

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ СЕПАРАТРИСЫ ОДНОЙ СТАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

В. И. Журавлев, В. А. Мещеряков

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложен метод исследования уравнений статических моделей, описывающих рассеяние релятивистской частицы на фиксированном центре, в проективных пространствах. Основу его составляет построение множества аффинных координат задачи при нулевой полной энергии. Метод продемонстрирован на примере трехрядной матрицы перекрестной симметрии. Каждый элемент множества приводит к решению с одной и той же римановой поверхностью, на которой рассмотрено поведение сепаратрисы на бесконечности.

A method of studying static model equations (scattering of a relativistic particle on the fixed center) in projective spaces is suggested. Its basis is the construction of a set of affine coordinates of the problem at a zero total energy. The method is exemplified by the three-row matrix of crossing symmetry. Each element of the set leads to the solution with the same Riemann surface on which the behaviour of the separatrix at infinity is considered.

PACS: 11.55.FV

ВВЕДЕНИЕ

В статических моделях, которые описывают рассеяние релятивистской частицы на фиксированном центре, матричные элементы конечной S -матрицы с упругой унитарностью удовлетворяют следующим условиям:

- а) S_i — мероморфные функции в комплексной плоскости z с разрезами $(-\infty, -1], [+1, +\infty), i \leq N$;
- б) $S_i^*(z) = S_i(z^*)$;
- в) $|S_i(\omega + i0)|^2 = 1$ при $\omega \geq 1$, $S_i(\omega + i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} S_i(\omega + i\varepsilon)$;
- г) $S_i(-z) = \sum_{j=1}^N A_{ij} S_j(z)$.

При $N = 4$ условия (1) следуют из статического предела (масса нуклона $\rightarrow \infty$) дисперсионных соотношений для πN -рассеяния на ненулевой угол, доказанных Н. Н. Боголюбовым [1]. Задачу о нахождении функций, удовлетворяющих условиям (1), можно изучать при любых целых значениях N .

Действительные значения переменной z равны ω — полной энергии релятивистской частицы, рассеивающейся на фиксированном центре. Мероморфность функций

$S_i(z)$ есть следствие статического предела задачи рассеяния [2]. Матрица перекрестной симметрии A определяется ее общими свойствами ($A^2 = E$, $\sum_i A_{ij} = 1$ для любого $j \leq N$), а также группой, относительно которой предполагается инвариантной S -матрица. Из общих свойств матрицы A следует, что S -матрица без взаимодействия ($S = \text{diag}\{1, 1, \dots, 1\}$) — тривиальное решение условий (1).

В обзоре [3] было показано, что задача нахождения функций, удовлетворяющих условиям (1), может быть сведена к автономной системе нелинейных разностных уравнений первого порядка. При исследовании ее решений оказываются полезными такие понятия из теории дифференциальных уравнений, как точка покоя и сепаратриса — решение системы, входящее или выходящее из гиперболической точки покоя.

Ниже это будет продемонстрировано на примере трехрядной матрицы перекрестной симметрии.

ТРЕХРЯДНАЯ МАТРИЦА В ГРУППЕ $SU(2)$

Рассмотрим матрицу перекрестной симметрии в группе $SU(2)$, определяющую рассеяние релятивистской частицы с единичным угловым моментом на фиксированном центре с таким же квантовым числом,

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} 1/3 & -1 & 5/3 \\ -1/3 & 1/2 & 5/6 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Шпур ее равен 1, а потому матричные элементы S_i выражаются через две симметричных s_1, s_2 и одну антисимметричную $a(z)$ функции:

$$S = s_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} + s_2 \cdot 1/4 \begin{vmatrix} 15 \\ -5 \\ 3 \end{vmatrix} + a \cdot 2 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Из формулы (3) легко усматривается линейная связь, инвариантная относительно перекрестной симметрии

$$S_2 + S_3 = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) инвариантно также по отношению к нелинейной операции $I(S_i) = 1/S_i$, осуществляющей аналитическое продолжение функций S_i на нефизические листы римановой поверхности задачи (1) [4, 5].

