

## МАССЫ ЛЕГКИХ КВАРКОВ

А. А. Осипов\*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Исходя из общего вида первой поправки к результату алгебры токов для масс псевдоскалярных мезонов, мы получаем ряд правил сумм, связывающих массы псевдоскаляров с отношениями масс легких кварков  $m_u/m_d$ ,  $m_s/m_d$ . Более тщательное рассмотрение с привлечением экспериментальных данных по распадам  $\eta \rightarrow 3\pi$  позволяет выделить область, в которой результаты правил сумм не противоречат друг другу. Это определяет область допустимых значений для отношений  $m_u/m_d/m_s$ . Результаты сравниваются с известными феноменологическими данными и результатами вычислений на решетке.

Based on the general form of the first correction to the current algebra result for the masses of pseudoscalar mesons, we obtain a number of sum rules relating the masses of pseudoscalars to the light quark mass ratios  $m_u/m_d$ ,  $m_s/m_d$ . A more careful consideration involving experimental data on  $\eta \rightarrow 3\pi$  decays allows us to identify a region in which the results of these sum rules do not contradict each other. This determines the range of acceptable values for the ratios  $m_u/m_d/m_s$ . The results are compared with known phenomenological data and lattice simulations.

PACS: 12.39.Fe; 14.40.Aq; 14.65.Bt

### ВВЕДЕНИЕ

Октет псевдоскалярных мезонов ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ) является одним из главных источников для получения информации о величине масс легких кварков. Это связано с той особой ролью, которую он играет в физике частиц. Будучи псевдоголдстоуновскими состояниями спонтанно нарушенной киральной симметрии  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , члены октета приобретают массу только благодаря ненулевым значениям масс легких  $u$ -,  $d$ - и  $s$ -кварков. В квантовой хромодинамике (КХД) за это отвечает гамильтониан

$$H_m = \sum_{q=u,d,s} m_q \bar{q}q, \quad (1)$$

где неявно предполагается суммирование по цветам кварков.

Известно, что при энергиях  $E \simeq 1$  ГэВ массы легких кварков равны  $m_u \simeq 4,2$  МэВ,  $m_d \simeq 7,5$  МэВ,  $m_s \simeq 150$  МэВ, т. е.  $m_q/E \ll 1$ . Поэтому  $H_m$  можно рассматривать как малое возмущение в окрестности кирального предела  $m_q = 0$ .

---

\* E-mail: [aaosipov@theor.jinr.ru](mailto:aaosipov@theor.jinr.ru)

Вышеизложенных соображений достаточно, чтобы, воспользовавшись методами алгебры токов, связать квадрат массы псевдоскаляра  $\Pi^a$  с массами кварков [1]

$$\bar{\mu}^2(\Pi^a) = \frac{1}{F^2} \int d^4x d^4y \langle [J_5^a 0(x), [J_5^a 0(y), H_m(0)]] \rangle_0, \quad (2)$$

где  $F \simeq 92$  МэВ — фундаментальная константа алгебры токов;  $J_{5\mu}^a = \bar{q}\gamma_\mu\gamma_5(\lambda_a/2)q$  — аксиально-векторный ток, ассоциируемый с  $\Pi^a$ , а  $\lambda_a$  —  $SU(3)$ -матрицы Гелл-Манна. Черта над символом массы отмечает, что мы пренебрегаем электромагнитными поправками в выражениях для масс заряженных состояний. Отсюда, в итоге, находим

$$\bar{\mu}_{\pi^+}^2 = 2B_0\hat{m}, \quad \bar{\mu}_{K^+}^2 = B_0(m_u + m_s), \quad \bar{\mu}_{K^0}^2 = B_0(m_d + m_s), \quad (3)$$

где мы ограничились только членами первого порядка по массам кварков, приравняв вакуумные ожидания  $\langle \bar{u}u \rangle_0 = \langle \bar{d}d \rangle_0 = \langle \bar{s}s \rangle_0 = \langle \bar{q}q \rangle_0$ , и ввели следующие обозначения:  $B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle_0/F^2$ ,  $\hat{m} = (m_u + m_d)/2$ .

