

# РЕЗУЛЬТАТЫ СОТРУДНИЧЕСТВА ОИЯИ–UNISA В ОБЛАСТИ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ НАНОСТРУКТУР

*Ю. М. Шукринов*<sup>1,2,\*</sup>, *А. Е. Бота*<sup>3,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup> Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

<sup>3</sup> Университет Южной Африки, Йоханнесбург, ЮАР

Представлен обзор результатов, полученных в рамках сотрудничества ОИЯИ–UNISA в области теоретического исследования джозефсоновских наноструктур. В частности, наша работа включала исследование широкого спектра нелинейных динамических эффектов различных систем джозефсоновских переходов, а именно системы внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках и переходы сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник, которые в настоящее время интенсивно исследуются в связи с их применением в сверхпроводниковой электронике и спинтронике.

An overview of the results obtained within the framework of the JINR–UNISA collaboration in the field of theoretical study of Josephson nanostructures is presented. In particular, our work has involved studies of a wide variety of nonlinear dynamic effects in various systems of coupled Josephson junctions, including superconductor–ferromagnet–superconductor junctions, which are currently being investigated intensively due to the potential applications in superconducting spintronics.

PACS: 01.65.+g

## ВВЕДЕНИЕ

Сотрудничество Объединенного института ядерных исследований (ОИЯИ) и Университета Южной Африки (UNISA) в области теоретических исследований сверхпроводящих наноструктур началось с дискуссий, состоявшихся на 56-й ежегодной конференции Южно-Африканского института физики (SAIP) с 12 по 15 июля 2011 г. На конференции нами были представлены доклады, посвященные численным моделям оптимизированных периодических и гиперхаотических режимов тройного маятника [1] и моделированию внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках [2]. Поскольку маятник

---

\* E-mail: shukrinov@theor.jinr.ru

\*\* E-mail: bothaae@unisa.ac.za

является хорошо известной механической аналогией джозефсоновского перехода, представленные результаты вызвали взаимный интерес. В ходе последующих обсуждений выяснилось, что эти две системы на самом деле имеют ряд общих черт и их анализ открывает новые направления в исследовании обеих систем. С точки зрения математики эти системы также довольно близки друг другу. Таким образом, тот факт, что очень похожие методы моделирования и анализа могут быть успешно применены к обеим системам, лег в основу нашего сотрудничества.

К 56-й ежегодной конференции SAIP, во многом благодаря усилиям покойного профессора С. А. Софианоса (который завершил работу по возрасту на кафедре физики UNISA в 2010 г.), фундамент для сотрудничества между ОИЯИ и Южной Африкой уже был прочно заложен. По инициативе ОИЯИ и южноафриканских институтов ядерной физики в феврале 2007 г. в Скукузе, в Национальном парке Крюгера, был организован 1-й симпозиум DST–UNISA–ОИЯИ (рис. 1), а 2-й симпозиум ЮАР–ОИЯИ прошел в Дубне в сентябре 2010 г. (рис. 2).

Оба симпозиума помогли установить плодотворное и постоянное сотрудничество между сообществами физиков наших стран (преимущественно в области ядерной физики и элементарных частиц). Однако ко времени третьего симпозиума в Стелленбоше в ноябре 2012 г. было



Рис. 1. Участники 1-го симпозиума DST–UNISA–ОИЯИ, февраль 2007 г., Скукуза. На корточках в центре С. А. Софианос



Рис. 2. Участники 2-го симпозиума ЮАР–ОИЯИ «Модели и методы в системах нескольких и многих тел», 8–10 сентября 2010 г., Дубна

также установлено несколько новых областей научного сотрудничества, включая наши собственные первые совместные исследования резонансного хаоса в некоторых системах внутренних джозефсоновских переходов [3]. С тех пор наши исследования охватывают изучение множества различных динамических эффектов, связанных со структурами джозефсоновских переходов, включая возникновение состояний «дышащей химеры» во внутренних джозефсоновских переходах [4, 5] и моделирование, выявляющее признаки и возможное экспериментальное обнаружение майорановских фермионов в сверхпроводниковых квантовых интерференционных устройствах (СКВИДах) с нетривиальными барьерами [6].

Недавно, в целях дальнейшего расширения масштабов сотрудничества ЮАР–ОИЯИ, была начата новая серия семинаров. В январе 2020 г. мы приняли участие в первом семинаре ЮАР–ОИЯИ по теории и вычислениям (рис. 3).

Из-за затянувшейся пандемии covid-19, охватившей Южную Африку в марте того же года, второй семинар был отложен до декабря 2023 г. Однако мы ожидаем, что эта новая серия семинаров в будущем продолжится как регулярная и поможет укреплению нашего сотрудничества. На сегодняшний день в результате нашего сотрудничества опубликовано 27 журнальных статей [3, 5, 7–31], 11 материалов кон-



Рис. 3. Первый семинар ЮАР–ОИЯИ по теории и вычислениям прошел 27–29 января 2020 г. недалеко от красивого города Франшхук в винодельческих землях Западного Кейпа

ференций [1, 4, 6, 26, 32–38] и множество тезисов конференций, например [39–43].

Представим краткий всесторонний обзор наших совместных исследований за последние двенадцать лет. Порядок, в котором это описано под заголовками следующих разделов, более или менее хронологический. В разд. 1 обсуждается возникновение хаоса в системе связанных (внутренних) переходов, вызванное параметрическим резонансом. Идея структурированного хаоса, обнаруженного нами в одиночном джозефсоновском переходе под действием внешнего элетромагнитного излучения, представлена в разд. 2.

В разд. 3 мы продолжаем обсуждение анализа одиночного джозефсоновского перехода, демонстрируя существование лестницы Фарея, возникающей в результате двухэкстремальной (в отличие от унимодальной) «карты возврата» перехода. Мы обнаружили и описали спонтанную и контролируруемую синхронизацию хаоса в системе внутренних джозефсоновских переходов. В разд. 4 мы показываем, что они способны демонстрировать спонтанную и контролируруемую синхронизацию хаоса в качестве реакции на внешнее электромагнитное излучение. Это свойство может быть полезно, например, для хаосного шифрования. В разд. 5

обсуждается хаос, возникающий на резонансной ветви системы внутренних джозефсоновских переходов, шунтированных резистивными (R), индуктивными (L) и емкостными (C) элементами. Здесь динамика осложняется тем, что частота резонансного контура RLC связана с колебаниями внутренних переходов, которые имеют свою собственную частоту.

В разд. 6 показаны конкретные лестничные структуры, которые возникают в джозефсоновском переходе сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник S-F-S под действием циркулярно поляризованного магнитного поля. В этих S-F-S-структурах хаотические и бифуркационные особенности важны для разработки надежных сверхпроводниковых электронных устройств, как это отмечалось в разд. 7. Гистерезис и хаос в аномальных джозефсоновских переходах без емкости обсуждаются в разд. 8. Здесь мы видим, что существует мультистабильность из-за связи сверхпроводящего тока с магнитным моментом. Такая мультистабильность имеет решающее значение для приложений, в которых используется коммутация, например, в устройствах памяти.

В разд. 9 мы проанализировали бифуркационную структуру и хаос, возникающие в наномагните, связанном с джозефсоновским переходом. Здесь связь осуществляется через магнитный векторный потенциал, а не является внутренней. В наших исследованиях, обсуждаемых в разд. 10, нам удалось показать, что в значительном диапазоне сил связи модель внутренних джозефсоновских переходов с более расширенным диапазоном связи может поддерживать возникновение так называемых «дышащих» химерных состояний. Наши результаты по резонансным явлениям, возникающим в высокотемпературных сверхпроводниках, представленные в разд. 11, позволили нам предложить новый метод определения заряда сверхпроводящих слоев, основанный на динамике напряжения в системе. Возникновение заряда в сверхпроводящих слоях в шунтированных высокотемпературных сверхпроводниках обсуждается в разд. 12. Полное перемагничивание в структуре S-F-S со спин-орбитальной связью за счет применения оптимизированного импульса электрического тока было продемонстрировано в работе, обсуждаемой в разд. 13. Такой переворот магнитного момента может быть важным для некоторых приложений в квантовых вычислениях.

В разд. 14 мы показали, что  $\varphi_0$ -переход обладает богатым разнообразием динамических состояний, определяемых как параметрами джозефсоновского перехода, так и параметрами промежуточного ферромагнитного слоя. Интересно, что его черты напоминают знаменитый маятник Капицы. Влияние ферромагнитного резонанса и динамики намагниченности на вольт-амперных характеристиках (ВАХ) S-F-S  $\varphi_0$ -перехода исследовано в разд. 15. Это приводит к «искривлению» ВАХ. Затем, в разд. 16 и 17, мы переключаем внимание на родственную модель, известную как модель Френкеля–Конторовой (ФК). Сначала мы изучаем случай малой емкости (разд. 16), а затем случай большой емкости (разд. 17). Модель ФК важна из-за ее общности и того факта, что она имеет много

общего с различными моделями джозефсоновских переходов. Ее часто используют как модель для изучения трения в различных системах. В разд. 18 мы объясняем значимость джозефсоновских переходов для важной проблемы достижения синхронности в распределительных сетях электроэнергии. Мы заканчиваем разд. 19, в котором подводятся итоги и делается прогноз относительно будущего сотрудничества по некоторым потенциальным приложениям, где могут найти применения наши недавние работы по усовершенствованию сверхпроводниковых электронных и спинтронных устройств.

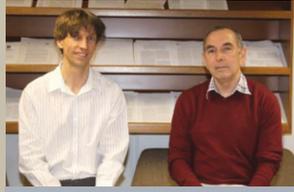
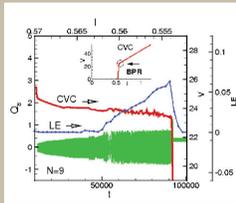
## **1. ХАОС И РЕЗОНАНСЫ В СВЯЗАННЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ**

Благодаря нашему сотрудничеству мы создали значительный задел для исследования и моделирования хаотических явлений в системе связанных джозефсоновских переходов [3, 7, 8, 32, 9, 10, 5] (ДП). В частности, было показано возникновение хаоса в системе связанных переходов, вызванного параметрическим резонансом, а также структурированного хаоса под воздействием внешнего электромагнитного излучения. Мы обнаружили, что в стеке внутренних джозефсоновских переходов хаотические особенности возникают из-за связи между различными переходами. Описана спонтанная и управляемая синхронизация хаоса, показаны важные для сверхпроводниковой электроники хаотические и бифуркационные особенности в наноструктурах сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник. Ниже представлены некоторые результаты совместных исследований в этой области науки.

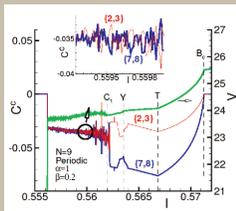
Хаотические особенности систем связанных джозефсоновских переходов, в частности, проявление хаоса во временной зависимости электрического заряда, связанного с параметрическим резонансом, продемонстрировано посредством расчета максимальной ляпуновской экспоненты ( $LE$ ), фазовых и зарядово-зарядовых диаграмм Лиссажу и корреляционных функций [3]. Мы показали, что количество переходов в стеке сильно влияет на тонкую структуру вольт-амперных характеристик, а сильный эффект близости обусловлен непериодическими граничными условиями. Наблюдаемый хаос, связанный с резонансом, демонстрирует перемежаемость при ряде условий и выборе параметров модели. Общие характеристики системы были проанализированы с помощью линеаризованного уравнения и критериев для области вблизи точки излома без возникновения хаоса. Такие критерии прояснили экспериментальные наблюдения изменений мощности излучения внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературных сверхпроводниках [44].

На рис. 4 (слева вверху) показаны зависимость максимальной ляпуновской экспоненты как функции базового тока и верхняя ветвь вольт-амперной характеристики в сравнении с временной зависимостью электрического заряда на 8-м переходе. На вставке показано положение

## Chaos in the systems of coupled Josephson junctions



Collaborative research visit at Unisa, 2013



Manifestation of chaos in the temporal dependence of the electric charge, related to a parametric resonance, was demonstrated through the calculation of the maximal Lyapunov exponent, phase-charge charge-charge Lissajous diagrams and correlation functions.

Yu. M. Shukrinov, M. Hamdipour, M. R. Kolahchi, A. E. Botha, and M. Suzuki, Manifestation of Resonance-Related Chaos in Coupled Josephson Junctions, Phys. Lett. A, 376, 3609-3619, 2012.

Рис. 4. Слева сверху: показатель Ляпунова как функция базового тока и вольт-амперная характеристика вместе с временной зависимостью заряда на 8-м сверхпроводящем слое  $Q_8$ . На вставке показано положение точки излома на верхней ветви вольт-амперной характеристики. Слева внизу: зарядовые корреляционные функции  $C_{l,l+1}^c = \langle Q_l(t)Q_{l+1}(t) \rangle$  для  $l = 2$  (обозначены 2,3) и  $l = 7$  (обозначенные 7,8) для стека с девятью ВДП в зависимости от базового тока. Адаптировано из работы [3]. На фото: А. Е. Бота и Ю. М. Шукринов

точки излома на верхней ветви вольт-амперной характеристики. Как вольт-амперная характеристика, так и временная зависимость заряда демонстрируют хаотическое поведение в интервале токов, где  $LE > 0$ .

Исследование корреляций сверхпроводящих токов в соседних джозефсоновских переходах позволило дополнительно продемонстрировать наблюдаемые хаотические особенности на вольт-амперных характеристиках. На рис. 4 представлены результаты вычислений для случаев  $l = 2$  и  $l = 7$  ( $l$  — номер сверхпроводящего слоя) для стека из девяти ДП. На основе этих результатов подтверждена ожидаемая особенность корреляционных функций в хаотической области: при переходе к хаотическому поведению (точка  $C_1$ ) значения всех корреляционных функций сближаются, т. е.  $\langle Q_l(t)Q_{l+1}(t) \rangle = \langle Q_l(t) \rangle \langle Q_{l+1}(t) \rangle$ . Таким образом, внутри хаотической области все корреляции в системе теряются.

Мы также впервые продемонстрировали перемежаемость резонансного хаоса в системах связанных ДП. Многие такие переходы можно

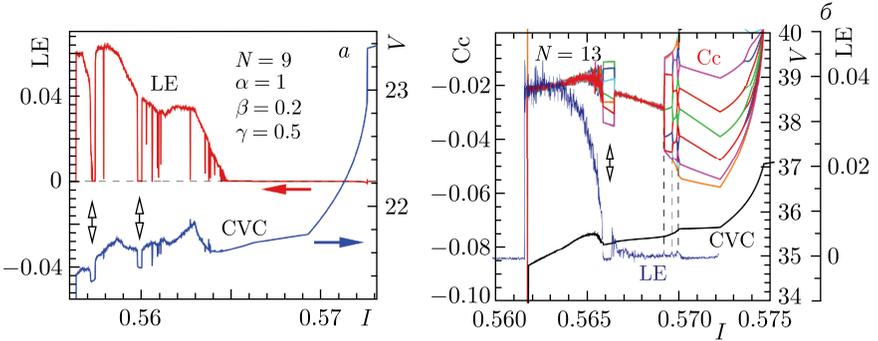


Рис. 5. *а)* Переменяемость показана окнами  $LE = 0$  внутри хаотической динамики. Стрелки указывают на соответствующие масштабы для каждой кривой, а штриховая линия показывает ось  $LE = 0$ . Двойные стрелки показывают соответствие между особенностями на ВАХ CVC и LE. *б)* Демонстрация переменяемости в интервале токов смещения  $0,5659 < I < 0,5565$  (показано двойной стрелкой) для корреляционных функций заряд-заряд (Cc) и LE для периодического стека из 13 переходов. Адаптировано из работы [3]

увидеть на рис. 5, *а*, где представлены результаты детального расчета LE вместе с ВАХ для стека из 9 переходов с использованием непериодических граничных условий (ГУ) при отношении толщины сверхпроводящего слоя к толщине крайнего слоя  $\gamma = 0,5$ .

Чтобы получить больше информации о переходах, нами исследована зависимость всех заряд-зарядовых корреляционных функций и LE от базового тока в точке излома. Как показывают результаты расчета ляпуновской экспоненты на рис. 5, *б*, отсутствие корреляций зарядов в различных S-слоях является признаком хаотического поведения. Мы видим восстановление корреляций в середине хаотической области для стека из 13 ДП. Все представленные характеристики (Cc, CVC и LE) отражают этот переход от хаотического поведения к регулярному и обратно. Наши результаты подчеркивают соответствие поведения корреляционных функций и ляпуновской экспоненты.

