

## ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ И ПОЛИТРОПНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В УРАВНЕНИИ РАВНОВЕСНЫХ ПОСТНЬЮТОНОВСКИХ ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНФИГУРАЦИЙ ВЫРОЖДЕННОГО НЕЙТРОННОГО ГАЗА

*С. А. Михеев, В. П. Цветков*

Тверской государственный университет, Тверь, Россия

В работе рассмотрены полиномиальное и политропное приближения в уравнении равновесных постньютоновских вращающихся конфигураций вырожденного нейтронного газа. Введено понятие среднего по конфигурации индекса политропы.

In this paper the polynomial and polytropic approximations in the equation of equilibrium post-Newtonian rotating configurations of the degeneration neutron gas are considered. The concept of an average on the configuration of the polytropic index is entered.

PACS: 97.10.Kc, 67.10.Db

### ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории вращающихся постньютоновских конфигураций тесно связано с объяснением наблюдаемых свойств пульсаров, быстровращающихся намагниченных нейтронных звезд, для которых релятивистские эффекты становятся важными и заметными. Одним из основных при этом остается вопрос о том, какое уравнение состояния нужно использовать при построении математической модели рассматриваемой сверхплотной конфигурации.

В нашей работе мы будем использовать уравнения состояния идеального вырожденного нейтронного газа, которые впервые применили Оппенгеймер и Волков [1] для расчета свойств нейтронных звезд. Ранее конфигурации вырожденного нейтронного газа рассматривались Л. Д. Ландау [2] при обсуждении вопроса о нейтронных сердцевинах звезд.

Достоинством этих уравнений является, прежде всего, отсутствие модельных предположений, которые имеют место для расчетов, учитывающих сильные взаимодействия нейтронов [3]. Достаточно прост и аналитический вид данных уравнений. Использование же аналитического продолжения политропного приближения уравнений состояния вырожденного нейтронного газа по параметрам индекса политропы  $n$  и характерной плотности  $\rho_0$  делает возможным их применение и для получения уравнений состояния, учитывающих сильные взаимодействия нейтронов.

В работе [4] получены уравнения, описывающие гравитирующие сверхплотные конфигурации с учетом релятивистских поправок в первом постньютоновском приближении. Наиболее простым оказался случай фигур вращения, когда уравнение равновесных вращающихся конфигураций представляет собой интегральное уравнение в  $R^3$  относительно  $\tilde{\rho}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}'|} \right) dV' - K_0 \int_p^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}} - \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{r}_\perp^2 + \\ & + \gamma \left[ -\frac{5}{2\pi a_1^2} \int \left( p + \frac{\varepsilon}{5K_0} \mathbf{r}_\perp^2 - \frac{2}{5} \left( \int_0^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\Phi}_0}{K_0} \right) \right) \times \right. \\ & \times \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}'|} \right) dV' - \frac{K_0}{2} \int_0^p \frac{dp^2}{\tilde{\rho}^2} + 2 \left( \int_p^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\Phi}_0}{K_0} \right) \varepsilon \mathbf{r}_\perp^2 + \\ & \left. + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2}{K_0} \mathbf{r}_\perp^4 - \frac{2\varepsilon}{\pi K_0 a_1^2} \int_D \tilde{\rho} (\mathbf{r}_\perp \mathbf{r}'_\perp) \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

где  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_c$  — отношение плотности конфигурации  $\rho$  к ее значению в центре  $\rho_c$ ;  $p = P/P_c$  — отношение давления  $P$  к центральному значению давления  $P_c$ ;  $K_0 = \frac{P_c}{2\pi G \rho_c^2 a_1^2}$ ,  $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $x_1 = x/a_1$ ,  $x_2 = y/a_1$ ,  $x_3 = z/a_3$ ;  $a_1, a_3$  — полуоси сфероида, аппроксимирующего границу конфигурации  $D$ ;  $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_c}$ ,  $\omega$  — угловая скорость вращения,  $G$  — гравитационная постоянная,  $\gamma = P_c/\rho_c c^2$ ;  $\tilde{\Phi}_0 = \frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}'|} dV'$ ;  $D$  — область  $R^3$ , в которой  $\tilde{\rho} \geq 0$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ

Введем в рассмотрение функцию  $\Theta$  согласно соотношению  $\Theta(\tilde{\rho}) = \int_0^p \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)}$ . Тогда

$$p = \tilde{\rho} \Theta - \int_0^{\tilde{\rho}} \Theta d\tilde{\rho}.$$

Для вырожденного газа нейтронов функция  $\Theta$  имеет простой вид:

$$\Theta(\tilde{\rho}) = K(\rho_c, P_c) \cdot f(k, \tilde{\rho}), \quad f(k, \tilde{\rho}) = \frac{\sqrt{1 + k\tilde{\rho}^{2/3}} - 1}{\sqrt{1 + k} - 1}, \quad (2)$$

где  $k = \left( \frac{\rho_c}{\rho_0} \right)^{2/3}$ ,  $K = \frac{\rho_c c^2}{2P_c} (\sqrt{1 + k} - 1)$ ,  $\rho_0 = \frac{m_n^4 c^3}{3\pi^2 \hbar^3}$ ,  $m_n$  — масса нейтрона;  $c$  — скорость света;  $\hbar$  — постоянная Планка.

Вначале рассмотрим политропное приближение уравнений состояния (2), то есть аппроксимацию давления функцией  $P = \tilde{K}\rho^{1+(1/n)}$ ,  $n$  — средний индекс политропы по конфигурации. Для этого функцию  $f(k, \tilde{\rho})$  приблизим степенной функцией  $\tilde{\rho}^{1/n(k)}$  в метрике  $L_2$ :

$$\|f(k, \tilde{\rho}) - \tilde{\rho}^{1/n(k)}\| \rightarrow \min. \quad (3)$$

В итоге имеем

$$\frac{1}{n(k)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln \tilde{\rho} \cdot \ln f(k, \tilde{\rho}) d\tilde{\rho}. \quad (4)$$

Графики зависимости  $n$  от  $k$  приводятся на рис. 1 ( $0 \leq k \leq 3$ ), рис. 2 ( $3 \leq k \leq 2 \cdot 10^2$ ), рис. 3 ( $2 \cdot 10^2 \leq k \leq 5 \cdot 10^3$ ), а на рис. 4 представлен график зависимости  $n(\lg(k))$  ( $5 \cdot 10^3 \leq k \leq 10^{10}$ ).

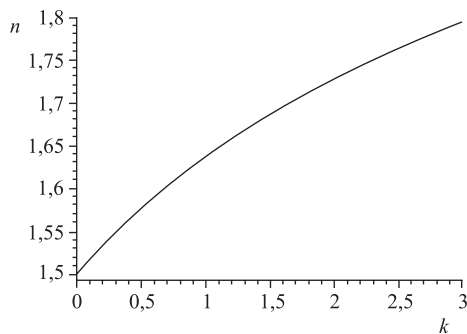


Рис. 1. График функции  $n(k)$  при  $0 \leq k \leq 3$

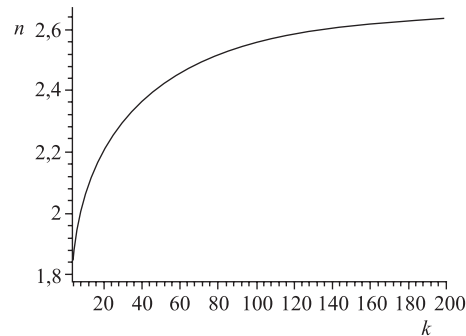


Рис. 2. График функции  $n(k)$  при  $3 \leq k \leq 2 \cdot 10^2$

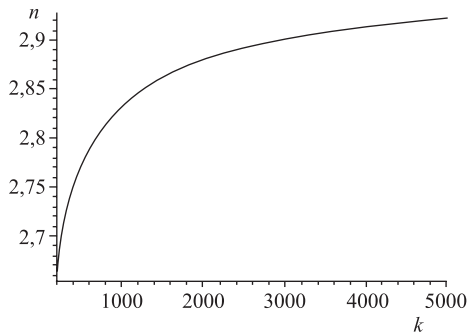


Рис. 3. График функции  $n(k)$  при  $2 \cdot 10^2 \leq k \leq 5 \cdot 10^3$

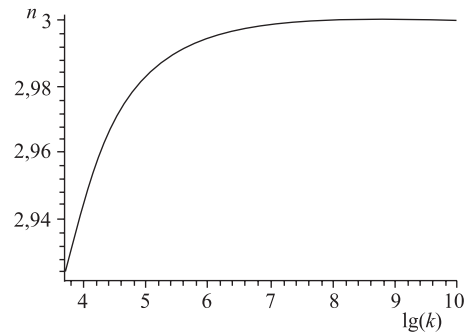


Рис. 4. График функции  $n(\lg(k))$  при  $5 \cdot 10^3 \leq k \leq 10^{10}$

Из этих графиков наблюдается характер роста индекса политропы  $n(k)$  с ростом  $k$ . При  $k \ll 1$  значение параметра  $n = 3/2$ , а при  $k \gg 1$  значение параметра  $n = 3$ . Имеет место очень медленное приближение  $n$  к асимптотическому значению, равному 3.

