ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2025. Т. 56, вып. 2. С. 393–402

$\mathcal{N}=2$ СУПЕРГРАВИТАЦИЯ И ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО: ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ СУПЕРКРИВИЗНЫ

Е. А. Иванов [1,*], *Н. М. Заиграев* [2,**]

[1] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2] Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

С использованием формулировки супергравитации $\mathcal{N}=2$ в гармоническом суперпространстве построен полный набор линеаризованных суперкривизн, а именно: $\mathcal{N}=2$ суперсимметризаций скалярной кривизны, неприводимой части тензора Риччи и самодуального тензора Вейля. На основе этих суперкривизн построен полный набор квадратичных инвариантов линеаризованной супергравитации $\mathcal{N}=2$. Суперкривизны обладают элегантной геометрической структурой и допускают обобщение на высшие спины, тем самым открывая дорогу к построению ряда $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных кубических взаимодействий таких спинов.

Using the formulation of $\mathcal{N}=2$ supergravity in harmonic superspace, we construct a complete set of linearized supercurvatures that are $\mathcal{N}=2$ supersymmetrizations of the scalar curvature, the irreducible part of the Ricci tensor and the self-dual Weyl tensor. Based on these supercurvatures, the total set of quadratic invariants of the linearized $\mathcal{N}=2$ supergravity is constructed. Supercurvatures have a beautiful geometric structure and admit a generalization to higher spins, thereby opening the way towards the construction of a number of $\mathcal{N}=2$ supersymmetric cubic interactions of such spins.

PACS: 04.65.+e; 11.30.Pb

ВВЕДЕНИЕ

Теория расширенной супергравитации объединяет теорию гравитации, калибровочные поля и поля материи на основе суперсимметрии [1]. В теориях супергравитации преобразования суперсимметрии являются локальными, т. е. супергравитация суть калибровочная теория суперсимметрии. Ее важное свойство состоит в улучшении поведения в ультрафиолетовой области [2]: теория супергравитации оказывается конечной в одной и двух петлях. Однако расходимости возникают в старших

* E-mail: eivanov@theor.jinr.ru
** E-mail: nikita.zaigraev@phystech.edu

порядках. В связи с этим важно знать структуру контрчленов, представляющих собой суперсимметризацию старших инвариантов кривизны [3].

С другой стороны, теории гравитации, содержащие старшие инварианты, обладают рядом неожиданных и интересных свойств. Например, добавление к действию Эйнштейна–Гильберта слагаемых, квадратичных по кривизне, приводит к перенормируемой теории [4]. Знаменитым примером такой теории является модель инфляции Старобинского, которая базируется на действии вида $R + R^2$ [5]. Примечательны результаты, касающиеся чистой R^2 гравитации — теории с высшими производными. Как было показано в [6], такая теория не содержит гостов. Более того, ее старшие инварианты параметризуют суперконформные аномалии и появляются в эффективных действиях, возникающих из теории струн.

Эти свойства приводят к естественной задаче изучения супергравитационных действий со слагаемыми, включающими старшие степени кривизн [7, 8].

Для формулировки суперсимметричных теорий наиболее удобен формализм суперпространства. Такой формализм обеспечивает явную суперсимметрию на всех этапах. Супергравитация в стандартном суперполевом подходе описывается в терминах суперфильбайнов и суперсвязностей, на которые наложены связи [9]. В такой формулировке степени свободы теории представляются суперполями со связями. Однако предпочтительней формулировка в терминах препотенциалов — суперполей без связей. Препотенциальные формулировки дают возможность впрямую изучать суперполевые уравнения движения и проводить явно суперсимметричное квантование. Такой подход к $\mathcal{N} = 2$ супергравитации обеспечивается в рамках $\mathcal{N} = 2$ гармонического суперпространства [10, 11].

Гармоническое суперпространство отличается от обычного суперпространства наличием вспомогательных координат — гармоник. Они приводят к тому, что любое гармоническое суперполе содержит бесконечное число полей в своем разложении по грассмановым координатам и гармоникам. Наличие гармоник позволяет вводить новые инвариантные суперпространства, на которых возможны суперсимметричные принципы действия, не имеющие аналогов в обычном суперпространстве. Эта особенность активно используется для построения (линеаризованных) контрчленов на массовой поверхности в расширенной $\mathcal{N} \geqslant 4$ супергравитации на массовой оболочке [12, 13].

