

ФОРМФАКТОР ПИОНА В КХД: КАК СЧИТАТЬ?

*А. П. Бакулев*¹

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждается расчет формфактора (ФФ) пиона, $F_\pi(Q^2)$, в КХД. Мы кратко обсуждаем основные моменты правила сумм (ПС) КХД с нелокальными вакуумными конденсатами (НВК) и показываем его результаты для электромагнитного формфактора пиона в сравнении с предсказаниями пертурбативной и решеточной КХД. В заключение мы рассматриваем подход локальной дуальности (ЛД) для формфактора пиона в КХД и показываем, что при $Q^2 \gtrsim 2 \text{ ГэВ}^2$ основной параметр подхода, а именно порог континуума $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$, должен расти с ростом Q^2 , а не оставаться постоянным.

We discuss the pion form factor calculation in QCD. We briefly consider the main points of the nonlocal condensate QCD sum rule approach and show its results for the pion form factor, $F_\pi(Q^2)$. These results are compared with predictions of the perturbative and lattice QCD. Then we consider the Local Duality (LD) approach for the pion FF in QCD and show that for $Q^2 \gtrsim 2 \text{ GeV}^2$ the main parameter of the approach, namely, $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ should grow with Q^2 rather than be a constant.

PACS: 12.38.Aw; 12.38.Bx; 13.40.Gp

ВВЕДЕНИЕ

Вычисление асимптотики пионного ФФ $F_\pi(Q^2)$ при $Q^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$ в пертурбативной КХД [1–3] с самого начала рассматривалось как один из важных успехов КХД в описании эксклюзивных адронных процессов. Однако при использовании пертурбативного подхода КХД-факторизации для ФФ пиона всегда оставался открытым вопрос о том, какую часть полного ответа описывает факторизуемый вклад. Пертурбативный вклад в ФФ пиона (его часто называют «жестким») преобладает при асимптотически больших значениях передач импульса, $Q^2 \gtrsim 20 - 100 \text{ ГэВ}^2$. Многие авторы считают (см., например, [4–8], а также ссылки в этих работах), что один только жесткий (факторизуемый) вклад в электромагнитный ФФ пиона слишком мал для объяснения существующих экспериментальных данных в области умеренных передач $Q^2 = 3 - 10 \text{ ГэВ}^2$ [9, 10] — здесь доминирует так называемый «мягкий» вклад. В области же $Q^2 \lesssim 1 \text{ ГэВ}^2$ коллинеарное приближение пертурбативной КХД перестает быть адекватным и факторизуемая часть ФФ пиона растет как $1/Q^2$, что никак не согласуется со свойством полного ФФ $F_\pi(0) = 1$, которое диктуется тождеством Уорда.

¹E-mail: bakulev@theor.jinr.ru

В нашей работе [8] мы показали, что достаточно разумное описание может быть получено, если сшить мягкий вклад, получаемый в подходе локальной дуальности [11, 12], с жестким с использованием самой простой функции включения пертурбативного вклада. Слабым местом этого подхода является получаемая по наследству от ЛД неопределенность выбора эффективного порога континуума $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ при умеренных, но не малых, значениях $Q^2 \geq 1 \text{ ГэВ}^2$. Этот вопрос мы обсудим в разд. 4.

В этой лекции мы рассматриваем вопрос об учете нефакторизуемых вкладов в ФФ пиона с помощью нелокальных вакуумных конденсатов (НВК) в методе правил сумм (ПС) КХД.

Отметим, что ПС с локальными конденсатами для ФФ пиона обладают плохой стабильностью и устойчивы лишь при передачах импульса $1 < Q^2 < 3 \text{ ГэВ}^2$. Причиной является разное Q^2 -поведение пертурбативного вклада, падающего с ростом Q^2 , и непертурбативных вкладов, которые либо постоянны, либо линейно растут с Q^2 [11, 13]. Чтобы получить правильные зависимости от Q^2 , необходимо вычислять вклады от операторов высшей размерности типа $\langle \bar{q}(0)D^2q(0) \rangle$, $\langle \bar{q}(0)(D^2)^2q(0) \rangle$ и т.п. Они получаются с помощью тейлоровского разложения изначально нелокальных конденсатов (например, $\langle \bar{q}(0)q(z) \rangle$). Полный конденсатный вклад для ФФ убывает с ростом Q^2 , в то время как каждый по отдельности вклад стандартного операторного разложения имеет структуру Q^{2n} . Это означает, что для получения осмысленного результата необходимо отсуммировать весь ряд Тейлора, что выполнить точно не представляется возможным. Вариантом такого суммирования и является метод НВК¹, в котором нелокальные вакуумные объекты параметризуются минимальным образом — с использованием единственного параметра λ_q^2 .

Подход к расчету пионного ФФ методом ПС КХД [11, 13] основан на анализе трехточечного AAV -коррелятора (A — для аксиального, V — для векторного токов) с помощью операторного разложения и двойного дисперсионного представления. В разд. 1 мы разберем этот подход на примере стандартных ПС КХД и обсудим его достоинства и недостатки.

Затем, в разд. 2, мы систематизируем используемые нами гауссовы модели НВК, минимальную [15–17] и улучшенную [17, 18], и объясним, чем они отличаются друг от друга: оказывается, что улучшенная модель по-другому параметризует кварк-глюон-антикварковый НВК, что позволяет удовлетворить основному КХД-уравнению движения для векторного билакального НВК и минимизировать нарушение непоперечности коррелятора векторных токов, индуцируемое введением нелокальностей вакуумных конденсатов.

В разд. 3 мы обсуждаем полученные ПС КХД с НВК для пионного ФФ, проводим их сравнение с другими теоретическими подходами, решеточными моделированиями и экспериментальными данными.

¹В работе [14] рассматривается операторное разложение для поляризованного оператора в 3+1-мерной КХД в подходе фонового поля и делается вывод об асимптотическом характере получаемого при этом ряда $\sum_n \lambda_{2n} (4\pi\sigma/Q^2)^n$, где σ — натяжение струны в потенциале конфайнмента, поскольку коэффициенты λ_{2n} растут с n факториально. Этот вывод показывает, что стремление учесть большее число вкладов в операторном разложении не всегда оправдано — в асимптотических рядах часто лучше вовремя остановиться. Реально так и поступают в методе правил сумм КХД: обычно учитываются лишь вклады глюонного, $\langle GG \rangle/Q^4$, и кваркового, $\langle \bar{q}q \rangle^2/Q^6$, конденсатов.

Разд. 4 посвящен подходу локальной дуальности (ЛД). Этот подход важен для нас по двум причинам:

1) по историческим — мы пользовались им в работе [8] для получения предсказаний для полного ФФ пиона методом сшивания «мягкого» вклада, моделировавшегося в подходе ЛД, и «жесткого» двухпетлевого вклада;

2) по возможности учесть $O(\alpha_s^2)$ -поправку к ФФ пиона без счета соответствующей трехпетлевой спектральной плотности.

Мы обсуждаем в этом разделе определение эффективного порога континуума $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ — ключевого параметра ЛД — при промежуточных значениях Q^2 и показываем, что ранее использовавшееся постоянное значение $s_0^{\text{LD}}(Q^2) \simeq 0,6 \text{ ГэВ}^2$ сильно недооценено: на самом деле, эффективный порог ЛД должен монотонно расти с ростом Q^2 для того, чтобы воспроизводить результаты борелевских ПС.