## 2. СТРУКТУРИРОВАННЫЙ ХАОС И ЛЕСТНИЧНАЯ СТРУКТУРА В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Джозефсоновский переход под действием внешнего электромагнитного излучения демонстрирует ряд интересных свойств, нашедших важные применения в различных областях сверхпроводниковой электроники и метрологии. В частности, современные стандарты единицы вольта основаны на явлении возникновения ступенек напряжения на вольт-амперных характеристиках ДП при совпадении частоты внешне-

го излучения с частотой джоузефовских осцилляций. В работе [7] в результате подробного численного моделирования ВАХ джоузефовского перехода (ВДП) под действием внешнего электромагнитного излучения продемонстрировано возникновение лестничных структур (так называемых Devil's staircases) в различных интервалах базового тока. Обнаружено, что положение наблюдаемых ступеней точно соответствует цепным дробям. Увеличение амплитуды излучения сдвигает лестничную структуру в область более высоких ступеней Шапиро. Предложен алгоритм возникновения и обнаружения субгармоник при увеличении амплитуды излучения.

Ступени лестничной структуры образуют непрерывные дроби напряжения  $V$  и определяются с помощью формулы

$$V = \left( N \pm \frac{1}{n \pm \frac{1}{m \pm \frac{1}{p \pm \dots}}} \right) \omega, \quad (1)$$

где  $N, n, m, p, \dots$  — целые положительные числа;  $\omega$  — частота излучения. При сокращении в формуле (1) на  $N$  можно получить условия для возникновения первого уровня цепной дроби, соответствующие основной ступени Шапиро. Аналогично, сократив формулу на  $n$ , можно получить условия второго уровня, соответствующие субгармоникам ступеней Шапиро. Было показано, что экспериментальные результаты легко классифицировать на основе формулы непрерывной дроби. Нами продемонстрировано, что субгармонические ступени, зарегистрированные в известных экспериментах Дайема и Виганда (Phys. Rev. 1967. V.155. P.419) и Кларка (Phys. Rev. B. 1971. V.4. P.2963), также образуют цепные дроби.

Другой интересный результат получен в работе [10], где обнаружено, что субгармонические ступени Шапиро при определенных параметрах разделены структурированными хаотическими окнами, которые демонстрируют масштабное сходство. Данная структура на ВАХ получила название «Светлана». Подробное исследование этой структуры показало, что наступление хаоса для субгармонических ступеней происходит по сценарию удвоения периода Фейгенбаума. Также была продемонстрирована универсальность последовательности периодических окон (U-последовательность) и сделан вывод о том, что структурированный хаос представляет собой устойчивое образование в широком диапазоне значений параметров. Вольт-амперная характеристика ДП при  $\omega = 0,5$  и  $A = 0,8$  представлена в основной части рис. 6, а.

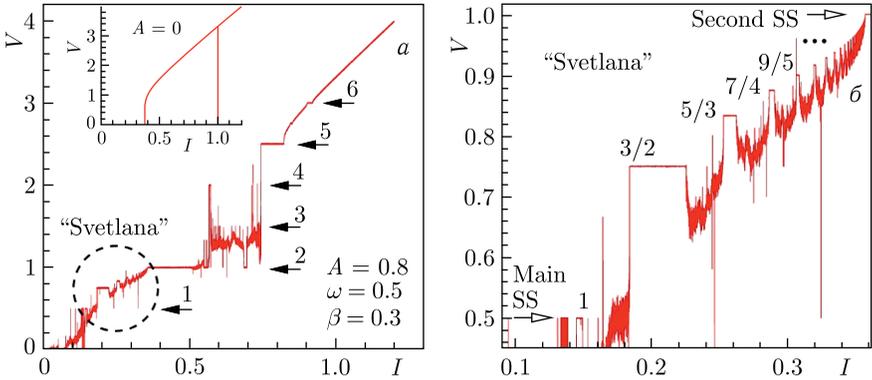


Рис. 6. а) ВАХ ДП при параметре диссипации  $\beta = 0,3$ , частоте внешнего излучения  $\omega = 0,5$  и амплитуде  $A = 0,8$ . Стрелки указывают номер гармоник ступеньки Шапиро. На врезке показана вольт-амперная характеристика без излучения. б) Увеличенная часть вольт-амперной характеристики (структура «Светлана»), обведенная на а, демонстрирующая ступеньки, чередующиеся с хаотическими областями. Адаптировано из работы [10]

Увеличенная часть области вольт-амперной характеристики, отмеченная кружком на рис. 6, а, представлена на рис. 6, б. В этой области на вольт-амперной характеристике наблюдается чередование устойчивых и хаотических участков, т. е. проявление структурированного хаоса.

### 3. ЛЕСТНИЦА ФАРЕЯ ИЗ ДВУХЭКСТРЕМАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ДП

В работе [15] мы сообщаем о новых явлениях синхронизации, происходящих в относительно небольшой, ранее неисследованной, области параметров в RCSJ-модели джозефсоновского перехода под действием внешнего электромагнитного излучения. На вольт-амперных характеристиках перехода наблюдаются две одинаковые лестницы Фарей, одна смещенная относительно другой. При увеличении (уменьшении) тока (параметра диссипации системы) две лестничные структуры сливаются в одну. Существование самой лестничной структуры Фарей можно понять в терминах одномерного итеративного отображения, содержащего два экстремума, а смещение двух лестниц связано со сворачиванием (двузначностью) в отображении возврата, отражающим более высокую дробную размерность системы.

На рис. 7 показаны проявления лестничной структуры Фарей на ВАХ при различных амплитудах внешнего излучения. Все наблюдаемые здесь субгармоники возникают между второй ( $V = 1$ ) и третьей ( $V = 1,5$ ) гармониками. На врезке показан увеличенный вид ВАХ при  $A = 0,1$ .

Между двумя лестничными структурами присутствуют также хаотические промежутки, хотя лестничная структура не была завершена.

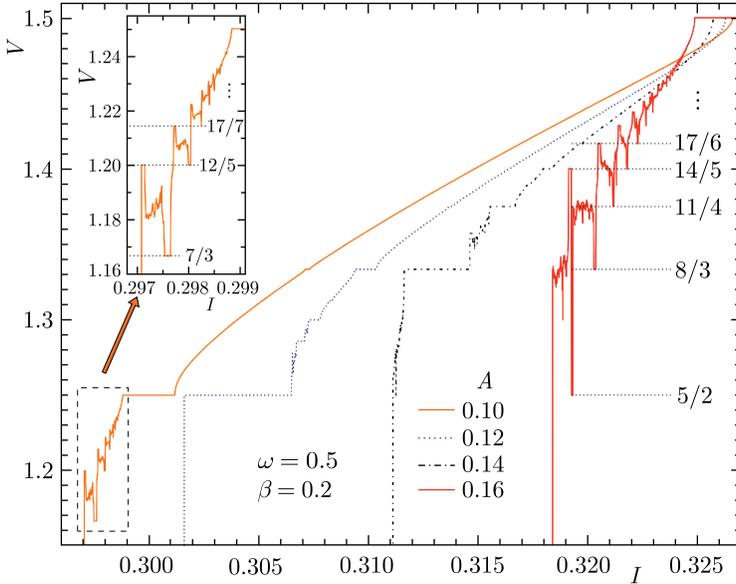


Рис. 7. Лестницы Фарея на ВАХ при четырех различных амплитудах  $A$ . Здесь  $V$  обозначает усредненное по времени напряжение. Адаптировано из работы [15]

Это предполагает, что сценарий перекрытия резонансов Чирикова [60] может применяться, хотя универсальный квазипериодический путь к хаосу при этом не прослеживается. При более высоких токах лестница Фарея в конечном счете присоединяется к третьей гармонике. В точке бифуркации, между последней ступенькой и нижним (по току) краем третьей гармоники, в системе наблюдается пример бифуркации, известный как катастрофа голубого неба (BSC) [42]. Это первый подобный случай, зарегистрированный в RCSJ-модели. Синусоидальная связь в модели отличает ее от других моделей низкого порядка, которые могут демонстрировать это явление BSC. В других моделях BSC имеется квадратичная [61] или кубическая [44] функция отклика.

Детали временного ряда напряжений при подъеме по лестнице и приближении к третьей гармонике демонстрируют сходство с феноменом взрыва, наблюдаемым в модели нейрона [43, 55]. Интересно, что для взрывающегося нейрона минимальная динамическая модель является трехмерной, и существуют связанные медленно-быстрые механизмы [62] точно так же, как мы наблюдали при токах, близких к бифуркации катастрофы голубого неба для модели RCSJ. Динамика взрыва недавно изучалась в связанной сети джозефсоновских переходов, каждый из которых находится в рамках RCSJ-модели [63]. Всплесковое поведение, наблюдаемое здесь для одиночного перехода, может быть важным

элементом возникающего поведения, наблюдаемого в глобально связанной RCSJ-модели.

#### 4. СПОНТАННАЯ И УПРАВЛЯЕМАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ХАОСА ВО ВНУТРЕННИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Свойства синхронизации модельных систем, содержащих большое число фазовых осцилляторов, имеют множество потенциальных биофизических и других применений. Биофизические примеры включают сети пейсмекерных клеток в сердце и супрагипоталамических в ядре мозга. В физических системах фазовая динамика высокотемпературных сверхпроводящих материалов продолжает привлекать внимание, поскольку системы внутренних джозефсоновских переходов образуют естественные массивы связанных фазовых осцилляторов. Таким образом, они потенциально могут выступать в качестве систем, в которых можно естественным образом наблюдать различные экзотические эффекты синхронизации.

В нашей работе [19] мы провели детальное исследование пространства параметров, содержащего области спонтанной хаотической синхронизации в модели ССJJ + DC внутренних джозефсоновских переходов. С помощью численного моделирования были обнаружены обширные области фазовой синхронизации, соответствующие ступеням Шапиро с нулевой плотностью заряда в S-слоях. Вычисляя спектры экспонент Ляпунова, мы обнаружили, что спонтанная синхронизация хаоса происходит только в определенных подобластях, которые перекрываются с «незаряженными» ступеньками на ВАХ. Управление осуществляется через фазовый сдвиг, пропорциональный полному напряжению, в приложенном электромагнитном поле. Эффект управления оказался тройным: 1) он имеет тенденцию к расширению интервала тока, в котором возникают ступеньки Шапиро на низших гармониках, 2) не изменяет ширину диапазона тока, в котором происходит синхронизация хаоса, и 3) делает синхронизацию хаоса более устойчивой к шуму. Представленная здесь хаос-синхронизация может быть полезна в любых приложениях, требующих более мощных, высокочастотных, хаотических сигналов, например, в безопасной связи.

На рис. 8 приведены два вида сечения в пространстве параметров  $I-A$ . На рис. 8, а показана величина производной  $V$  по отношению к постоянному току  $I$ . Эта производная является удобным способом отображения ступенек Шапиро, на которых она равна нулю (обозначены черными областями на рисунке). Некоторые из основных гармоник обозначены белыми метками в правой нижней части рисунка. На рис. 8, б показаны области синхронизации хаоса для соответствующей области пространства параметров. Здесь можно заметить, что синхронизация хаоса происходит в основном на краях ступенек Шапиро, часто там, где главная ступень уступает место бесконечной последовательности высших

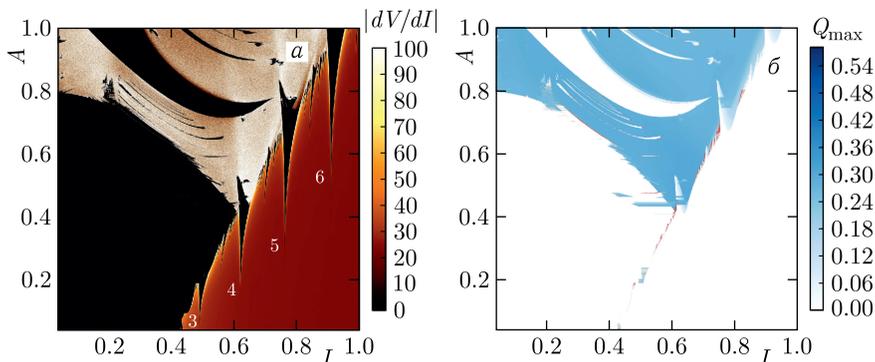


Рис. 8. *а*) Ступеньки Шапиро (или языки Арнольда) для  $\beta = 0,3$ . *б*) Соответствующие области синхронизации хаоса (показаны серым). Адаптировано из работы [19]

гармоник (или субгармоник). Такие бесконечные последовательности ступенек хорошо известны в литературе по джозефсоновским переходам и в свободной форме называются «дьявольскими» лестницами.

Все области синхронизации хаоса, которые мы наблюдали в работе [19], по-видимому, связаны с таким структурированным хаосом. Ближе к концу таких структур, где ступеньки начинают охватывать все меньшие и меньшие интервалы тока, промежуточные хаотические области становятся полностью синхронизированными, что и приводит к наблюдаемой нами спонтанной синхронизации хаоса. По мере приближения к самому концу лестницы (путем увеличения или уменьшения базового тока) области фазовой синхронизации становятся незначительно малы, и структурированный хаос проявляется как хаос-синхронизация.

## 5. ХАОС ВДОЛЬ $rc$ -ВЕТВИ ВНУТРЕННИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ С RLC-ШУНТИРОВАНИЕМ

В последнее время было предложено несколько различных форм управления хаосом, не только с целью его подавления, но и для установления более надежной синхронизации между переходами. Джозефсоновские переходы могут находиться либо в хаотическом состоянии, что важно для приложений, связанных с синхронизацией хаоса, либо в обычном состоянии, что важно для обнаружения слабых электромагнитных сигналов в присутствии шума или для дешифровки определенных типов шумовых компонентов в зашумленном сигнале [28]. Синхронизированные джозефсоновские переходы в высокотемпературных сверхпроводниках являются перспективными кандидатами на создание достаточно легких и компактных генераторов ТГц-волн. В то время как излучение одиночного джозефсоновского перехода крайне слабо, системы синхронизирован-

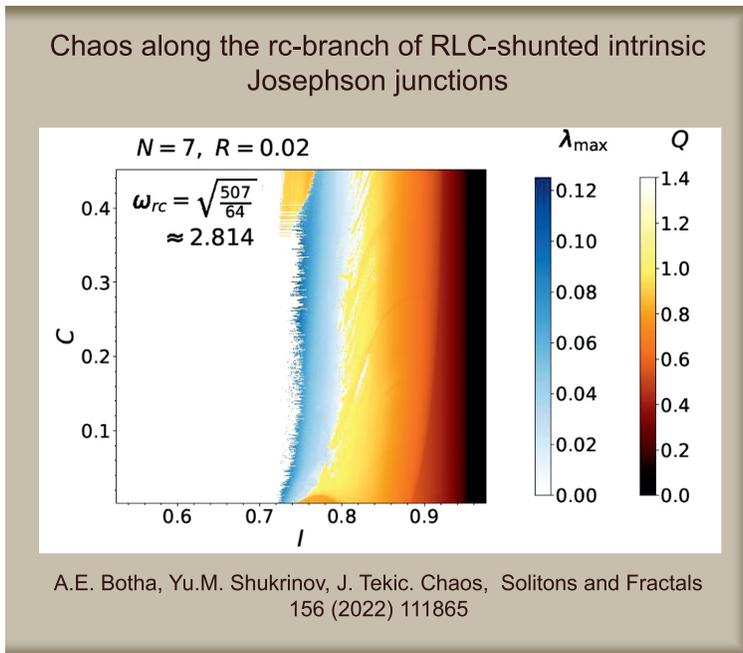


Рис. 9 (цветной в электронной версии). Максимальная ляпуновская экспонента и максимальная плотность заряда вдоль резонансной ветви в зависимости от емкости и базового тока. Адаптировано из работы [28]

ных джозефсоновских переходов обладают широкими перспективами для практического использования.

В работе [28] исследовано возникновение хаоса на резонансной ветви шунтированной системы внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературном сверхпроводнике. На основе рассчитанных электрических характеристик сверхпроводящих слоев и различных индикаторов хаоса, таких как экспоненты Ляпунова и сечения Пуанкаре, указаны области вольт-амперных характеристик с преобладанием хаоса, которые определяются частотой резонансного контура. Исследование метрической энтропии и максимальной размерности Каплана–Йорка показывает, что размеры хаотических аттракторов, связанных с хаосом, не достигают плато, как в случае систем с сильным демпфированием, а неограниченно растут с увеличением числа джозефсоновских переходов, демонстрируя многомерный хаос. Полученные результаты указывают на возможность управления хаосом в исследуемых системах. Цветные изображения максимальной экспоненты Ляпунова и максимальной плотности заряда вдоль резонансной ветви в зависимости от емкости и уменьшения постоянного базового тока представлены на рис. 9.