Поскольку гармоническая формулировка вне массовой оболочки известна только для $\mathcal{N} = 2$ супергравитации, то естественно проанализировать супергравитационные инварианты вне массовой оболочки в таком подходе и исследовать их геометрическую структуру. В этой работе мы проведем построение линеаризованных $\mathcal{N} = 2$ суперкривизн и применим их для нахождения различных линеаризованных инвариантов $\mathcal{N} = 2$ супергравитации вне массовой оболочки. Мы покажем, что линеаризованные кривизны имеют простую структуру в терминах препотенциалов супергравитации. Эти результаты подсказывают возможный вид нелинейных инвариантов супергравитации $\mathcal{N} = 2$ в гармоническом суперпространстве, построение которых пока является открытой проблемой, а также открывают путь к обобщению на теорию $\mathcal{N} = 2$ высших спинов, в которой подобные суперкривизны могут играть существенную роль при построении взаимодействий.

ГАРМОНИЧЕСКОЕ СУПЕРПРОСТРАНСТВО И ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ $\mathcal{N} = 2$ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Ключевым отличием гармонического суперпространства от обычного суперпространства $\mathcal{N} = 2$ с координатами $\{x^m, \theta^i_\alpha, \overline{\theta}^i_{\dot\alpha}\}$ является присутствие вспомогательных координат — гармоник $u^\pm_i$, $u^{+i}u^-_i = 1$. Они параметризуют вспомогательную сферу $S^2 \sim SU(2)/U(1)$ и служат «мостами», позволяющими конвертировать $SU(2)$-индексы в $U(1)$-индексы:

$$\theta^i_\alpha \to \theta^\pm_\alpha := \theta^i_\alpha u^\pm_i. \tag{1}$$

В гармоническом суперпространстве рассматриваются суперполя с фиксированным гармоническим зарядом $\Phi^{(q)}(x, \theta, u)$. Такие суперполя в своем компонентном разложении по грассмановым координатам и гармоникам содержат бесконечное число компонентных полей.

Наиболее важной особенностью $\mathcal{N} = 2$ гармонического суперпространства является наличие у него нового суперсимметрично-инвариантного подпространства, содержащего половину грассмановых координат:

$$\mathbb{HA}^{4+2|4} = \Big\{x^m_A = x^m - 2i\theta^{(i}\sigma^m\overline{\theta}^{j)}u^+_i u^-_j, \theta^+_{A\alpha} = \\ = \theta^i_\alpha u^+_i, \overline{\theta}^+_A = \overline{\theta}^i_{\dot\alpha} u^+_i, u^\pm\Big\}. \tag{2}$$

Это подпространство называется аналитическим суперпространством и играет фундаментальную роль в суперполевой формулировке $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричных теорий. В дальнейшем мы будем обозначать его координаты как ζ.

Важным объектом в формулировке теорий в гармоническом суперпространстве является гармоническая производная, определенная как

$$\mathcal{D}^{++} := \partial^{++} - 4i\theta^{+\alpha}\overline{\theta}^{+\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + \theta^{+\alpha}\partial^+_\alpha + \overline{\theta}^{+\dot\alpha}\partial^+_{\dot\alpha} + [(\theta^+)^2 - (\overline{\theta}^+)^2]\partial_5. \tag{3}$$

Здесь были использованы стандартные обозначения для производных $\partial^{++} = u^{+i}(\partial/\partial u^{-i})$, $\partial_{\alpha\dot\alpha} = (1/2)\sigma^m_{\alpha\dot\alpha}\partial_m$, $\partial^+_\beta = \partial/\partial\theta^{-\beta}$ и $\partial^+_{\dot\beta} = \partial/\partial\overline{\theta}^{-\dot\beta}$. Производная по вспомогательной координате x^5 используется для описания массивного мультиплета.

