

КВАРКОВЫЙ ГАЗ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ: ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА

Р. Н. Роголев^{1, *}, *Н. В. Герасименюк*^{2, **}, *А. А. Корнеев*^{2, ***}

¹ Институт физики высоких энергий им. А. А. Логонова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,
Протвино, Россия

² Тихоокеанский квантовый центр, Дальневосточный федеральный университет,
Владивосток, Россия

Показано, что стандартная формула для величины давления газа свободных безмассовых фермионов приводит к отрицательным вероятностям того, что фермионное число системы равно n , если n достаточно велико, и предложены пути разрешения этого парадокса. Детальный анализ соответствующей статсуммы указывает на наличие перехода Роберге–Вайсса в отсутствие сильных взаимодействий.

It is shown that the standard formula for the pressure of free massless fermions leads to negative probabilities that the fermion number of a system is equal to n if n is large. Ways to resolve this paradox are proposed. A detailed analysis of the corresponding partition function reveals the existence of the Roberge–Weiss transition in the absence of strong interactions.

PACS: 05.30.Fk; 05.30.-d

ВВЕДЕНИЕ

Распределения файерболов, рождающихся в столкновениях тяжелых ядер, по барионному числу интенсивно изучались в течение последних лет. Такие распределения несут важную информацию о динамике сильновзаимодействующей материи. В частности, высшие кумулянты таких распределений могли бы указывать на возрастание флуктуаций барионного числа n , которые являются индикатором критической точки в фазовой плоскости $\mu_B - T$ плотной барионной материи [1]. Также они могут дать информацию о начальном этапе эволюции файерболов.

Распределение файерболов по барионному числу тесно связано с зависимостью барионной плотности ρ и соответствующего ей давления p от барионного химпотенциала μ_B . Хорошо известно, что эта зависимость претерпевает существенные изменения по мере возрастания

* E-mail: rnr@ihep.ru

** E-mail: kolucik@gmail.com

*** E-mail: tolyanchik5@mail.ru

температуры от псевдокритической температуры кирального кроссовера $T_{pc} \approx 154$ МэВ до температуры Роберге–Вайсса $T_{RW} \approx 208$ МэВ [2–4].

Путем численного моделирования КХД на решетке при высоких температурах ($T > T_{RW}$) было показано [5], что несколько первых коэффициентов разложения давления в ряд Тейлора по μ_B совпадают с соответствующими коэффициентами для газа свободных безмассовых кварков. Также было показано [6], что при $T > T_{RW}$ зависимость плотности барионного числа от $\text{Im } \mu_B$ хорошо фитируется полиномом третьей степени, что соответствует газу свободных безмассовых кварков.

Зная барионную плотность и используя численные методы интегрирования с большой точностью, можно найти P_n — вероятность того, что барионное число системы равно n . Однако оказалось, что при больших n вероятности P_n принимают отрицательные значения, что абсурдно. В работах [2] и [7] эту трудность удалось обойти путем вычисления P_n в пределе бесконечного объема при помощи приближенных асимптотических формул, которые дают физически осмысленные значения вероятностей. Исследование причин разногласия между результатами, полученными с помощью численных и асимптотических методов, и является предметом данной работы.

Мы обнаружили, что отрицательные значения вероятностей возникают даже в случае свободных безмассовых фермионов при использовании вполне традиционных методов вычислений. Парадокс возникает при некорректном переходе от суммирования к интегрированию при вычислении давления. В данной работе мы детально описываем вычисление давления и распределения по барионному числу для газа свободных безмассовых фермионов. Поскольку описанные проблемы возникают уже в одномерном случае, ему уделяется значительное внимание.

В одномерии продемонстрировано, что асимптотическая формула может давать достаточно хорошее приближение к точному результату, при этом положение нулей Ли–Янга как в одномерии, так и в трехмерии указывает на наличие перехода Роберге–Вайсса в свободной теории.

В разд. 1 мы формулируем проблему отрицательных вероятностей. Разд. 2 посвящен детальному сравнению результатов, получаемых наивным переходом к пределу бесконечного объема с точными и асимптотическими формулами в одномерном случае. Переход Роберге–Вайсса и обоснование асимптотических формул обсуждаются в разд. 3.