В заключении мы суммируем наши выводы о ФФ пиона.

1. СТАНДАРТНЫЕ ПРАВИЛА СУММ КХД ДЛЯ ФФ ПИОНА

Правила сумм КХД для ФФ пиона строятся на основе анализа трехточечного AAV -коррелятора

$$T(p_1^2, p_2^2, q^2) = \frac{n^\alpha n_u n^\beta}{(np_1)^3} \iint d^4x d^4y e^{i(qx-p_2y)} \langle 0 | T [J_{5\alpha}^+(y) J^\mu(x) J_{5\beta}(0)] | 0 \rangle, \quad (1)$$

где q — импульс виртуального фотона ($q^2 = -Q^2$), а p_1 и p_2 — импульсы налетающего и вылетающего пионов. В этом корреляторе $J^\mu(x) = e_u \bar{u}(x) \gamma^\mu u(x) + e_d \bar{d}(x) \gamma^\mu d(x)$ — это электромагнитный ток легких кварков, $e_u = 2/3$ и $e_d = -1/3$ — электрические заряды u - и d -кварков, $J_{5\beta}(x) = \bar{u}(x) \gamma_5 \gamma_\beta d(x)$ и $J_{5\alpha}^+(x) = \bar{d}(x) \gamma_5 \gamma_\alpha u(x)$ — аксиально-векторные пионные токи, которые имеют ненулевые проекции на пионное состояние $|\pi(P)\rangle$:

$$\langle 0 | j_5^\alpha | \pi(P) \rangle = i f_\pi P^\alpha. \quad (2)$$

Для этого коррелятора при достаточно больших пространственно-подобных импульсах p_1 и p_2 ($-p_1^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$, $-p_2^2 \gg 1 \text{ ГэВ}^2$) строится операторное разложение (c_1 и c_2 — численные константы)

$$T(p_1^2, p_2^2, q^2) = T^{\text{pert}}(p_1^2, p_2^2, q^2) + c_1 \frac{\langle GG \rangle}{(p^2)^3} + c_2 \frac{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{(p^2)^4} + \dots, \quad (3)$$

проиллюстрированное на рис. 1, а также дисперсионное представление

$$T(p_1^2, p_2^2, q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} ds_1 ds_2 \frac{\rho(s_1, s_2, q^2)}{(s_1 - p_1^2)(s_2 - p_2^2)} + \text{«вычитания»}. \quad (4)$$

Подобное дисперсионное представление справедливо и для чисто пертурбативной части коррелятора $T^{\text{pert}}(p_1^2, p_2^2, q^2)$. Соответствующая трехточечная спектральная плотность представляется в $O(\alpha_s)$ -порядке в виде

$$\rho_3^{(1)}(s_1, s_2, Q^2) = \left[\rho_3^{(0)}(s_1, s_2, Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{4\pi} \Delta \rho_3^{(1)}(s_1, s_2, Q^2) \right]. \quad (5)$$

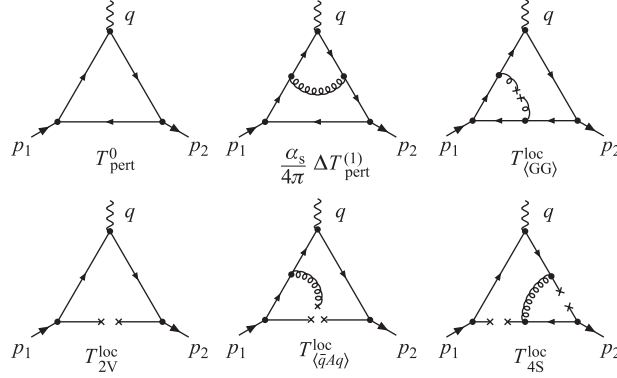


Рис. 1. Диаграммы стандартного операторного разложения трехточечного коррелятора $T(p_1^2, p_2^2, q^2)$ с обычными вакуумными конденсатами кварковых и глюонных полей (обозначаемых на диаграммах линиями с крестиками \times на концах)

Напомним, что в ведущем порядке спектральная плотность была рассчитана в работах [11, 13]

$$\rho_3^{(0)}(s_1, s_2, t) = \frac{3}{4\pi^2} \left[t^2 \frac{d^2}{dt^2} + \frac{t^3}{3} \frac{d^3}{dt^3} \right] \frac{1}{\sqrt{(s_1 + s_2 + t)^2 - 4s_1s_2}}, \quad (6)$$

в то время как явное выражение спектральной плотности в следующем за ведущим порядке теории возмущений $\Delta\rho_3^{(1)}(s_1, s_2, Q^2)$ было рассчитано совсем недавно [19]¹. Разница между полной спектральной плотностью $\rho(s_1, s_2, q^2)$ и ее пертурбативным аналогом $\rho^{(1)}(s_1, s_2, q^2)$ компенсируется в операторном разложении (3) непертурбативными вкладами кваркового и глюонного конденсатов, $\langle\bar{q}q\rangle$ и $\langle GG\rangle$.

Вклад высших резонансов, T_{HR} , моделируется с использованием той же пертурбативной спектральной плотности в виде континуума,

$$\rho_{\text{HR}}(s_1, s_2) = [1 - \theta(s_1 < s_0)\theta(s_2 < s_0)] \rho_3(s_1, s_2, Q^2), \quad (7)$$

где s_0 является эффективным порогом включения высших резонансов. Обычно s_0 соответствует средней точке между массами нижайшего состояния и первого возбуждения. Поскольку квадрат массы a_1 -мезона $\simeq 1,6 \text{ ГэВ}^2$, ожидаемое значение s_0 в случае пиона — около $0,8 \text{ ГэВ}^2$.

В результате, после применения преобразования Бореля, которое убивает все вычитания в дисперсионных интегралах (4) и подавляет вклад высших резонансов в спектральном интеграле, мы получаем следующее ПС:

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} ds_1 ds_2 \rho^{\text{pert}}(s_1, s_2, Q^2) \exp\left(-\frac{s_1 + s_2}{M^2}\right) + a \frac{\alpha_s \langle GG \rangle}{12\pi M^2} + b \frac{16\pi\alpha_s \langle\bar{q}q\rangle^2}{81M^4} \quad (8)$$

¹Это выражение достаточно громоздкое, поэтому мы не приводим его здесь, отсылая заинтересованного читателя к первоисточнику.

с коэффициентами a и b , определяемыми операторным разложением. Это ПС анализируется обычным образом: для каждого заданного значения Q^2 ищется значение порога s_0 , при котором значение $f_\pi^2 F_\pi(Q^2)$, определяемое из ПС (8), наименее сильно зависит от параметра Бореля M^2 в определенном интервале значений $M^2 \in [M_-^2, M_+^2]$, называемом в подходе ПС окном доверия. Для пионного ФФ это окно таково: $M^2 \in [1 \text{ ГэВ}^2, 2 \text{ ГэВ}^2]$.