## 6. ЛЕСТНИЧНАЯ СТРУКТУРА И ХАОС В S-F-S $\varphi_0$ -ПЕРЕХОДАХ

Нами обнаружены специфические лестничные структуры в джозефсоновском переходе сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник, возникающие под действием циркулярно поляризованного магнитного поля [18]. Мы рассматривали два сверхпроводника, разделенных ферромагнитным слоем, как показано на рис. 10. Связь между джозефсоновской фазой и намагниченностью в S-F-S-переходах играет важную роль в динамике этой системы. При наличии этой связи проявление ферромагнитного резонанса в динамике намагниченности было показано как в нелинейной, так и в линеаризованной схемах. Ширина кривой ферромагнитного резонанса и положение резонансной частоты сильно зависят от соотношения джозефсоновской и магнитной энергий.

Нами была продемонстрирована аналитическая формула для условий возникновения дробных ступенек на ВАХ джозефсоновского S-F-S-перехода.

Возникновение лестничной структуры — универсальное явление для самых разных систем, включая бесконечные спиновые цепочки с дальнедействующими взаимодействиями, фрустрированные квазидвумерные спин-димерные системы в магнитных полях, а также в дробном квантовом эффекте Холла. Мы считаем, что субгармонические лестничные структуры могут быть использованы в различных областях сверхпроводниковой спинтроники, в частности, для детектирования майорановских состояний в джозефсоновских наноструктурах. Отметим, что в работе [45] авторы сообщили об экспериментальном наблюдении полудельных

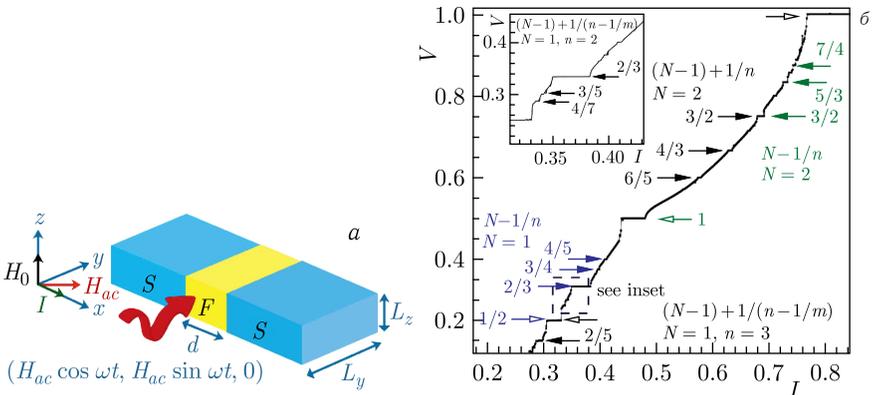


Рис. 10. а) Геометрия джозефсоновского S-F-S-перехода с площадью поперечного сечения  $L_y L_z$  в однородном магнитном поле  $H_0$  и циркулярно поляризованном магнитном поле  $H_{ac}$ ; б) субгармонические лестничные структуры на различных участках вольт-амперной характеристики S-F-S-перехода в области ферромагнитного резонанса. Адаптировано из работы [18]

ступенек Шапиро в сильном ферромагнитном джозефсоновском переходе (Nb-NiFe-Nb) посредством исследования фазовой зависимости тока при радиочастотном микроволновом возбуждении.

## 7. ХАОС И БИФУРКАЦИИ В НАНОСТРУКТУРАХ СВЕРХПРОВОДНИК–ФЕРРОМАГНИТ–СВЕРХПРОВОДНИК

Возможность достижения электрического контроля над магнитными свойствами системы с помощью джозефсоновского тока и, аналогично, достижение магнитного контроля над джозефсоновским током в последнее время привлекают большое внимание [20, 46–52].

Обычный джозефсоновский переход (сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник) не может проявлять хаос в отсутствие внешнего переменного сигнала, тогда как в джозефсоновском переходе сверх-

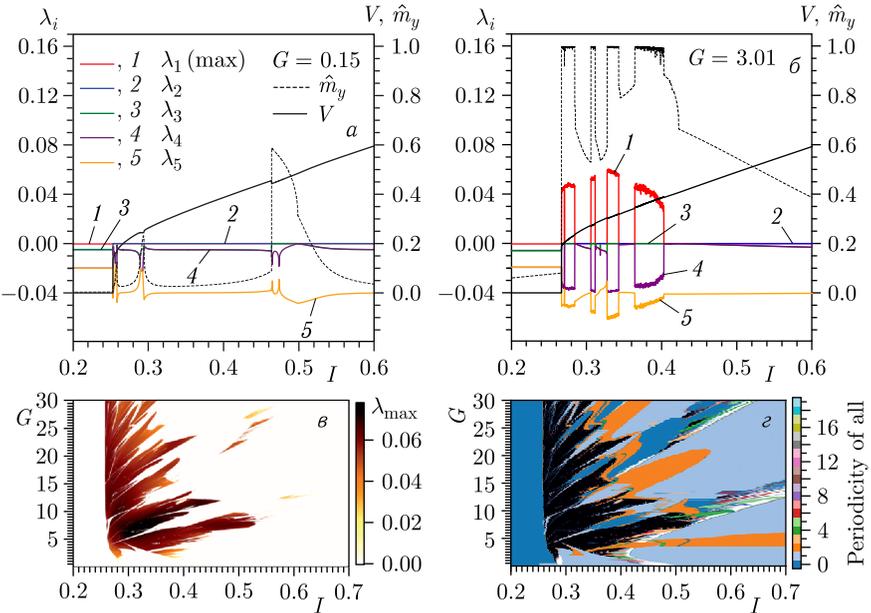


Рис. 11 (цветной в электронной версии). Возникновение хаоса в джозефсоновском переходе  $\varphi_0$  (а, б). Здесь  $V$  — усредненное по времени напряжение на переходе,  $\hat{m}_y$  — максимальное значение  $y$ -компоненты намагниченности.  $\lambda_i$  — экспоненты Ляпунова; хаотические области как функции отношения джозефсоновской энергии к магнитной  $G$  (в); демонстрация периодичности и синхронизации в джозефсоновском  $\varphi_0$ -переходе (г). Здесь области, отмеченные черным цветом, соответствующие нулю, указывают на области, где не все состояния имеют одинаковую периодичность, т. е. не полностью синхронизированы. Адаптировано из работы [31]

проводник–ферромагнит–сверхпроводник, известном как  $\varphi_0$ -переход, магнитный слой эффективно обеспечивает две дополнительные степени свободы, которые могут способствовать хаотической динамике в получающейся четырехмерной автономной системе. Результаты, полученные в работе [31], показывают, что из-за сохранения величины магнитного момента две из численно определенного полного спектра характеристических экспонент Ляпунова всегда равны нулю. Двумерные бифуркационные диаграммы, похожие на традиционные диаграммы изоспики, демонстрируют различные периодичности и синхронизационные свойства перехода в экспериментально доступных диапазонах параметров. Показано, что при уменьшении базового тока  $I$  наступление хаоса происходит в окрестности перехода в сверхпроводящее состояние.

На рис. 11, *a* и *б* показано возникновение хаоса в джозефсоновском  $\varphi_0$ -переходе при увеличении отношения  $G$  джозефсоновской энергии к магнитной. Здесь можно наблюдать полный спектр экспонент Ляпунова, причем, как отмечалось выше, две из них тривиально нулевые для любого  $I$ . На рис. 11, *в* показаны области хаоса, обозначенные положительными значениями максимальной экспоненты Ляпунова, как функции  $G$  при уменьшении базового тока  $I$ . Рис. 11, *г* демонстрирует периодичность и синхронизацию в джозефсоновском  $\varphi_0$ -переходе.

## **8. ГИСТЕРЕЗИС И ХАОС В АНОМАЛЬНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ БЕЗ ЕМКОСТИ**

Обычно джозефсоновские переходы с избыточным демпфированием не демонстрируют хаотического поведения в своей фазовой динамике либо потому, что размерность фазового пространства меньше трех (как в случае одиночного джозефсоновского перехода с избыточным демпфированием), либо из-за общей тенденции систем становиться менее хаотичными с увеличением диссипации (как в случае связанных джозефсоновских переходов с избыточным демпфированием, см. [16]). Нами обнаружено, что в случае сильной спин-орбитальной связи на вольт-амперные характеристики некоторых типов джозефсоновских переходов сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник  $\varphi_0$  оказывает сильное влияние вызванная током динамика намагниченности в прослойках [30]. Это влияние может привести к появлению хаотических областей и гистерезиса, даже если переход задемпфирован. Мы также продемонстрировали, что с помощью импульса тока можно вызвать переключение между состояниями напряжения, обусловленными различными магнитными модами. Такое поведение переключения может открыть новые перспективы для практических приложений, в частности, таких как устройства памяти.

На рис. 12 показан пример мультистабильности, которая порождает такую возможность переключения. В этом случае различные ветви на

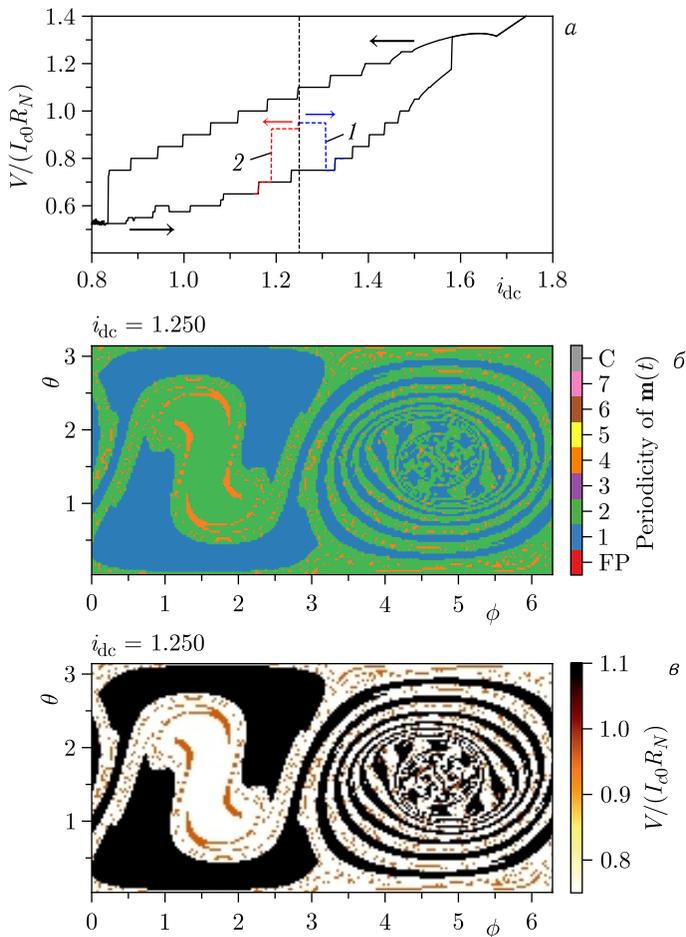


Рис. 12. *а*) Дополнительные ветви на ВАХ, обусловленные различными модами намагниченности. Стрелками указаны направления изменения базового тока  $i_{dc}$ . Дополнительные ветви, показанные пунктирными линиями, были получены путем выбора определенных начальных условий при  $i_{dc} = 1,25$  и последующего увеличения  $i_{dc}$  (пунктирная линия 2) и уменьшения (пунктирная линия 1). Вертикальная пунктирная линия показывает положение  $i_{dc} = 1,25$ . *б, в*) Бассейны притяжения, соответствующие  $i_{dc} = 1,25$ , показаны для периодичности  $\mathbf{m}(t)$  и усредненного по времени напряжения соответственно. Адаптировано из работы [30]

ВАХ, показанные на рис. *а*, обусловлены различными магнитными модами, каждая из которых имеет свои собственные бассейны притяжения, как показано на рис. *б, в*.

## 9. БИФУРКАЦИОННАЯ СТРУКТУРА И ХАОС В НАНОМАГНИТЕ, СВЯЗАННОМ С ДЖОЗЕФСОНОВСКИМ ПЕРЕХОДОМ

Одной из важнейших задач в области кодирования данных и безопасности связи является разработка методов контроля и управления хаосом. Нами продемонстрировано богатое разнообразие периодического и хаотического поведения в динамике магнитного момента в системе джозефсоновский переход – наномангнит (ДП-НМ) [29]. В частности, показано, что хаотическое поведение системы можно управлять, подавая внешний периодический сигнал нужной частоты и амплитуды. При определенных параметрах модели наблюдаются нерегулярные особенности переориентации легкой оси. Предполагается, что система ДП-НМ может быть использована в качестве хаотических логических вентилей в компьютерах на основе хаотических систем.

На рис. 13 демонстрируется бифуркация компонент намагниченности ( $m_{i-\text{Poin}}$ ,  $i = x, y, z$ ) как функции  $G$  отношения джозефсоновской эне-

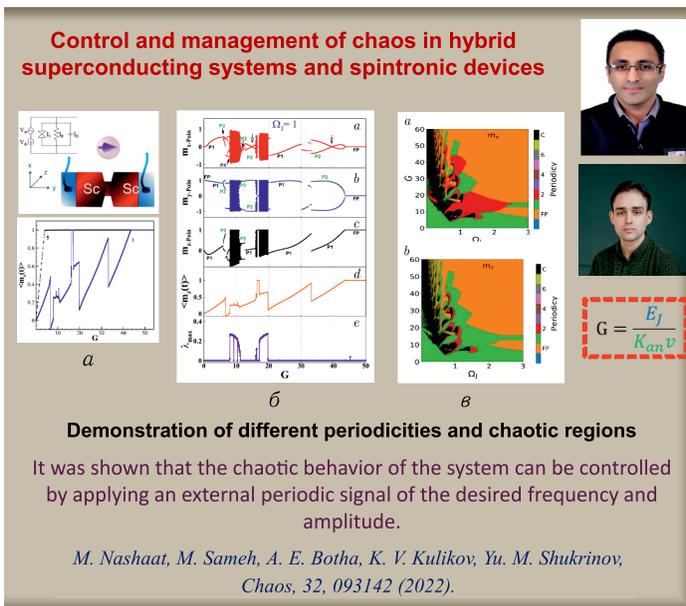


Рис. 13. *a*) Схематическая диаграмма системы (вверху) и усредненная по времени намагниченность как функция  $G$  (внизу). *б*) Бифуркационные диаграммы компонент намагниченности: *a* –  $m_{x-\text{Poin}}$ , *b* –  $m_{y-\text{Poin}}$ , *c* –  $m_{z-\text{Poin}}$ . Среднее значение  $m_z$ -компоненты в *d, e* показывает наибольшую экспоненту Ляпунова как функцию от  $G$  при  $\Omega_J = 1$ . *в*) Двумерные бифуркационные диаграммы, показывающие периодичность в  $m_x$  (*a*) и  $m_z$  (*b*). Адаптировано из работы [29]. На фото представлены соавторы работы М. Нашат (вверху) и К. Куликов (внизу)

гии к магнитной перед полной переориентацией. В работе [29] описаны типы динамического поведения, которые проявляются в данном бифуркационном дереве. Переход от одного типа динамики к другому сопровождается резкими изменениями значений средних компонент намагниченности. Нерегулярное поведение переориентации  $\langle m_z(t) \rangle$  возникает перед полной переориентацией. Расчет максимальной ляпуновской экспоненты  $\lambda_{\max}$  подтверждает хаотическое поведение намагниченности. Интервалы с положительными значениями  $\lambda_{\max}$  совпадают с хаотическими полосами, наблюдаемыми на бифуркационных диаграммах.

Динамика магнитного момента резко меняется при превышении джозефсоновской частоты  $\Omega_J$  над ферромагнитной  $\Omega_F$  в сравнении со случаем  $\Omega_J = \Omega_F$ . На рис. 13, в показаны бифуркационные деревья намагниченности в зависимости от  $G$  при  $\Omega_J = 1,5$ . В этом случае возникновение хаоса не наблюдается, а бифуркационные деревья при  $\Omega_J = 1,5$  демонстрируют динамику с разными периодами. Среднее значение  $\langle m_z(t) \rangle$  как функция  $G$  отражает трансформацию системы от одного вида периодического движения к другому.