1. ПРОБЛЕМА ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Мы рассматриваем систему с гамильтонианом \hat{H} и оператором барионного числа \hat{B} ($[\hat{B}, \hat{H}] = 0$) и изучаем большую каноническую статсумму

$$Z_{GC} \left(\frac{\mu_B}{T}, T, V \right) = \sum_j \langle j | \exp \left(\frac{-\hat{H} + \mu_B \hat{B}}{T} \right) | j \rangle, \quad (1)$$

где $|j\rangle$ — собственные векторы гамильтониана; если суммирование ведется только по $|j\rangle : \hat{B}|j\rangle = n|j\rangle$, вместо большой канонической статсуммы в формуле (1) получается каноническая $Z_C(n, T, V)$. Имеет место равенство

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi^n, \quad (2)$$

где $\theta = \mu_B/T = \theta = \theta_R + i\theta_I$, $\xi = e^\theta$ — активность; эта формула называется разложением по активности. Мы полагаем число цветов и число ароматов равными единице, поскольку проблема отрицательных вероятностей возникает даже в этом простейшем случае; при этом барионное число совпадает с фермионным — в нашей работе это взаимозаменяемые термины. Символы T, V в аргументах статсумм будут систематически опускаться.

Из соотношения (1) следует, что Z_{GC} — периодическая функция θ_I : $Z_{GC}(\theta) = Z_{GC}(\theta + 2\pi i)$. Обращение разложения по активности имеет вид

$$Z_C(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{-in\theta_I} Z_{GC}(\theta) \Big|_{\theta_R=0}. \quad (3)$$

Если система свободных фермионов характеризуется температурой T и барионным химпотенциалом θT , то вероятность того, что барионное число системы равно n , дается формулой

$$P_\theta(n) = \frac{Z_C(n)\xi^n}{Z_{GC}(\theta)} \quad \text{или, при } \theta = 0, \quad P_n \equiv P_0(n) = \frac{Z_C(n)}{Z_{GC}(0)}. \quad (4)$$

Большая каноническая статсумма газа свободных безмассовых фермионов в трехмерном ящике длины L при температуре T имеет вид

$$Z_{GC}(\theta) = \prod_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} (1 + \xi w(\mathbf{k}))^2 (1 + \xi^{-1} w(\mathbf{k}))^2, \quad (5)$$

где целочисленный вектор \mathbf{k} метит фермионные моды и

$$w(\mathbf{k}) = \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{k}}}{T}\right), \quad E_{\mathbf{k}} = \frac{2\pi|\mathbf{k}|}{L} - \text{энергия}, \quad \frac{E_{\mathbf{k}}}{T} = \frac{2\pi|\mathbf{k}|}{\sqrt[3]{\nu}}, \quad (6)$$

где $\nu = L^3 T^3 = VT^3$ — безразмерный параметр, характеризующий изучаемую систему; его физический смысл таков: $\nu/(2\pi)^3$ — это оценка числа фермионных мод в ящике размера L , возбуждаемых при температуре T , или, с другой стороны, это число пучностей температурных волн в ящике размером V . Таким образом, давление можно представить в виде

$$p(\theta) = \frac{T}{V} \ln Z_{GC}(\theta) = \frac{2T}{V} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \ln(1 + e^\theta w(\mathbf{k})) + (\theta \leftrightarrow -\theta). \quad (7)$$

Заменяя суммирование интегрированием согласно стандартным правилам

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3} \dots \rightarrow \frac{VT^3}{(2\pi)^3} \int \dots d\mathbf{q} \rightarrow \frac{VT^3}{2\pi^2} \int q^2 dq \dots \quad \text{и} \quad \mathbf{k} \rightarrow \frac{\sqrt[3]{\nu} \mathbf{q}}{2\pi} \quad (8)$$

и применяя интегрирование по частям, получаем

$$p_\infty(\theta) = \frac{T^4}{\pi^2} \int q^2 dq \ln(1 + e^{\theta - q}) + (\theta \leftrightarrow -\theta) \quad (9)$$

$$= \frac{-2T^4}{\pi^2} (\text{Li}_4(-e^{-\theta}) + \text{Li}_4(-e^{\theta})), \quad (10)$$