Существует связь между значением f_π^2 и $F_\pi(Q^2)$ в окне доверия и параметром s_0 . С достаточной точностью она описывается соотношением локальной дуальности, следующим из правила сумм (8) в формальном пределе $M^2 \rightarrow \infty$

$$F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2) = \frac{1}{\pi^2 f_\pi^2} \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} ds_1 ds_2 \rho_3^{(0)}(s_1, s_2, Q^2) = \frac{s_0}{4\pi^2 f_\pi^2} \left[1 - \frac{1 + 6s_0/Q^2}{(1 + 4s_0/Q^2)^{3/2}} \right]. \quad (9)$$

На первый взгляд конденсаты отсутствуют в этом соотношении. Однако значение интервала дуальности s_0 , извлекаемое в описанной выше процедуре подгонки, неявно зависит от их величины, или, точнее, от соотношения конденсатного и пертурбативного вкладов.

Форма операторного разложения по $1/p^2$ трехточечного коррелятора $T(p_1^2, p_2^2, q^2)$ зависит от взаимоотношения масштабов Q^2 и $|p^2|$ (под p^2 мы подразумеваем оба масштаба: $|p|^2 \sim |p_1^2| \sim |p_2^2|$). Простейшей является симметричная ситуация $|p^2| \sim Q^2$ (промежуточные значения Q^2), изученная в [11, 13]. В этом случае $a = 1$, $b = (13 + 2Q^2/M^2)$. Поучительно сравнить эти значения коэффициентов операторного разложения с коэффициентами, полученными в ПС КХД для пионной константы распада [20] (следует отметить, что значение параметра Бореля в двухточечных ПС, m^2 , вдвое меньше по сравнению с трехточечными ПС, $m^2 = M^2/2$):

$$f_\pi^2 = \frac{m^2}{4\pi^2} (1 - e^{-s_0/m^2}) + \frac{\alpha_s \langle GG \rangle}{12\pi m^2} + 11 \frac{16\pi \alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2}{81m^4}. \quad (10)$$

Видно, что ПС для $f_\pi^2 F_\pi(Q^2)$ отличается от ПС для f_π^2 удвоенным $\alpha_s \langle GG \rangle$ -вкладом и примерно учетверенным $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2$ -вкладом (точнее, этот вклад больше в 3,4 раза). По этой причине значение $s_0 \approx 4\pi^2 f_\pi^2$, диктуемое ПС для f_π^2 , воспроизводится в ФФ ПС только в области умеренных Q^2 , где $F_\pi(Q^2)$ изменяется в пределах 0,5 и 0,3, т.е. для $Q^2 = 0,5-1 \text{ ГэВ}^2$, когда отношение конденсатного и пертурбативного вкладов в ФФ ПС (8) очень близко к соответствующему отношению в ПС (10).

Это предположение подкрепляется явной обработкой ФФ ПС: $s_0 = 0,7 \text{ ГэВ}^2$ для $Q^2 = 0,5 \text{ ГэВ}^2$ и $s_0 = 0,9 \text{ ГэВ}^2$ для $Q^2 = 1 \text{ ГэВ}^2$. Для больших Q^2 обработка ПС дает большие значения порога: $s_0 = 1,0 \text{ ГэВ}^2$ для $Q^2 = 1,5 \text{ ГэВ}^2$, а для $Q^2 \lesssim 0,5 \text{ ГэВ}^2$ мы должны были бы получить значения порога, меньшие $0,7 \text{ ГэВ}^2$. Однако в этой области малых Q^2 необходимо использовать модифицированное операторное разложение [21], включающее дополнительные вклады, исчезающие при больших значениях Q^2 . В частности, при $Q^2 = 0$ конденсатные вклады в ФФ ПС совпадают с аналогичными вкладами в ПС для f_π^2 , что является следствием тождества Уорда $F_\pi(0) = 1$, а затем уменьшаются к значениям, полученным в симметричной кинематике: так, например, $a = (1 + m_\rho^2/[m_\rho^2 + Q^2])$. Следовательно, в области малых Q^2 конденсатные вклады в ФФ ПС согласованы с пертурбативными в той же степени, что и в ПС для f_π^2 (10), и в результате порог s_0 остается близким исходному значению, диктуемому тождеством Уорда при значении $Q^2 = 0$, а именно к $s_0 \approx 4\pi^2 f_\pi^2 \approx 0,7 \text{ ГэВ}^2$.

В работе [11] было показано, что подход ЛД (9) с постоянным порогом $s_0^{\text{LD}}(Q^2) = 4\pi^2 f_\pi^2$ дает вклад, достаточно большой для описания экспериментальных данных, вплоть до значений $Q^2 \sim 2-3 \text{ ГэВ}^2$. Если же брать растущие с Q^2 пороги $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$, можно получить и бóльшие значения ФФ. Мы вернемся к этому вопросу в разд. 4.

Возвращаясь к ФФ ПС (8), полученным в [11, 13], заметим, что при больших значениях $Q^2 > 3 \text{ ГэВ}^2$ они становятся разбалансированными. Действительно, пертурбативный вклад спадает как s_0/Q^4 или M^2/Q^4 , в то время как вклад глюонного конденсата остается неизменным, а вклад кваркового — растет линейно по Q^2 . Поэтому для получения физически значимых оценок пионного ФФ в области промежуточных значений $Q^2 = 3-10 \text{ ГэВ}^2$ необходимо серьезно улучшить ПС.

2. НЕЛОКАЛЬНЫЕ ВАКУУМНЫЕ КОНДЕНСАТЫ: ГАУССОВЫ МОДЕЛИ ВАКУУМА КХД

Тот факт, что вклады конденсатов в ПС для ФФ пиона остаются постоянными или даже растут при увеличении Q^2 , достаточно удивителен, поскольку обычно диаграммы Фейнмана генерируют *убывающие* с ростом Q^2 вклады, как это происходит с пертурбативным вкладом. Однако конденсатные диаграммы отличаются от обычных диаграмм Фейнмана в теории возмущений КХД: они получаются при замене некоторых пропагаторных линий постоянными множителями, отвечающими конденсатам: на рис. 1 такие линии оканчиваются крестиками.

Так, например, кварковый пропагатор $\langle T(q(z)\bar{q}(0)) \rangle$ заменяется кварковым конденсатом $\langle \bar{q}(0)q(0) \rangle$ (на рис. 1 такому конденсату отвечает линия с крестиками). В результате вместо зависящего от Q^2 результата получается постоянный вклад. Зависимость же от Q^2 появляется тогда, когда учитываются вклады операторов старшей размерности типа $\langle \bar{q}(0)D^2q(0) \rangle$, $\langle \bar{q}(0)(D^2)^2q(0) \rangle$ и т. п., генерируемые разложением в ряд Тейлора исходного нелокального вакуумного конденсата $\langle \bar{q}(0)q(z) \rangle$, который является непертурбативной частью кваркового пропагатора.

Полный вклад конденсата убывает при больших значениях Q^2 , что ясно из общих свойств диаграмм Фейнмана. Однако n -й член разложения НВК в ряд Тейлора имеет поведение типа $(Q^2/M^2)^n$, и чтобы получить осмысленный, т. е. убывающий при больших Q^2 , результат необходимо отсуммировать весь ряд. Вместо этого мы следуем иной стратегии: мы не разлагаем НВК в ряд Тейлора, а пользуемся для них простыми гауссовыми моделями, учитывающими конечную ширину распределения вакуумных кварков по импульсам, которые приводят к модифицированной диаграммной технике с новыми линиями и вершинами, отвечающими НВК.