С использованием гармонической производной действие фундаментального мультиплета $\mathcal{N} = 2$ материи — гипермультиплета — записывается как интеграл по гармоническому аналитическому суперпространству:

$$S_{\text{hyper}} = -\int d\zeta^{(-4)}\ \tilde{q}^{+}\mathcal{D}^{++}q^{+}. \tag{4}$$

По аналогии с гравитацией, поля которой ковариантизуют действие свободного скалярного поля относительно диффеоморфизмов, естественно рассмотреть супердиффеоморфизмы гармонического суперпространства:

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda x^{\alpha\dot\alpha} = \lambda^{\alpha\dot\alpha}(\zeta), \quad \delta_\lambda \theta^{+\hat\alpha} = \lambda^{+\hat\alpha}(\zeta), \quad \delta_\lambda \theta^{-\hat\alpha} = \lambda^{-\hat\alpha}(\zeta, \theta^-), \\ &\delta_\lambda u_i^{\pm} = 0, \quad \delta_\lambda x^5 = \lambda^5(\zeta). \end{aligned} \tag{5}$$

Поскольку аналитическое суперпространство является инвариантным подпространством гармонического суперпространства, рассматриваются супердиффеоморфизмы, сохраняющие аналитичность.

Действие гипермультиплета (4) неинвариантно относительно супердиффеоморфизмов. Удобно переписать законы преобразования (5) через дифференциальный оператор:

$$\delta_\lambda z^M = [\hat\Lambda, z^M], \quad \hat\Lambda := \lambda^M \partial_M. \tag{6}$$

Здесь $z^M := \{x^{\alpha\dot\alpha}, \theta^{+\hat\alpha}, \theta^{-\hat\alpha}, x^5\}$, $\lambda^M := \{\lambda^{\alpha\dot\alpha}, \lambda^{+\hat\alpha}, \lambda^{-\hat\alpha}, \lambda^5\}$.

Неинвариантность действия гипермультиплета является следствием закона преобразования гармонической производной относительно супердиффеоморфизмов (5):

$$\begin{aligned} \delta_\lambda \mathcal{D}^{++} = -\mathcal{D}^{++}\lambda^M\partial_M - 4i\lambda^{+\rho}\overline{\theta}^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho} - 4i\theta^{+\rho}\overline{\lambda}^{+\dot\rho}\partial_{\rho\dot\rho} + \\ + \lambda^{+\hat\rho}\partial^{+}_{\hat\rho} + 2(\lambda^{\hat+}\theta^{\hat+})\partial_5. \end{aligned} \tag{7}$$

Чтобы добиться инвариантности, необходимо удлинить гармоническую производную набором суперфильбайнов [14–16]:

$$\mathcal{D}^{++} \to \mathfrak{D}^{++} = \mathcal{D}^{++} + h^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + h^{++\hat\alpha+}\partial^{-}_{\hat\alpha} + h^{++\hat\alpha-}\partial^{+}_{\hat\alpha} + h^{++5}\partial_5, \tag{8}$$

с законами преобразования

$$\begin{cases} \delta_\lambda h^{++\alpha\dot\alpha} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{\alpha\dot\alpha} + 4i\lambda^{+\alpha}\overline{\theta}^{+\dot\alpha} + 4i\theta^{+\alpha}\overline{\lambda}^{+\dot\alpha} - \hat\Lambda h^{++\alpha\dot\alpha}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat\alpha+} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{+\hat\alpha} - \hat\Lambda h^{++\hat\alpha+}, \\ \delta_\lambda h^{++\hat\alpha-} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{-\hat\alpha} - \lambda^{+\hat\alpha} - \hat\Lambda h^{++\hat\alpha-}, \\ \delta_\lambda h^{++5} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^5 - 2\lambda^{+\hat\alpha}\theta^{+}_{\hat\alpha} - \hat\Lambda h^{++5}. \end{cases} \tag{9}$$

Эти преобразования обеспечивают ковариантность гармонической производной, $\delta_\lambda \mathfrak{D}^{++} = 0$.

Калибровочная свобода (9) позволяет наложить аналитическую калибровку $h^{++\hat\alpha-} = 0$, $\lambda^{+\hat\alpha} = \mathfrak{D}^{++}\lambda^{-\hat\alpha}$, в которой производная $\mathfrak{D}^{++}$ становится аналитической.

Дальнейшая фиксация калибровочной свободы путем перехода в калибровку Весса–Зумино приводит к компонентному составу мультиплета $\mathcal{N}=2$ супергравитации вне массовой оболочки [17, 18]:

$$\begin{aligned}
h^{++\alpha\dot\alpha}_{WZ} &= -4i\theta^{+\beta}\overline{\theta}^{+\dot\beta}\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} + 16(\overline{\theta}^{+})^2\theta^{+\beta}\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}u^-_i - 16(\theta^+)^2\overline{\theta}^{+\dot\beta}\overline{\psi}^{\alpha\dot\alpha i}_{\dot\beta}u^-_i + \\
&\qquad + (\theta^+)^4 V^{\alpha\dot\alpha(ij)}u^-_i u^-_j,\\
h^{++5}_{WZ} &= -4i\theta^{+\beta}\overline{\theta}^{+\dot\beta}C_{\beta\dot\beta} + 8(\overline{\theta}^{+})^2\theta^{+\beta}\rho^i_{\beta}u^-_i - 8(\theta^+)^2\overline{\theta}^{+\dot\beta}\overline{\rho}^i_{\dot\beta}u^-_i + \\
&\qquad + (\theta^+)^4 S^{(ij)}u^-_i u^-_j,\\
h^{++\alpha+}_{WZ} &= (\overline{\theta}^{+})^2\theta^+_{\beta}T^{(\alpha\beta)} + (\overline{\theta}^{+})^2\theta^{+\alpha}T + (\theta^+)^2\overline{\theta}^+_{\dot\beta}P^{\alpha\dot\beta} + (\theta^+)^4\chi^{\alpha i}u^-_i,\\
h^{++\dot\alpha+}_{WZ} &= (\theta^+)^2\overline{\theta}^+_{\dot\beta}\overline{T}^{(\dot\alpha\dot\beta)} + (\theta^+)^2\overline{\theta}^{+\dot\alpha}\overline{T} - (\overline{\theta}^{+})^2\theta^+_{\beta}\overline{P}^{\beta\dot\alpha} + (\theta^+)^4\overline{\chi}^{\dot\alpha i}u^-_i.
\end{aligned}$$

В результате получается набор полей мультиплета $\mathcal{N}=2$ эйнштейновской супергравитации, содержащий $\mathbf{40_B}+\mathbf{40_F}$ степеней свободы вне массовой оболочки:

физические поля:	$\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta}, \psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta}, C_{\beta\dot\beta}$,
вспомогательные поля:	$V^{\alpha\dot\alpha(ij)}, \rho^i_{\beta}, S^{(ij)}, T, T^{(\alpha\beta)}, P^{\alpha\dot\beta}, \chi^{\alpha i}$.

В линеаризованном пределе физические поля определены с точностью до калибровочных законов преобразования:

$$\delta_\lambda\Phi^{\alpha\dot\alpha}_{\beta\dot\beta} = \partial_{\beta\dot\beta}a^{\alpha\dot\alpha} - l_{(\beta}^{\ \alpha)}\delta^{\dot\alpha}_{\dot\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}l_{(\dot\beta}^{\ \dot\alpha)}, \quad \delta_\lambda\psi^{\alpha\dot\alpha i}_{\beta} = -\partial^{\dot\alpha}_{\beta}\epsilon^{\alpha i}, \quad \delta_\lambda C_{\alpha\dot\alpha} = \partial_{\alpha\dot\alpha}c,$$

что позволяет отождествить их с гравитоном, дублетом гравитино и гравифотоном.

Таким образом, калибровочной группой $\mathcal{N}=2$ супергравитации является группа супердиффеоморфизмов гармонического суперпространства, сохраняющая аналитичность (5), а препотенциалами $\mathcal{N}=2$ супергравитации — аналитические суперполя $h^{++\alpha\dot\alpha}$, $h^{++\alpha+}$, $h^{++\dot\alpha+}$, h^{++5} с калибровочными преобразованиями (9).

КОВАРИАНТНЫЕ СУПЕРПОЛЯ И ЛИНЕАРИЗОВАННОЕ ДЕЙСТВИЕ

Для анализа линеаризованной $\mathcal{N}=2$ супергравитации из аналитических препотенциалов удобно построить ковариантные суперполя с тривиальным законом преобразования под действием глобальной суперсимметрии [19, 20].

Для этой цели полезно разбить ковариантную гармоническую производную на плоскую часть и часть, содержащую препотенциалы,

$$\mathfrak{D}^{++} = \mathcal{D}^{++} + \hat{\mathcal{H}}^{++}, \quad \hat{\mathcal{H}}^{++} := h^{++M}\partial_M. \tag{10}$$

Тогда линейная по препотенциалам часть производной будет инвариантна относительно глобальной суперсимметрии:

$$\delta_\epsilon \mathfrak{D}^{++} = 0, \quad \delta_\epsilon \mathcal{D}^{++} = 0 \Rightarrow \delta_\epsilon \hat{\mathcal{H}}^{++} = 0. \tag{11}$$