символ ∞ указывает, что давление получено в результате перехода к бесконечному объему путем замены суммирования на интегрирование*. Использование тождеств для полилогарифмов[8] дает [9, 10]:

$$\hat{p}_\infty(\theta) = \frac{1}{6} \left(\frac{7\pi^2}{30} + \theta^2 + \frac{\theta^4}{2\pi^2} \right), \quad \text{если} \quad -\pi < \theta_I \leq \pi, \quad (11)$$

$$\hat{p}(\theta) = \hat{p}(\theta - 2i\pi n), \quad \text{если} \quad -\pi + 2\pi n < \theta_I \leq \pi + 2\pi n,$$

где $\hat{p} = p/T^4$, шляпка над буквой указывает на использование безразмерной величины. Представляя большую каноническую статсумму в виде

$$Z_{GC}(\theta) = \exp[\nu \hat{p}(\theta)], \quad (12)$$

канонические статсуммы можно записать в виде интегралов (3).

Периодическое продолжение $Z_{GC}(\theta)$ с полосы $-\pi < \theta_I \leq \pi$ на всю комплексную плоскость θ является разрывной функцией, поскольку

$$Z_{GC}(\theta_R \pm i\pi) = \exp \left[\frac{\nu}{12\pi^2} \left(-\frac{8\pi^4}{15} + \theta_R^4 - 4(\theta_R)^2 \pi^2 \pm 4i\pi(\theta_R)^3 \right) \right]. \quad (13)$$

Заметим, что разрыв имеет место при $\theta_R \neq 0$, в трехмерном случае $Z_{GC}(i\theta_I)$ — непрерывная функция θ_I . Этот разрыв связан с разрезом вдоль отрицательной мнимой полуоси в комплексной плоскости активности и, следовательно, разложение по активности (2) (т.е. ряд Лорана для $Z_{GC}(\xi)$) расходится всюду, за исключением окружности $|\xi| = 1$.

Большая каноническая статсумма при $\theta_R = 0$ имеет вид

$$Z_{GC}(i\theta_I) = A \exp \left[\hat{\Omega}(\theta_I) \right], \quad \text{если} \quad -\pi < \theta_I \leq \pi, \quad (14)$$

где

$$A = \exp \left(\frac{7\pi^2 \nu}{180} \right) \quad \text{и} \quad \hat{\Omega}(\theta_I) = \frac{\nu}{6} \left(-(\theta_I)^2 + \frac{(\theta_I)^4}{2\pi^2} \right). \quad (15)$$

* Кроме ∞ будут использоваться символы T (true) и A для указания величин, посчитанных по определению и по асимптотическим формулам соответственно.

За пределы интервала $\theta_I \in (-\pi, \pi]$ она продолжается по условию периодичности: $Z(i\theta_I) = Z(i\theta_I + 2i\pi n)$. Хотя функции $Z_{GC}(i\theta_I) = A e^{\hat{\Omega}}$ и $\hat{\Omega}(\theta_I)$ непрерывны вместе с двумя производными, третья производная имеет разрыв в точках $\theta_I = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, который можно найти:

$$\begin{aligned} & \left(e^{\hat{\Omega}} \right)''' \Big|_{\theta_I = \pi+0} - \left(e^{\hat{\Omega}} \right)''' \Big|_{\theta_I = \pi-0} = \\ & = e^{\hat{\Omega}} \Big|_{\theta_I = \pi} \left(\hat{\Omega}''' \Big|_{\theta_I = \pi+0} - \hat{\Omega}''' \Big|_{\theta_I = \pi-0} \right) = - \exp \left(-\frac{\nu\pi^2}{12} \right) \frac{4\nu}{\pi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, функция $\hat{\Omega}(\theta_I) \exp(-\pi^2\nu/12)$ имеет точно такие же разрывы, как и функция $\exp(\hat{\Omega}(\theta_I))$. Это обстоятельство позволяет найти ведущую асимптотику коэффициентов Фурье функции (15) при $n \rightarrow \infty$, поскольку она полностью определяется разрывами функции и для ее определения достаточно найти коэффициенты Фурье функции $\hat{\Omega}(\theta_I)$:

$$\hat{\Omega}(\theta_I) = \frac{4\nu}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} (1 - \cos(n\theta_I)). \quad (17)$$

Канонические статсуммы при $n \rightarrow \infty$ принимают вид

$$Z_C^\infty(n) = \frac{2\nu}{\pi^2} \exp \left(-\frac{2\pi^2\nu}{45} \right) \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} + \underline{Q} \left(\frac{1}{n^6} \right), \quad (18)$$

символ $Z_C^\infty(n)$ означает, что эти статсуммы получены по формулам (3) и (12) при $\hat{p} = \hat{p}_\infty(\theta)$. Их поведение показано на рис. 1.