Из формул (3) можно исключить  $B_0$  и в результате связать отношения масс кварков с массами псевдоскалярных мезонов [2]:

$$\begin{aligned} \frac{m_u}{m_d} &= \frac{\bar{\mu}_{K^+}^2 - \bar{\mu}_{K^0}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2}{\bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2} = \frac{\mu_{K^+}^2 - \mu_{K^0}^2 + 2\mu_{\pi^0}^2 - \mu_{\pi^+}^2}{\mu_{K^0}^2 - \mu_{K^+}^2 + \mu_{\pi^+}^2} = 0,56, \\ \frac{m_s}{m_d} &= \frac{\bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{\pi^+}^2}{\bar{\mu}_{K^0}^2 - \bar{\mu}_{K^+}^2 + \bar{\mu}_{\pi^+}^2} = \frac{\mu_{K^+}^2 + \mu_{K^0}^2 - \mu_{\pi^+}^2}{\mu_{K^0}^2 - \mu_{K^+}^2 + \mu_{\pi^+}^2} = 20,18. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь, на втором шаге, была использована теорема Дашена, согласно которой в киральном пределе учет виртуальных фотонов дает один и тот же вклад в массы заряженных мезонов, т. е. в формулах  $\mu_{\pi^+}^2 = \bar{\mu}_{\pi^+}^2 + \Delta_{\text{el}}^2$ ,  $\mu_{K^+}^2 = \bar{\mu}_{K^+}^2 + \tilde{\Delta}_{\text{el}}^2$  следует положить  $\Delta_{\text{el}} = \tilde{\Delta}_{\text{el}}$ . При этом, с точностью до поправок порядка  $(m_d - m_u)^2$ , величина  $\Delta_{\text{el}}^2 = \mu_{\pi^+}^2 - \mu_{\pi^0}^2$ .

Насколько можно доверять результату (4)? Проблема в том, что хотя масса  $s$ -кварка мала по сравнению с адронной шкалой  $m_s/E \ll 1$ , она достаточно сильно нарушает  $SU(3)$ -симметрию  $m_s/\hat{m} \simeq 26$ , чтобы алгебра токов  $SU(3) \times SU(3)$  была надежным инструментом для получения информации об отношениях масс кварков. Проблема усугубляется еще и тем, что киральная теория возмущений ( $\chi$ РТ) [3], позволяющая выйти за рамки алгебры токов, теряет свою предсказательную силу при изучении данного вопроса.

Действительно, вычисление первой (NLO) поправки к результату (4) показало [3], что выход за рамки лидирующего (LO) приближения ведет к однопараметрической зависимости кварковых отношений. При этом геометрическим местом точек плоскости в координатах  $x = m_u/m_d$

и  $y = m_s/m_d$  является эллипс  $x^2 + y^2/Q^2 = 1$ , где

$$Q^2 = \frac{\overline{m}_K^2}{\overline{m}_\pi^2} \frac{\overline{m}_K^2 - \overline{m}_\pi^2}{\overline{m}_{K^0}^2 - \overline{m}_{K^+}^2} [1 + O(m_q^2)]. \quad (5)$$

Хотя большая полуось эллипса не зависит от параметра  $\Delta_M$ , каждое из входящих в  $Q^2$  отношений

$$\begin{aligned} \frac{\overline{m}_K^2}{\overline{m}_\pi^2} &= \frac{m_s + \widehat{m}}{m_u + m_d} [1 + \Delta_M + O(m_q^2)], \\ \frac{\overline{m}_{K^0}^2 - \overline{m}_{K^+}^2}{\overline{m}_K^2 - \overline{m}_\pi^2} &= \frac{m_d - m_u}{m_s - \widehat{m}} [1 + \Delta_M + O(m_q^2)] \end{aligned} \quad (6)$$

зависит от его величины, чем в итоге и определяется положение каждой конкретной точки на кривой. В частности, нулевому значению параметра  $\Delta_M$  соответствует результат алгебры токов (4).