Вакуумное среднее билокального по кварковым полям оператора в общем виде можно представить как

$$\langle \bar{q}_A^a(0)q_B^b(x) \rangle = \frac{\delta^{ab}}{N_c} \int_0^\infty \left\{ \frac{\delta_{AB}}{4} \langle \bar{q}q \rangle f_S(\alpha) - \frac{\hat{x}_{BA}}{4} iA_0 f_V(\alpha) \right\} e^{\alpha x^2/4} d\alpha, \quad (11)$$

где $A_0 = 2\alpha_s\pi\langle \bar{q}q \rangle^2/81$, а $f_S(\alpha)$ и $f_V(\alpha)$ — функции, параметризующие скалярный и векторный конденсаты соответственно. Для этих конденсатов мы используем минимальную гауссову модель, предложенную в [16, 17] и отвечающую выбору $f_S(\alpha) = \delta(\alpha - \lambda_q^2/2)$

и $f_V(\alpha) = \delta'(\alpha - \lambda_q^2/2)$:

$$M_S(z^2) \equiv \langle \bar{q}(0)q(z) \rangle = \langle \bar{q}q \rangle e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}, \quad (12a)$$

$$M_\mu(z) \equiv \langle \bar{q}(0)\gamma_\mu q(z) \rangle = \frac{i z_\mu z^2}{4} A_0 e^{-|z^2|\lambda_q^2/8}. \quad (12b)$$

Параметр нелокальности $\lambda_q^2 = \langle k^2 \rangle$ характеризует средний квадрат импульса кварков в вакууме КХД. Его оценки с помощью стандартных правил сумм КХД [22, 23] и на решетке [24, 25] дали следующий интервал возможных значений: $\lambda_q^2 = (0,45 \pm 0,1) \text{ ГэВ}^2$.

Для векторного и аксиально-векторного кварк-глюон-антикварковых конденсатов мы используем параметризацию, предложенную в [15, 26]:

$$\begin{aligned} \langle \bar{q}(0)\gamma_\mu(-g\hat{A}_\nu(y))q(x) \rangle &= (y_\mu x_\nu - g_{\mu\nu}(y \cdot x))\overline{M}_1(x^2, y^2, (y-x)^2) + \\ &+ (y_\mu y_\nu - g_{\mu\nu}y^2)\overline{M}_2(x^2, y^2, (y-x)^2), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\langle \bar{q}(0)\gamma_5\gamma_\mu(-g\hat{A}_\nu(y))q(x) \rangle = i\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}\overline{M}_3(x^2, y^2, (y-x)^2), \quad (13b)$$

где

$$\overline{M}_i(x^2, y^2, z^2) = A_i \iiint_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma f_i(\alpha, \beta, \gamma) \exp\left(\frac{\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2}{4}\right), \quad (13в)$$

$$A_{1,2,3} \equiv A_0 \times \left\{ -\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2} \right\}. \quad (13г)$$

Функции $f_i(\alpha, \beta, \gamma)$ можно моделировать по-разному. В минимальной модели [15–17] они выбираются в виде произведения δ -функций от каждой из переменных типа $\delta(\alpha - \lambda_q^2/2)$, в то время как в улучшенной модели [18] за счет учета уравнения движения КХД для векторного НВК получается более сложное выражение.

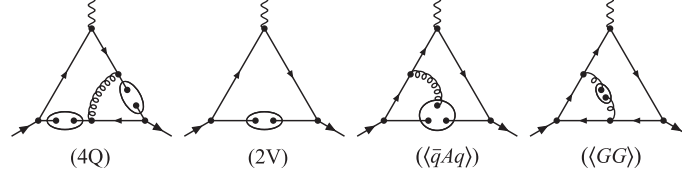
В результате мы получаем модифицированное операторное разложение борелевского образа амплитуды (1)

$$\begin{aligned} \Phi(Q^2, M^2) &\equiv B_{-p_1^2 \rightarrow M^2, -p_2^2 \rightarrow M^2} T(p_1^2, p_2^2, -Q^2) = \\ &= \Phi_{\text{pert}}(Q^2, M^2) + \Phi_{\langle GG \rangle}(Q^2, M^2) + \Phi_{\langle \bar{q}q \rangle}(Q^2, M^2), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\Phi_{\langle GG \rangle}(Q^2, M^2)$ обозначает вклад глюонного, а вклад нелокальных кварковых конденсатов представляется в виде суммы четырехкваркового (4Q), билокального векторного (2V) и кварк-глюон-антикваркового ($\bar{q}Aq$) НВК:

$$\Phi_{\langle \bar{q}q \rangle}(Q^2, M^2) = \Phi_{4Q}(Q^2, M^2) + \Phi_{2V}(Q^2, M^2) + \Phi_{\langle \bar{q}Aq \rangle}(Q^2, M^2). \quad (15)$$

Графическая иллюстрация такого представления приведена на рис. 2: показаны только типичные диаграммы для каждого подкласса диаграмм, тогда как полный набор диаграмм включает также зеркально-сопряженные (для подклассов 4Q и $\bar{q}Aq$) диаграммы, а также диаграммы с перестановками вставок глюонных линий (подкласс G).


 Рис. 2. Непертурбативные вклады [11,13,27] в правило сумм для $\Phi\Phi$ пиона (см. (24))

Простейшим здесь является вклад векторного конденсата M_μ :

$$\Phi_{2V}(M^2, Q^2) = \frac{16A}{M^4} \int_0^1 dx \bar{x} f_V(x M^2) \exp\left(-\frac{xQ^2}{2\bar{x}M^2}\right) \xrightarrow{\text{Gauss}} \frac{8A_0}{M^4} \left(2 + \frac{Q^2}{M^2(1-2\Delta(M^2))}\right) \exp\left[\frac{-Q^2\Delta(M^2)}{M^2(1-2\Delta(M^2))}\right], \quad (16)$$

где $\Delta(M^2) \equiv \lambda_q^2/(2M^2)$. Как и ожидалось, он является убывающим для больших Q^2 , причем чем больше значение параметра нелокальности вакуума λ_q^2 , тем быстрее он убывает с ростом Q^2 . Значение Q_*^2 , при котором начинается убывание, сильно зависит от значения борелевского параметра M^2 . Принимая значение параметра нелокальности вакуума $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$, получаем для $M^2 = 1, 1,5, 2 \text{ ГэВ}^2$ следующие значения $Q_*^2 = 2, 6, 13 \text{ ГэВ}^2$ соответственно. В локальном же пределе этот вклад равен

$$\Phi_{2V}^{\text{loc}}(M^2, Q^2) = \frac{16A_0}{M^8} \left(2 + \frac{Q^2}{M^2}\right). \quad (17)$$

Скалярный четырехкварковый НВК дает более сложное выражение:

$$\Phi_{4Q}(M^2, Q^2) = \frac{288A_0}{M^8} \int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{(a+1)\bar{b}x\bar{y} da db dx dy}{(a+1)\bar{b}x\bar{y} - \bar{a}(b+1)\bar{x}y} \theta[(a-b)(x-y)] \times \\ \times \varphi_S\left(\frac{M^2}{\bar{b}}, \bar{x}\right) \varphi_S\left(\frac{M^2}{a+1}, y\right) \exp\left[\frac{-Q^2 y [a\bar{b}x\bar{y} - \bar{a}b\bar{x}y]}{M^2 \bar{y} [(a+1)\bar{b}x\bar{y} - \bar{a}(b+1)\bar{x}y]}\right], \quad (18)$$

где мы ввели безразмерные функции распределения $\varphi_S(M^2, x) = M^2 f_S(M^2 x)$, которые для гауссова приближения (12) сводятся просто к $\varphi_S^{\text{Gauss}}(M^2, x) = \delta(x - \Delta(M^2))$. Конечно, они снимают два интегрирования и упрощают выражение (18), но все равно интегралы явно не берутся и оценивать результат приходится численным интегрированием. Отметим, что в локальном пределе этот вклад равен

$$\Phi_{4Q}^{\text{loc}}(M^2, Q^2) = \frac{144A_0}{M^8} \quad (19)$$

и является максимальным среди вкладов кварковых конденсатов при $Q^2 \approx M^2$.