## 10. ХИМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМАХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

Открытие химерных состояний [53, 54] поставило перед исследователями ряд вопросов. В частности, могут ли эти экзотические состояния существовать также в системах связанных джозефсоновских переходов? В математическом смысле химерное состояние относится к определенному типу поведения в системе, состоящей из идентичных колебательных элементов. Что делает его таким необычным, так это то, что химера возникает в виде двух или более различных групп, даже если все осцилляторы идентичны. Это форма поведения, при котором, скажем, одна группа осцилляторов может колебаться когерентно (синхронизирована по частоте), а другая — некогерентно (не синхронизирована).

Исследуя это явление, мы показали, что в значительном диапазоне параметра связи между переходами модель внутренних джозефсоновских переходов может поддерживать возникновение так называемых «дышащих» химерных состояний [4, 5]. Обычно в модели ССJJ + DC [55] связь между переходами распространяется только на ближайших соседей. Расширив ее в рамках модели ССJJ + DC и включив в нее нелокальное (более далекое) взаимодействие между переходами, мы продемонстрировали возникновение химерных состояний. Модифицированные уравнения для переходов с расширенной связью имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dV_\ell}{dt} &= I + I_\ell^n - \sin \varphi_\ell - \beta \frac{d\varphi_\ell}{dt}, \\ \frac{d\varphi_\ell}{dt} &= V_\ell + 2\alpha \sum_{m=1}^N H_{\ell m} V_m, \end{aligned} \quad (2)$$

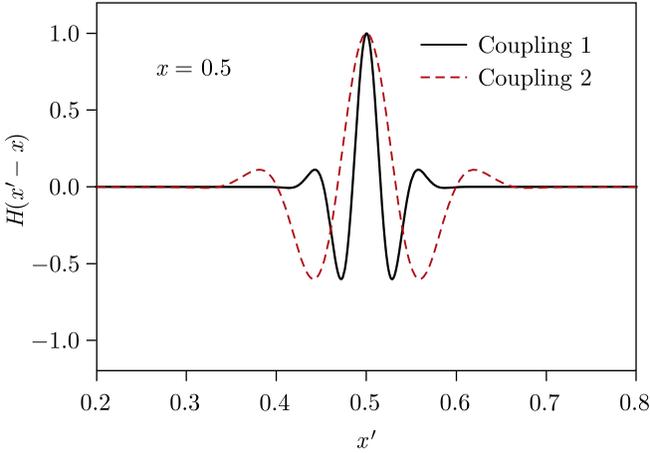


Рис. 14. Обобщенная функция связи при двух типах связи. Переходы располагаются в кольце (периодические граничные условия) в интервале  $[0,1]$ , где  $x_\ell$  — положение  $\ell$ -го перехода. Для математического удобства связь рассматривается как непрерывная функция, при этом матрица связи в уравнении (2) задается:  $H_{\ell m} \equiv H(x_\ell - x_m)$ . Связь в оригинальной модели ССJJ + DC [55] воспроизводится точно, когда непрерывный диапазон связи имеет порядок одного разделения переходов, т. е.  $\sim 1/N$

где  $N$  — число переходов, а  $H_{\ell m}$  — обобщенная связь, показанная на рис. 14. На рис. 15, *а* и *б* показаны разность фаз и скорости для двух различных типов связи.

На каждом рисунке есть две четко различимые области. В одной области ДП находятся в когерентном вращающемся состоянии, а в другой — в некогерентном. Наши расчеты показывают, что ДП в некогерентной области осциллируют квазипериодически по отношению к положению когерентных групп. Поэтому при эволюции системы во времени распределения разности фаз, показанные в верхней части рис. 15, *а*, *б*, перемещаются в целом от  $-\pi$  к  $\pi$ , подобно вращающемуся ДП. В то время как относительная разность фаз когерентно вращающегося ДП остается почти неизменной во время вращения, относительная разность фаз некогерентного ДП осциллирует квазипериодически.

Интересно отметить, что в модельной системе (2) нелокальная связь осуществляется между разностями напряжений  $V_\ell$  различных переходов. Это отличается от обычного типа связи, который приводит к химерным состояниям, например, в модели фазовых осцилляторов Курамото–Сакагучи, в которой нелокальная связь осуществляется непосредственно между фазами. Таким образом, в данной модели имеет место *второй порядок* нелокальной связи, поскольку  $V_\ell = \dot{\varphi}_\ell$  для несвязанных переходов (см. (2) при  $\alpha = 0$ ).

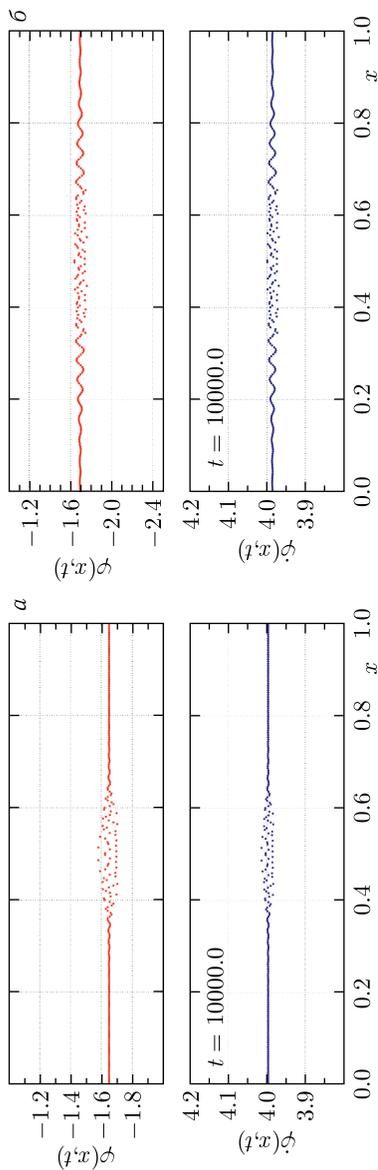


Рис. 15. Квазипериодические пульсирующие состояния состояния-химеры, соответствующие: первому типу связи — 1 (а), второму типу связи — 2 (б), показаны на рис. 14. На обоих рисунках базовый ток составлял  $I = 0.8$ , при  $\alpha = 0.3$  и  $\beta = 0.2$  и  $N = 256$ . На верхних графиках — мгновенные разности фаз для каждого перехода при  $t = 10000$ , на нижних — усредненные по времени скорости переходов, усредненные по  $\Delta t = 1000$ . Переходы между 0,35 и 0,65 характеризуются несогласованностью своих фаз, в то время как переходы в оставшейся области вращаются когерентно. Адаптировано из работы [5]

## 11. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ И ЗАРЯД НА СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СЛОЯХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Одной из наиболее интересных и перспективных областей современной науки является высокотемпературная сверхпроводимость. Высокотемпературные сверхпроводники имеют слоистую структуру, состоящую из тонких сверхпроводящих (S) слоев, разделенных диэлектрическими слоями. Поскольку толщина сверхпроводящих слоев сопоставима с дебаевской длиной экранирования, электрический заряд не может быть в них экранирован. Вопрос о возникновении электрического заряда в сверхпроводящих слоях имеет фундаментальное значение и до сих пор полностью не выяснен. Наличие заряда и характер его релаксации определяют неравновесные явления в этих системах.

В нашей совместной работе [14] мы обнаружили, что связанная система джозефсоновских переходов под действием внешнего электромагнитного излучения демонстрирует каскад параметрических неустойчивостей. Эти неустойчивости, в частности, возникают вдоль ВАХ в интервалах базового тока, соответствующих субгармоникам ступеньки Шапиро, и приводят к возникновению заряда на сверхпроводящих слоях. Амплитуда зарядовых осцилляций растет с увеличением мощности внешнего излучения. Нами продемонстрировано возникновение продольных плазменных волн при соответствующих значениях базового тока. Существенной особенностью параметрических неустойчивостей в случае субгармоник является меньшая амплитуда излучения, необходимая для создания продольной плазменной волны. Этот факт дает уникальную возможность создания и управления продольными плазменными волнами в слоистых сверхпроводниках. Нами предложен новый эксперимент для изучения параметрических неустойчивостей и заряда в сверхпроводящих слоях, основанный на одновременном изменении базового тока и амплитуды излучения.

Для наглядного представления субгармонических ступенек в непрерывном диапазоне значений соответствующих параметров красным цветом на рис. 16 указана величина дифференциального сопротивления в зависимости от амплитуды излучения и базового тока.

Чтобы увидеть, как электрический заряд возникает на каждой из ступенек, мы наложили график величины максимального заряда в S-слоях  $Q_{\max}$  на тот же рисунок, используя синий цвет. Области без заряда или с зарядом, превышающим 0,08 (как это может происходить для внутренних ветвей), были отображены как прозрачные, чтобы не заслонять основной график. V-образная форма, которую можно увидеть в правой части рисунка, — это основная гармоника SS, которая имеет линейно возрастающую ширину при малых A.

Важные результаты были получены в работе [11], показавшей, что хаотические особенности обусловлены связью между различными пере-

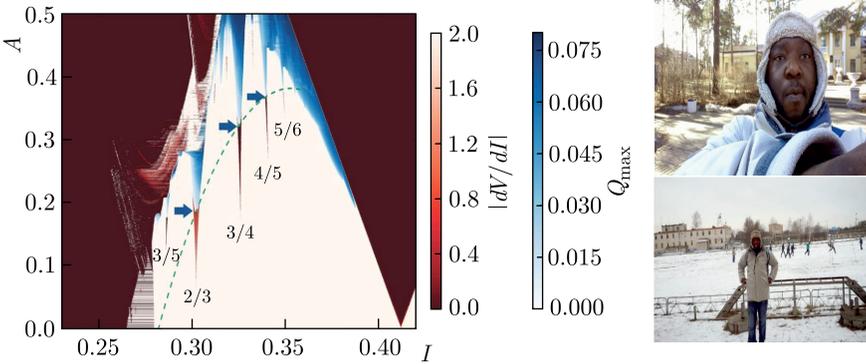


Рис. 16 (цветной в электронной версии). «Заряжение» субгармоник ступенек Шапиро в зависимости от амплитуды излучения и постоянного базового тока. Стрелками указаны точки, в которых ступеньки становятся «заряженными». Зеленая штриховая линия подчеркивает параболическую зависимость  $A(I)$  вдоль границы перехода. Адаптировано из работы [14]. На фото представлен наш соавтор Н. Azemtsa-Doniack

ходами в стеке. Хорошо известно, что излучение вызывает хаотические эффекты в одиночном переходе, однако эффект связи между переходами принципиально иной и может приводить к возникновению хаоса по иному пути, чем в одиночном переходе. Мы продемонстрировали возникновение продольной плазменной волны вдоль стека переходов и доказали, что наблюдаемый хаос индуцируется связью между переходами. Как отмечалось выше, важным новым моментом является то, что использование субгармоник Шапиро может позволить возбуждать продольные плазменные волны при низкой мощности излучения.

Возникновение заряда в сверхпроводящих слоях в интервале тока, соответствующем гармоникам, показано в работе [56]. На рис. 17 мы демонстрируем появление и рост заряда в первом сверхпроводящем слое стека в интервале тока, соответствующем субгармонической ступеньке  $2/3$  при увеличении амплитуды излучения. С ростом  $A$  величина заряда нарастает и в конечном счете занимает весь интервал тока, соответствующий субгармонической ступеньке Шапиро. Мы видим это на рис. 17, в, где показан результат для  $A = 0,27$ . При этом наибольшем значении  $A$  мы видим фрагментацию субгармоники SS. Для подтверждения хаотического поведения стека джозефсоновских переходов мы демонстрируем спектр экспонент Ляпунова на рис. 17, г, где показаны все нетривиальные ляпуновские экспоненты как функции тока вместе с ВАХ для стека с 10 ДП при  $\omega = 2$  и  $A = 0,27$  вблизи субгармонической ступеньки. Видно, что одна часть ступеньки  $2/3$  на ВАХ связана с гиперхаотической динамикой в этой системе связанных переходов. Три ляпуновские экспоненты

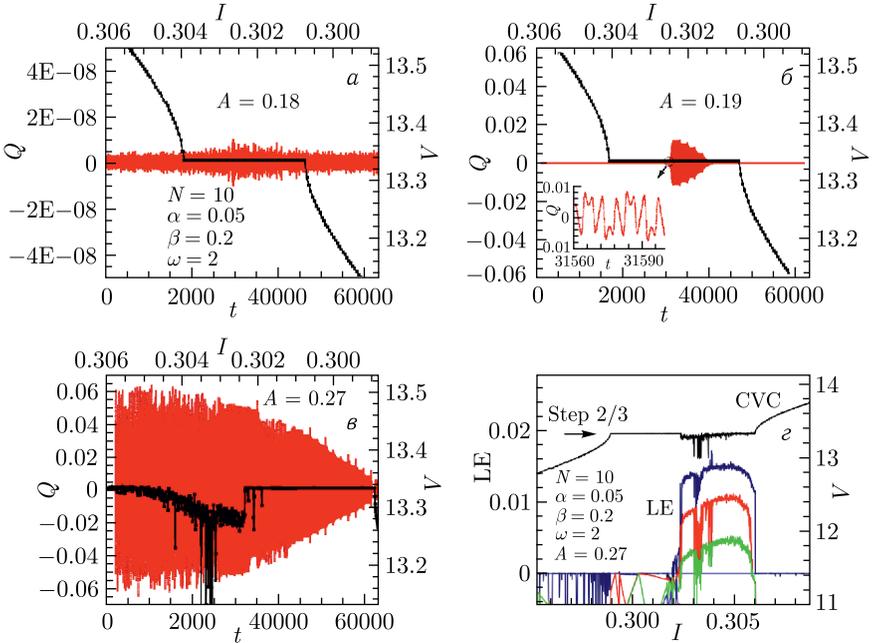


Рис. 17. (цветной в электронной версии). Зависимость заряда от времени (левая и нижняя оси) и ВАХ (черные кривые, правая и верхняя оси) при увеличении амплитуды излучения: а)  $A = 0,18$ ; б)  $A = 0,19$ ; в)  $A = 0,27$ . При этом значении наблюдается проявление хаотических особенностей на ВАХ; г) экспоненты Ляпунова (LE, левая и нижняя оси) и ВАХ (CVC, правая и нижняя оси) стека с 10 ДП при  $\omega = 2$  и  $A = 0,27$  в окрестности субгармоники 2/3 ступеньки Шапиро. Области тока, в которых LE становится положительной, соответствуют областям с хаотической динамикой. Адаптировано из работы [11]

(синий, красный и зеленый цвет) положительны в пределах интервала тока, соответствующего этой субгармонике SS.

## 12. ЗАРЯД НА СВЕРХПРОВОДЯЩИХ СЛОЯХ В ШУНТИРОВАННЫХ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Результаты исследования резонансных явлений в высокотемпературных сверхпроводниках в работе [17] позволили нам предложить новый метод регистрации электрического заряда на сверхпроводящих слоях на основе анализа динамики напряжения. В этой работе подробно исследованы фазовая динамика и ВАХ при приближении джозефсоновской частоты к частоте резонансного контура. Продемонстрирована реализа-

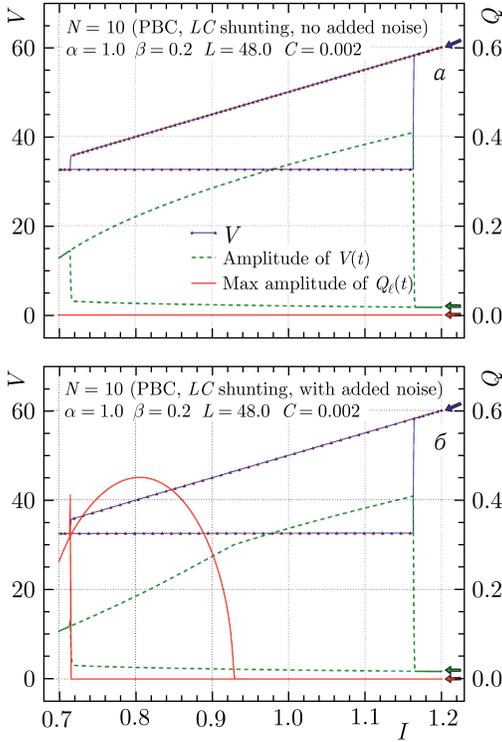


Рис. 18. Проявление заряда S-слоя по изменению амплитуды осцилляций напряжения. а) Часть ВАХ и максимальная амплитуда напряжения без дополнительного шума; б) то же, что и в а), с добавлением шума. На обоих рисунках выполнен один цикл тока:  $1,2 \rightarrow 0,7 \rightarrow 1,2$ . Начальное значение ( $I = 1,2$ ) и начальное направление цикла тока (уменьшающийся ток) показаны стрелками в правой части рисунка. Адаптировано из работы [17]

ция параметрического резонанса посредством возбуждения продольной плазменной волны в интервале базового тока, соответствующем ветви резонансного контура. Обнаружено, что временная зависимость полного напряжения на стеке и напряжения на шунтирующем конденсаторе отражает возникновение заряда на слоях. Амплитуда осцилляций напряжения, измеренная при каждом значении базового тока, изменяет наклон в зависимости от величины базового тока, отражая факт возникновения заряда на слоях, что может служить методом для его экспериментального обнаружения.