С точки зрения теории вероятностей, $Z_{GC}(i\theta_I)/Z_{GC}(0)$ является характеристической функцией распределения P_n . Полученный результат

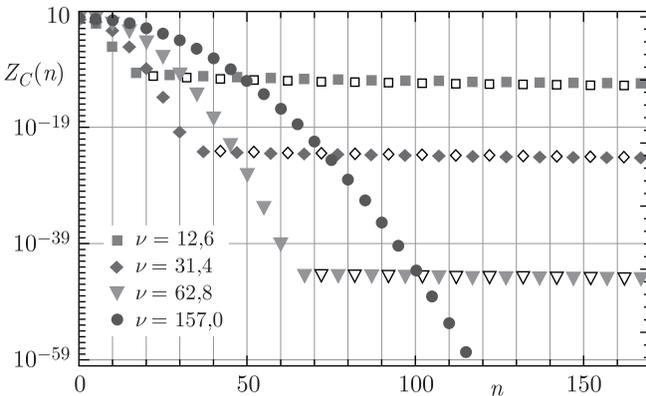


Рис. 1. Канонические статсуммы, вычисленные по формулам (3) и (12) из (11). Поведение при $n \gtrsim \nu$ дается формулой (18). Светлые символы показывают модули отрицательных значений

с отрицательными вероятностями — проявление более общей ситуации: по теореме Марцинкевича полином степени больше двух не может быть характеристической функцией случайной величины [11]. Наши рассуждения можно рассматривать как доказательство/расширение теоремы Марцинкевича для некоторых дискретных случайных величин.

2. ОДНОМЕРНЫЙ ГАЗ СВОБОДНЫХ БЕЗМАССОВЫХ ФЕРМИОНОВ

Статсумма $Z_{GC}^T(\theta)$ газа свободных безмассовых фермионов на отрезке длины L дается выражением

$$Z_{GC}^T(\theta) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \xi w^n)^2 (1 + \xi^{-1} w^n)^2, \quad (19)$$

$w = \exp(-2\pi i/\nu)$ и $\nu = LT$. Соответствующие канонические статсуммы можно найти из разложения $Z_{GC}(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n) e^{n\theta}$. Формула величины давления, соответствующей статсумме (19), имеет вид [12]:

$$\nu \hat{p}_T(\theta) = \frac{\pi}{2\nu} + 2 \ln \vartheta_2 \left(\frac{i\theta}{2\pi}; \frac{i}{\nu} \right) - 2 \ln \left[2 \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} \right] - 2 \ln \phi(w), \quad (20)$$

где

$$\vartheta_2(z; \tau) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(i\pi \tau \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \cos((2n+1)\pi z) \quad (21)$$

и $\phi(x) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)$ — функция Эйлера. Соответствующие канонические статсуммы хорошо аппроксимируются формулой

$$Z_C^T(n) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu} \left(1 + \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{\nu} \right) \right)} \exp \left(\frac{\pi\nu}{6} - \frac{\pi n^2}{2\nu} \right). \quad (22)$$

Процедура вычисления логарифма статсуммы (19) с заменой суммирования интегрированием, аналогичная описанной выше, дает величину давления в пределе бесконечного объема:

$$\hat{p}_{\infty}(\theta) = \frac{\theta^2}{2\pi} + \frac{\pi}{6}, \quad \text{если } |\theta_I| < \pi, \quad (23)$$

периодически продолжающуюся с периодом $2\pi i$. Как и в трехмерном случае, соответствующие ему канонические статсуммы:

$$Z_C^{\infty}(n) = \frac{1}{2\pi\nu} \exp \left(\frac{\nu\pi}{6} - \frac{\pi n^2}{2\nu} \right) \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} (in - \nu), \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}} (in + \nu) \right], \quad (24)$$

где $\text{Erf}(z_0, z_1) = \text{Erf}(z_1) - \text{Erf}(z_0)$, а $\text{Erf}(z)$ — функция ошибок, имеют чередующийся знак при $n \gtrsim \nu$. Канонические статсуммы, полученные методом перевала, в главном порядке при $\nu \rightarrow \infty$ имеют вид

$$Z_C^A(n) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\nu}} \exp\left(\frac{\nu\pi}{6} - \frac{\pi n^2}{2\nu}\right), \tag{25}$$

