ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 2. С. 250–259

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

И. П. Волобуев *, *С. И. Кейзеров* **, *Э. Р. Рахметов* ***, *М. Н. Смоляков* ****

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассмотрена задача нахождения решений уравнения Клейна–Гордона для свободного массивного вещественного скалярного поля в пространстве-времени сферически-симметричных черных дыр. Показано, что радиальную часть этого уравнения можно привести к виду конфлюэнтного уравнения Гойна. Найдены физически адекватные решения этого уравнения, выраженные через конфлюэнтные функции Гойна, и вычислены их нормировки. Также обнаружено удвоение, по сравнению со случаем пространства Минковского, числа́ физически адекватных решений с энергией, большей массы частиц.

The problem of finding solutions to the Klein–Gordon equation for a free massive real scalar field in the spacetime of spherically symmetric black holes is considered. It is shown that the radial part of this equation can be reduced to the form of a confluent Heun equation. Physically adequate solutions to this equation, expressed through confluent Heun functions, are found and their normalizations are calculated. A doubling, compared to the case of Minkowski space, of the number of physically adequate solutions with energy greater than that of the particle mass has been observed.

PACS: 04.50.+h

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени как отдельное научное направление существует с конца 1960-х гг., квантование полей в окрестности черных дыр к настоящему времени изучено недостаточно полно для того, чтобы осуществить корректную на всех этапах процедуру канонического квантования даже вещественного скалярного поля (см., например, обсуждение и цитируемую литературу в [1]). В частности, до сих пор в научных публикациях

* E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru
** E-mail: errar@mail.ru
*** E-mail: rahmetov@theory.sinp.msu.ru
**** E-mail: smolyakov@theory.sinp.msu.ru

периодически возникают дискуссии о спектре физических состояний скалярных (и других) полей в гравитационном поле черных дыр общей теории относительности. Например, в классической работе [2] утверждается, что при энергиях меньших, чем масса поля, спектр физических состояний является дискретным (см. также [3]), хотя при этом каждое состояние имеет бесконечную норму. Открытым остается также вопрос, могут ли такие физические состояния быть описаны в терминах известных специальных функций и какова их нормировка.

В настоящей работе мы рассмотрим эти задачи для важного частного случая сферически-симметричных метрик, а именно получим спектр и точные аналитические выражения для нормированных физических состояний вещественного массивного скалярного поля в гравитационном поле сферически-симметричных черных дыр общей теории относительности в вакууме. Отметим, что полученные результаты не только важны для построения корректной процедуры квантования полей в окрестности черных дыр, но и могут иметь прикладное значение для других областей, в частности для астрономии и космологии, поскольку время жизни черной дыры зависит от спектра излучения Хокинга, который определяется спектром состояний физических полей в окрестности черной дыры.

ЗАДАЧА О СПЕКТРЕ СОСТОЯНИЙ

Каноническое квантование полей в гравитационном поле черной дыры требует знания спектра и свойств решений уравнений свободных полей в метрике черной дыры. Для массивного скалярного поля в случае сферически-симметричной черной дыры в вакууме уравнение Клейна–Гордона имеет вид

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = \left[\frac{1}{f}\partial_t^2 - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f \partial_r - \frac{1}{r^2}\Delta_{S_2} + m^2\right]\phi = 0, \tag{1}$$

где $f = 1 - r_0/r$ для черной дыры Шварцшильда, r_0 — радиус Шварцшильда, $f = 1 - r_0/r + (GQ^2)/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ для черной дыры Райсснера–Нордстрёма с электрическим зарядом Q, $f = 1 - r_0/r + \dfrac{G(Q^2 + Q_m^2)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ для черной дыры с электрическим зарядом Q и магнитным зарядом Q_m.