На рис. 19 показана временная зависимость заряда в области резонансной ветви [17]. Как видно из рис. 19, а, при  $L = 42$  электрический заряд на сверхпроводящем слое отсутствует. Амплитуда заряда на кон-

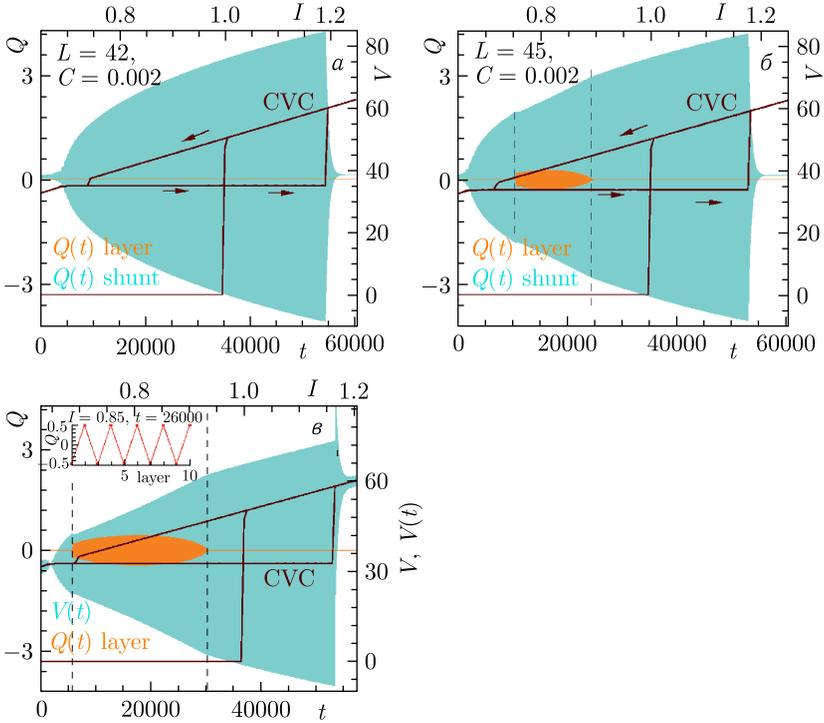


Рис. 19 (цветной в электронной версии). Временная зависимость заряда на шунтирующем конденсаторе (светло-голубой) и заряда на сверхпроводящем слое (темно-оранжевый) вместе с соответствующей частью ВАХ, включающей резонансную ветвь, рассчитанные для системы из 10 ДП с шунтированием  $C = 0,002$ , а)  $L = 42$ , б)  $L = 45$ . в) Временная зависимость напряжения и заряда с соответствующей частью ВАХ для системы из 10 ДП, шунтированной резонансным контуром с частотой  $\omega_{rc} = 3,2596$ . На вставке показана продольная плазменная волна с длиной волны  $\lambda = 2$ , которая формируется в стеке при  $I = 0,85$ . Адаптировано из работы [17]

денсаторе монотонно нарастает с увеличением тока до точки резонанса  $\omega J = \omega_{rc}$ .

На сверхпроводящих слоях возникает заряд, который увеличивается с ростом индуктивности  $L$ . Как видно на рис. 19, б, при  $L = 45$  ( $\omega_{rc} = 3,367$ ) заряд на сверхпроводящем слое сосуществует одновременно с зарядом на конденсаторе. Обратим внимание, что интервал монотонного увеличения амплитуды заряда выделен штриховой линией. Мы видим область уменьшения амплитуды на временной зависимости заряда конденсатора. Область с уменьшенной амплитудой хорошо видна на рис. 19, в при  $L = 48$ . Анализ распределения заряда вдоль стека показывает, что возникает продольная плазменная волна с длиной волны  $\lambda = 2d$ ,

где  $d$  — период стека. Штриховая линия показывает интервал тока, в котором в стеке существует продольная плазменная волна. Уменьшение  $\omega_{гс}$  приводит к увеличению этого интервала.

Шунтирование джозефсоновских структур приводит к появлению дополнительных резонансов и открывает новые возможности для управления их свойствами. В нашем совместном исследовании [27] были продемонстрированы двойной и тройной резонансы и показано их влияние на возникновение электрического заряда в сверхпроводящих слоях. Для большего числа переходов шунтирование приводит к возникновению заряда в состояниях, соответствующих верхней и резонансной ветвям вольт-амперной характеристики. В системе наблюдалась трансформация бегущей волны в стоячую продольную плазменную волну.

Как было показано, LC-шунтирование приводит к формированию резонансной ветви на вольт-амперной характеристике [13, 17]. На рис. 20 представлена расчетная вольт-амперная характеристика, которая была получена при изменении тока вдоль 01OEBABCDEFB0, где цифрами и буквами обозначены соответствующие точки на ВАХ. Вольт-амперная характеристика демонстрирует резонансную ветвь AC в результате резонанса джозефсоновских осцилляций и собственных осцилляций сформированного колебательного контура. Образовавшаяся резонансная ветвь является устойчивой стороной резонансного пика, так как другая сторона имеет отрицательный наклон и поэтому неустойчива. Этот пик соответствует параллельному резонансу. В случае последовательного резонанса резонансный пик генерируется в противоположном направлении. Штриховая линия на рис. 20, а соответствует неустойчивой части резонансного пика, а вершина пика обозначена буквой С. Выбранные параметры шунта  $L = 0,2$  и  $C = 1,25$  соответствуют собственной частоте резонансного контура  $\omega_{гс} = 3$ . При  $V = 3$  реактивное сопротивление контура  $Z(\omega)^{-1} = (1/j\omega C_j)^{-1} + (j\omega L + 1/j\omega C)^{-1}$  стремится к бесконечности. При этом на вольт-амперной характеристике возникает скачок напряжения.

Нами также исследовалось влияние внешнего излучения на динамику джозефсоновского перехода, шунтированного LC-контуром. Было показано, что зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения резко меняется, когда ступенька расположена на резонансной ветви. Мы полагаем, что полученные результаты могут быть полезны для методов и технологий, использующих отклик джозефсоновских переходов на микроволновое излучение, в частности, в квантовой метрологии для стандартов вольта.

Зависимость ширины ступеньки Шапиро от амплитуды внешнего излучения  $A_R$  на частоте  $\omega_R = 3$  представлена на рис. 20, б, где точками обозначены результаты численного расчета, а квадраты соответствуют теоретической формуле. Отметим, что амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро для ДП с шунтом обозначена SS-гс, а без шунта — SS. Важным результатом является то, что когда частота внешнего

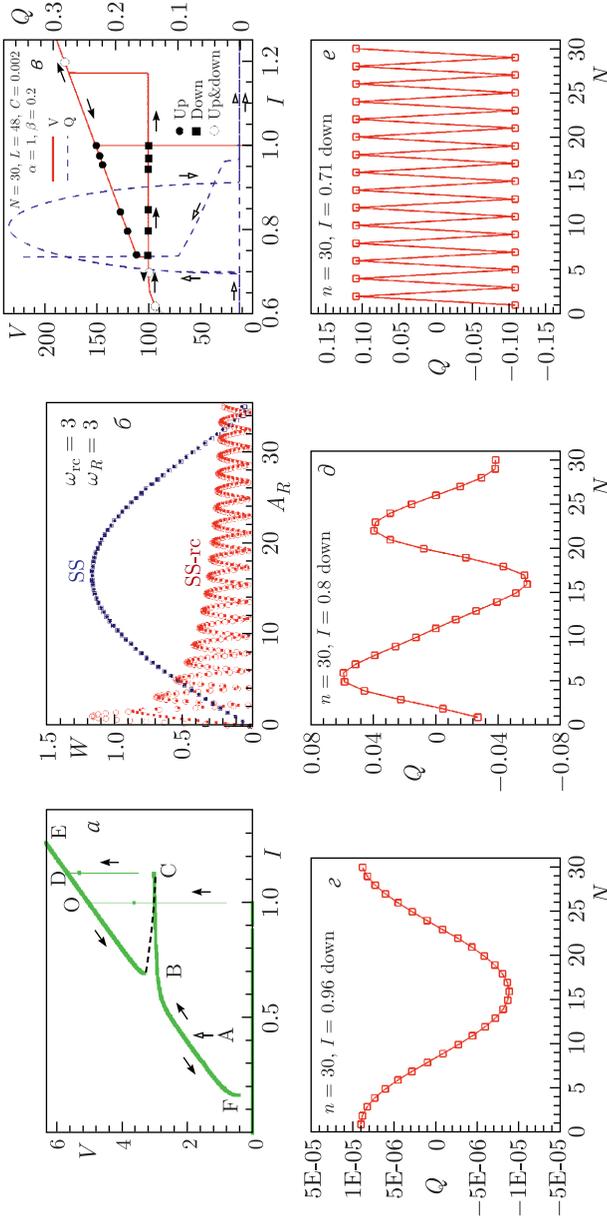


Рис. 20. а) ВАХ шунтированного ДП при увеличении и уменьшении базового тока. Стрелки указывают направление изменения тока. Здесь имеется резонансная ветвь между точками А и С. Штриховая линия соответствует неустойчивой части резонансного пика; б) амплитудная зависимость ширины ступеньки Шапиро для  $\omega_R = 3$ ; в) часть ВАХ, включающая гс-ветвь, для стека с  $N = 30$  вместе с максимальной амплитудой осцилляций заряда в S-слоях. Символами обозначены точки, в которых проверялась зависимость заряда от времени; г-е) реализации LPW в стеке с  $N = 30$ , для нисходящего скачкообразного тока, соответствующего ВАХ, представленной в а. Адаптировано из работы [27]

излучения равна частоте резонансного контура, максимальная ширина ступеньки Шапиро может быть получена при значительно меньших амплитудах по сравнению со случаем без шунтирования.

Плазменные волны — один из интереснейших объектов, возникающих в джозефсоновских наноструктурах. Мы исследовали временную зависимость осцилляций заряда при различных значениях базового тока, когда величина тока увеличивается или уменьшается вдоль ВАХ. На рис. 20, *в* показана часть ВАХ, включающая гс-ветвь, для стека с  $N = 30$ , а также максимальная амплитуда заряда в S-слоях. Символами обозначены точки, в которых регистрировалась зависимость заряда от времени. Результаты анализа некоторых из этих точек представлены на рис. 20, *г–е*. При уменьшении тока вдоль внешней ветви мы наблюдаем бегущую вдоль стека волну (см. рис. 20, *г*). Первоначально бегущая волна имеет длину  $\lambda = 30d$  при  $I = 0,96$  (см. рис. 20, *г*), но трансформируется в другую бегущую волну с  $\lambda = 15d$  при  $I = 0,8$  (см. рис. 20, *д*). После бифуркации на гс-ветвь наблюдается стоячая волна с длиной  $\lambda = 2d$  при  $I = 0,71$  (см. рис. 20, *е*). Эта волна существует вдоль гс-ветви в интервале тока, соответствующем куполу заряда. За пределами гс-ветви мы наблюдаем только осцилляции заряда на уровне шума.

### 13. СПИНТРОННЫЕ ЭФФЕКТЫ В АНОМАЛЬНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Важной задачей сверхпроводниковой спинтроники, связанной с аномальными джозефсоновскими переходами, является достижение электрического контроля над магнитными свойствами с помощью джозефсоновского тока, а также магнитного контроля над джозефсоновским током [46, 57, 51]. В качестве примера можно привести переворот намагниченности в структуре сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник со спин-орбитальной связью путем добавления импульса электрического тока [48]. Экспериментальная реализация этого эффекта откроет новые возможности для ряда приложений в квантовых вычислениях. Мы продемонстрировали интересные и важные результаты в этой области, сконцентрировав наши исследования на сверхпроводящих структурах с магнитными материалами. Важное место в совместных исследованиях занимали топологические и хаотические явления в различных типах джозефсоновских структур.

В работе [24] изучалось переключение намагниченности импульсом электрического тока в джозефсоновском переходе  $\varphi_0$ , образованном обычными сверхпроводниками и магнитной нецентросимметричной прослойкой. На основе модельных уравнений Ландау–Лифшица–Гильберта и уравнений резистивно-шунтированного перехода построено аналитическое описание динамики намагниченности, индуцированной произвольным импульсом тока.

Мы сформулировали критерии переворота намагниченности и, используя полученные результаты, оптимизировали форму и длительность импульса тока. Аналитические и численные результаты находятся в хорошем согласии при  $GrI_p \gg 1$ , где  $G$  — отношение джозефсоновской энергии к магнитной,  $r$  — величина спин-орбитального взаимодействия, а  $I_p$  — величина импульса тока. Аналитический результат позволяет предсказать переворот намагниченности при выбранных параметрах системы и объясняет особенности переворота намагниченности на диаграммах  $G-r$  и  $G-\alpha$ , где  $\alpha$  — гильбертовское затухание. Было предложено использовать такой джозефсоновский  $\varphi_0$ -переход в качестве элемента памяти, информация в котором закодирована в направлении намагниченности ферромагнитного слоя.

В работе [21] мы продемонстрировали три типа эффектов, приводящих к перевороту намагниченности в ферромагнитном слое, включая изменение магнитного момента под действием: 1) сверхпроводящего импульса тока, 2) линейно уменьшающегося напряжения смещения на  $\varphi_0$ -переходе, 3) импульса внешнего магнитного поля в ВЧ СКВИДе с  $\varphi_0$ -переходом. Наблюдаемые особенности могут найти применение в различных областях сверхпроводниковой спинтроники.

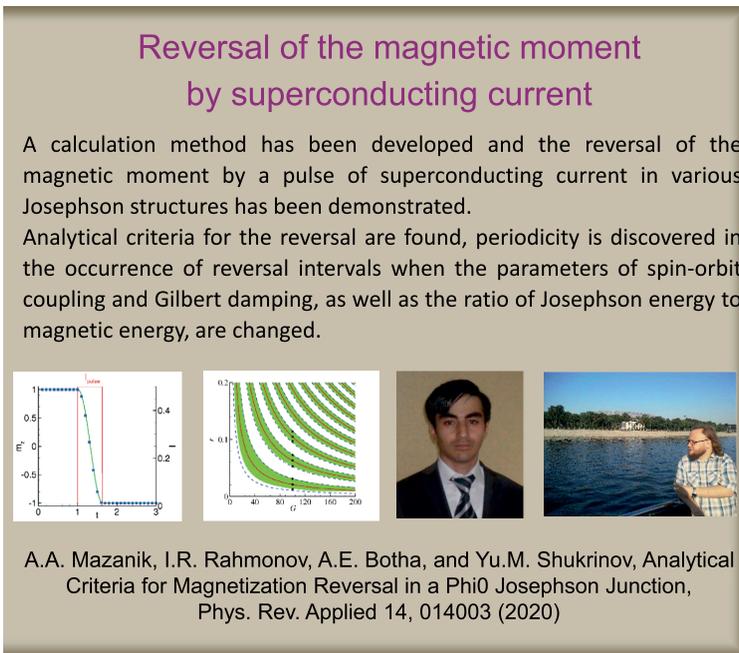


Рис. 21. Переворот магнитного момента импульсом тока. Адаптировано из работы [24]. На фото представлены наши соавторы И. Р. Рахмонов и А. Мазаник

#### 14. ПЕРЕОРИЕНТАЦИЯ ЛЕГКОЙ ОСИ В $\varphi_0$ -ПЕРЕХОДЕ

Еще один интересный результат в рамках нашего сотрудничества был получен при изучении проявления особенностей маятника Капицы в S-F-S-переходах. Как известно, пионерская работа Капицы [58] положила начало области колебательной механики, а его метод был использован для описания периодических процессов в самых разных физических системах, таких как атомная физика [59–62], физика плазмы, оптика [63], физика конденсированных сред, биофизика [64] и кибернетическая физика (см. [65–70]). В теории нелинейного управления маятник Капицы используется в качестве примера параметрического осциллятора, демонстрирующего концепцию «динамической стабилизации».