В локальном пределе кварк-глюон-антикварковый НВК дает вклад точно такой же, как и векторный биллокальный НВК, см. (19), что составляет 1/3 от вклада $\Phi_{4Q}^{\text{loc}}(M^2, Q^2)$

при $Q^2 \approx M^2$. Однако его расчет оказывается самым сложным, и ответ получается достаточно громоздким:

$$\Phi_{(\bar{q}Aq)}(M^2, Q^2) = \frac{16 A_0}{M^8} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 da db dx dy \exp \left[\frac{-Q^2}{M^2} \frac{\bar{a}\bar{y} + 2a\bar{x} - (a+1)\bar{x}\bar{y}}{2(a+1)\bar{x}\bar{y}} \right] \times \\ \times \theta(y-x) \sum_{i=1}^3 a_i [\varphi_i P_i(M^2, a, b, x, y) + \bar{\varphi}_i S_i(M^2, a, b, x, y)]. \quad (20)$$

Здесь численные коэффициенты $\{a_1, a_2, a_3\} = \{-3/4, 1, +3/4\}$ наследуют иерархическую информацию из коэффициентов A_i , см. (13г), а безразмерные функции распределения определяются следующим образом:

$$\varphi_i(M^2, a, b, x, y) = \frac{M^6 \bar{x}}{2(1+a)\bar{a}} f_i \left(\frac{M^2 x}{2}, \frac{M^2 \bar{x} b}{\bar{a}}, \frac{M^2 (y-x)}{a+1} \right), \quad (21a)$$

$$\bar{\varphi}_i(M^2, a, b, x, y) = \frac{M^6 \bar{x}}{2(1+a)\bar{a}} f_i \left(\frac{M^2 x}{2}, \frac{M^2 (y-x)}{a+1}, \frac{M^2 \bar{x} b}{\bar{a}} \right). \quad (21б)$$

В локальном приближении (12) они сводятся просто к произведению δ -функций:

$$\varphi_i^{\text{loc}}(M^2, a, b, x, y) = \bar{\varphi}_i^{\text{loc}}(M^2, a, b, x, y) = \delta(x) \delta(y) \delta(b). \quad (22)$$

Коэффициентные функции $P_i(M^2, a, b, x, y)$ и $S_i(M^2, a, b, x, y)$ были рассчитаны в нашей работе [27]. Эти формулы для коэффициентных функций P_i и S_i совместно с конкретной моделью нелокального вакуума КХД, т.е. с конкретными модельными функциями $\varphi_i(M^2, a, b, x, y)$, позволяют нам получить вклад кварк-глюон-антикваркового НВК в ПС для ФФ пиона.

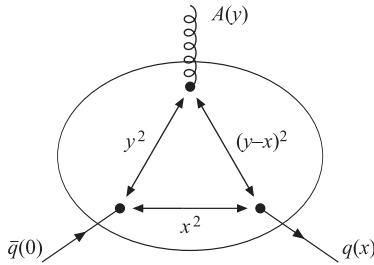


Рис. 3. Иллюстрация координатных зависимостей кварк-глюон-антикваркового конденсата

Отметим, что первоначальный анализ полученных в нашей работе [27] ПС был основан на не полностью нелокальной модели вакуума КХД (23) для кварк-глюон-антикварковых НВК $M_i(x^2, y^2, (x-y)^2)$, определяемых по формуле (13в). В этой модели нелокальность вводилась только для двух (скажем, x^2 и $(x-y)^2$) из трех имеющихся межпартоновых расстояний, x^2 , y^2 и $(x-y)^2$ (рис. 3). Более точно, использовались следующие параметризации ($\Lambda = \lambda_q^2/2$):

$$f_i^{\text{BR}}(\alpha, \beta, \gamma) = \delta(\alpha - x_{i1}\Lambda) \delta(\beta - x_{i2}\Lambda) \delta(\gamma - x_{i3}\Lambda), \quad (23)$$

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0,4 \\ 0 & 1 & 0,4 \\ 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Нулевые элементы в матрице x_{ij} говорят об отсутствии нелокальности либо по кварк-антикварковому расстоянию y^2 ($i = 1, j = 2$), либо по антикварк-глюонному расстоянию x^2 ($i = 2, 3$ и $j = 1$) (см. рис. 3). Таким образом, ПС для ФФ пиона и в такой модели будет частично неустойчиво, как это происходит в стандартном подходе ПС КХД.

3. АНАЛИЗ ПС КХД С НВК ДЛЯ ФФ ПИОНА

Для анализа построенных ПС с НВК

$$f_\pi^2 F_\pi(Q^2) = \int_0^{s_0} \int_0^{s_0} ds_1 ds_2 \rho_3(s_1, s_2, Q^2) \exp\left(-\frac{s_1 + s_2}{M^2}\right) + \Phi_{\langle GG \rangle}(Q^2, M^2) + \Phi_{\langle \bar{q}q \rangle}(Q^2, M^2) \quad (24)$$

мы используем обе гауссовы модели нелокального вакуума КХД — минимальную (П1.1) [15–17] и улучшенную (П1.2) [18]. Использование полностью нелокальных моделей вакуума позволяет нам значительно расширить область применимости ПС КХД вплоть до передач импульса $\simeq 10$ ГэВ². Кроме того, мы учитываем в пертурбативной спектральной плотности $O(\alpha_s)$ -поправку [19], что повышает наши предсказания примерно на 20 % по сравнению с оценками работ [11, 13, 27], где была учтена спектральная плотность ведущего порядка.

Имея в виду в дальнейшем использование дробно-аналитической теории возмущений (ДАТВ) для оценки вклада $O(\alpha_s^2)$ -поправки (см. разд. 4), мы с самого начала применяем однопетлевой аналитический заряд $A_1^{(1); \text{glob}}(Q^2)$ с трехфлейворным масштабом $\Lambda_3 = 300$ МэВ, см. [28].