В политропном приближении  $\Theta = K(\rho_c, P_c)\tilde{\rho}^{1/n}$ . Используя связь  $p$  и  $\Theta$ , находим

$$p = \frac{K(\rho_c, P_c)}{1+n} \tilde{\rho}^{1+(1/n)}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что  $1+n = K(\rho_c, P_c)$  и

$$P_c = \frac{\rho_c c^2}{2(1+n)} (\sqrt{1+k} - 1). \quad (6)$$

В результате  $p = \tilde{\rho}^{1+(1/n)}$  и  $\Theta = (1+n)\tilde{\rho}^{1/n}$ .

Погрешность аппроксимации в интервале всех значений  $k$  в метрике  $L_2$  будет  $1,2 \cdot 10^{-2}$ .

Заменяем для удобства в (2)  $K(\rho_c, P_c)$  на  $(1+n)$ , тогда

$$\Theta = (1+n)f(k, \tilde{\rho}). \quad (7)$$

Функция  $\Theta$  является непрерывной функцией  $k$  и  $\tilde{\rho}$ . Представим ее в виде двух функций:

$$\Theta = \begin{cases} \Theta_1 = (1+n)f_1(k, \tilde{\rho}), & k \leq 1, \\ \Theta_2 = (1+n)f_2(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}), & \mathfrak{x} = \frac{1}{k}, \quad k \geq 1, \quad \mathfrak{x} \leq 1, \end{cases} \quad (8)$$

$$f_1(k, \tilde{\rho}) = f(k, \tilde{\rho}), \quad f_2(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}) = \frac{\sqrt{\mathfrak{x} + \tilde{\rho}^{2/3}} - \sqrt{\mathfrak{x}}}{\sqrt{\mathfrak{x} + 1} - \sqrt{\mathfrak{x}}}.$$

$\Theta_1$  и  $\Theta_2$  — непрерывные функции  $\tilde{\rho}$ ,  $k$  и  $\mathfrak{x}$  соответственно на компактах ( $\tilde{\rho} \leq 1$ ,  $k \leq 1$ ), ( $\tilde{\rho} \leq 1$ ,  $\mathfrak{x} \leq 1$ ). Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса они могут быть приближены полиномами по степеням  $\tilde{\rho}$ ,  $k$  и  $\mathfrak{x}$  с любой степенью точности в  $C$ -метрике:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &\cong (1+n)f_{1(N, N_1)}(k, \tilde{\rho}), \quad k \leq 1, \quad f_{1(N, N_1)}(k, \tilde{\rho}) = \sum_{l=1}^N \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(1)} k^d \tilde{\rho}^l; \\ \Theta_2 &\cong (1+n)f_{2(N, N_2)}(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}), \quad \mathfrak{x} < 1, \quad f_{2(N, N_2)}(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}) = \sum_{l=1}^N \sum_{d=0}^{N_1} f_{dl}^{(2)} \mathfrak{x}^d \tilde{\rho}^l. \end{aligned} \quad (9)$$

Функции как  $\Theta$ , так и  $p$  будут для разных значений  $k$  иметь разные аналитические представления:

$$p = p_1(k, \tilde{\rho}), \quad k \leq 1; \quad p = p_2(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}), \quad \mathfrak{x} \leq 1. \quad (10)$$

Приближая (10) полиномами по степеням  $\tilde{\rho}$ ,  $k$  и  $\mathfrak{x}$ , имеем

$$\begin{aligned} p_1(k, \tilde{\rho}) &\cong P_{1(N, N_1)}(k, \tilde{\rho}); \quad p_2(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}) \cong p_{2(N, N_2)}(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}); \\ p_{1(N, N_1)}(k, \tilde{\rho}) &= (1+n) \sum_{l=1}^N \sum_{d=0}^{N_1} \frac{l}{l+1} f_{dl}^{(1)} k^d \tilde{\rho}^l; \\ p_{2(N, N_2)}(\mathfrak{x}, \tilde{\rho}) &= (1+n) \sum_{l=1}^N \sum_{d=0}^{N_1} \frac{l}{l+1} f_{dl}^{(2)} \mathfrak{x}^d \tilde{\rho}^l. \end{aligned} \quad (11)$$

Нами составлена программа для нахождения коэффициентов  $f_{dl}^{(1)}$  и  $f_{dl}^{(2)}$  в пакете CurveFitting системы символьной математики MAPLE. Значения  $f_{dl}^{(1)}$  и  $f_{dl}^{(2)}$  при  $N = N_1 = 6$  приводятся в табл. 1 работы [5].