Корни уравнения $f = 0$ определяют особенности метрики, традиционно обозначаемые $r_\pm$ и называемые внутренним и внешним горизонтами черной дыры. Для массивного скалярного поля в сферически-симметричной метрике уравнение Клейна–Гордона допускает разделение переменных, т. е. его частное решение можно записать в виде

$$\phi = \mathrm{e}^{-iEt}\, R(r) Y_l(\theta, \varphi), \tag{2}$$

где Y_l — сферическая функция с собственным значением $-l(l+1)$, а $R(r)$ — радиальная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\left[-\frac{E^2}{f} - \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 f \partial_r + \frac{l\,(l+1)}{r^2} + m^2\right] R = 0. \tag{3}$$

В работе [3] отмечено, что решения уравнения (3) для черной дыры Шварцшильда выражаются через функции Гойна, однако их явный вид не приводился. В статье [4] представлены решения для заряженных черных дыр, выраженные через функции Гойна, однако регулярные на бесконечности физические решения выделены не были.

СВОЙСТВА РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Анализ особых точек дифференциального уравнения позволяет его классифицировать и приводить к стандартному для такого класса уравнений виду, что дает информацию о свойствах его решений. В этом разделе покажем, что уравнение (1) является конфлюэнтным уравнением класса Гойна и может быть приведено к одной из его стандартных форм.

Для черных дыр, описываемых сферически-симметричными метриками, нормированная на r_0 радиальная часть уравнения Клейна–Гордона (1) имеет три особые точки: $r_1 = r_-$, $r_2 = r_+$, $r_3 = \infty$, где $r_\pm$ — радиусы внешнего и внутреннего горизонтов. Первые две из них являются так называемыми фуксовыми особыми точками, а третья — нефуксовой особой точкой [5]. Ранги этих особых точек равны 1, 1 и 2 соответственно, а следовательно, мультисимвол уравнения есть $\{1;1;2\}$. Согласно [5] уравнение с таким мультисимволом является однократно конфлюэнтным уравнением Гойна, поэтому может быть приведено к одной из стандартных форм конфлюэнтного уравнения Гойна. После подстановки

$$R(r) = (r - r_-)^{-i\frac{r_-^2\,\omega}{r_+ - r_-}}\,(r - r_+)^{i\frac{r_+^2\,\omega}{r_+ - r_-}}\;\mathrm{e}^{ikr}\Phi(r) \tag{4}$$

и замены переменной вида

$$r = (r_+ - r_-)\,\rho + r_-, \quad \Phi(r) = \Phi\left((r_+ - r_-)\,\rho + r_-\right) \equiv F(\rho), \tag{5}$$

где $\omega = Er_0$, $\mu = mr_0$, $k^2 = \omega^2 - \mu^2$, для функции $F(\rho)$ получаем стандартную форму конфлюэнтного уравнения Гойна:

$$\left[\rho(\rho-1)\,\partial_\rho^2 + (-b\rho(\rho-1) + c(\rho-1) + d\rho)\,\partial_\rho + (-ba\rho + \lambda)\right] F = 0, \tag{6}$$

где параметры уравнения выражаются через обезразмеренные с помощью параметра r_0 физические величины следующим образом:

$$\begin{aligned} &a = 1 + \frac{(\omega - k)^2}{i2k}, \quad b = -i2k\,(r_+ - r_-)\,, \quad c = 1 - i\frac{2r_-^2\omega}{r_+ - r_-}, \\ &d = 1 + i\frac{2\omega r_+^2}{(r_+ - r_-)}, \quad \lambda = (\omega - k)^2 r_-^2 - l\,(l+1) + i\,(\omega - (r_+ - r_-)\,k)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

РЕШЕНИЯ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИЙ ГОЙНА

Согласно [5] общее решение $F(\rho)$ конфлюэнтного уравнения Гойна (6), регулярное на внешнем горизонте, может быть записано как сумма двух линейно независимых решений:

$$F(\rho) = A_1 F^{(1)}(\rho) + A_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho), \tag{8}$$

где

$$F^{(1)}(\rho) = Hc\,(ab - \lambda, ab, d, c, b, 1 - \rho), \tag{9}$$

$$\tilde{F}^{(1)}(\rho) = (1-\rho)^{1-d} \times \\ \times Hc\left(ab - \lambda + (b-c)(1-d), b(1-d+a), 2-d, c, b, 1-\rho\right) \tag{10}$$

и где через $Hc\,(ab - \lambda, ab, d, c, b, 1 - \rho)$ обозначена конфлюэнтная функция Гойна с соответствующими параметрами, а A_1 и A_2 — произвольные константы.