Стратегия численной обработки ПС такая же, как и в обычном подходе. Именно, при каждом заданном значении $Q^2 = 1-10$ ГэВ² ПС (24) дает нам ФФ пиона $F_\pi(Q^2, M^2, s_0)$ в виде функции двух вспомогательных параметров — борелевского параметра M^2 и эффективного порога континуума s_0 . Параметр s_0 определяет границу между пионом и высшими резонансами в аксиальном канале (A_1 , π' и т. д.), и поэтому мы предполагаем, что он не может быть меньше 0,6 ГэВ². Конкретное значение $s_0(Q^2)$ при заданном значении Q^2 определяется из требования минимальной чувствительности функции $F_\pi(M^2, s_0)$ к значению параметра Бореля M^2 внутри окна доверия ПС. Мы берем эти интервалы доверия и соответствующие им значения пионной константы f_π из двухточечных ПС КХД с соответствующей гауссовой моделью НВК — минимальной или улучшенной [18]. Границы интервалов доверия двухточечных ПС с нелокальными конденсатами, $M_\pm^2/2$, внутри которых ($M^2 \in [M_-^2/2, M_+^2/2]$) предсказаниям ПС можно доверять, и значения соответствующей им пионной константы распада, f_π , для двух используемых моделей НВК приведены в таблице. Заметим здесь, что значения параметра Бореля M^2 в трехточечных ПС в первом приближении в два раза больше величины параметра Бореля в двухточечных ПС: $M_{3\text{-point}}^2 = 2M_{2\text{-point}}^2$. Благодаря положительности спектральной плотности пертурбативного вклада оказывается, что чем больше значение s_0 , тем больше получаемое значение ФФ пиона.

Модель	M_-^2	M_+^2	f_π
Минимальная [17]	1 ГэВ ²	1,7 ГэВ ²	137 МэВ
Улучшенная [18]	1 ГэВ ²	1,9 ГэВ ²	142 МэВ

Используя среднеквадратичное отклонение от среднего в окне доверия, $\chi^2(Q^2, s_0)$ (см. приложение 2, (П2.1)), мы определяем такой порог континуума $s_0^{\text{SR}}(Q^2)$, который

минимизирует зависимость правой части (24) от параметра Бореля $M^2 \in [M_-^2, M_+^2]$ при каждом заданном значении Q^2 .

А вот при $Q^2 \gtrsim 4 \text{ ГэВ}^2$ минимум во всем интервале допустимых значений s_0 отсутствует, так что невозможно определить порог s_0^{SR} таким методом. Заметим, однако, что значения $\min_s [\chi^2(Q^2, s)]$ и $\chi^2(Q^2, s_0 = s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2)) \simeq 0,63 \text{ ГэВ}^2$ очень близки: относительная разность для $Q^2 = 4\text{--}10 \text{ ГэВ}^2$ имеет порядок 10–15%¹. Поэтому в случае минимальной гауссовой модели НВК мы будем использовать $s_0^{\text{SR}}(Q^2) = s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2)$ как порог континуума. Эти пороги $s_0^{\text{SR}}(Q^2)$ для минимальной (штриховая линия) и для улучшенной (сплошная) гауссовых моделей НВК показаны на рис. 4, а.

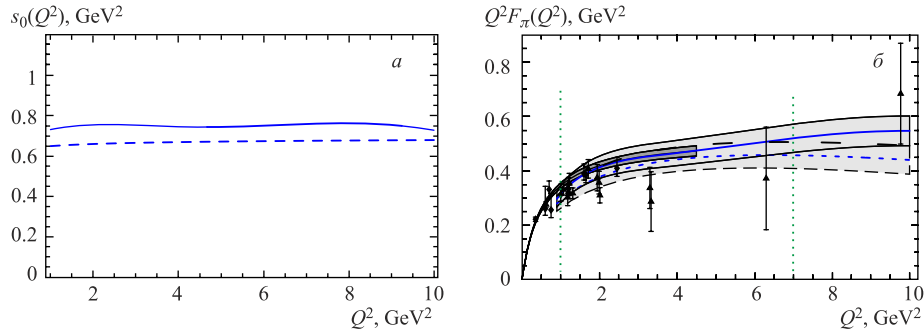


Рис. 4. а) Зависимость порога континуума $s_0(Q^2)$ для минимальной (штриховая линия) и для улучшенной (сплошная) моделей НВК. б) Нормированный пионный $\Phi\Phi$ $Q^2 F_\pi(Q^2)$ для минимальной (штриховая линия) и для улучшенной (сплошная) моделей НВК для $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$ в сравнении с экспериментальными данными Корнелла [9, 29, 30] (треугольники) и Лаборатории им. Джефферсона [10] (ромбы)

Оценив эффективные пороги континуума, мы уже можем определить предсказание нашего ПС для пионного $\Phi\Phi$ как среднее значение правой части (24) по параметру Бореля $M^2 \in [M_-^2, M_+^2]$:

$$F_\pi^{\text{SR}}(Q^2) = \frac{1}{M_+^2 - M_-^2} \int_{M_-^2}^{M_+^2} F(Q^2, M^2, s_0^{\text{SR}}(Q^2)) dM^2. \quad (25)$$

Полученные при этом результаты для обеих исследуемых моделей нелокального вакуума КХД (с одинаковым параметром нелокальности $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$) приведены на рис. 4 в виде двух затененных полос, ограниченных сплошными и штриховыми линиями, которые показывают неопределенности предсказаний в улучшенной и минимальной моделях НВК соответственно. Для центральных кривых (штриховая отвечает минимальной модели, сплошная — улучшенной) на этом рисунке, а также на обоих графиках рис. 5 мы

¹Здесь порог $s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2)$ задан стандартным предписанием приближения локальной дуальности, см. также обсуждение после (29).

использовали следующие интерполяционные формулы:

$$F_{\pi;\min}^{\text{SR}}(Q^2 = x \text{ ГэВ}^2) = e^{-1,402 x^{0,525}} \left(1 + 0,182 x + \frac{0,0219 x^3}{1+x} \right), \quad (26a)$$

$$F_{\pi;\text{imp}}^{\text{SR}}(Q^2 = x \text{ ГэВ}^2) = e^{-1,171 x^{0,536}} \left(1 + 0,0306 x + \frac{0,0194 x^3}{1+x} \right), \quad (26b)$$

справедливые при $Q^2 \in [1, 10] \text{ ГэВ}^2$, т. е. при $x \in [1, 10]$. Две вертикальные пунктирные линии на рис. 4 обозначают область сильного доверия построенного ПС КХД с НВК: в этой области предсказания, полученные на основе двух разных моделей нелокального вакуума КХД — минимальной и улучшенной, — перекрываются. На границе этой области вблизи $Q^2 \simeq 7 \text{ ГэВ}^2$ центральные линии обеих полосок начинают выходить за пределы полосы предсказаний другой модели. Однако предсказания сами по себе остаются осмысленными вплоть до значения $Q^2 \simeq 10 \text{ ГэВ}^2$: при больших значениях Q^2 окно доверия начинает сужаться, так что ошибки метода нарастают.

Недавние результаты, полученные в решеточной КХД [31], показаны в виде темной полосы между двумя жирными сплошными линиями при малых $Q^2 \lesssim 4 \text{ ГэВ}^2$. Видно достаточно хорошее согласие как с этими псевдоэкспериментальными данными, так и с реальными экспериментальными данными, полученными в Корнелле [9, 29, 30] (треугольники) и лаборатории им. Джефферсона [10] (ромбы).