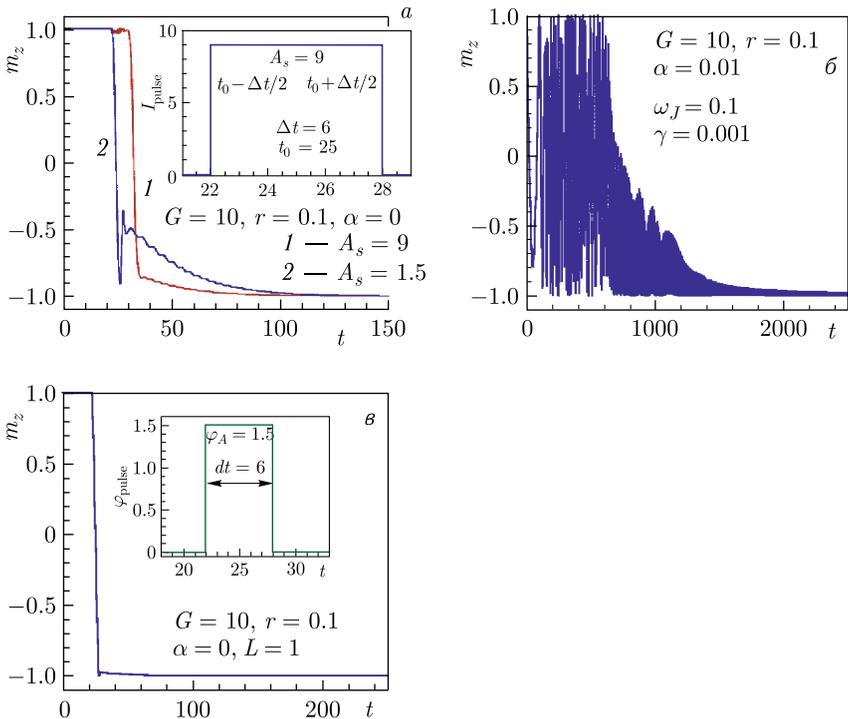


Рис. 22. а) Динамика компоненты намагниченности  $m_z$  для системы с прямоугольным импульсом тока для двух амплитуд импульса. На вставке показана форма импульса; б) переворот намагниченности при линейном уменьшении напряжения смещения для  $\omega_J = 0,1, \gamma = 0,001$  и параметров модели  $G = 10, r = 0,1, \alpha = 0,01$ ; в) переворот намагниченности в ВЧ СКВИДе под действием импульса внешнего магнитного поля, показанного на вставке. Адаптировано из [21]

В работе [20] нами теоретически исследована динамика  $\varphi_0$ -джозефсоновского перехода с прямой связью между магнитным моментом и джозефсоновским током, которая демонстрирует черты, напоминающие маятник Капицы. Мы обнаружили, что, начиная с намагниченности вдоль оси  $z$ , характер динамики существенно меняется по мере реализации стабильного положения магнитного момента между осями  $z$  и  $y$  в зависимости от значений параметров системы. Изменения критического тока и спин-орбитального взаимодействия приводят к различным областям стабильности намагниченности. Получено хорошее согласие между аналитическими и численными результатами при малых значениях отношения джозефсоновской энергии к магнитной.

Как известно, наиболее важной характеристикой джозефсоновского перехода, измеряемой экспериментально, является его вольт-амперная характеристика. Нами были впервые обнаружены субгармонические лестничные структуры на вольт-амперных характеристиках, которые обусловлены влиянием динамики намагниченности на разность фаз в джо-

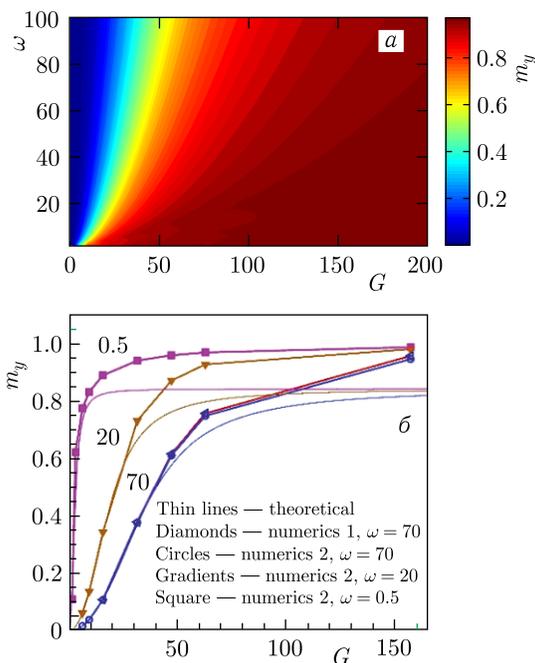


Рис. 23 (цветной в электронной версии). а)  $\omega$ – $G$ -диаграмма для усредненной  $m_y$ , показанной цветом; б) переориентация легкой оси ферромагнетика. Сравнение данных теоретических и численных расчетов для определенных значений джозефсоновской частоты и отношения джозефсоновской энергии к магнитной ( $G$ ). Адаптировано из работы [20]

зефсоновском переходе [18, 20]. Такие структуры могут быть использованы в различных областях сверхпроводниковой спинтроники. Они чувствительны к изменению периодичности в динамике системы и могут служить индикатором различных экзотических состояний. В частности, они могут быть использованы для обнаружения майорановских связанных состояний в джозефсоновских наноструктурах.

Изменение среднего  $m_y$  в зависимости от частоты  $\omega$  и  $G$  показано на рис. 23, а. Видно, что увеличение  $G$  делает ориентацию  $m_y$  вдоль оси  $y$  стабильной, но частотная зависимость отличается от характерного поведения маятника Капицы, что видно на рис. 23, б.

## 15. КИНКОВАЯ СТРУКТУРА НА ВАХ $\varphi_0$ -ПЕРЕХОДА

Переход  $\varphi_0$  демонстрирует богатое разнообразие динамических состояний, определяемых параметрами джозефсоновского перехода и промежуточного ферромагнитного слоя. В работе [25] нами обнаружено несколько особенностей в максимальной амплитуде магнитного момента  $\widehat{m}_y$ , взятой при каждом значении базового тока, которые мы соотносим с особенностями на ВАХ  $\varphi_0$ -перехода.

На рис. 24 показана часть ВАХ вместе с максимальной амплитудой  $\widehat{m}_y$  при уменьшении базового тока при условии  $I > I_c$ . Интересной особенностью  $\widehat{m}_y(I)$ -зависимости являются кинки (перегибы), указанные стрелками.

Нами показано, что возникновение кинков на зависимости  $\widehat{m}_y(I)$  вдоль ВАХ связано с изменением динамического поведения прецессии намагниченности в ферромагнитном слое. Продемонстрирована трансформация специфических траекторий намагниченности вдоль ВАХ, композитные структуры намагниченности и гистеретическое поведение на зависимости  $\widehat{m}_y$  от базового тока.

Различные типы траекторий намагниченности в плоскостях  $m_y - m_x$ ,  $m_z - m_x$  и  $m_z - m_y$ , реализуемые вдоль DF, в частности, такие как «яблоко», «серп», «гриб», «рыба» и «луна» (названные так для их различия), были найдены в работе [71]. Но кинки в  $\widehat{m}_y$  и их происхождение в то время не обсуждались. Отмечено, что специфические траектории демонстрируют уникальную возможность управления динамикой намагниченности с помощью внешнего тока. В работе [25] нами продемонстрировано сходство в возникновении различных кинков и подчеркнуто, что их происхождение связано с трансформацией в динамике намагниченности. На рис. 24 показаны траектории намагниченности в области  $R_2$ , которые представляют собой вид «яблока» при  $I = 0,6$  до кинка и вид «гриба» после кинка при  $I = 0,555$ . Результат фурье-анализа показывает удвоение периода траектории в случае «гриба».

Результаты в регулярной области  $R_1$  при  $I = 0,95$  (а, б) и  $I = 0,75$  (с, д), т. е. справа и слева от кинка соответственно, показаны

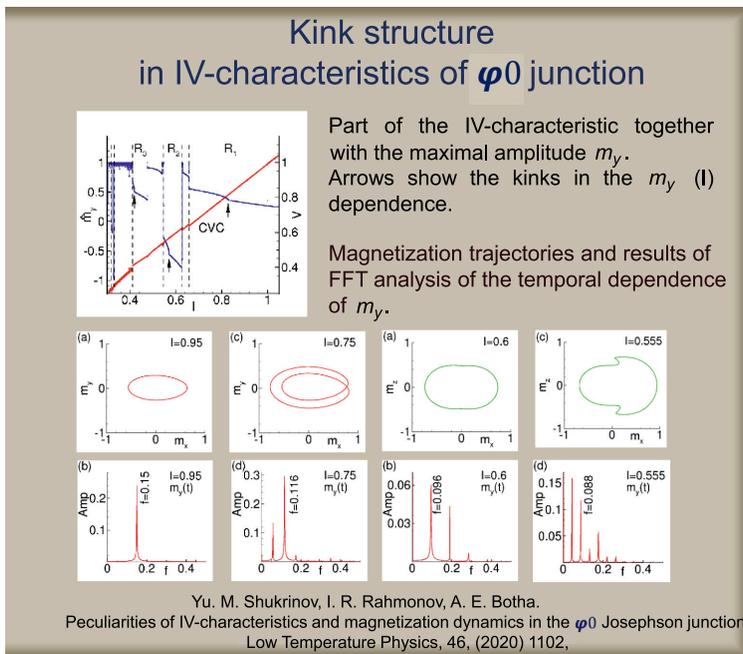


Рис. 24. Демонстрация кинк-структур на ВАХ  $\varphi_0$ -перехода, характерных траекторий и результатов FFT-анализа. Адаптировано из [25]

на рис.24. Мы видим, что кинк является точкой бифуркации между двумя типами траекторий, т. е. когда система переходит от одного периодического поведения к другому. При  $I = 0,75$  возникает дополнительная частота  $f = f_J/2$  в сравнении со случаем при  $I = 0,95$ , что подтверждает удвоение периода.

Благодаря корреляциям между особенностями на  $\widehat{m}_y$  и на ВАХ, представленные результаты открывают путь для экспериментальной проверки особой динамики намагниченности, характеризующей джозефсоновский  $\varphi_0$ -переход.

## 16. МОДЕЛЬ $ac + dc$ ФРЕНКЕЛЯ–КОНТОРОВОЙ С БОЛЬШИМ ЗАТУХАНИЕМ

Модель  $ac + dc$  Френкеля–Конторовой (ФК, [16]) хорошо известна как модель систем скользящих волн зарядовой плотности в радиочастотной области и систем джозефсоновских переходов в микроволновой области. Детальный сравнительный анализ поведения в рамках модели ФК и джозефсоновских систем помогает воспроизвести хаотические явления, наблюдаемые в реальных системах, и выявить общие математиче-

ские особенности, которые приводят к хаотическому поведению в обеих моделях.

Одной из общих черт этих моделей является возникновение лестничных структур, которые наблюдаются на ВАХ джозефсоновского перехода и в средней скорости  $\bar{v}$  как функции средней движущей силы  $\bar{F}$  в модели ФК с затуханием. На рис. 25 представлена лестничная структура функции отклика  $\bar{v}(\bar{F})$  при фиксированной, относительно большой амплитуде ( $F_{ac} = 1,1$ ) переменного сигнала, в то время как величина постоянного тока медленно изменялась (заметим,  $\bar{F} = F_{dc}$ ).

Увеличение числа ступенек между первой и второй гармониками на рис. 25, *a* показывает, что в *б*, *в* и *г* возникает бесконечный ряд субгармонических ступенек (дьявольская лестница).

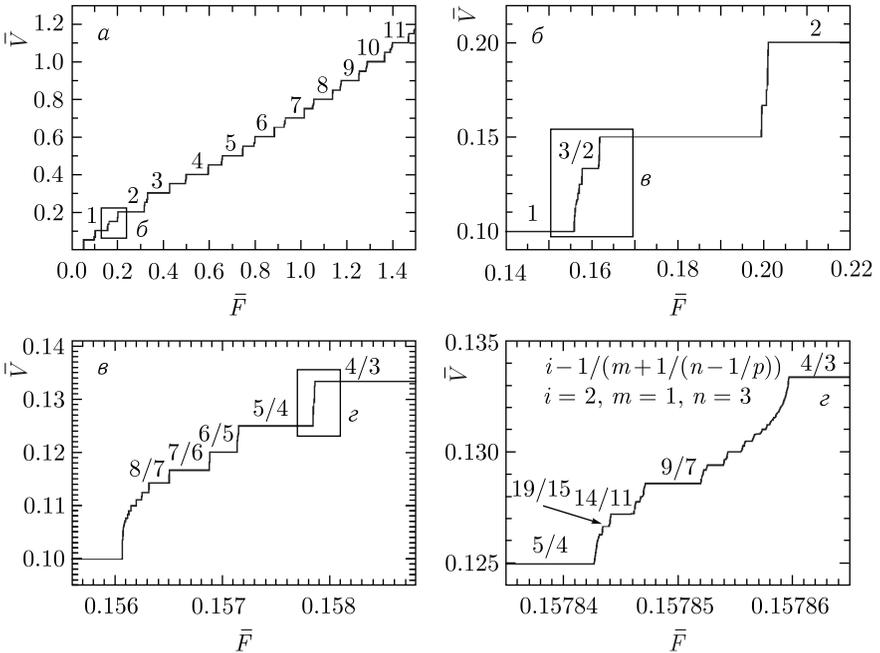


Рис. 25. Средняя скорость как функция средней движущей силы  $\bar{v}(\bar{F})$  для  $N = 8$ ,  $K = 4$ ,  $\nu_0 = 0,2$ ,  $\omega = 1/2$ ,  $r = 0,5$  и  $F_{ac} = 1,1$ . Здесь  $N$  — число частиц,  $K$  — сила пиннинга,  $\nu_0$  — частота переменного тока,  $\omega$  — число витков, а  $-1 < r < 1$  — параметр деформации потенциала подложки ( $r = 0$ , что соответствует синусоидальному потенциалу подложки). Цифры обозначены гармонические и субгармонические ступеньки Шапиро. Виды высокого разрешения *б*, *в* и *г* представляют лестничную структуру выбранной области. Адаптировано из работы [16]

Мы показали, что лестничная структура может возникнуть в результате полной синхронизации режимов в нехаотической системе, т. е. в модели  $ac + dc$  Френкеля–Конторовой с большим затуханием с деформируемым потенциалом подложки [16]. Хотя мы не обнаружили хаоса в этой модели, иерархическое упорядочение ступенек Шапиро стало возможным благодаря использованию введенной ранее формулы непрерывных дробей. Отсутствие хаоса, выведенное из анализа экспонент Ляпунова, объясняется наличием избыточного демпфирования и правилом Миддлтона. Сравнительный анализ одномерного стека джоузефсоновских переходов подтвердил исчезновение хаоса с ростом диссипации. В ходе этого сравнения были выявлены и другие общие динамические особенности. Детальный анализ амплитудной зависимости ступенек Шапиро показал, что только в случае чисто синусоидального потенциала подложки относительные размеры ступенек следуют последовательности Фарея. Для несинусоидальных (деформированных) потенциалов симметрия дерева Штерна–Брокота, изображающего все члены определенной последовательности Фарея, нарушалась, причем некоторые ступеньки были более заметными, а их относительные размеры не соответствовали правилу Фарея [16].