В базисе ковариантных производных, заданных соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+_{\hat\alpha} &:= \partial^+_{\hat\alpha}, \\ \mathcal{D}^-_{\alpha} &:= -\partial^-_\alpha + 4i\overline{\theta}^{-\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} - 2i\theta^-_\alpha\partial_5, \\ \overline{\mathcal{D}}^-_{\dot\alpha} &:= -\partial^-_{\dot\alpha} - 4i\theta^{-\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + 2i\overline{\theta}^-_{\dot\alpha}\partial_5, \end{aligned} \tag{12}$$

разложение оператора по производным в качестве фильбайнов содержит ковариантные суперполя:

$$\hat{\mathcal{H}}^{++} = G^{++\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + G^{++\alpha+}\mathcal{D}^-_\alpha + G^{++\dot\alpha+}\overline{\mathcal{D}}^-_{\dot\alpha} + G^{++5}\partial_5, \quad \delta_\epsilon G^{++M} = 0. \tag{13}$$

Калибровочные преобразования ковариантных суперполей в линеаризованном приближении имеют вид $\delta_\lambda G^{++M} = \mathcal{D}^{++}\Lambda^M$, где калибровочные параметры Λ^M также определяются из разложения по ковариантным производным, $\hat\Lambda = \Lambda^M \mathcal{D}_M$.

По ковариантным препотенциалам G^{++M} можно построить потенциалы с отрицательным зарядом. Они ковариантизуют гармоническую производную с отрицательным зарядом

$$\mathcal{D}^{--} \to \mathfrak{D}^{--} := \mathcal{D}^{--} + \hat{\mathcal{H}}^{--}, \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \hat{\mathcal{H}}^{--} := G^{--\alpha\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha} + G^{--\hat\alpha+}\mathcal{D}^-_{\hat\alpha} + G^{--\hat\alpha-}\mathcal{D}^+_{\hat\alpha} + G^{--5}\partial_5, \\ \delta_\epsilon G^{--M} = 0, \end{gathered} \tag{15}$$

и находятся как решения уравнений нулевой кривизны:

$$[\mathfrak{D}^{++}, \mathfrak{D}^{--}] = \mathcal{D}^0 \Rightarrow [\mathcal{D}^{++}, \hat{\mathcal{H}}^{--}] = [\mathcal{D}^{--}, \hat{\mathcal{H}}^{++}]. \tag{16}$$

Калибровочные преобразования действуют на потенциалы G^{--M} согласно уравнениям

$$\begin{aligned} &\delta_\lambda G^{--\alpha\dot\alpha} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{\alpha\dot\alpha}, && \delta_\lambda G^{--5} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^5, \\ &\delta_\lambda G^{--\hat\alpha+} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{+\hat\alpha} + \Lambda^{-\hat\alpha}, && \delta_\lambda G^{--\hat\alpha-} = \mathcal{D}^{--}\Lambda^{-\hat\alpha}. \end{aligned} \tag{17}$$

В терминах ковариантных суперполей калибровочно-инвариантное действие линеаризованной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации имеет вид

$$S_{\mathrm{lin}} = -\int d^4x\, d^8\theta\, du \left[G^{++\alpha\dot\alpha}G^{--}_{\alpha\dot\alpha} + 4G^{++5}G^{--5}\right]. \tag{18}$$

На компонентном уровне (после исключения вспомогательных полей) действие сводится к сумме линеаризованных действий для физических полей линеаризованной $\mathcal{N} = 2$ супергравитации.

Суперполевые уравнения движения, которые следуют из действия (18), имеют вид [21]

$$(\overline{\mathcal{D}}^+)^2\mathcal{D}^{+\alpha}G^{--}_{\alpha\dot{\alpha}} - 4(\mathcal{D}^+)^2\overline{\mathcal{D}}^+_{\dot{\alpha}}G^{--5} \approx 0. \tag{19}$$

Важно отметить особенности компонентной структуры потенциалов с отрицательными зарядами, полученных как решения уравнения нулевой кривизны (16):

$$G^{--\alpha\dot{\alpha}}_{(\Phi)} = \ldots - 8i(\theta^-)^4\theta^+_\rho\overline{\theta}^+_{\dot{\rho}}\left(\mathcal{R}^{(\alpha\rho)(\dot{\alpha}\dot{\rho})} - \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\rho}}\mathcal{R}\right), \tag{20а}$$

$$G^{--5}_{(\Phi)} = \ldots - \frac{i}{2}(\theta^-)^4(\theta^+)^2\mathcal{R} + \frac{i}{2}(\theta^-)^4(\overline{\theta}^+)^2\mathcal{R}. \tag{20б}$$