На рис. 5, а наши результаты показаны в сравнении с предсказаниями различных теоретических моделей: штриховая линия с длинными штрихами 1 представляет результаты работы [32], полученные с учетом радиационных $O(\alpha_s)$ -поправок и вклада твиста 3 в подходе пересуммированной пертурбативной КХД, в то время как штриховая линия с короткими штрихами 2 — реджевской модели в пределе больших N_c [33]. Жирная сплошная кривая 3, оканчивающаяся вблизи точки $Q^2 = 4 \text{ ГэВ}^2$, отражает результаты стандартных ПС КХД с локальными конденсатами [11, 13], а штрихпунктирная линия 4 — недавние оценки, полученные в подходе ПС с локальной дуальностью [34]. Отметим здесь, что наши прежние результаты [8], не показанные на этом рисунке, приблизительно на 20% выше этой штрихпунктирной линии: это связано как с учетом $O(\alpha_s^2)$ -поправок (10%),

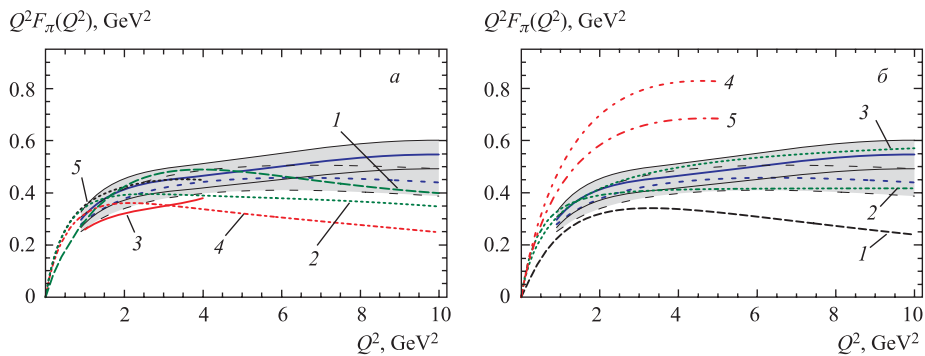


Рис. 5. Сравнение предсказаний для пионного ФФ $Q^2 F_\pi(Q^2)$, полученных в разных теоретических подходах. Наши результаты показаны на обоих графиках теми же затененными полосами, что и на рис. 4

так и с неопределенностями процедуры сшивания «мягкого» и «жесткого» вкладов, использовавшейся в [8] (10 %) (см. обсуждение этого вопроса в разд. 4 и на рис. 7). Наконец, пунктирная кривая 5, идущая до точки 4 ГэВ², показывает результаты модели [35], основанной на уравнении Бете–Солпитера.

На рис. 5, б наши результаты показаны в сравнении с предсказаниями голографических моделей, основанных на представлении о дуальности AdS–КХД. Штриховая линия 1 показывает результаты, полученные на основе пионной AP, извлеченной в AdS–КХД-подходе [36], в то время как штриховая с двумя точками 2 — результаты модели Григоряна–Радюшкина [37]. Пунктирная линия 3 дает предсказания модели AdS–КХД с мягкой стенкой [38]. Наконец, две верхние штрихпунктирные линии 4 и 5 показывают результаты, полученные в улучшенных моделях AdS–КХД с мягкой (4) и жесткой (5) стенками [39] соответственно. Видно, что кривые 2 и 3 хорошо согласуются с нашими результатами, причем предпочтение мы отдаем результатам работы [37], поскольку они оставляют место для радиационных поправок.

На рис. 6 мы иллюстрируем различия предсказаний для пионного ФФ в минимальной (рис. а, штриховые линии) и улучшенной (рис. б, сплошные линии) гауссовых моделях вакуума КХД. Различие между этими моделями связано, как мы уже говорили, с вкладом кварк–глюон–антикваркового конденсата $\Phi_{\bar{q}Aq}(Q^2, M^2)$, что хорошо видно по верхним кривым на обоих графиках. Кроме того, это различие влияет на значение порога континуума $s_0(Q^2)$, что также приводит к различию пертурбативных вкладов (LO и NLO). На рисунке показано, каким образом различные вклады суммируются в конечный ответ (верхние жирные линии на каждом графике): каждая из кривых на рис. а и б является суммой (снизу вверх) всех предшествующих вкладов.

Отметим, что все расчеты были сделаны нами для значения параметра нелокальности, равного $\lambda_q^2 = 0,4$ ГэВ², которое оказывается выделенным анализом [40, 41] данных CLEO по ФФ фотон–пионного перехода. Использование больших значений этого параметра нелокальности привело бы к уменьшению предсказываемых значений для элек-

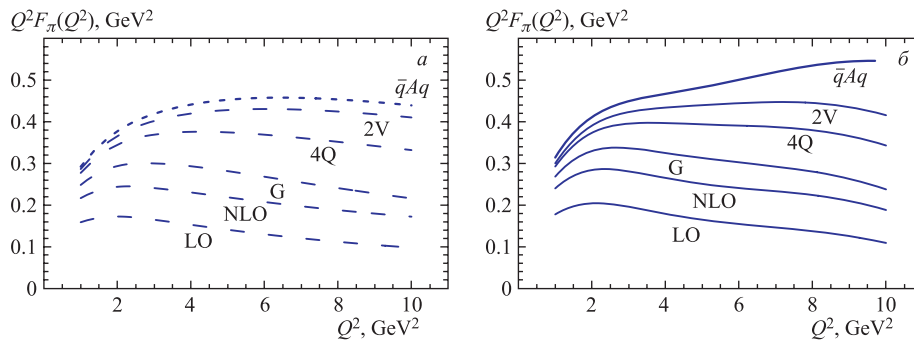


Рис. 6. Сравнение различных вкладов в пионный ФФ в минимальной (а) и улучшенной (б) гауссовых моделях вакуума КХД. Внизу показаны пертурбативные $O(1)$ -вклады (обозначенные LO), над ними идут кривые, отвечающие сумме $O(1)$ - и $O(\alpha_s)$ -вкладов (NLO), а далее по тому же принципу показаны добавки непертурбативных вкладов от четырехкваркового скалярного конденсата (4Q), билакального векторного конденсата (2V), кварк–глюон–антикваркового конденсата ($\bar{q}Aq$) и глюонного конденсата (G)

тромагнитного $\Phi\Phi$ пиона за счет более сильных эффектов нелокальности (заметим, что вклады в ПС для пионного $\Phi\Phi$ от НВК пропорциональны $\exp[-Q^2\lambda_q^2/M^4]$, см. (16)). Очевидно, что меньшие значения λ_q^2 , наоборот, повысят значения $\Phi\Phi$ пиона в нашем подходе. Таким образом, наши предсказания на рис. 4, хорошо согласующиеся с экспериментальными и решеточными данными, дают еще одно свидетельство в пользу предпочтительности значения параметра нелокальности $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$ в гауссовых моделях нелокального вакуума КХД.

4. ПОДХОД ЛОКАЛЬНОЙ ДУАЛЬНОСТИ

Правила сумм в подходе ЛД совсем не имеют конденсатных вкладов из-за предельного перехода $M^2 \rightarrow \infty$. По этой причине определение порога s_0 в таком подходе, строго говоря, невозможно — нужно привлекать дополнительные аргументы. Обычно пользуются тождеством Уорда, связывающим трехточечный AVA -коррелятор с двухточечным AA -коррелятором в пределе $Q^2 \rightarrow 0$, что говорит о точном равенстве порогов для пионной константы распада f_π и для $\Phi\Phi$ $F_\pi(Q^2)$ в подходах ЛД при $Q^2 \rightarrow 0$. Это означает, что при малых значениях $Q^2 \ll 1 \text{ ГэВ}^2$ порог $s_0^{F_\pi(Q^2)}(Q^2) \approx s_0^{f_\pi}$.