Было бы наивно считать, что задача вычисления кварковых отношений в NLO-приближении свелась к фиксации величины  $\Delta_M$ . Во-первых, в  $\chi$ РТ данный параметр зависит от низкоэнергетической константы  $L_8$ , которую, как было показано в [4], невозможно фиксировать феноменологически. Во-вторых, при рассмотрении NLO-приближения следует учесть NLO-поправки к теореме Дашена. Это добавит еще один неизвестный параметр  $\widetilde{\Delta}_{el} \neq \Delta_{el}$ , для определения которого предпочтительно воспользоваться экспериментальными данными по распадам  $\eta \rightarrow 3\pi$ .

Последовательное описание физики  $\eta'$ -мезона ведет к расширению группы киральной симметрии до  $U(3) \times U(3)$  и модификации ряда  $\chi$ РТ, а именно, переходу к тройному разложению по импульсам, массам легких кварков и  $1/N_c$ , где  $N_c$  — число цветовых степеней свободы [5]. Это устраняет неоднозначность, вносимую преобразованием Каплана–Манохара [4], и позволяет выделить достаточно узкую область значений для кварковых отношений:  $m_u/m_d = 0,553 \pm 0,043$ ,  $m_s/m_d = 18,9 \pm 0,8$  [6].

Цель настоящей работы — показать, что аналогичное разложение эффективного лагранжиана модели Намбу–Иона-Лазинио (НИЛ) позволяет получить разумные ограничения на отношения кварковых масс путем рассмотрения семейства кривых (графическое изображение правил сумм), возникающих в NLO-приближении из массовых формул для  $\pi$ - и  $K$ -мезонов.

## ПРАВИЛА СУММ ДЛЯ ОТНОШЕНИЙ МАСС КВАРКОВ

Эффективный лагранжиан  $1/N_c$  модели НИЛ [7, 8] получается путем вычисления однопетлевых кварковых диаграмм, если дополнительно принять правила счета  $1/N_c \chi$ РТ:  $1/N_c = O(\delta)$ ,  $p^2 = O(\delta)$ ,  $m_q = O(\delta)$  [5]. Метод собственного времени Фока–Швингера позволяет провести вычисления непосредственно в координатном пространстве и одновременно

учесть эффекты явного нарушения киральной симметрии [9–11]. Для дальнейшего нам потребуется результат, полученный для масс псевдоскалярных полей:

$$\bar{m}_{ij}^2 = \bar{\mu}_{ij}^2 \left( 1 + \frac{m_i + m_j}{2M_0} \delta_M \right). \quad (7)$$

Поясним обозначения. Индексы  $(i, j)$  отвечают кварковому содержанию конкретного мезонного состояния:  $\pi^\pm \rightarrow (u, d)$ ,  $K^\pm \rightarrow (u, s)$ ,  $K^0, \bar{K}^0 \rightarrow (d, s)$ . Результат лидирующего приближения  $\bar{\mu}_{ij}^2$  совпадает с результатом алгебры токов (3) с той лишь разницей, что модель позволяет выразить константу  $B_0 = M_0/(2G_S F^2)$  через константы четырехкварковых взаимодействий скалярного  $G_S$  и векторного  $G_V$  типов, а также масштаб спонтанного нарушения киральной симметрии  $\Lambda = 4\pi F \simeq 1,1$  ГэВ. Последний (вместе с  $G_S$ ) определяет массу конституентных кварков в киральном пределе  $M_0$ , которая является решением уравнения щели. Константа  $F = 1/(2\sqrt{aG_S + G_V})$  учитывает эффект смешивания псевдоскалярных и аксиально-векторных состояний. Параметр  $a$  отвечает за величину и знак поправки к массе конституентного кварка  $M_q = M_0 + am_q$ , где

$$a = \frac{\pi^2}{N_c G_S M_0^2 J_1(M_0)} > 0, \quad J_1(M_0) = \ln \left( 1 + \frac{\Lambda^2}{M_0^2} \right) - \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + M_0^2}. \quad (8)$$