В уравнение (1) также входит функция

$$\int_0^p \frac{dp^2}{\tilde{\rho}^2} = \Psi(k, \tilde{\rho}), \quad (12)$$

которую надо представить полиномом по степеням  $\tilde{\rho}$ ,  $k$  и  $\mathfrak{a}$ . Из (10) следует

$$\Psi = \Psi_1 = \int_0^{p_1} \frac{dp_1^2}{\tilde{\rho}^2}, \quad k \leq 1; \quad \Psi = \Psi_2 = \int_0^{p_2} \frac{dp_2^2}{\tilde{\rho}^2}, \quad \mathfrak{a} \leq 1. \quad (13)$$

Подставляя (11) в (13), находим

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\cong (1+n)^2 \Psi_{1(N, N_1)}(k, \tilde{\rho}), \quad k \leq 1, \\ \Psi_2 &\cong (1+n)^2 \Psi_{2(N, N_1)}(\mathfrak{a}, \tilde{\rho}), \quad \mathfrak{a} \leq 1, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1(N, N_1)} &= \sum_{l, l'=1}^N \sum_{d, d'=0}^{N_1} \frac{ll'(l+l')}{(l+l'+2)(l+1)(l'+1)} f_{dl}^{(1)} f_{d'l'}^{(1)} k^{d+d'} \tilde{\rho}^{l+l'}, \\ \Psi_{2(N, N_1)} &= \sum_{l, l'=1}^N \sum_{d, d'=0}^{N_1} \frac{ll'(l+l')}{(l+l'+2)(l+1)(l'+1)} f_{dl}^{(2)} f_{d'l'}^{(2)} k^{d+d'} \tilde{\rho}^{l+l'}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (1) полиномиальное представление функций  $\Theta$ ,  $p$ ,  $\Psi$  по степеням  $\tilde{\rho}$ , мы получаем полиномиальное приближение уравнения равновесных постньютоновских вращающихся конфигураций вырожденного нейтронного газа. Это позволяет, в свою очередь, использовать для решения этого уравнения комплекс символьно-численных программ [6], в основе которого лежит метод многочленов наилучшего приближения в  $L_2$  для нахождения  $\tilde{\rho}$  в виде полинома по степеням координат  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наш интерес к уравнению состояния идеального вырожденного ферми-газа обусловлен, прежде всего, тем обстоятельством, что для ньютоновских вращающихся политроп с индексом  $n > 1,25$  при определенной скорости вращения  $\varepsilon$  возникают кольцеобразные пузыри в распределении плотности  $\tilde{\rho}$  [7].

Как мы показали в данной работе, уравнение состояния вырожденного ферми-газа близко к политропе индекса  $3/2 \leq n \leq 3$ .

В дальнейшем предполагается выяснение вопроса о наличии аналогичного эффекта и для вращающихся постньютоновских политроп в том же интервале значений их индекса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Oppenheimer J. R., Volkoff G. M.* On Massive Neutron Cores // *Phys. Rev.* 1939. V. 55. P. 374.
2. *Landau L. D.* Origin of Stellar Energy // *Nature.* 1938. V. 141. P. 333.
3. *Шапиро С., Тюкольский С.* Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. Ч. 1, 2. М.: Мир, 1985.
4. *Цветков В. П.* Релятивистские эффекты в теории гравитирующих быстровращающихся сверхплотных конфигураций // *Письма в ЭЧАЯ.* 2007. Т. 4, № 5(141). С. 635–636.
5. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций вырожденного ферми-газа // *Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикладная математика».* 2009 (в печати).
6. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // *Мат. моделирование.* 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
7. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Кольцеобразные пузыри в распределении плотности быстровращающихся ньютоновских политроп с индексом  $n > 1,25$  // *Астрофизика.* 2009 (в печати).

Получено 24 апреля 2009 г.