Оба слагаемых в общем решении (8) на внешнем горизонте являются бесконечно быстро осциллирующими, но при этом ограниченными, а также регулярными в области $1 < \rho < \infty$. При этом каждое из решений $F^{(1)}$ и $\tilde{F}^{(1)}$ можно рассматривать как ряд с радиусом сходимости единица, построенный методом Фробениуса в окрестности внешнего горизонта ($\rho = 1$, т. е. $r = r_+$). Рекуррентные формулы для коэффициентов таких рядов в случае черной дыры Шварцшильда получены нами в работе [6] и для остальных рассматриваемых метрик выглядят аналогичным образом, будучи выраженными через параметры соответствующего конфлюэнтного уравнения типа (6). Решения в окрестности внутреннего горизонта $r = r_-$ также легко могут быть построены с помощью метода Фробениуса, но здесь мы их не рассматриваем, поскольку эта область пространства-времени скрыта от наблюдателя внешним горизонтом черной дыры и поэтому не может влиять на свойства физических решений над внешним горизонтом.

ВЫДЕЛЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Для изучения асимтотического поведения решений в окрестности особых точек удобно воспользоваться их представлением в форме бесконечных рядов. Особая точка на бесконечности является нефуксовой особой точкой, и метод Фробениуса для построения решения в ее окрестности неприменим. Поэтому для оценки асимптотического поведения решения в бесконечно удаленной точке мы использовали решения Томе:

$$F^{(\infty)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j z^{-j-a}, \quad \tilde{F}^{(\infty)}(z) = \mathrm{e}^{bz} \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{F}_j z^{-j+a-c-d}, \tag{11}$$

рекуррентные формулы для коэффициентов таких рядов для черной дыры Шварцшильда также приведены нами в работе [6] и для остальных рассматриваемых сферических метрик выглядят аналогично, будучи выраженными через параметры (7) соответствующего конфлюэнтного уравнения (6). Линейная комбинация из первых членов каждого ряда дает поведение общего решения $F(\rho)$ при больших значениях ρ:

$$F^{(\infty)}(\rho)_{\rho\to\infty} \sim B_1\rho^{-a} + \mathrm{e}^{b\rho}\, B_2\rho^{a-c-d}, \tag{12}$$

где B_1 и B_2 — произвольные константы. Отсюда для радиальной функции получаем асимптотическое поведение при больших значениях ρ:

$$R(r)|_{r\to\infty} \sim \left(\frac{r-r_+}{r-r_-}\right)^{i\frac{\omega r_+^2}{r_+-r_-}} \times$$
$$\times \left\{B_1\,\mathrm{e}^{ik(r-r_-)}\,(r-r_-)^{i\frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}-1} + B_2\,\mathrm{e}^{-ik(r-r_-)}(r-r_-)^{-i\frac{2\omega^2-\mu^2}{2k}-1}\right\}. \tag{13}$$

При построении физического решения коэффициенты B_1 и B_2 определяются из условия несингулярного поведения решения на бесконечности, получающегося из требования нормировки решения на дельта-функцию. Возможны два различных варианта асимптотического поведения выражения для $R(r)$.

• Если $k = \pm\sqrt{\omega^2-\mu^2}$ вещественное, т. е. $\omega > \mu$, то оба решения на бесконечности убывают как $1/r$. В этом случае требование, чтобы физическое решение было регулярно на бесконечности, не накладывает никаких условий на произвольные константы B_1, B_2.

