацию вакуума можно использовать следующее выражение для оператора взаимодействия (в электронных атомных единицах):

$$\Delta U_{\rm vp} = \Delta U_{\rm vp}(r_{13}) + \Delta U_{\rm vp}(r_{23}) =$$
$$= \frac{4\alpha^2(Z\alpha)}{15}\delta\left(\boldsymbol{\lambda}-\frac{m_2}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right) - \frac{4\alpha^2(Z\alpha)}{15}\delta\left(\boldsymbol{\lambda}+\frac{m_1}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right). \quad (16)$$

Матричные элементы (16) получены в аналитической форме:

$$\langle\Psi|\Delta U_{\mathrm{vp}}(r_{13})|\Psi\rangle = -\frac{4}{15}\alpha^2\times \times Z\alpha\sum_{i,j=1}^{K} C_iC_j 2^{l+1/2}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\left(F_1^{13}\right)^{l+3/2}}, \quad (17)$$

$$\langle\Psi|\Delta U_{\mathrm{vp}}(r_{23})|\Psi\rangle = -\frac{4}{15}\alpha^2\times \times Z\alpha\sum_{i,j=1}^{K} C_iC_j 2^{l+1/2}\Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{\left(F_1^{23}\right)^{l+3/2}}, \quad (18)$$

$$F_1^{13} = B_{11}+\frac{m_2^2}{m_{12}^2}B_{22}-2\frac{m_2}{m_{12}}B_{12}, \quad F_1^{23} = B_{11}+\frac{m_1^2}{m_{12}^2}B_{22}+2\frac{m_1}{m_{12}}B_{12}. \quad (19)$$

Потенциал контактного взаимодействия также определяется δ-образными потенциалами, как и (16):

$$\Delta U_{\mathrm{cont}} = \frac{\pi Z\alpha^2}{2}\delta\left(\boldsymbol{\lambda}+\frac{m_2}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right)-\frac{\pi\alpha^2}{2}\delta\left(\boldsymbol{\lambda}-\frac{m_1}{m_{12}}\boldsymbol{\rho}\right), \quad (20)$$