Безразмерный параметр  $\delta_M = a - \bar{a}$ . Константы распада  $\pi$ - и  $K$ -мезонов имеют вид

$$f_{ij} = F \left( 1 + \frac{m_i + m_j}{4M_0} \bar{a} \right), \quad \bar{a} = 8a^2 F^2 G_S \left[ 1 - \frac{\Lambda^4 J_1(M_0)^{-1}}{(\Lambda^2 + M_0^2)^2} \right]. \quad (9)$$

Рассмотрим отношения  $R_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), составленные из массовых формул (7),

$$R_i = k_i \left( 1 + l_i \frac{m_d}{2M_0} \delta_M \right) + O(\delta^2), \quad (10)$$

где коэффициенты  $k_i$  и  $l_i$  являются функциями  $x = m_u/m_d$  и  $y = m_s/m_d$ . Очевидно, что если взять два любых элемента данного множества,  $R_i$  и  $R_j$ , то можно исключить зависимость от  $m_d \delta_M/M_0$ . В результате мы приходим к уравнению кривой в плоскости  $(x, y)$

$$k_i k_j (l_i - l_j) = k_i l_i R_j - k_j l_j R_i. \quad (11)$$

Наиболее интересные варианты связаны с отношениями

$$R_1 = \frac{m_{K^+}^2}{m_{\pi^+}^2} \implies k_1 = \frac{x + y}{x + 1}, \quad l_1 = y - 1.$$

$$R_2 = \frac{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2} \implies k_2 = \frac{1 - x}{y - x}, \quad l_2 = y - 1.$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2} \implies k_3 = \frac{y}{x}, \quad l_3 = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}. \\
 R_x &= \frac{m_{K^+}^2 - m_{K^0}^2 + m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} \implies k_x = x, \quad l_x = y \left( x - \frac{1}{x} \right). \\
 R_y &= \frac{m_{K^+}^2 + m_{K^0}^2 - m_{\pi^+}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + m_{\pi^+}^2} \implies k_y = y, \quad l_y = x \left( y - \frac{1}{y} \right).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Выбор пары  $(R_1, R_2)$  ведет к эллипсу (5). С учетом нарушения теоремы Дашена в NLO-приближении его главная полуось определяется формулой

$$Q^2 = \left( \frac{m_{K^0}^2}{m_{\pi^0}^2} - 1 \right) \left( \frac{m_{K^0}^2}{m_{K^0}^2 - m_{K^+}^2 + \tilde{\Delta}_{el}^2} - 1 \right), \quad (13)$$

которая помимо масс пиона и каона содержит вклад электромагнитных взаимодействий в массу заряженного каона  $\tilde{\Delta}_{el}$ .

Пары  $(R_x, R_3)$  и  $(R_1, R_3)$  порождают кривые, которые определяют верхнюю и нижнюю границы семейства, построенного исходя из отношений (12). Этим кривым отвечают уравнения

$$xy(1 - x^2)(xR_3 - y) = (y^2 - x^2)(x - R_x), \quad (14)$$

$$x(y - 1)(y - xR_3) = y^2 - x^2 + (x - y)(1 + x)R_1. \quad (15)$$

Остальные кривые (рис. 1) лежат внутри данной области. Общая точка семейства кривых отвечает значению  $\delta_M = 0$ , т. е. отношениям (4). Будем называть ее точкой Вайнберга. Из рисунка видно, что чем больше величина параметра  $\delta_M$  отклоняется от нуля, тем хуже предсказательная сила расчетов, основанных на правилах сумм (11), поскольку нет

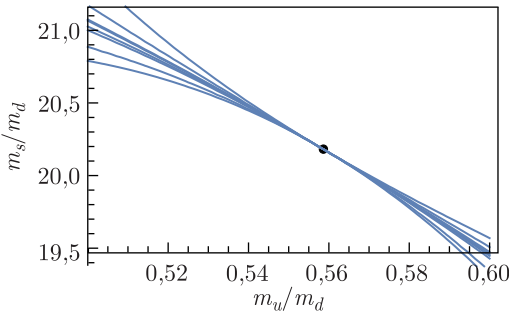


Рис. 1. Семейство кривых, порождаемых отношениями (12), в окрестности общей точки — точки Вайнберга  $\delta_M = 0$  (здесь для простоты предполагается, что теорема Дашена выполнена)

весомых теоретических аргументов, позволяющих отдать предпочтение какой-либо отдельной кривой.