• Если $k = \pm i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$ является чисто мнимым, то энергия частицы меньше ее массы, $\omega < \mu$, что соответствует связанному состоянию. В таком случае одно из решений на бесконечности экспоненциально падает, а второе экспоненциально растет. Поэтому, чтобы получить физическое решение, убывающее на бесконечности, следует положить равной нулю одну из констант (B_1 или B_2) в зависимости от выбора знака в выражении $k = \pm i\sqrt{\mu^2-\omega^2}$.

Из анализа асимптотического поведения решений на бесконечности (13) следует, что для выделения физического решения, выражающегося через функции Гойна, необходимо задать такую связь между коэффициентами A_1 и A_2, чтобы в получившейся линейной комбинации сокращалась экспоненциально растущая на бесконечности часть. Для этого следует выяснить, как линейно независимые решения на горизонте $F^{(1)}(\rho) = Hc\,(ab-\lambda, ab, d, c, b, 1-\rho)$ и $\tilde{F}^{(1)} = (1-\rho)^{1-d}Hc\,(ab-\lambda+(1-d), b(1-d+a), 2-d, c, b, 1-\rho)$, выраженные через конфлюэнтные функции Гойна, выражаются через решения Томе $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$. Решения на горизонте, выраженные через функции Гойна, и решения Томе $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ имеют общую область сходимости $1 < \rho < 2$. Следовательно, некоторая линейная комбинация функций $F^{(\infty)}(z)$ и $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ является аналитическим продолжением функций Гойна в область $2 < \rho < \infty$. Коэффициенты в таких линейных комбинациях можно определить с помощью описанной ниже процедуры.

Поскольку области сходимости функций $F^{(1)}(\rho)$, $\tilde{F}^{(1)}$ и $F^{(\infty)}(z)$, $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ имеют пересекающийся интервал $1 < \rho < 2$, то для произвольной точки ρ_* этого интервала можно записать следующие разложения, выражающие решения и их первые производные на бесконечности $F^{(\infty)}(z)$, $\tilde{F}^{(\infty)}(z)$ через решения $F^{(1)}(\rho)$, $\tilde{F}^{(1)}$ и их первые производные на горизонте:

$$\begin{aligned}
F^{(\infty)}(\rho_*) &= C_1 F^{(1)}(\rho_*) + C_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho_*), \\
F^{(\infty)'}(\rho_*) &= C_1 F^{(1)'}(\rho_*) + C_2 \tilde{F}^{(1)'}(\rho_*), \\
\tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) &= \tilde{C}_1 F^{(1)}(\rho_*) + \tilde{C}_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho_*), \\
\tilde{F}^{(\infty)'}(\rho_*) &= \tilde{C}_1 F^{(1)'}(\rho_*) + \tilde{C}_2 \tilde{F}^{(1)'}(\rho_*),
\end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Решая эти уравнения относительно коэффициентов C_1, $\tilde{C}_1$, C_2, $\tilde{C}_2$, получим, что они выражаются через отношения соответствующих вронскианов, вычисленных в точке ρ_*. Далее, используя разложение общего решения по решениям вблизи горизонта $F(\rho) = A_1 F^{(1)}(\rho) + A_2 \tilde{F}^{(1)}(\rho)$ и сравнивая с разложением общего решения по решениям в бесконечно удаленной точке $F(\rho) = B_1 F^{(\infty)}(\rho) + B_2 \tilde{F}^{(\infty)}(\rho)$, получим $A_1 = B_1 C_1 + B_2 \tilde{C}_1$ и $A_2 = B_1 C_2 + B_2 \tilde{C}_2$. В итоге имеем два типа решений.