и расчет матричных элементов (20) выполняется аналогично (17). Численные значения поправок (14), (17), (20) представлены в таблице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наше исследование уровней энергии пионного и каонного гелия выполнено в рамках вариационного подхода, который был сформулирован в работе [20]. В противоположность [2] мы используем для описания системы координаты Якоби $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\lambda}$, в которых гамильтониан системы имеет вид (3). Второе отличие нашего расчета от [2] состоит в использовании гауссова базиса, в котором матричные элементы оператора взаимодействия получены в замкнутой аналитической форме. Наконец, третье отличие состоит в том, что в [2] используется метод комплексного вращения координат. Полученные численные результаты в таблице показывают, что имеется небольшое различие наших результатов и [2] для пионного гелия, которое проявляется в третьей цифре после запятой для основного вклада $\widehat{H}_0$. Наш результат для частоты перехода $(17{,}16)\to(17{,}15)$ в пионном гелии-4 180772 ГГц также немного (около 1 %) отличается от $(183681{,}5\pm 0{,}5)$ ГГц из [2] и экспериментального значения 183 760(6)(6) ГГц. Уровни энергии для каонного гелия вычислены впервые, и даны оценки для некоторых частот перехода, которые могут быть изучены экспериментально. Так, для перехода $(21{,}20)\to(21{,}19)$ частота равна 69 094 ГГц ($K{-}e{-}^3_2$He) и 67 017 ГГц ($K{-}e{-}^4_2$He). По нашему мнению, некоторое расхождение наших результатов и [2] связано с перечисленными выше различиями в формулировке двух вариационных подходов.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 23-22-00143).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eides M. I., Grotch H., Shelyuto V. A.* Theory of Light Hydrogenlike Atoms // Phys. Rep. 2001. V. 342. P. 63–261.
2. *Hori M., Sóter A., Korobov V. I.* Proposed Method for Laser Spectroscopy of Pionic Helium Atoms to Determine the Charged-Pion Mass // Phys. Rev. A. 2014. V. 89. P. 042515.
3. *Hori M., Sóter A., Aghai-Khozani H. et al.* Method for Laser Spectroscopy of Metastable Pionic Helium Atoms // Hyp. Int. 2015. V. 233. P. 83–87.
4. *Hori M., Aghai-Khozani H., Sóter A. et al.* Laser Spectroscopy of Pionic Helium Atoms // Nature. 2020. V. 581. P. 37–41.
5. *Hori M., Aghai-Khozani H., Sóter A. et al.* Laser Spectroscopy of Long-Lived Pionic and Antiprotonic Helium in Superfluid Helium // PoS ICHEP2022. 2022. V. 1. P. 141.
6. *Bakalov D., Obreshkov B.* Collisional Shift and Broadening of the Transition Lines in Pionic Helium // Phys. Rev. A. 2016. V. 93. P. 062505.
7. *Trassinelli M., Anagnostopoulos D. F., Borchert G. et al.* Measurement of the Charged Pion Mass Using X-Ray Spectroscopy of Exotic Atoms // Phys. Lett. B. 2016. V. 759. P. 583–588.
8. *Workman R. L. et al. (Particle Data Group).* The Review of Particle Physics // Prog. Theor. Exp. Phys. 2022. V. 2022. P. 083C01.
9. *Eskin A. V., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Energy Levels of Three-Particle Muon–Electron Helium in Variational Approach // Phys. At. Nucl. 2023. V. 86. P. 583–588.
10. *Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A., Eskin A. V.* Muon Lamb Shift in Three-Particle Muon–Electron Systems in Quantum Electrodynamics // Bull. Lebedev Phys. Inst. 2023. V. 50. P. 229–236.
11. *Eskin A. V., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Three-Particle Muon–Electron Bound Systems in Quantum Electrodynamics // Atoms. 2023. V. 11. P. 25.
12. *Lakdawala S. D., Mohr P.* Hyperfine Structure in Muonic Helium // Phys. Rev. A. 1980. V. 22. P. 1572.
13. *Huang K. N., Hughes V. W.* Theoretical Hyperfine Structure of the Muonic ^{3}He and ^{4}He Atoms // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. P. 2330.
14. *Amusia M. Ya., Kuchiev M. Ju., Yakhontov V. L.* Computation of the Hyperfine Structure in the $(\alpha - \mu^- - e^-)^0$ Atom // J. Phys. B: Atom. Molec. Phys. 1983. V. 16. P. L71.
15. *Karshenboim S. G., Ivanov V. G., Amusia M. Ya.* Lamb Shift of Electronic States in Neutral Muonic Helium, an Electron–Muon–Nucleus System // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. P. 032510.

16. *Krutov A. A., Martynenko A. P.* Ground-State Hyperfine Structure of the Muonic Helium Atom // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 032513.
17. *Faustov R. N., Korobov V. I., Martynenko A. P., Martynenko F. A.* Ground-State Hyperfine Structure of Light Muon–Electron Ions // Phys. Rev. A. 2022. V. 105. P. 042816.
18. *Vinitsky S. I., Melezhik V. S., Ponomarev L. I. et al.* Calculation of Energy Levels of Hydrogen Isotope μ Mesic Molecules in the Adiabatic Representation of Three-Body Problem // JETP. 1980. V. 52. P. 353.
19. *Frolov A. M.* Properties and Hyperfine Structure of Helium-Muonic Atoms // Phys. Rev. A. 2000. V. 61. P. 022509.
20. *Varga K., Suzuki Y.* Solution of Few-Body Problems with the Stochastic Variational Method I. Central Forces with Zero Orbital Momentum // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 106. P. 157–168.
21. *Martynenko A. P., Martynenko F. A., Sorokin V. V., Sukhorukova O. S., Eskin A. V.* Energy Levels of Mesomolecular Ions of Hydrogen in Variational Approach // Bull. Lebedev Phys. Inst. 2019. V. 46. P. 143–147.