Мы привели выражения в секторе спина 2. Здесь использованы обозначения для неприводимой части линеаризованного тензора Риччи и линеаризованной скалярной кривизны:

$$\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} := 2\partial_{(\alpha(\dot{\alpha}}\partial^{\rho\dot{\rho}}\Phi_{(\beta)\rho)(\dot{\beta})\dot{\rho})} - \frac{1}{2}\Box\Phi_{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} - 2\partial_{(\alpha(\dot{\alpha}}\partial_{\beta)\dot{\beta})}\Phi,$$

$$\mathcal{R} := 4\partial^{\alpha\dot{\alpha}}\partial^{\beta\dot{\beta}}\Phi_{(\alpha\beta)(\dot{\alpha}\dot{\beta})} - 6\Box\Phi.$$

Из явного вида выражений (20) видно, что суперполя $G^{--\alpha\dot{\alpha}}$ и G^{--5} в старшем слагаемом содержат инварианты линеаризованной гравитации. Иными словами, процедура решения уравнений нулевой кривизны приводит к линеаризованным калибровочным инвариантам.

ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ СУПЕРКРИВИЗНЫ И СТАРШИЕ ИНВАРИАНТЫ

Решения уравнений нулевой кривизны (20) подсказывают форму калибровочно-инвариантных суперкривизн, суперсимметризующих тензор Риччи и скалярную кривизну:

$$\mathcal{F}^{++\alpha\dot{\alpha}} = (\mathcal{D}^+)^4G^{--\alpha\dot{\alpha}} = -8i\theta^+_\rho\overline{\theta}^+_{\dot{\rho}}\left(\mathcal{R}^{(\alpha\rho)(\dot{\alpha}\dot{\rho})} - \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\rho}\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\rho}}\mathcal{R}\right) + \ldots, \tag{21}$$

$$\mathcal{F}^{++5} = (\mathcal{D}^+)^4G^{--5} = \frac{i}{2}(\theta^+)^2\mathcal{R} - \frac{i}{2}(\overline{\theta}^+)\mathcal{R} + \ldots \tag{22}$$

Суперкривизны являются $\mathcal{N} = 2$ суперсимметрично-инвариантными, поскольку они построены из ковариантных объектов. По построению эти объекты — аналитические суперполя. Они зануляются на суперполевых уравнениях движения (19).

Из отрицательно заряженных потенциалов G^{--} можно построить и третью калибровочно-инвариантную суперкривизну той же размерности:

$$\mathcal{W}_{(\alpha\beta)} = (\overline{\mathcal{D}}^{+})^2 \left(\mathcal{D}^{+}_{(\alpha} G^{---}_{\beta)} + \mathcal{D}^{-}_{(\alpha} G^{--+}_{\beta)} - \partial^{\dot\rho}_{(\alpha} G^{--}_{\beta)\dot\rho}\right) = \\ = 32\theta^{-(\gamma}\theta^{+\delta)}\mathcal{R}_{(\alpha\beta\gamma\delta)} + \ldots \quad (23)$$

Она является киральной и удовлетворяет условиям ковариантной независимости от гармоник:

$$\overline{\mathcal{D}}^{\pm}_{\dot\alpha}\mathcal{W}_{(\alpha\beta)} = 0, \quad \mathcal{D}^{\pm\pm}\mathcal{W}_{(\alpha\beta)} = 0. \quad (24)$$

На компонентном уровне суперкривизна $\mathcal{W}_{(\alpha\beta)}$ содержит самодуальную часть линеаризованного тензора Вейля:

$$\mathcal{R}_{(\alpha\beta\gamma\delta)} := \partial^{\dot\alpha}_{(\alpha}\partial^{\dot\beta}_{\beta}\Phi_{\gamma\delta)(\dot\alpha\dot\beta)},$$

поэтому $\mathcal{W}_{(\alpha\beta)}$ естественно отождествить с $\mathcal{N}=2$ линеаризованным супертензором Вейля.