• Состояния финитного движения, когда энергия частицы меньше ее массы $\omega < \mu$, с мнимым $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$, для которых получаем, что отношение констант A_1/A_2 зависит только от отношения констант C и $\tilde{C}$:

$$\frac{A_1}{A_2} \equiv K_\pm = \\
= \begin{cases}
\dfrac{\tilde{F}^{(1)'}(\rho_*) F^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*) F^{(\infty)'}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*) F^{(\infty)'}(\rho_*) - F^{(1)'}(\rho_*) F^{(\infty)}(\rho_*)}, & k = i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}, \\
\dfrac{\tilde{F}^{(1)'}(\rho_*) \tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*) - \tilde{F}^{(1)}(\rho_*) \tilde{F}^{(\infty)'}(\rho_*)}{F^{(1)}(\rho_*) \tilde{F}^{(\infty)'}(\rho_*) - F^{(1)'}(\rho_*) \tilde{F}^{(\infty)}(\rho_*)}, & k = -i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}.
\end{cases} \tag{14}$$

• Состояния инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$, для которых на константы A_1 и A_2 накладываются только условия нормировки.

НОРМИРОВКА СОСТОЯНИЙ И ДВУКРАТНОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ИНФИНИТНОГО ДВИЖЕНИЯ

Полученные состояния непрерывного спектра могут быть нормированы на дельта-функцию:

$$\int\limits_{r_+}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ R^*(\ldots; r)\, R(\ldots'; r) + \mathrm{h.\,c.} \right\} \frac{r^4}{(r - r_-)(r - r_+)}\, dr = \frac{1}{2\omega} \delta(|k - k'|). \tag{15}$$

Для вычисления этого интеграла разобьем интервал интегрирования на три части: $r_+ \leqslant r \leqslant r_4$ (γ_1), $r_4 \leqslant r \leqslant r_5$ (γ_2), $r_5 \leqslant r < \infty$ (γ_3). На интервале γ_1 нормировочный интеграл расходится. На интервале γ_2 он конечен. На интервале γ_3 при $\omega > \mu$ подынтегральное выражение осциллирует, а при $\omega < \mu$ экспоненциально убывает. Поэтому при вычислении нормировки, если $\omega > \mu$, следует учесть интегралы по γ_1 и γ_3, а если $\omega < \mu$, то учитывается только интегрирование по γ_1. Такой метод вычисления нормировочных коэффициентов волновых функций в квантовой механике был описан в работе [7] и успешно использовался для вычисления нормировки состояний скалярного поля в метрике Шварцшильда в работе [8]. Тогда для констант нормировки получаем следующие значения.

• Для связанных состояний, когда энергия частицы меньше ее массы $\omega < \mu$, с мнимым $k = \pm i\sqrt{\mu^2 - \omega^2}$:

$$A_1^2 = \frac{|K_\pm|\,|k|}{2\pi r_+^2 \left(1 + |K_\pm|^2\right)\omega^2}, \quad A_2^2 = \frac{|k|}{2\pi r_+^2 \left(1 + |K_\pm|^2\right)\omega^2}.$$

• Для состояний инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ при $i = 1, 2$:

$$A_i = \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \left\{ C_i \sqrt{1 \pm \frac{P}{\sqrt{P^2 + |Q|^2}}} + \tilde{C}_i \sqrt{1 \mp \frac{P}{\sqrt{P^2 + |Q|^2}}} \right\},$$

где

$$P \equiv \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left[\left(|C_1|^2 + |C_2|^2\right) - \left(|\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2\right)\right],$$
$$Q \equiv 2\left[1 + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(C_1\tilde{C}_1^* + C_2\tilde{C}_2^*\right)\right].$$

Для состояний инфинитного движения, когда $\omega > \mu$, с вещественным $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ коэффициент перед дельта-функцией оказывается равным

$$\pi\left(\left[1 + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(|C_1|^2 + |C_2|^2\right)\right]|B_1|^2 + \left[1 + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(|\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2\right)\right]|B_2|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(C_1\tilde{C}_1^* + C_2\tilde{C}_2^*\right)B_1B_2^* + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\left(\tilde{C}_1C_1^* + \tilde{C}_2C_2^*\right)B_2B_1^*\right) = \frac{1}{2\omega}. \tag{16}$$