Это на первый взгляд разочаровывающее наблюдение на самом деле существенно ограничивает область допустимых значений для отношений  $m_u/m_d$  и  $m_s/m_d$ .

Покажем, как это происходит. Прежде всего заметим, что отношение  $R_i$  зависит от параметра  $\tilde{\Delta}_{el}$ , который однозначно связан с величиной большой полуоси эллипса (13). Как мы уже отмечали, значение  $Q$  может быть извлечено из экспериментальных данных по распаду  $\eta \rightarrow 3\pi$ . В наших оценках используется интервал  $Q = 22,3 \pm 0,8$ , что соответствует значениям  $\tilde{\Delta}_{el} = (47,1 \mp 4,5)$  МэВ. В пересчете на электромагнитную разность масс заряженного и нейтрального каонов это дает

$$(m_{K^+} - m_{K^0})_{em} = (2,25 \pm 0,45) \text{ МэВ.}$$

Наш выбор согласуется с оценкой  $Q = 22,1 \pm 0,7$ , полученной из дисперсионного анализа распада  $\eta \rightarrow 3\pi$  [12], но при этом чуть сдвинут в область более высоких значений, характерных для вычислений на решетке:  $Q = 23,4 \pm 0,6$  ( $N_f = 2 + 1$ ) [13],  $Q = 23,8 \pm 1,1$  ( $N_f = 2 + 1 + 1$ ) [14].

Зависимость отношения  $m_s/m_d$  от  $m_u/m_d$  изображена на рис. 2. Из рисунка видно, что эллипс, построенный в предположении  $\tilde{\Delta}_{el} = \tilde{\Delta}_{el}$ , содержит точку Вайнберга. Нарушение теоремы Дашена  $\Delta_{el} \neq \tilde{\Delta}_{el}$  и дан-

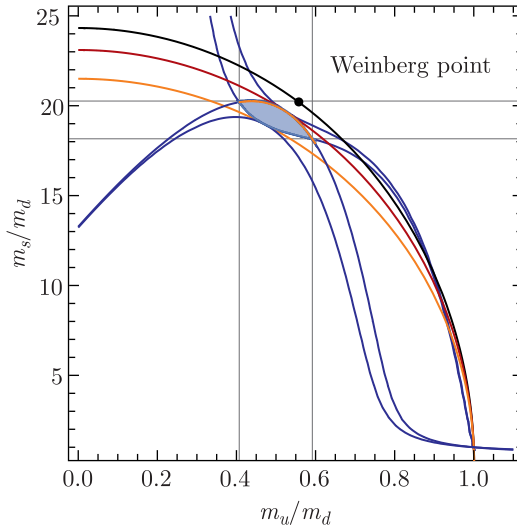


Рис. 2. Зависимость отношения  $m_s/m_d$  от  $m_u/m_d$  в NLO-приближении. Допустимые значения отношений кварковых масс принадлежат пересечению полос, порождаемых всем семейством кривых  $\{R_i\}$  (выделено серым цветом). Результат алгебры токов отмечен точкой

Таблица 1.  $\overline{\text{MS}}$ -массы кварков  $m_q$  ( $\mu = 2$  ГэВ) и их отношения, полученные в результате вычислений на решетке