На уравнениях движения (19) суперкривизна Вейля не зануляется, однако она удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{D}^{+})^2\mathcal{W}_{(\alpha\beta)} = 0. \quad (25)$$

Используя суперкривизны, можно построить полный набор линеаризованных инвариантов, квадратичных по кривизнам,

$$I_1 := \int d\zeta^{(-4)}\mathcal{F}^{++\alpha\dot\alpha}\mathcal{F}^{++}_{\alpha\dot\alpha} \sim \int d^4x \left(\mathcal{R}^{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)}\mathcal{R}_{(\alpha\beta)(\dot\alpha\dot\beta)} - \frac{1}{16}\mathcal{R}^2\right), \quad (26а)$$

$$I_2 := \int d\zeta^{(-4)}\mathcal{F}^{++5}\mathcal{F}^{++5} \sim \int d^4x\,\mathcal{R}^2, \quad (26б)$$

$$I_3 = \int d^4x\, d^4\theta\, \mathcal{W}^{(\alpha\beta)}\mathcal{W}_{(\alpha\beta)} \sim \int d^4x\,\mathcal{R}^{(\alpha\beta\gamma\delta)}\mathcal{R}_{(\alpha\beta\gamma\delta)}. \quad (26в)$$

Эти инварианты задаются интегралами по аналитическому и киральному суперпространствам.

Подобным же образом, используя суперкривизны, можно строить и старшие инварианты. В частности, несложно убедиться, что невозможно построить инвариант, суперсимметризующий куб тензора Римана

$$\mathcal{R}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}\mathcal{R}^{\rho\kappa}_{\gamma\delta}\mathcal{R}^{\alpha\beta}_{\rho\kappa}.$$

Это свойство находится в согласии с фактом отсутствия ультрафиолетовых расходимостей в двух петлях.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, применяя формализм $\mathcal{N}=2$ гармонического суперпространства, мы построили полный набор линеаризованных кривизн и с их использованием нашли суперполевые действия, на компонентном уровне обобщающие инварианты, квадратичные по кривизнам. Все результаты получены вне массовой оболочки, и их построение в значительной мере опирается на свойства грассмановой аналитичности и геометрические свойства решений нулевой кривизны.

Интересно распространить полученные результаты на полную нелинейную $\mathcal{N} = 2$ супергравитацию и установить гармоническое происхождение квадратичных инвариантов, ранее полученных в обычном суперпространстве [22–24]. Интерес представляет и расширение результатов на случай конформной гравитации, в которой построение $\mathcal{N} = 2$ суперсимметризации квадрата тензора Вейля в гармоническом суперпространстве до сих пор является нерешенной задачей.

На основе полученных результатов можно строить суперкривизны для $\mathcal{N} = 2$ теории высших спинов [20]. Это открывает возможность построения целого ряда калибровочно-инвариантных сохраняющихся $\mathcal{N} = 2$ супертоков высших спинов и соответствующих им кубических взаимодействий, обобщающих результаты, полученные в $\mathcal{N} = 0$ [25] и $\mathcal{N} = 1$ [26, 27] теориях.

Финансирование. Работа Н. М. Заиграева была поддержана фондом теоретической и математической физики «Базис».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dall'Agata G., Zagermann M.* Supergravity: From First Principles to Modern Applications // Lect. Notes Phys. 2021. V. 991. P. 1–263.
2. *Deser S., Kay J. H., Stelle K. S.* Renormalizability Properties of Supergravity // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 527; arXiv:1506.03757 [hep-th].
3. *Kallosh R. E.* Counterterms in Extended Supergravities // Phys. Lett. B. 1981. V. 99. P. 122–127.
4. *Stelle K. S.* Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 953–969.
5. *Starobinsky A. A.* A New Type of Isotropic Cosmological Models without Singularity // Phys. Lett. B. 1980. V. 91. P. 99–102.
6. *Alvarez-Gaume L., Kehagias A., Kounnas C., Lüst D., Riotto A.* Aspects of Quadratic Gravity // Fortsch. Phys. 2016. V. 64, No. 2–3. P. 176–189; arXiv: 1505.07657 [hep-th].
7. *Cecotti S.* Higher Derivative Supergravity Is Equivalent to Standard Supergravity Coupled to Matter // Phys. Lett. B. 1987. V. 190. P. 86–92.
8. *Ozkan M., Pang Y., Sezgin E.* Higher Derivative Supergravities in Diverse Dimensions. arXiv:2401.08945 [hep-th].
9. *Howe P. S.* Supergravity in Superspace // Nucl. Phys. B. 1982. V. 199. P. 309–364.
10. *Galperin A., Ivanov E., Kalitzin S., Ogievetsky V., Sokatchev E.* Unconstrained $\mathcal{N} = 2$ Matter, Yang–Mills and Supergravity Theories in Harmonic Superspace // Class. Quant. Grav. 1984. V. 1. P. 469–498; Erratum // Class. Quant. Grav. 1985. V. 2. P. 127.