Выражение (16) можно переписать в матричном виде: $B^+MB = 1/2\omega$, где матрица M и двумерный вектор $B =$ выглядят как

$$M \equiv \pi\left\{I + \frac{r_+^2\omega}{|k|}\begin{pmatrix} |C_1|^2 + |C_2|^2 & C_1\tilde{C}_1^* + C_2\tilde{C}_2^* \\ C_1\tilde{C}_1^* + C_2\tilde{C}_2^* & |\tilde{C}_1|^2 + |\tilde{C}_2|^2 \end{pmatrix}\right\}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что каждому значению $k = \pm\sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ соответствуют два линейно независимых вектора B (поскольку пространство этих векторов двумерно). И, таким образом, мы приходим к интересному выводу, что состояния с $\omega > \mu$ оказываются двукратно вырожденными, что подтверждает для сферически-симметричных метрик результат, полученный из других соображений в работах [1, 9] для метрики Шварцшильда.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

В настоящей работе получены точные решения для скалярного поля в метрике сферически-симметричных черных дыр, выраженные через конфлюэнтные функции Гойна. Выделены комбинации, соответствующие физическим решениям, регулярным на бесконечности, и для них вычислена нормировка. Показано, что для скалярного поля в гравитационном поле сферически-симметричных черных дыр отсутствуют состояния с дискретным спектром и что состояния инфинитного движения для скалярного поля в гравитационном поле сферически-симметричных черных дыр оказываются двукратно вырожденными.

Отметим, что полученные результаты могут быть важны при изучении вращающихся черных дыр, описываемых аксиально-симметричными метриками Керра и Керра–Ньюмена. Например, они позволяют найти физические решения для скалярного поля в метрике для черной дыры Керра. Действительно, в метрике Керра для радиальной функции скалярного поля с помощью соответствующих подстановок мы также получаем конфлюэнтное уравнение Гойна

$$\left\{\rho\left(\rho-1\right)\partial_\rho^2 + \left[c\left(\rho-1\right) + d\rho + e\rho\left(\rho-1\right)\right]\partial_\rho - a + b\rho\right\}F = 0$$

с параметрами

$$\begin{gathered}
a \equiv -\lambda - r_+(\omega+k)^2 + r_- r_+ k^2 + 2Jmk - i\omega + i\left(r_+ - r_-\right)k,\\
b \equiv -\left(r_+ - r_-\right)\left(\omega+k\right)^2 + i2\left(r_+ - r_-\right)k,\\
c \equiv 1 + i2\beta, \quad d \equiv 1 + i2\alpha, \quad e \equiv i2\gamma,
\end{gathered}$$

где J — полный вращательный момент черной дыры, отнесенный к ее массе, а параметры α, β, γ выражаются через введенные ранее безразмерные величины следующим образом:

$$\alpha = \frac{Jm - \omega r_-}{r_+ - r_-}, \quad \beta = \frac{\omega r_+ - Jm}{r_+ - r_-}, \quad \gamma = \left(r_+ - r_-\right)k, \quad k^2 = \omega^2 - \mu^2.$$

Решением такого уравнения будет линейная комбинация конфлюэнтных функций Гойна:

$$\begin{aligned}
F\left(\rho\right) = {} & A_1 Hc\left(a, b, c, d, e; \rho\right) + \\
& + A_2 \rho^{1-c} Hc\left(a + \left(1-c\right)\left(e-d\right), b + \left(1-c\right)e, 2-c, d, e; \rho\right). \quad (17)
\end{aligned}$$