Коллаборация	Ссылка	$N_f$	$m_u$ , МэВ	$m_d$ , МэВ	$m_u/m_d$	$m_s/\hat{m}$
BMW	[13]	2 + 1	$2,27 \pm 0,09$	$4,67 \pm 0,09$	$0,485 \pm 0,020$	$27,42 \pm 0,12$ [17]
RM123	[14]	2 + 1 + 1	$2,50 \pm 0,17$	$4,88 \pm 0,20$	$0,513 \pm 0,030$	—
ETM	[16]	2 + 1 + 1	$2,36 \pm 0,24$	$5,03 \pm 0,26$	$0,470 \pm 0,056$	$26,66 \pm 0,32$
FLAG	[17]	2 + 1 + 1	$2,14 \pm 0,08$	$4,70 \pm 0,05$	$0,465 \pm 0,024$	$27,23 \pm 0,10$

ные по распаду  $\eta \rightarrow 3\pi$  «размывают» эту кривую до полосы, отвечающей интервалу  $Q = 22,3 \pm 0,8$ . Такие же изменения претерпевают и все остальные кривые, полученные исходя из множества  $\{R_i\}$ . На рис. 2 приведены только полосы, возникающие от учета ошибок у двух граничных кривых, заданных уравнениями (14) и (15). Именно этими кривыми определяется область пересечения всего семейства полос, которая на рисунке выделена серым цветом. Подчеркнем, что чем с большей точностью измерена величина  $Q$ , тем меньше область пересечения, а значит ограничения на отношения масс кварков становятся более жесткими. Как легко убедиться, только в этой области все правила сумм дают одинаковый результат, который можно представить в следующем виде:

$$\frac{m_u}{m_d} = 0,50 \pm 0,09, \quad \frac{m_s}{m_d} = 19,21 \pm 1,05, \quad \frac{m_s}{\hat{m}} = 25,61 \pm 2,94. \quad (16)$$

Интересно, что численные оценки (16) не противоречат данным PDG:  $m_u/m_d = 0,474^{+0,056}_{-0,074}$ ,  $m_s/m_d = 19,5 \pm 2,5$ ,  $m_s/\hat{m} = 27,33^{+0,67}_{-0,77}$  [15], а также КХД-вычислениям на решетке (табл. 1). Изложенные выше простые соображения, основанные на формулах (11), очевидным образом исключают возможность решения сильной СР-проблемы посредством гипотезы  $m_u = 0$ , поскольку область пересечения полос с увеличением точности измерения  $Q$  всегда будет принадлежать интервалу (16).

### МАССЫ КВАРКОВ В $1/N_c$ -МОДЕЛИ НИЛ

Заметим, что до сих пор мы старались не использовать детали модели. По существу, формулы (16) — результат учета первой поправки в  $1/N_c$ -разложении масс  $\pi$ - и  $K$ -мезонов, т. е. формул (7), где численные значения констант  $B_0$  и  $\delta_M$  нам были не важны. Теперь мы займемся фиксацией параметров модели и, как следствие, определением абсолютных величин масс кварков.

Хорошо известно, что бегущие массы кварков  $m_q(\mu)$  в КХД зависят от ренормгруппового масштаба  $\mu$  в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме вычитаний. Напротив, массы кварков в модели НИЛ зависят от обрезания  $\Lambda$ , величина которого ассоциируется с характерным масштабом спонтанного нарушения киральной симметрии  $\Lambda_{\text{ХСВ}} \leq 4\pi f_\pi = 1,2$  ГэВ. Поэтому, полагая, что  $\Lambda \simeq \Lambda_{\text{ХСВ}}$ , оставшиеся пять параметров модели  $G_{S,V}$ ,  $m_q$  мы фиксируем

**Таблица 2. Параметры модели  $G_S, G_V, m_q$ , фиксированные при двух значениях  $\Lambda$  по величинам масс  $m_{\pi^+}, m_{K^0}, m_{K^+}$  и константам лептонного распада пиона  $f_\pi$  и каона  $f_K$ . Приведенные ошибки учитывают только погрешность в измерении  $Q = 22,3 \pm 0,8$**