им соответствует давление

$$\nu \hat{p}_A = \frac{\nu\pi}{6} - \frac{1}{2} \ln 2\nu + \vartheta_3\left(-\frac{i\theta}{2\pi}; \frac{i}{2\nu}\right), \tag{26}$$

где

$$\vartheta_3(z; \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z). \tag{27}$$

Степень близости рассматриваемых давлений иллюстрируется на языке кумулянтов $k_j = \nu \left(\partial^j \hat{p} / \partial \theta^j\right) \Big|_{\theta=0}$ распределения P_n на рис. 2. При этом

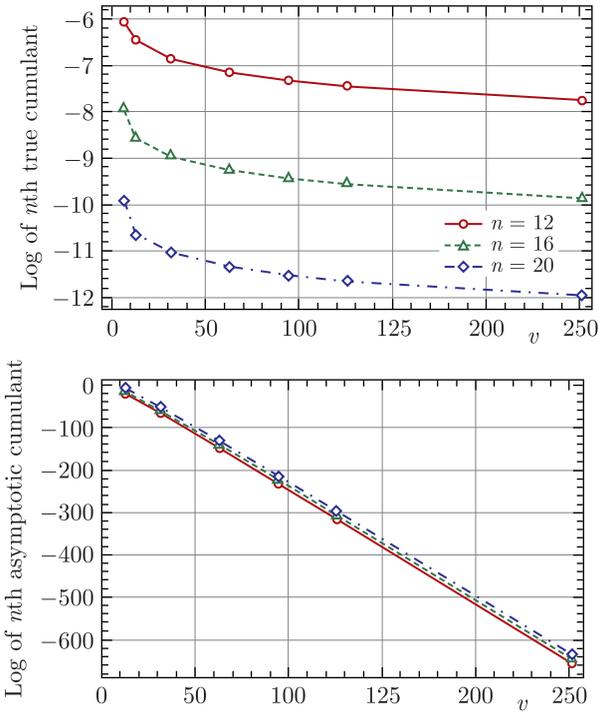


Рис. 2. Кумулянты k_n распределения по барионному числу для одномерного случая. Асимптотические кумулянты возрастают с n , в отличие от истинных

надо отметить, что асимптотические и истинные вероятности значительно различаются при $|n| \gg \nu$:

$$P_n^A \sim P_n^T \operatorname{ch} \left(\frac{\pi n}{\nu} \right). \quad (28)$$

В литературе [2, 13] предлагается для приближенного вычисления $Z_C(n)$ вместо $\hat{p}_T(\theta)$ использовать $\hat{p}_A(\theta)$, несмотря на то, что очень близкое к $\hat{p}_A(\theta)$ давление $\hat{p}_\infty(\theta)$ нефизично. Наш пример показывает, что поправки к ведущему по n приближению могут быть существенными, несмотря на их относительную малость.

3. ПЕРЕХОД РОБЕРГЕ–ВАЙССА

Полученные формулы для $\hat{p}_A(\theta, \nu)$ и $\hat{p}_T(\theta, \nu)$ задают целые 2π -периодические по θ_I функции, каждая из которых при $\nu \rightarrow \infty$ сходится к $\hat{p}_\infty(\theta)$ (11). Однако предельная плотность $\hat{p}_\infty(\theta) = (\partial \hat{p}_\infty(\theta)) / \partial \theta$ разрывна на линиях $\theta_I = 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$), где лежат нули полиномов с коэффициентами $Z_C^A(n)$ и $Z_C^T(n)$. Расстояние между соседними нулями $\sim 1/\nu$ и, следовательно, их плотность неограниченно возрастает при $\nu \rightarrow \infty$. Линии нулей Ли–Янга в плоскости θ отображаются на отрицательную вещественную полуось в плоскости активности. Это указывает на наличие в свободной теории в одномерном случае фазового перехода Роберге–Вайсса первого рода. Необходимо подчеркнуть, что, в отличие от работы [2], он никак не связан с сильным взаимодействием.