11. *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E. S.* Harmonic Superspace. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, 2001. 306 p.
12. *Drummond J. M., Heslop P. J., Howe P. S., Kerstan S. F.* Integral Invariants in $\mathcal{N} = 4$ SYM and the Effective Action for Coincident D-Branes // J. High Energy Phys. 2003. V. 08. P. 016; arXiv:hep-th/0305202 [hep-th].
13. *Bossard G., Howe P. S., Stelle K. S., Vanhove P.* The Vanishing Volume of $D = 4$ Superspace // Class. Quant. Grav. 2011. V. 28. P. 215005; arXiv: 1105.6087 [hep-th].
14. *Galperin A. S., Ky N. A., Sokatchev E.* $\mathcal{N} = 2$ Supergravity in Superspace: Solution to the Constraints // Class. Quant. Grav. 1987. V. 4. P. 1235.
15. *Ivanov E.* $\mathcal{N} = 2$ Supergravities in Harmonic Superspace. arXiv:2212.07925 [hep-th].
16. *Galperin A. S., Ivanov E. A., Ogievetsky V. I., Sokatchev E.* $\mathcal{N} = 2$ Supergravity in Superspace: Different Versions and Matter Couplings // Class. Quant. Grav. 1987. V. 4. P. 1255.
17. *Fradkin E. S., Vasiliev M. A.* Minimal Set of Auxiliary Fields in $SO(2)$ Extended Supergravity // Phys. Lett. B. 1979. V. 85. P. 47–51.
18. *de Wit B., van Holten J. W.* Multiplets of Linearized $SO(2)$ Supergravity // Nucl. Phys. B. 1979. V. 155. P. 530–542.
19. *Zupnik B. M.* Background Harmonic Superfields in $\mathcal{N} = 2$ Supergravity // Theor. Math. Phys. 1998. V. 116. P. 964–977; arXiv:hep-th/9803202 [hep-th].
20. *Buchbinder I., Ivanov E., Zaigraev N.* Unconstrained Off-Shell Superfield Formulation of 4D, $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Higher Spins // J. High Energy Phys. 2021. V. 12. P. 016; arXiv:2109.07639 [hep-th].
21. *Buchbinder I., Ivanov E., Zaigraev N.* $\mathcal{N} = 2$ Higher Spins: Superfield Equations of Motion, the Hypermultiplet Supercurrents, and the Component Structure // J. High Energy Phys. 2023. V. 03. P. 036; arXiv:2212.14114 [hep-th].
22. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B.* Extended Conformal Supergravity // Nucl. Phys. B. 1981. V. 182. P. 173–204.
23. *Butter D., de Wit B., Kuzenko S. M., Lodato I.* New Higher-Derivative Invariants in $\mathcal{N} = 2$ Supergravity and the Gauss–Bonnet Term // J. High Energy Phys. 2013. V. 12. P. 062; arXiv:1307.6546 [hep-th].
24. *Kuzenko S. M., Novak J.* On Curvature Squared Terms in $\mathcal{N} = 2$ Supergravity // Phys. Rev. D. 2015. V. 92, No. 8. P. 085033; arXiv:1507.04922 [hep-th].
25. *Berends F. A., Burgers G. J. H., van Dam H.* Explicit Construction of Conserved Currents for Massless Fields of Arbitrary Spin // Nucl. Phys. B. 1986. V. 271. P. 429–441.
26. *Buchbinder I. L., Gates S. J., Koutrolikos K.* Conserved Higher Spin Supercurrents for Arbitrary Spin Massless Supermultiplets and Higher Spin Superfield Cubic Interactions // J. High Energy Phys. 2018. V. 08. P. 055; arXiv: 1805.04413 [hep-th].
27. *Gates S. J., Koutrolikos K.* Progress on Cubic Interactions of Arbitrary Superspin Supermultiplets via Gauge Invariant Supercurrents // Phys. Lett. B. 2019. V. 797. P. 134868; arXiv:1904.13336 [hep-th].