Фит	$\Lambda$ , ГэВ	$G_S$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$G_V$ , ГэВ <sup>-2</sup>	$m_u$ , МэВ	$m_d$ , МэВ	$m_s$ , МэВ	$M_0$ , МэВ	$-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3}$ , МэВ	$B_0$ , ГэВ
<i>a</i>	0,9	10,75	3,45	$4,0^{+0,13}_{-0,08}$	$7,0^{+0,09}_{-0,12}$	$127,2^{+0,2}_{-0,04}$	289	238	1,63
<i>b</i>	1,1	6,6	7,4	$2,57 \pm 0,07$	$4,56^{+0,06}_{-0,08}$	$83,7 \pm 0,1$	274	275	2,53

исходя из феноменологических значений масс  $\pi$ - и  $K$ -мезонов, а также констант лептонных распадов  $f_\pi$  и  $f_K$ . Поскольку  $\Lambda_{\chi\text{SB}} \sim 1$  ГэВ, можно было бы предположить, что величины  $m_q$  в модели НИЛ должны соответствовать их КХД-значениям при  $\mu = 1$  ГэВ. На самом деле это не совсем так. Причина в том, что из-за квадратичной расходимости уравнения щели, обрезанной на масштабе  $\Lambda$ , результат фитирования сильно меняется даже при малом изменении  $\Lambda$ . Табл. 2 демонстрирует эту особенность модели. Если положить  $\Lambda = 0,9$  ГэВ (фит *a*), то массы кварков действительно оказываются близки КХД-оценкам при  $\mu = 1$  ГэВ. На это же указывает сравнение численных значений кваркового конденсата и  $B_0$  с известными результатами [18]. Однако небольшое ( $\simeq 12\%$ ) увеличение параметра  $\Lambda$  до значения  $\Lambda = 1,1$  ГэВ (фит *b*) ведет к картине, которая ближе известным КХД-оценкам при  $\mu = 2$  ГэВ. Действительно, вычисления на решетке в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме при  $\mu = 2$  ГэВ дают

$$-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3} = 270^{+5,8}_{-6,4} \text{ МэВ}, \quad B_0 = (2,64 \pm 0,20) \text{ ГэВ} \quad [19], \quad (17)$$

$$-\langle\bar{q}q\rangle_0^{1/3} = 272,3^{+1,8}_{-1,8} \text{ МэВ}, \quad B_0 = (2,682 \pm 0,053) \text{ ГэВ} \quad [20].$$

Приведенные в табл. 2 оценки показывают, что

$$\begin{aligned} m_q^{\text{НИЛ}}(\Lambda = 0,9 \text{ ГэВ}) &\simeq m_q^{\text{КХД}}(\mu = 1,0 \text{ ГэВ}), \\ m_q^{\text{НИЛ}}(\Lambda = 1,1 \text{ ГэВ}) &\simeq m_q^{\text{КХД}}(\mu = 2,0 \text{ ГэВ}). \end{aligned} \quad (18)$$

В силу соотношения Гелл-Манна–Оакса–Ренера, аналогичные оценки имеют место и для величины кваркового конденсата в киральном пределе.

Почему мы говорим о соответствии оценок, полученных двумя принципиально разными методами? Чтобы ответить на данный вопрос, напомним, что отношение бегущих кварковых масс  $m_i(\mu)/m_j(\mu)$  в  $\overline{\text{MS}}$ -схеме не зависит от  $\mu$ , т. е. нечувствительно к выбору точки вычитания. Легко убедиться, что и в рассмотренных выше случаях (*a* и *b*) отношения кварковых масс  $m_u/m_d$  и  $m_s/m_d$  не зависят от выбора обрезания  $\Lambda$



(с учетом указанных ошибок):

$$\frac{m_u}{m_d} = \begin{cases} 0,575_{-0,025}^{+0,022} (a), \\ 0,564_{-0,025}^{+0,023} (b), \end{cases} \quad \frac{m_s}{m_d} = \begin{cases} 18,150_{-0,296}^{+0,276} (a), \\ 18,344_{-0,307}^{+0,285} (b). \end{cases} \quad (19)$$

В заключение отметим, что любая из приведенных в табл. 2 параметризаций может использоваться для количественных расчетов, что мы и наблюдаем в [21].