Трехмерную задачу (3) будем рассматривать на проективной плоскости P_2 над полем \mathbb{C} . Определим аффинные координаты в P_2 равенствами $X = S_1/S_2$, $Y = S_3/S_2$,

$$X = \frac{1 - 4x + \frac{15}{4}y}{1 - 2x - \frac{5}{4}y}, \quad Y = \frac{1 + 2x + \frac{3}{4}y}{1 - 2x - \frac{5}{4}y}, \quad (5)$$

где $x = a/s_1, y = s_2/s_1$. Используя свойства четности функций $s_1(z), s_2(z), a(z)$, легко получить, что $x(0) \in \{0, \infty\}, y(0) \in \{0, \infty, c\}$. Отсюда следует, что точки $X(0), Y(0)$ в

частности — элементы конечного множества $M = \{(1, 1), (-3, -3/5), (2, -1)\}$. Точка $(-3, -3/5)$ принадлежит известному решению с конечным числом полюсов [3], а точка $(2, -1)$ лежит на прямой (4). Уравнение (4) позволяет понизить порядок матрицы (2)

$$A(1, 1) \rightarrow A_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

которая действует на столбец $\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix}$, до 2.

Шпур матрицы A_2 равен нулю, вследствие чего имеет место следующая формула:

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s + 2a_1 \\ s + a_1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } s(z) = s(-z), \quad a_1(z) = -a_1(-z). \quad (6)$$

Формула (6) добавляет к множеству значений $(X(0), Y(0))$ еще одну точку $(-4, -1)$, также лежащую на прямой (4).

Построение множества M может быть выполнено для матрицы перекрестной симметрии A при любом N .

Исследуем образы точек $(-4, -1), (2, -1)$ на проективной прямой (4) с помощью ранее введенной аффинной координаты $X = S_1/S_2$. Они определяются гиперболическим дробно-линейным преобразованием, заданным матрицей A_2 ,

$$X^{(1)} = \frac{X^{(0)} + 1}{-X^{(0)} + 8}, \quad (7)$$

где $X^{(0)}$ — значение координаты X на физическом листе; $X^{(1)}$ — на первом нефизическом листе, а неподвижные точки \bar{X} — корни уравнения $\bar{X}^2 - 7\bar{X} + 1 = 0$.

Возводя преобразование (7) в n -ю степень, получаем

$$X^{(n)} = \frac{-\left(\frac{7}{2}X^{(0)} - 1\right) \text{sh}_y n + \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ch}_y n}{-\left(X^{(0)} - \frac{7}{2}\right) \text{sh}_y n + \frac{3\sqrt{5}}{2} \text{ch}_y n}, \quad (8)$$

где введены удобные далее обозначения

$$\begin{aligned} \text{sh}_y n &= \frac{1}{2}(y_+^n - y_-^n), & \text{ch}_y n &= \frac{1}{2}(y_+^n + y_-^n), & \text{ch}_y^2 n - \text{sh}_y^2 n &= 1, \\ y_{\pm}^2 - 3y_{\pm} + 1 &= 0, & y_{\pm} &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, & \bar{X}_{\pm} &= y_{\pm}^2. \end{aligned}$$

Вычисляя из формулы (8) отношение a_1/s , легко заметить, что оно антисимметрично относительно n только при двух значениях $X^{(0)}$, а именно при $X^{(0)} = 2$ и -4 . При этом

$$\frac{a_1}{s} = \sqrt{5} \text{cth}_y n \quad \text{для } X^{(0)} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{a_1}{s} = \sqrt{5} \text{th}_y n \quad \text{для } X^{(0)} = -4. \quad (9)$$

Условие унитарности для $X^{(n)}$ приводит к квадратному уравнению на $X^{(0)}$, корни которого совпадают со значениями, следующими из выполнения условий перекрестной симметрии.

Здесь уместно отметить двоякую роль переменной n . Во-первых, это — номер листа римановой поверхности, на которой вычисляется образ координаты $X(0)$. Во-вторых, это — значение координаты точки $z = 0$ физического листа ($n = 0$) на n -м листе римановой поверхности исходной задачи (1). Двоякая роль переменной n будет реализована ниже для получения линейной краевой задачи на функцию $n(z)$.