## **17. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ СТУПЕНИ, ХАОС И ГИСТЕРЕЗИС В МОДЕЛИ ФК**

Нами исследовано влияние инерционных членов на динамику модели  $ac + dc$  Френкеля–Конторовой [22]. При варьировании массы частиц подробно анализировался отклик системы на возбуждающие силы и возникновение ступенек Шапиро. В отличие от случая с затуханием, увеличение массы приводило к появлению целой серии субгармонических ступенек в лестнице средней скорости в зависимости от средней возбуждающей силы в любой соизмеримой структуре. При определенных значениях параметров субгармонические ступеньки становились разделенными хаотическими окнами, а вся структура сохраняла масштаб, подобный исходной лестнице. Масса частиц также определяла их чувствительность к силам, управляющим их динамикой. Частицы в зависимости от массы демонстрируют три типа динамики: от динамической синхронизации мод с хаотическими окнами, типичного  $dc$ -отклика до, по сути, отклика свободной частицы. Наш анализ этой динамики как в направлении восходящей, так и в направлении нисходящей силы показал, что система может не только проявлять гистерезис, но и что в направлении нисходящей силы могут возникать большие ступеньки Шапиро даже в тех случаях, когда в направлении восходящей силы не происходит динамической синхронизации мод [22].

## 18. СИНХРОННОСТЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЯХ

Одним из ключевых требований для предотвращения каскадных сбоев, т. е. отключений электроэнергии в сетях электропередачи, является их способность стабильно работать в синхронном режиме [72–74]. Однако в последнее время растущие требования к существующим электросетям, такие как увеличение нагрузки и стремление использовать более экологичные источники энергии — ветер и солнце [75], угрожают разрушением целых сетей. Например, в Южной Африке, чтобы избежать полного коллапса, пришлось применять очень высокие уровни так называемого сброса нагрузки, что обошлось экономике в огромную сумму [76]. В этом контексте изучение электрических сетей с целью разработки более совершенных будущих сетей (как, например, обсуждается в [77]) является национальным, если не международным, приоритетом.

В декабре 2019 г. мы получили трехлетнее мобильное финансирование на новый проект, связанный с изучением явлений синхронизации в сетях связанных джозефсоновских переходов. Основным мотивом для этого проекта стала идея о том, что связанные системы джозефсоновских переходов потенциально могут быть использованы для создания модели реальных электросетей, причем каждый джозефсоновский переход будет играть роль одного из элементов реальной сети, т. е. либо генератора, либо потребителя электроэнергии. К сожалению, из-за пандемии вируса covid-19 в начале 2020 г. этот проект был отложен, так как финансирование было выделено специально для совместных поездок, и долгое время все поездки между ЮАР и Россией были запрещены. Тем не менее после пандемии и нам удалось опубликовать работу, посвященную эффектам фрустрированных взаимодействий в модели Курамото с инерцией [37]. Эта курамотовская модель фазовых осцилляторов может быть приближенно отображена на модель резистивно связанных джозефсоновских переходов [78]. Благодаря этому наша первая работа по этой важной теме была связана с джозефсоновскими переходами, а общность фазовой аппроксимации, которая делается в модели Курамото, делает ее актуальной для проблемы достижения синхронности в электрических сетях.

На рис. 26 показан усредненный по времени параметр порядка как функция фрустрации и силы связи  $K$  для разбавленной сети осцилляторов Курамото–Сакагучи с добавленной инерцией.

Параметр порядка, лежащий в диапазоне от 0 до 1, измеряет степень синхронности в сети, при этом  $r = 0$  соответствует полностью десинхронизированной сети, в которой каждый осциллятор колеблется независимо. Здесь мы применили случайное начальное условие, матрицу смежности (контролирующую, какой осциллятор с каким связан) и распределение собственных частот для каждой пары точек на  $(K, \alpha)$ -плоскости, чтобы выяснить эффект увеличения фрустрации  $\alpha$ . Как видно из рисунка, существует четко очерченная область, где можно получить частичную

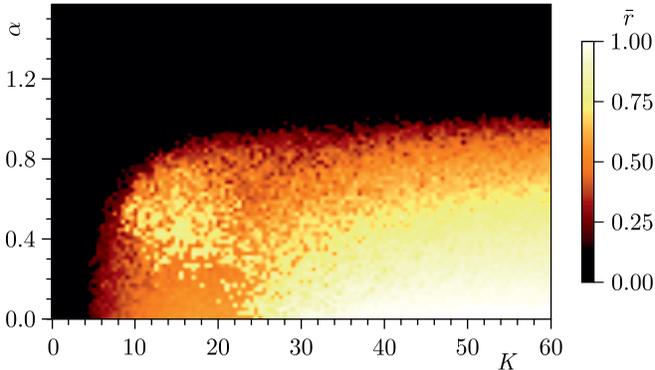


Рис. 26. Усредненный по времени параметр порядка  $\bar{r}$  на  $(K, \alpha)$ -плоскости со случайными начальными условиями, связью и собственными частотами. Здесь разбавление каждой случайно связанной сети составляло  $p = 0,2$  и каждая сеть состояла из  $N = 500$  осцилляторов. Это означает, что в каждой смежной матрице (состоящей из нулей и единиц) имеется  $pN = 100$  ненулевых элементов, представляющих случайное сцепление.  $K$  — это коэффициент каждой смежной матрицы, а  $\alpha$  — фрустрация или фазовый сдвиг в сети. Адаптировано из работы [37]

синхронизацию, несмотря на наличие фрустрации в сети. На практике эта область имеет большое значение, так как реактивное сопротивление линий передачи в реальной энергосистеме создает разность фаз, которая хорошо моделируется параметром(ами) фрустрации в данной модели.

С целью улучшить стабильность синхронности в так называемых умных сетях, в некоторых исследованиях были предприняты попытки использовать различные формы управления. В нашей недавней работе по электросетям мы предложили использовать улучшенную форму управления, которая минимизирует потери по сравнению с нелинейной диссипативной схемой управления, которая была недавно предложена Аринушкиным и Вадивасовой [79]. Вместо того чтобы применять нелинейное демпфирование ко всем элементам системы, мы применяем его только к произвольно выбранному 5-му элементу, т. е.  $D_j = D_{0j}$ , если  $j \neq 5$ , и  $D_j = D_{0j} + k|\dot{\delta}_j|$ , если  $j = 5$ . Здесь  $D_{0j}$  — константа линейного демпфирования, а  $k$  — константа нелинейного демпфирования. Как видно на рис. 27, добавление  $k$  приводит к значительному улучшению синхронности сети.

Сравнение результатов, показанных на рис. 27, с результатами, приведенными на рис. 4 из работы [79], показывает, что можно достичь той же степени синхронности в решетке, применяя нелинейное демпфирование к любому отдельному элементу решетки, а не ко всем, как это было сделано в работе [79]. Парадоксально, но значение  $k$ , необходимое для достижения определенной степени синхронности в случае, когда нели-

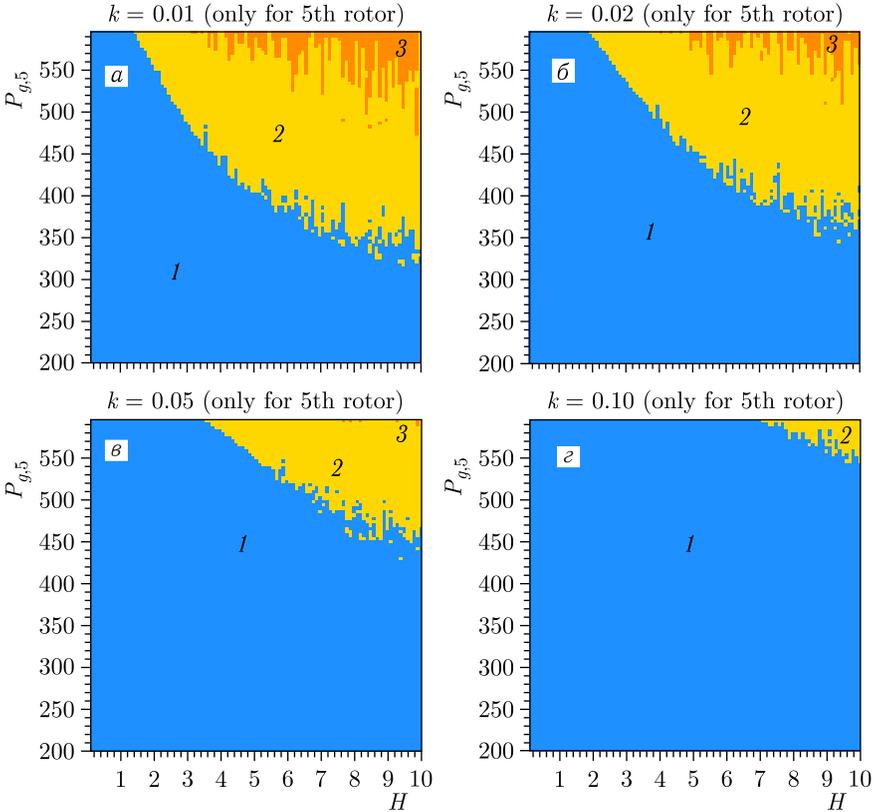


Рис. 27 (цветной в электронной версии). Карты режимов сети нелинейных осцилляторов, рассмотренных в работе [79], показывающие эффект увеличения коэффициента нелинейного демпфирования  $k$  только для 5-го ротора: а)  $k = 0,01$ , б)  $k = 0,02$ , в)  $k = 0,05$ , г)  $k = 0,10$ . Здесь  $H$  — параметр инерции (одинаковый для каждого ротора),  $P_{g,5}$  — выходная мощность 5-го генератора, причем: 1 — область синхронного режима (синий); 2 — область бистабильности (желтый); 3 — область асинхронного поведения одного или нескольких осцилляторов (оранжевый). Адаптировано из рис. 4 из работы [38]

нейное демпфирование применяется только к одному элементу, значительно меньше, чем в случае, когда нелинейное демпфирование применяется ко всем элементам. Это означает, что нелинейное управление одним элементом может привести к заметному снижению диссипации, которая должна быть добавлена в сеть в рамках схемы управления, что означает, что она будет гораздо более эффективной. Дальнейшие детали предложенной нами схемы управления были опубликованы в сотрудничестве с магистрантом, который в настоящее время продолжает участвовать в этой работе [38].

## 19. ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

Наше сотрудничество в области теоретических и вычислительных исследований джозефсоновских наноструктур продолжается с 2011 г. Особое внимание уделяется различным нелинейным динамическим эффектам, которые важны в различных существующих моделях связанных джозефсоновских переходов. В рамках сотрудничества нам удалось получить целый ряд интересных и важных с точки зрения будущих приложений результатов в области фазовой динамики джозефсоновских наноструктур, свойств их вольт-амперных и корреляционных характеристик, разработать методы обнаружения и анализа хаоса, такие как спектр ляпуновских экспонент, сечение Паункаре, методы рекуррентного анализа. Мы также понимаем, что многие из этих результатов потребовали значительного вычислительного времени — в общей сложности нескольких сотен процессорных лет! Поэтому они были бы невозможны без прекрасной поддержки высокопроизводительных вычислений (HPC), предоставляемой ОИЯИ и UNISA. В ходе нашего сотрудничества на протяжении последних 12 лет нам также приходилось часто ездить между Россией и Южной Африкой, особенно в допандемическую эпоху, когда еще не было возможности взаимодействовать в электронном виде с по-



Рис. 28. Группа ЛТФ ОИЯИ, работающая в области исследования джозефсоновских наноструктур



Рис. 29. 12 сентября 2022 г. в Кейптауне состоялось 21-е заседание Объединенного координационного комитета (ОКК) по сотрудничеству между Южно-Африканской Республикой и Объединенным институтом ядерных исследований

мощью многочисленных платформ для встреч, которые доступны сейчас. К счастью, всегда существовали такие возможности, как симпозиумы и конференции, а также специальное финансирование мобильности, чтобы реализовать взаимные визиты. Отметим, что 12 сентября 2022 г. в Кейптауне состоялось 21-е заседание Объединенного координационного комитета (ОКК) по сотрудничеству между Южно-Африканской Республикой и Объединенным институтом ядерных исследований (рис. 29). Таким образом, на наш взгляд, это сотрудничество достигло принципиального расцвета благодаря трем благоприятным обстоятельствам: 1) осознанию наших общих исследовательских интересов и совместного опыта в различных областях, 2) наличию отличных вычислительных мощностей, 3) возможности преодолевать границы благодаря воздушным перелетам и (в последнее время) онлайн-платформам для встреч. В результате наше сотрудничество оказалось достаточно продуктивным. Задействовав всю группу ОИЯИ, нам удалось связать многие важные физические аспекты с динамикой систем джозефсоновских переходов. Внесен определенный вклад в лучшее понимание многогранной, сложной роли, которую играют хаос, синхронизация и другие захватывающие нелинейные эффекты в структурах, состоящих из связанных джозефсоновских переходов, независимо от того, связаны ли они внутренне из-за шунтирования или в результате включения ферромагнитных материалов, позволяющих управлять магнитными свойствами через сверхпроводящий ток, и сверхпроводящим током посредством магнитной динамики.

Сегодня сверхпроводниковая электроника и спинтроника на основе джозефсоновских наноструктур являются интенсивно развивающимися областями физики конденсированного состояния [57, 46, 80, 81]. Важной частью этого развития является изучение джозефсоновских переходов, связанных с магнитными системами. Возможность управлять магнитны-

ми свойствами с помощью джозефсоновского тока, а также оказывать влияние на сверхпроводящий ток прецессией магнитного момента, имеет широкие перспективы для будущих технологий.

Как уже отмечалось, основная цель нашего сотрудничества — это создание базы для фундаментальных и прикладных исследований в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники в обеих странах. В настоящее время ведется интенсивная совместная работа по моделированию сверхпроводящих наноструктур, в частности, связанных джозефсоновских переходов, шунтированных систем и гибридных джозефсоновских структур с различными типами барьеров. Это позволяет исследовать фазовую динамику и вольт-амперные характеристики для получения новой информации о различных резонансных явлениях и явлениях синхронизации, которые влияют на физическое поведение таких структур.

**Благодарности.** Мы благодарим наших коллег из ОИЯИ И. Рахмонова, К. Куликова, М. Нашата, А. Мазаника (рис. 28), а также из Южной Африки Х. Аземца-Донфака, Е. М. Бенеча за их активность в данном сотрудничестве.

Мы признательны Д. И. Казакову, директору Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, В. А. Осипову, начальнику научного отдела теории конденсированных сред, директору УНЦ ОИЯИ Д. В. Каманину и представителю правительства ЮАР в Комитете полномочных представителей ОИЯИ Имраану Пателю за организацию и поддержку нашего сотрудничества, за поддержку совместных проектов и взаимных визитов.

Мы также благодарим административный персонал ОИЯИ и UNISA за подготовку необходимых документов для реализации нашего сотрудничества.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Botha A. E., Qi G.* Optimized Periodic and Hyperchaotic Modes of a Triple Pendulum // Proc. of the 56th Ann. Conf. of the South African Inst. of Phys., Pretoria, July 12–15, 2011. P. 758–765.
2. *Shukrinov Yu.* Parametric Resonance Features in the Coupled Josephson Junctions // Book of Abstr. of the 56th Ann. Conf. of the South African Inst. of Phys., Pretoria, July 12–15, 2011. P. 243–244.
3. *Shukrinov Yu. M., Hamdipour M., Kolahchi M. R., Botha A. E., Suzuki M.* Manifestation of Resonance-Related Chaos in Coupled Josephson Junctions // Phys. Lett. A. 2012. V. 376, No. 47. P. 3609–3619.
4. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Kolahchi M. R.* Breathing Chimeras in a Stack of Intrinsically Coupled Josephson Junctions // Proc. of the 4th South Africa – JINR Symp. “Few to Many Body Systems”, Dubna, Sept. 21–25, 2015. P. 135–141.
5. *Kolahchi M. R., Botha A. E., Shukrinov Yu. M.* Chimera States in an Intrinsically Coupled Stack of Josephson Junctions // J. Supercond. Nov. Magn. 2017. V. 30. P. 1659–1663.