В трехмерном случае оценка интеграла (3) методом перевала дает $Z_C(n) = Z_C^A(n)$, которые для достаточно больших ν положительны:

$$Z_C^A(n) = \exp \left(-\nu f \left(\frac{n}{\nu} \right) \right), \quad (29)$$

где в главном порядке по ν

$$f(\hat{\rho}) = \frac{\pi^2}{18} + \frac{9\pi\sqrt{3}}{8} \hat{\rho}(q^{1/3} - q^{-1/3}) - \frac{\pi^2}{36} \sqrt{1 + \frac{243}{4\pi^2} \hat{\rho}^2} (q^{1/3} + q^{-1/3}), \quad (30)$$

$$q^{\pm 1} = \sqrt{1 + \frac{243}{4\pi^2} \hat{\rho}^2} \pm \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \hat{\rho}.$$

При $n \gg \nu$ имеем $Z_C(n = \nu \hat{\rho}) \sim \exp \left(-\frac{\nu \sqrt[3]{81\pi^2 \hat{\rho}^4}}{4} \right)$, в отличие от (18).

Подставляя коэффициенты (29) в формулу (2), мы получим, с учетом соотношения (12), давление $\hat{p}(\theta)$ в виде целой и 2π -периодической по θ_I функции $\hat{p}_A(\theta, \nu)$, которая при $\nu \rightarrow \infty$ сходится к $\hat{p}_\infty(\theta)$ (11). Фермионная плотность в трехмерии разрывна при $\theta_R \neq 0$, а при $\theta_R = 0$ разрывна лишь ее вторая производная. То есть переход Роберге–Вайсса при $\theta_R = 0$ — третьего рода по классификации Эренфеста.

При этом стандартное обоснование метода перевала нельзя рассматривать как доказательство истинности оценок (29), (30) при больших плотностях ($n \gg \nu$ или $\hat{\rho} \gg 1$). Однако имеют место следующие соображения. В пределе $\nu \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$, $n/\nu = \hat{\rho} = \text{const}$, плотность барионного числа $\hat{\rho}$ можно считать непрерывной, $P_n \rightarrow \exp(-\nu \hat{F}(\hat{\rho}))$, и разложение по активности приводится к виду

$$Z_{GC}(\theta) = \nu \int d\hat{\rho} \exp\left(\nu(\hat{\rho}\theta - \hat{F}(\hat{\rho}))\right). \quad (31)$$

К результату $Z_C(n) \sim \exp(-\nu \overline{F}(\hat{\rho}))$, получаемому методом перевала в ведущем приближении, можно прийти, используя функцию $\overline{F}(x)$, получаемую из величины давления преобразованием Лежандра: $\overline{F}(x) = x\theta_s - \hat{p}_\infty(\theta_s)$, где $\theta_s(x)$ определяется из уравнения $\partial \hat{p}_\infty / \partial \theta \Big|_{\theta=\theta_s} = x$. Однако, строго говоря [14], в результате преобразования Лежандра получается функция $\overline{F}(\bar{\rho})$, задаваемая параметрически парой формул:

$$\overline{F} = \int d\hat{\rho} \hat{F}(\hat{\rho}) \exp\left(\nu(\hat{\rho}\theta - \hat{F}(\hat{\rho}))\right), \quad (32)$$

$$\bar{\rho} = \int d\hat{\rho} \hat{\rho} \exp\left(\nu(\hat{\rho}\theta - \hat{F}(\hat{\rho}))\right). \quad (33)$$

Если при $\nu \rightarrow \infty$ распределение P_n имеет дисперсию $1/\nu$, то есть основания предполагать, что формальная замена $\overline{F}(\bar{\rho})$ на $\hat{F}(\hat{\rho})$ приведет к поправкам порядка $1/\nu$, однако вопрос о последствиях такой замены нуждается в более тщательном исследовании, поскольку имеет место неустойчивость P_n по отношению к малым вариациям $\hat{\rho}(\theta)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы провели критический анализ стандартных методов вычисления давления и фермионной плотности газа свободных безмассовых фермионов при конечной температуре, а также распределения по фермионному числу. Значение $p_\infty(\theta)$, которое получается общепринятым способом — наивным переходом к пределу бесконечного объема — приводит к некорректным результатам для распределения по барионному числу: при точном вычислении некоторые вероятности получаются отрицательными.