Условие унитарности для $S_2^{(n)}$ имеет вид $S_2^{(n)} S_2^{(1-n)} = 1$ и приводит к формуле

$$S_2^{(n)} = e^{g(n-1/2)}, \quad g(n) = -g(-n).$$

Учитывая, что отношение a_1/s известно — (9), получаем неоднородное разностное уравнение на функцию $g(n)$

$$g(n+1) + g(n) = \ln \left[(-1) \frac{\operatorname{ch}_y(n+1)}{\operatorname{ch}_y(n)} \right] \quad \text{при } X^{(0)} = 2 \text{ и } \operatorname{ch}_y \rightarrow \operatorname{sh}_y \quad \text{при } X^{(0)} = -4, \quad (10)$$

которое будет изучено ниже.

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Обозначим через $g_-(n)$ антисимметричное решение неоднородного уравнения

$$g_-(n+1) + g_-(n) = \ln(-1), \quad g_-(-n) = -g_-(n).$$

В уравнении (10) произведем следующую замену неизвестной функции $g(n)$:

$$g(n) = g_0(n) + g_-(n). \quad (11)$$

В (11) все функции антисимметричны. Теперь уравнение (10) примет вид

$$g_0(n+1) + g_0(n) = \ln \frac{\operatorname{ch}_y(n+1)}{\operatorname{ch}_y(n)}. \quad (12)$$

Определим новую функцию $g_1(n)$ формулой

$$g_0(n) = g_1(n) + \ln \frac{n+1}{n-1} \frac{n-\alpha_1}{n+\alpha_1}. \quad (13)$$

Первый множитель дроби под знаком логарифма в формуле (13) обратит в ноль правую часть уравнения (12). Значение α_1 можно выбрать так, чтобы замена $g_0 \rightarrow g_1$ была повторяема и упрощала вид правой части уравнений, следующих за уравнением (12). Выбирая $\alpha_1 = 2$, после m шагов приходим к формулам

$$g_m(n+1) + g_m(n) = \ln \frac{\operatorname{ch}_y(n+1+2m)}{\operatorname{ch}_y(n-2m)}, \quad (14)$$

$$g_m(n) = g_{m+1}(n) + \ln \frac{\operatorname{ch}_y(n+1+2m)}{\operatorname{ch}_y(n-2m)} \frac{\operatorname{ch}_y(n-\alpha_{m+1})}{\operatorname{ch}_y(n+\alpha_{m+1})}, \quad \alpha_{m+1} = 2(m+1). \quad (15)$$

Методом полной математической индукции легко убедиться в том, что формулы (14), (15) верны при любом m . Переходя к пределу $m \rightarrow \infty$ в (14), получаем

$$g_\infty(n+1) + g_\infty(n) = \ln y_+^{2n+1}. \quad (16)$$

Решение уравнения (16) очевидно: $g_\infty(n) = n \ln y_+$. Окончательное решение уравнения (10) таково:

$$g(n) = \ln \left\{ \prod_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}_y(n+1+2m) \operatorname{ch}_y(n-2(m+1))}{\operatorname{ch}_y(n-1-2m) \operatorname{ch}_y(n+2(m+1))} \right\} + g_-(n) + g_\infty(n). \quad (17)$$

Предел дроби под знаком бесконечного произведения равен единице, и оно сходится. Для дальнейшего представим его в виде отношения целых функций

$$g(n) = \ln \left\{ \prod_{m=0}^{\infty} \frac{1 + y_+^{-2(n+1+2m)}}{1 + y_+^{2(n-1-2m)}} \frac{1 + y_+^{2(n-2(m+1))}}{1 + y_+^{-2(n+2(m+1))}} \right\} + g_-(n) + g_\infty(n). \quad (18)$$

С помощью двух тождеств

$$\begin{aligned} \prod_{m=0}^{\infty} (1 + y_+^{2(n-m)}) &= (1 + y_+^{2n}) \prod_{m=0}^{\infty} (1 + y_+^{2(n-2-2m)}), \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1 + y_+^{-2(n+1+2m)}) &= (1 + y_+^{-2(n+1)}) \prod_{m=0}^{\infty} (1 + y_+^{-2(n+3+2m)}) \end{aligned}$$

убеждаемся, что функция (18) удовлетворяет уравнению (10).