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gell-Mann M., Oakes R.J., Renner B.* Behavior of Current Divergences under  $SU(3) \times SU(3)$  // *Phys. Rev.* 1968. V. 175, No. 5. P. 2195–2199.
2. *Weinberg S.* The Problem of Mass // *Trans. New York Acad. Sci.* 1977. V. 38. P. 185–201.
3. *Gasser J., Leutwyler H.* Chiral Perturbation Theory: Expansions in the Mass of the Strange Quark // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 250, No. 1–4. P. 465–516.
4. *Kaplan D.B., Manohar A.V.* Current-Mass Ratios of the Light Quarks // *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56, No. 19. P. 2004–2007.
5. *Leutwyler H.* Bounds on the Light Quark Masses // *Phys. Lett. B.* 1996. V. 374, No. 1–3. P. 163–168.
6. *Leutwyler H.* The Ratios of the Light Quark Masses // *Ibid.* V. 378, No. 1–4. P. 313–318.
7. *Osipov A.A.*  $1/N_c$  Nambu–Jona-Lasinio Model: Electrically Charged and Strange Pseudoscalars // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 108, No. 1. P. 016014.
8. *Osipov A.A.*  $1/N_c$  Nambu–Jona-Lasinio Model:  $\pi^0$ ,  $\eta$  and  $\eta'$  Mesons // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 108, No. 3. P. 036012.
9. *Osipov A.A.* Fock–Schwinger Method in the Case of Different Masses // *JETP. Lett.* 2021. V. 113, No. 6. P. 413–417.
10. *Osipov A.A.* Proper-Time Method for Unequal Masses // *Phys. Lett. B.* 2021. V. 817. P. 136300.
11. *Osipov A.A.* Proper-Time Evaluation of the Effective Action: Unequal Masses in the Loop // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 104. P. 105019.
12. *Colangelo G., Lanz S., Leutwyler H., Passemar T.* Dispersive Analysis of  $\eta \rightarrow 3\pi$  // *Eur. Phys. J. C.* 2018. V. 78, No. 11. P. 947.
13. *Fodor Z. et al. (BMW Collab.).* Up and Down Quark Masses and Corrections to Dashen’s Theorem from Lattice QCD and Quenched QED // *Phys. Rev. Lett.* 2016. V. 117, No. 8. P. 082001.
14. *Giusti D. et al. (RM123 Collab.).* Leading Isospin-Breaking Corrections to Pion, Kaon and Charmed-Meson Masses with Twisted-Mass Fermions // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95, No. 11. P. 114504.
15. *Workman R.L. et al. (Particle Data Group).* Review of Particle Physics // *Prog. Theor. Exp. Phys.* 2022. V. 2022, No. 8. P. 083C01.
16. *Carrasco N. et al. (ETM Collab.).* Up, Down, Strange and Charm Quark Masses with  $N_f = 2 + 1 + 1$  Twisted Mass Lattice QCD // *Nucl. Phys. B.* 2014. V. 887. P. 19–68.

17. *Aoki Y. et al. (Flavour Lattice Averaging Group (FLAG)). FLAG Review 2021. arXiv:2111.09849 [hep-lat]. 2022.*
18. *Gasser J., Leutwyler H. Quark Masses // Phys. Rep. 1982. V. 87, No. 3. P. 77–169.*
19. *Baron R. et al. (ETM Collab.). Light Meson Physics from Maximally Twisted Mass Lattice QCD // J. High Energy Phys. 2010. V. 1008. P. 097.*
20. *Borsanyi S. et al. SU(2) Chiral Perturbation Theory Low-Energy Constants from 2 + 1 Flavor Staggered Lattice Simulations // Phys. Rev. D. 2013. V. 88. P. 014513.*
21. *Klevansky S. P. The Nambu–Jona-Lasinio Model of Quantum Chromodynamics // Rev. Mod. Phys. 1992. V. 62, No. 3. P. 649–708.*