Поэтому мы рассмотрели корректный переход к бесконечному объему для свободных безмассовых фермионов на отрезке, когда давление и плотность, а также связанное с ними распределение по фермионному числу вычисляются в конечном объеме, и лишь потом объем устремляется к бесконечности. При этом получается формула для давления, которая отличается от полинома $\hat{p}_\infty(\theta)$ на величину, исчезающую в пределе бесконечного объема, а $\hat{p}_\infty(\theta)$ дает $P_N < 0$ для $n \gtrsim \nu$. Это говорит о неустойчивости распределения по барионному числу по отношению к

малым вариациям давления как функции химпотенциала, которая нуждается в дальнейшем изучении.

Мы показали, что барионная плотность становится разрывной функцией в комплексной плоскости θ при $\theta_I = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, в пределе бесконечного объема, причем нули Ли–Янга сосредоточены на линии разрыва, которая отображается в отрицательную мнимую полуось в плоскости активности. Это говорит о наличии фазового перехода Роберге–Вайсса первого рода для газа свободных безмассовых фермионов как для одномерного, так и для трехмерного случая при $\theta_R \neq 0$; для $\theta_R = 0$ в трехмерии переход Роберге–Вайсса третьего рода. Таким образом, переход Роберге–Вайсса в КХД при $T > T_{RW}$ может быть обусловлен наличием состояний свободных безмассовых фермионов в спектре частиц.

Вклад Н. В. Герасименюка поддержан грантом РФФ 23-12-00072 «Изучение теории сильных взаимодействий в экстремальных условиях методами решеточного моделирования», вклад А. А. Корнеева — Государственным заданием Минобрнауки России по проекту № FZNS-2024-0002 «Решение передовых проблем в физике конденсированных сред и элементарных частиц методами вычислительной теории поля».

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bzdak A., Esumi S., Koch V., Liao J., Stephanov M., Xu N. Mapping the Phases of Quantum Chromodynamics with Beam Energy Scan // *Phys. Rep.* 2020. V. 853. P. 1–87; arXiv:1906.00936.
2. Roberge A., Weiss N. Gauge Theories with Imaginary Chemical Potential and the Phases of QCD // *Nucl. Phys. B.* 1986. V. 275. P. 734–745.
3. Bonati C., D’Elia M., Mariti M., Mesiti M., Negro F., Sanfilippo F. Dyons and Roberge–Weiss Transition in Lattice QCD // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 93. P. 074504; arXiv:1602.01426.
4. Begun A., Bornyakov V. G., Gerasimeniuk N. V., Rogalyov R. N., Goy V. A. Analytic Continuation in Lattice QC₂D // *Phys. Part. Nucl.* 2021. V. 52, No. 4. P. 529–535.
5. Bazavov A. et al. (HotQCD Collab.) The QCD Equation of State to $\mathcal{O}(\mu_B^6)$ from Lattice QCD // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95, No. 5. P. 054504; arXiv:1701.04325.
6. Bornyakov V. G., Boyda D. L., Goy V. A., Molochkov A. V., Nakamura A., Nikolaev A. A., Zakharov V. I. New Approach to Canonical Partition Functions Computation in $N_f = 2$ Lattice QCD at Finite Baryon Density // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95, No. 9. P. 094506; arXiv:1611.04229.
7. Bornyakov V. G., Gerasimeniuk N. V., Goy V. A., Korneev A. A., Molochkov A. V., Nakamura A., Rogalyov R. N. Numerical Study of the Roberge–Weiss Transition // *Phys. Rev. D.* 2023. V. 107, No. 1. P. 014508; arXiv:2203.06159.
8. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. Higher Transcendental Functions. V. 1. R. E. Krieger Publ., 1981.
9. Greiner W., Neise L., Stoecker H. Thermodynamics and Statistical Mechanics. New York: Springer-Verlag, Lnc., 1995.

10. *Cleymans J., Gavai R. V., Suhonen E.* Quarks and Gluons at High Temperatures and Densities // *Phys. Rep.* 1986. V. 130. P. 217–292.
11. *Lukacs E.* Characteristic Functions. London: Griffin, 1970.
12. *Abramowitz M., Stegun I. A.* Handbook of Mathematical Functions. Nat. Bureau of Standards, 1964.
13. *Rogalev R. N., Bornyakov V. G., Gerasimeniuk N. V., Goy V. A., Korneev A. A., Molochkov A. V., Nakamura A.* Roberge–Weiss Transition in the Lee–Yang Approach // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2023. V. 20, No. 3. P. 438–442.
14. *Huang K.* Statistical Mechanics. John Wiley & Sons, 1987.