Для радиальной функции имеем, соответственно,

$$R\left(r\right)=\mathrm{e}^{ik\left(r_{+}-r\right)}\left(\frac{r_{-}-r}{r_{+}-r_{-}}\right)^{i\frac{Jm-\omega r_{-}}{r_{+}-r_{-}}}\left\{A_{1}\left(\frac{r_{+}-r}{r_{+}-r_{-}}\right)^{i\frac{\omega r_{+}-Jm}{r_{+}-r_{-}}}\times\right.$$

$$\times\,Hc\left(a,b,c,d,e;\frac{r_{+}-r}{r_{+}-r_{-}}\right)+A_{2}\left(\frac{r_{+}-r}{r_{+}-r_{-}}\right)^{-i\frac{\omega r_{+}-Jm}{r_{+}-r_{-}}}\times$$

$$\left.\times\,Hc\left(a+\left(1-c\right)\left(e-d\right),b+\left(1-c\right)e,2-c,d,e;\frac{r_{+}-r}{r_{+}-r_{-}}\right)\right\}. \quad (18)$$

Регулярные на бесконечности физические решения для метрики Керра можно получить с помощью принципа соответствия, используя то, что при $J=0$ физическое решение для метрики Керра должно переходить в физическое решение для метрики Шварцшильда. Это позволяет определить отношение коэффициентов A_1/A_2 в физическом решении (18). В тех случаях, когда это отношение слабо зависит от J, оказывается, что для состояний инфинитного движения оно совпадает с формулой (14) для метрики Шварцшильда. Для состояний инфинитного движения, когда $\omega>\mu$, с вещественным $k=\pm\sqrt{\omega^2-\mu^2}$ в метрике Керра, так же как и в метрике Шварцшильда, на константы A_1 и A_2 накладываются только условия нормировки.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Э. Э. Боосу и В. О. Егорову за полезные обсуждения.

Финансирование. Исследование поддержано Национальным центром физики и математики в рамках научной программы направления № 5 «Физика частиц и космология».

Конфликт интересов. Все авторы подтверждают отсутствие известных и потенциальных источников конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Egorov V., Smolyakov M., Volobuev I.* Doubling of Physical States in the Quantum Scalar Field Theory for a Remote Observer in the Schwarzschild Spacetime // Phys. Rev. D. 2023. V. 107, No. 4. P. 025001-1–025001-15; arXiv:2209.02067 [gr-qc].
2. *Deruelle N., Ruffini R.* Quantum and Classical Relativistic Energy States in Stationary Geometries // Phys. Lett. B. 1974. V. 52, No. 4. P. 427–441.
3. *Zecca A.* Properties of Radial Equation of Scalar Field in Schwarzschild Space-Time // Nuovo Cim. B. 2009. V. 124, No. 12. P. 1251–1258.
4. *Vieira H. S., Bezerra V. B.* Confluent Heun Functions and the Physics of Black Holes: Resonant Frequencies, Hawking Radiation and Scattering of Scalar Waves // Ann. Phys. 2016. V. 373. P. 28–42; arXiv:1603.02233 [gr-qc].
5. *Slavyanov S. Yu., Lay W.* Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities. Oxford Univ. Press, 2000.

6. *Волобуев И. П., Кейзеров С. И., Рахметов Э. Р.* Точные решения для массивного скалярного поля в гравитационном поле черной дыры Шварцшильда // ФИЗМАТ. 2023. Т. 1, № 2. С. 75–87.
7. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory. Second ed. Pergamon Press, 1965.
8. *Smolyakov M. N.* Asymptotic Behavior of Solutions and Spectrum of States in the Quantum Scalar Field Theory in the Schwarzschild Spacetime // Phys. Rev. D. 2023. V. 108, No. 10. P. 105006; arXiv:2309.06249 [gr-qc].
9. *Barranco J., Bernal A., Degollado J. C., Diez-Tejedor A., Megevand M., Alcubierre M., Nunez D., Sarbach O.* Are Black Holes a Serious Threat to Scalar Field Dark Matter Models? // Phys. Rev. D. 2011. V. 84, No. 8. P. 083008-1–083008-13; arXiv:1108.0931 [gr-qc].