Ясно, что кроме решения (18) уравнение (10) имеет и другие решения. Для того чтобы привести пример такого решения, переобозначим все функции g с числовыми индексами в формулах начиная с формулы (13), например, как $g_0 \rightarrow \tilde{g}_0, g_1 \rightarrow \tilde{g}_1$ и т.д. Выбирая в формуле (13) с функциями \tilde{g}_0, \tilde{g}_1 число $\alpha_1 = 1/2$ и повторяя все шаги, описанные в тексте ниже формулы (13), после m шагов приходим к формулам

$$\tilde{g}_m(n+1) + \tilde{g}_m(n) = (-1)^m \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}_y(n+1+m) \operatorname{ch}_y(n-m+1/2)}{\operatorname{ch}_y(n-m) \operatorname{ch}_y(n+m+1/2)} \right\}, \quad (19)$$

$$\tilde{g}_m(n) = \tilde{g}_{m+1}(n) + (-1)^m \ln \left\{ \frac{\operatorname{ch}_y(n+1+m) \operatorname{ch}_y(n-m-1/2)}{\operatorname{ch}_y(n-(m+1)) \operatorname{ch}_y(n+m+1/2)} \right\}. \quad (20)$$

Если в формуле (19) перейти к пределу $m \rightarrow \infty$, то функция $\tilde{g}_\infty(n)$ будет удовлетворять однородному уравнению, и можно положить $\tilde{g}_\infty(n) = 0$. Тогда из (20) следует, что функция

$$\tilde{g}_0(n) = \ln \prod_{m=0}^{\infty} \left\{ (-1)^m \frac{\operatorname{ch}_y(n+(m+1)) \operatorname{ch}_y(n-m+1/2)}{\operatorname{ch}_y(n-(m+1)) \operatorname{ch}_y(n+m+1/2)} \right\} \quad (21)$$

также есть решение уравнения (12).

Разбивая бесконечное произведение в формуле (21) на произведение по четным и нечетным значениям m , представим \tilde{g} в виде отношения целых функций так же, как это

было сделано в формуле (18)

$$\tilde{g}_0(n) = \ln \prod_{p=0}^{\infty} \times \left\{ \frac{1 + y_+^{-2(n+(2p+1))}}{1 + y_+^{2(n-(2p+2))}} \frac{1 + y_+^{2(n-(2p+2))}}{1 + y_+^{-2(n+(2p+2))}} \frac{1 + y_+^{2(n-2p-1/2)}}{1 + y_+^{-2(n+(p+1/2))}} \frac{1 + y_+^{-2(n+2p+3/2)}}{1 + y_+^{2(n-2p-3/2)}} \right\} + \tilde{g}_-(n). \quad (22)$$

Функция $\tilde{g}_0(n)$ так же, как $g_0(n)$, удовлетворяет уравнению (12), хотя и не содержит слагаемого $g_\infty(n)$. Отсутствие его обусловлено более сложной по сравнению с функцией $g_0(n)$ структурой нулей функции под логарифмом: четыре целых функции по сравнению с двумя в формуле (18). Эта особенность затрудняет проверку решения (21). Технически она не отличается от проверки решения $g_0(n)$, но более громоздка. Так первая целая функция в числителе дроби под знаком логарифма в $\tilde{g}_0(n)$ сокращается со второй в знаменателе $\tilde{g}_0(n+1)$, если учесть тождество

$$\prod_{p=0}^{\infty} \left(1 + y_+^{-2(n+(2p+1))} \right) = \left(1 + y_+^{-2(n+1)} \right) \prod_{p=0}^{\infty} \left(1 + y_+^{-2(n+1+(2p+2))} \right).$$

Три аналогичных тождества позволяют завершить проверку.

Полученные выше результаты дают явное выражение для столбца (6) при $X^{(0)} = 2$ в следующем виде:

$$\left\| \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} \frac{2\text{sh}_y(n) + \sqrt{5} \text{ch}_y(n)}{-\frac{1}{2} \text{sh}_y(n) + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ch}_y(n)} \\ 1 \end{array} \right\| e^{\tilde{g}_0(n-1/2) + \tilde{g}_-(n-1/2)}. \quad (23)$$

Удобно привести и другую формулу для координаты X , а именно

$$X = \frac{\text{ch}_y(n - 3/2)}{\text{ch}_y(n + 1/2)}.$$

Решение при $X^{(0)} = -4$ получим из (22) заменой $y_+^n \rightarrow -y_+^n$.

ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННОЙ ТОЧКИ

В формуле (23) и ее аналоге при $X^{(0)} = -4$ по построению $n \in \mathbb{Z}$, все вычисления проводятся в поле $Q(\sqrt{5})$, но значение координаты $X \in Q$ в соответствии с формулой (7). Сходимость бесконечных произведений в формуле (22) оправдывает включения: $n \in \mathbb{Z} \subset R \subset \mathbb{C}$. При $-\infty < n < +\infty$ координата $X \in (X_-, X_+)$ для $X^{(0)} = 2$ и $X \in (-\infty, X_-) \cup (X_+, +\infty)$ при $X^{(0)} = -4$ как следствие формулы $X = \frac{\text{sh}_y(n - 3/2)}{\text{sh}_y(n + 1/2)}$.

Сепаратрисы точек покоя X_{\pm} лежат на определенных выше открытых отрезках прямой $Y = -1$.

Особенно важно последнее включение, так как при выводе формулы (7) не было использовано условие унитарности в \mathbb{C} . Оно приводит к следующему уравнению:

$$X_+^{n(z)+n^*(z)-1} = 1.$$

Логарифмируя его, получаем линейную неоднородную краевую задачу [6]

$$n(z) + n^*(z) = \pm \left(1 + i \frac{2\pi q}{\ln X_+} \right), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Решение ее имеет вид

$$n(z) = \frac{1}{\pi} \arcsin z \left(1 + i \frac{2\pi q}{\ln X_+} \right).$$

В силу условия (б) задачи (1) функция $n(z)$ действительна при $z \in (-1, +1)$, что дает $q = 0$, и окончательно

$$n(z) = w = \frac{1}{\pi} \arcsin z. \quad (24)$$

Формула (24) определяет вид римановой поверхности столбца (23).

Значение столбца $[S_1, S_2, S_3]$ (квадратные скобки обозначают столбец) в бесконечно удаленной точке — неподвижная точка задачи (1). Его легко найти с помощью формулы (3):

$$[S_1, S_2, S_3] = \pm i[x_{\mp}^3, -x_{\pm}, x_{\pm}], \quad x_+ + x_- = 1, \quad x_+x_- = -1.$$

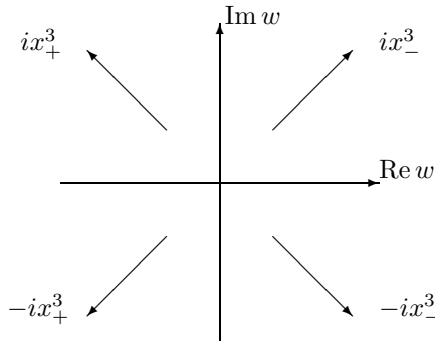
Все значения $S_i|_{z^{-1}=0}$ чисто мнимые, а первые два сомножителя в формуле (23) на действительной оси w действительны. Из формул (8), (12) легко установить, что при $X^{(0)} = 2$ их пределы равны

$$X(\pm\infty) = x_{\mp}^4 \quad \text{и} \quad g_0(\pm\infty) = \frac{\ln x_+}{\ln 1/x_+}.$$

Третий сомножитель определяется решением уравнения (10), которое для наших целей может быть выбрано в виде

$$e^{g(n-1/2)} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} n$$

и на действительной оси предела не имеет. Однако на мнимой оси $\operatorname{tg}(\pm i\infty) = \pm i$. Полученные результаты приводят для S_1 к предельным значениям, изображенным на рисунке.



Аналогичные рисунки можно привести для S_2 и S_3 . Таким образом, бесконечно удаленная точка является существенно особой для функций S_i с предельными значениями вдоль путей, изображенных на рисунке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К.* Вопросы теории дисперсионных соотношений. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958.
2. *Мещеряков В. А.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 175–182.
3. *Журавлев В. И., Мещеряков В. А.* // ЭЧАЯ. 1974. Т. 5. С. 172.
4. *Meshcheryakov V. A.* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1997. V. 12. P. 249–254.
5. *Журавлев В. И., Мещеряков В. А.* // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 4(146). С. 573–578.
6. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.

Получено 16 апреля 2009 г.