6. *Benecha E. M., Dawood R., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Botha A. E.* Simulations of dc SQUIDS with Topologically Trivial and Nontrivial Barriers // Proc. of the 4th South Africa – JINR Symp. “Few to Many Body Systems”, Dubna, Sept. 21–25, 2015. P. 149–154.
7. *Shukrinov Yu. M., Medvedeva S. Yu., Botha A. E., Kolahchi M. R., Irie A.* Devil’s Staircases and Continued Fractions in Josephson Junctions // Phys. Rev. B. 2013. V. 88. P. 214515.
8. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Kolahchi M. R.* Onset of Chaos in Intrinsic Josephson Junctions // Chaos Solit. Fractals. 2013. V. 48. P. 32–37.
9. *Kolahchi M. R., Shukrinov Yu. M., Hamdipour M., Botha A. E., Suzuki M.* Some Chaotic Features of Intrinsically Coupled Josephson Junctions // Physica C. 2013. V. 491. P. 63–65.
10. *Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Medvedeva S. Yu., Kolahchi M. R., Irie A.* Structured Chaos in a Devil’s Staircase of the Josephson Junction // Chaos. 2014. V. 24, No. 3. P. 033115.
11. *Shukrinov Yu. M., Azemtsa-Donjack H., Botha A. E.* Chaos Induced by Coupling between Josephson Junctions // JETP. Lett. 2015. V. 101. P. 251–257.
12. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Medvedeva S. Yu., Kolahchi M. R.* Structured Chaos in 1-D Stacks of Intrinsic Josephson Junctions Irradiated by Electromagnetic Waves // J. Supercond. Nov. Magn. 2015. V. 28. P. 349–354.
13. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Seidel P.* Effects of LC Shunting on the Shapiro Steps Features of Josephson Junction // Europhys. Lett. 2015. V. 110, No. 4. P. 47001.
14. *Shukrinov Yu. M., Azemtsa-Donjack H., Rahmonov I. R., Botha A. E.* Cascade of Parametric Resonances in Coupled Josephson Junctions // Low Temp. Phys. 2016. V. 42. P. 446–452.
15. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Kolahchi M. R.* A Farey Staircase from the Two-Extremum Return Map of a Josephson Junction // Nonlin. Dyn. 2016. V. 84. P. 1363–1372.
16. *Sokolović I., Mali P., Odavić J., Radošević S., Medvedeva S. Yu., Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Tekić J.* Devil’s Staircase and the Absence of Chaos in the dc- and ac-Driven Overdamped Frenkel–Kontorova Model // Phys. Rev. E. 2017. V. 96. P. 022210.
17. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Botha A. E., Plecenik A., Seidel P., Nawrocki W.* Modeling of LC-Shunted Intrinsic Josephson Junctions in High- $T_c$  Superconductors // Supercond. Sci. Tech. 2017. V. 30, No. 2. P. 024006.
18. *Nashaat M., Botha A. E., Shukrinov Yu. M.* Devil’s Staircases in the IV Characteristics of Superconductor/Ferromagnet/Superconductor Josephson Junctions // Phys. Rev. B. 2018. V. 97. P. 224514.
19. *Botha A. E., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M.* Spontaneous and Controlled Chaos Synchronization in Intrinsic Josephson Junctions // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2018. V. 28, No. 7. P. 1800806.
20. *Shukrinov Yu. M., Mazanik A., Rahmonov I. R., Botha A. E., Buzdin A.* Re-orientation of the Easy Axis in  $\varphi_0$ -Junction // Europhys. Lett. 2018. V. 122, No. 3. P. 37001.

21. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Botha A. E.* Superconducting Spintronics in the Presence of Spin-Orbital Coupling // IEEE Trans. Appl. Supercond. 2018. V. 28, No. 7. P. 1800505.
22. *Tekić J., Botha A. E., Mali P., Shukrinov Yu. M.* Inertial Effects in the dc + AC Driven Underdamped Frenkel–Kontorova Model: Subharmonic Steps, Chaos, and Hysteresis // Phys. Rev. E. 2019. V. 99. P. 022206.
23. *Benecha M., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Ananikian N.* Modeling of dc SQUIDS with Topologically Nontrivial Barriers // Arm. J. Phys. 2019. V. 12. P. 226–232.
24. *Mazanik A. A., Rahmonov I. R., Botha A. E., Shukrinov Yu. M.* Analytical Criteria for Magnetization Reversal in a  $\varphi_0$  Josephson Junction // Phys. Rev. Appl. 2020. V. 14. P. 014003.
25. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Botha A. E.* Peculiarities of IV-Characteristics and Magnetization Dynamics in the  $\varphi_0$  Josephson Junction // Low Temp. Phys. 2020. V. 46, No. 9. P. 932–938.
26. *Tekić J., Botha A. E., Mali P., Shukrinov Yu. M.* The AC Driven Frenkel–Kontorova Model: From Shapiro Steps to Chaos // 13th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. Cham: Springer Intern. Publ., 2021. P. 943–951.
27. *Shukrinov Yu. M., Abouhaswa A. S., Botha A. E.* Double and Triple Resonance Behaviour in Large Systems of LC-Shunted Intrinsic Josephson Junctions // Phys. Lett. A. 2021. V. 387. P. 127025.
28. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Tekić J.* Chaos along the rc-Branch of RLC-Shunted Intrinsic Josephson Junctions // Chaos Solit. Fractals. 2022. V. 156. P. 111865.
29. *Nashaat M., Sameh M., Botha A. E., Kulikov K. V., Shukrinov Yu. M.* Bifurcation Structure and Chaos in Dynamics of Nanomagnet Coupled to Josephson Junction // Chaos. 2022. V. 32, No. 9. P. 093142.
30. *Mazanik A. A., Botha A. E., Rahmonov I. R., Shukrinov Yu. M.* Hysteresis and Chaos in Anomalous Josephson Junctions without Capacitance // Phys. Rev. Appl. 2024. V. 22. P. 014062.
31. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Tekić J., Kolahchi M. R.* Chaotic Dynamics from Coupled Magnetic Monodomain and Josephson Current // Phys. Rev. E. 2023. V. 107. P. 024205.
32. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M.* Observation of Chaotic Behaviour in the CCJJ + DC Model of Coupled Josephson Junctions // Chaotic Modeling Simul. 2013. V. 2. P. 265–272.
33. *Azemtsa-Donjack H., Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R.* Can Shapiro Step Subharmonics Be “Charged”? // Proc. of the 59th Ann. Conf. of the South African Inst. Phys. (SAIP2014), Univ. of Johannesburg, 2015. P. 22–28.
34. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Botha A. E., Gaafar M., El Samman H., Dawood R., Nashaat M., El Sherbini T.* Intrinsic Josephson Junctions for Superconducting Electronics and Quantum Computation // Proc. of the 15th Intern. Supercond. Electronics Conf. (ISEC 2015), Japan, July 6–9, 2015. P. DP-P02.
35. *Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Kolahchi M. R.* Synchronization and Chaos Control Features in Arrays of Intrinsic Josephson

- Junctions // 16th Intern. Supercond. Electronics Conf. (ISEC), Naples, Italy, June 12–16, 2017. IEEE Xplore, 2017. P. 1–4.
36. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Botha A. E.* Dynamics of Anomalous Josephson Effect in Superconducting Nanostructures // AIP Conf. Proc. 2022. V. 2551, No. 1. P. 020003.
  37. *Botha A. E., Eclerová V., Shukrinov Yu. M., Kolahchi M. R.* Effects of Frustrated Interactions on Synchronicity in Electrical Power Grids // 15th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. Cham: Springer Intern. Publ., 2023. P. 53–61.
  38. *Olivier C., Shukrinov Yu. M., Botha A. E.* Evaluation of Proportional and Nonlinear Damping Control Schemes in an Optimized Power Grid // Intern. Conf. on Electrical, Comput. and Energy Technol. (ICECET'2023), Cape Town, South Africa, Nov. 17, 2023. P. 1–6.
  39. *Kolahchi M. R., Shukrinov Yu. M., Botha A. E.* Resonance Overlap as the Origin of Structured Chaos in Josephson Junctions // Book of Abstr. of the 9th Intern. Symp. on Intrinsic Josephson Effects and THz Plasma Oscillations in High- $T_c$  Superconductors (THz-PLASMA 2014), Kyoto, Japan, Nov. 30 – Dec. 3, 2014. Kyoto Univ., 2014. P. 22.
  40. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Botha A. E., Sengupta K., Seidel P.* Modelling of Josephson Nanostructures // Proc. of the XXI Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”, Nizhniy Novgorod, March 13–16, 2017. Publ. House of Nizhniy Novgorod State Univ., 2017. V. 1. P. 122–123.
  41. *Shukrinov Yu., Rahmonov I., Botha A. E., Plecenik A., Angel D.* Magnetization Dynamics Features in the SFS  $\varphi_0$  Josephson Junction // Intern. Conf. on UK–China Emerging Technol. (UCET'2020), Glasgow, UK, Aug. 20–21, 2020. IEEE Xplore, 2020. P. 1–2.
  42. *Nashaat M., Sameh M., Botha A. E., Kulikov K. V., Shukrinov Yu. M.* Bifurcations in Josephson Junction Coupled to the Nanomagnet // Proc. of the XXVI Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”, Nizhniy Novgorod, March 14–17, 2022. Publ. House of Nizhniy Novgorod State Univ., 2022. V. 1. P. 17–18.
  43. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Abdelmoneim S. A., Nashaat M., Janalizadeh A., Kolahchi M. R., Botha A. E., Tekić J.* Nonlinearity, Locking, and Chaos in Anomalous Josephson Junctions // Proc. of the XXVII Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”, Nizhniy Novgorod, March 13–16, 2023. Publ. House of Nizhniy Novgorod State Univ., 2023. V. 1. P. 132–133.
  44. *Tsujimoto M., Yamamoto T., Delfanazari K., Nakayama R., Kitamura T., Sawamura M., Kashiwagi T., Minami H., Tachiki M., Kadowaki K., Klemm R. A.* Broadly Tunable Subterahertz Emission from Internal Branches of the Current-Voltage Characteristics of Superconducting  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  Single Crystals // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 108. P. 107006.
  45. *Yao Y., Cai R., Yang S. H., Xing W., Ma Y., Mori M., Ji Y., Maekawa S., Xie X. C., Han W.* Half-Integer Shapiro Steps in Strong Ferromagnetic Josephson Junctions // Phys. Rev. B. 2021. V. 104. P. 104414.
  46. *Shukrinov Yu. M.* Anomalous Josephson Effect // Phys. Usp. 2022. V. 65. P. 317–354.
  47. *Linder J., Halterman K.* Superconducting Spintronics with Magnetic Domain Walls // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 104502.

48. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Sengupta K., Buzdin A.* Magnetization Reversal by Superconducting Current in  $\varphi_0$  Josephson Junctions // *Appl. Phys. Lett.* 2017. V. 110, No. 18. P. 182407.
49. *Buzdin A. I.* Proximity Effects in Superconductor–Ferromagnet Heterostructures // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 935–976.
50. *Buzdin A.* Direct Coupling between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson  $\varphi_0$  Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 107005.
51. *Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., Il'ichev E.* The Current-Phase Relation in Josephson Junctions // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 411–469.
52. *Bergeret F. S., Volkov A. F., Efetov K. B.* Odd Triplet Superconductivity and Related Phenomena in Superconductor–Ferromagnet Structures // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 1321–1373.
53. *Kuramoto Y., Battogtokh D.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators // *Nonlin. Phenom. Complex Syst.* 2002. V. 5. P. 380–385.
54. *Abrams D. M., Strogatz S. H.* Chimera States for Coupled Oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 93. P. 174102.
55. *Shukrinov Yu. M., Mahfouzi F., Seidel P.* Equidistance of Branch Structure in Capacitively Coupled Josephson Junctions Model with Diffusion Current // *Physica C.* 2006. V. 449, No. 1. P. 62–66.
56. *Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Gaafar M. A.* Calculation of the Plasma Frequency of a Stack of Coupled Josephson Junctions Irradiated with Electromagnetic Waves // *Phys. Rev. B.* 2012. V. 86. P. 184502.
57. *Linder J., Robinson J. W. A.* Superconducting Spintronics // *Nat. Phys.* 2015. V. 11, No. 4. P. 307–315.
58. *Kapitza P. L.* Pendulum with a Vibrating Suspension // *Usp. Fiz. Nauk.* 1951. V. 44. P. 7–15.
59. *Marin Bukov L. D., Polkovnikov A.* Universal High-Frequency Behavior of Periodically Driven Systems: From Dynamical Stabilization to Floquet Engineering // *Adv. Phys.* 2015. V. 64. P. 139–226.
60. *Borromeo M., Marchesoni F.* Artificial Sieves for Quasimassless Particles // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 150605.
61. *Aidelsburger M., Lohse M., Schweizer C. et al.* Measuring the Chern Number of Hofstadter Bands with Ultracold Bosonic Atoms // *Nat. Phys.* 2015. V. 11. P. 162–166.
62. *Wickenbrock A., Holz P. C., Wahab N. A. A., Phoonthong P., Cubero D., Renzoni F.* Vibrational Mechanics in an Optical Lattice: Controlling Transport via Potential Renormalization // *Phys. Rev. Lett.* 2012. V. 108. P. 020603.
63. *Chizhevsky V. N.* Experimental Evidence of Vibrational Resonance in a Multistable System // *Phys. Rev. E.* 2014. V. 89. P. 062914.
64. *Uzuntarla M., Yilmaz E., Wagemakers A., Ozer M.* Vibrational Resonance in a Heterogeneous Scale Free Network of Neurons // *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2015. V. 22, No. 1. P. 367–374.
65. *Boukobza E., Moore M. G., Cohen D., Vardi A.* Nonlinear Phase Dynamics in a Driven Bosonic Josephson Junction // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 104, No. 24. P. 240402.

66. *Citro R., Torre E. G. D., D'Alessiod L., Polkovnikov A., Babadi M., Oka T., Demler E.* Dynamical Stability of a Many-Body Kapitza Pendulum // *Ann. Phys.* 2015. V. 360. P. 694.
67. *Fialko O., Opanchuk B., Sidorov A. I., Drummond P. D., Brand J.* Fate of the False Vacuum: Towards Realization with Ultra-Cold Atoms // *Europhys. Lett.* 2015. V. 110, No. 5. P. 56001.
68. *Longhi S.* Rapidly Oscillating Scatteringless Non-Hermitian Potentials and the Absence of Kapitza Stabilization // *Europhys. Lett.* 2017. V. 118, No. 2. P. 20004.
69. *Shayak B.* A Mechanism for Electromagnetic Trapping of Extended Objects // *Ibid.* No. 4. P. 45002.
70. *Martin J., Georgeot B., Guéry-Odelin D., Shepelyansky D. L.* Kapitza Stabilization of a Repulsive Bose–Einstein Condensate in an Oscillating Optical Lattice // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 97. P. 023607.
71. *Shukrinov Yu. M., Nashaat M., Rahmonova I. R., Kulikov K. V.* Ferromagnetic Resonance and the Dynamics of the Magnetic Moment in a Josephson Junction – Nanomagnet System // *JETP Lett.* 2019. V. 110, No. 3. P. 160–165.
72. *Motter A. E., Myers S. A., Anghel M., Nishikawa T.* Spontaneous Synchrony in Power-Grid Networks // *Nat. Phys.* 2013. V. 9. P. 191.
73. *Auer S., Hellmann F., Krause M., Kurths J.* Stability of Synchrony against Local Intermittent Fluctuations in Tree-Like Power Grids // *Chaos.* 2017. V. 27. P. 127003.
74. *Schäfer B., Yalcin G. C.* Dynamical Modeling of Cascading Failures in the Turkish Power Grid // *Chaos.* 2019. V. 29. P. 093134.
75. *Anvari M. et al.* Short Term Fluctuations of Wind and Solar Power Systems // *New J. Phys.* 2016. V. 18. P. 063027.
76. *Coetzee D., Els M.* The Impact of Load Shedding on the Construction Industry in South Africa // *Emerging Trends in Construction Organizational Practices and Project Management Knowledge Areas.* Cape Town: Univ. of Cape Town, 2016. P. 268.
77. *Himansu Das, Gouri Sankar Panda, Bhagaban Muduli, Pradeep Kumar Rath.* The Complex Network Analysis of Power Grid: A Case Study of the West Bengal Power Network // *Intelligent Computing, Networking and Informatics / Eds. Durga Prasad Mohapatra, Srikanta Patnaik.* New Delhi: Springer, 2014. P. 17–29.
78. *Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S. H.* Synchronization Transitions in a Disordered Josephson Series Array // *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76. P. 404–407.
79. *Arinushkin P. A., Vadivasova T. E.* Nonlinear Damping Effects in a Simplified Power Grid Model Based on Coupled Kuramoto-Like Oscillators with Inertia // *Chaos Solit. Fractals.* 2021. V. 152. P. 111343.
80. *Mel'nikov A. S., Mironov S. V., Samokhvalov A. V., Buzdin A. I.* Superconducting Spintronics: State of the Art and Prospects // *Phys. Usp.* 2022. V. 65, No. 12. P. 1248–1289.
81. *Bobkova I. V., Bobkov A. M., Silaev M. A.* Magnetoelectric Effects in Josephson Junctions // *J. Phys.: Condens. Matter.* 2022. V. 34. P. 353001.