Как было показано в работах [3, 5, 11, 13, 21, 27], основной вклад в $\Phi\Phi$ пиона при малых $Q^2 \leq 10 \text{ ГэВ}^2$ обеспечивается механизмом Фейнмана без обмена жесткими глюонами, который по этой причине часто называется «мягким» вкладом. В подходе ЛД этот вклад полностью генерируется пертурбативной спектральной плотностью [11, 12]: в $(l+1)$ -петлевом порядке¹ мы имеем

$$F_\pi^{\text{LD};(l)}(Q^2) = F_\pi^{\text{LD};(l)}(Q^2, s_0^{\text{LD};(l)}(Q^2)), \quad (27a)$$

$$F_\pi^{\text{LD};(l)}(Q^2, S) \equiv \frac{1}{f_\pi^2} \int_0^S \int_0^S \rho_3^{(l)}(s_1, s_2, Q^2) ds_1 ds_2, \quad (27b)$$

где $s_0^{\text{LD};(l)}(Q^2)$ — эффективный порог ЛД включения высших состояний в аксиальном канале, а $\rho_3^{(l)}(s_1, s_2, Q^2)$ — трехточечная $(l+1)$ -петлевая спектральная плотность. В ведущем порядке $\rho_3^{(0)}(s_1, s_2, Q^2)$ известна (см. (6)), так что

$$F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2, S) = \frac{S}{4\pi^2 f_\pi^2} \left[1 - \frac{Q^2 + 6S}{Q^2 + 4S} \sqrt{\frac{Q^2}{Q^2 + 4S}} \right]. \quad (28)$$

Предписание ЛД для двухточечного коррелятора дает соотношения [12, 20]

$$s_0^{\text{LD};(0)}(0) = 4\pi^2 f_\pi^2 \quad \text{и} \quad s_0^{\text{LD};(1)}(0) = \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{1 + \alpha_s(Q_0^2)/\pi}, \quad (29)$$

¹Треугольная диаграмма на однопетлевом уровне с самого начала не содержит никаких радиационных поправок. Поэтому $O(\alpha_s^l)$ -поправки для этой диаграммы возникают в $(l+1)$ -петлевом порядке.

где $Q_0^2 \sim s_0^{\text{LD};(0)}(0)$. Это предписание есть строгое следствие тождества Уорда для AAV -коррелятора из-за сохранения векторного тока. В принципе, Q^2 -зависимость параметра $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ (27) должна определяться из ПС КХД при $Q^2 \gtrsim 1$ ГэВ². Однако, как мы уже говорили в разд. 1, стандартный подход ПС КХД становится неприменимым при $Q^2 > 3$ ГэВ² из-за появления конденсатных вкладов, линейно растущих по Q^2 [21,42]. Поэтому Q^2 -зависимость эффективного порога ЛД была известна только для $Q^2 \lesssim 2$ ГэВ², и по этой причине обычно применялась аппроксимация в виде константы [8, 11, 19, 43], $s_0^{\text{LD};(0)}(Q^2) \simeq s_0^{\text{LD};(0)}(0)$, или слабо зависящее от Q^2 приближение

$$s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2) = \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{1 + \alpha_s(Q^2)/\pi}, \quad (30)$$

как это было сделано в [34].

В работе [8] мы предложили модель полного $\Phi\Phi$ пиона, основанную на знании факторизуемой части $\Phi\Phi$, $F_\pi^{\text{pQCD};(2)}(Q^2)$, которая рассчитывалась в коллинеарном приближении в $O(\alpha_s^2)$ -порядке теории возмущений КХД. Следует отметить, что факторизуемый пертурбативный вклад имеет неправильное поведение при $Q^2 = 0$, которое должно быть исправлено для выполнения тождества Уорда (WI) $F_\pi(0) = 1$. Для этого в [8] мы предложили следующую процедуру сшивания:

$$F_\pi^{\text{WI};(2)}(Q^2) = F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2) + \left(\frac{Q^2}{2s_0^{(2)} + Q^2} \right)^2 F_\pi^{\text{pQCD};(2)}(Q^2) \quad (31)$$

с $s_0^{(2)} \simeq 0,6$ ГэВ². Это приближение было использовано для «склеивания» модели ЛД ведущего порядка для «мягкой» части, $F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2)$, которая доминирует при малых $Q^2 \leq 1$ ГэВ², и пертурбативной части жесткого перерассеяния, $F_\pi^{\text{pQCD};(2)}(Q^2)$, которая учитывает коллинеарные $O(\alpha_s) + O(\alpha_s^2)$ -поправки и преобладает при больших $Q^2 \gg 1$ ГэВ², так чтобы выполнялось тождество Уорда $F_\pi^{\text{WI};(2)}(0) = 1$. Для проверки качества этой процедуры сшивания мы проводим сравнение получаемого с ее помощью $\Phi\Phi$ $F_\pi^{\text{WI};(2)}(Q^2)$ с моделью ЛД (27) на двухпетлевом уровне (т. е. в $O(\alpha_s)$ -приближении [19]). С этой целью мы строим аналогичную $O(\alpha_s)$ -модель

$$F_\pi^{\text{WI};(1)}(Q^2) = F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2) + \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \frac{2Q^2 s_0^{\text{LD};(0)}(0)}{(2s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2) + Q^2)^2}, \quad (32a)$$

где мы использовали выражение для асимптотики пионного $\Phi\Phi$ в пертурбативной КХД [1, 44]

$$F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2) = \frac{8\pi f_\pi^2 \alpha_s(Q^2)}{Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \frac{2s_0^{\text{LD};(0)}(0)}{Q^2} \quad (32b)$$

и применили тот же самый эффективный порог ЛД, что и в [34], а именно $s_0 = s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2)$ (см. (30)). Следует отметить, что модель $F_\pi^{\text{WI};(1)}(Q^2)$, следующая из процедуры сшивания (32a), работает совсем неплохо, хотя и была предложена в [8] без знания точной двухпетлевой спектральной плотности, рассчитанной позже в [19]. Напомним, что ключевым моментом этой процедуры сшивания является использование информации о поведении $F_\pi(Q^2)$ в двух асимптотических режимах:

1. $Q^2 \rightarrow 0$, где тождество Уорда диктует $F_\pi(0) = 1$ и, следовательно, $F_\pi(Q^2) \simeq F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2)$,

2. $Q^2 \rightarrow \infty$, где $F_\pi(Q^2) \simeq F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2)$,

для того, чтобы согласованно объединить «жесткую» часть ФФ пиона с его «мягкой» частью. Численный анализ формулы (32а) показывает, что предложенная процедура сшивания дает достаточно точный ответ: относительная ошибка меняется от 5% при $Q^2 = 1$ ГэВ² до 9% при $Q^2 = 3-30$ ГэВ². Графическое сравнение $F_\pi^{\text{WI};(1)}(Q^2)$ (сплошная линия) с точным результатом ЛД (27) с двухпетлевой спектральной плотностью [19] (темные точки) показано на рис. 7, а. Здесь также показан чисто пертурбативный вклад $Q^2 F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2)$ (штриховая линия) без поправочного фактора согласования $[Q^2/(2s_0 + Q^2)]^2$, исправляющего поведение в области малых Q^2 (из-за отсутствия этого фактора эта кривая стремится к конечному значению 0,21 ГэВ² при $Q^2 \rightarrow 0$ и не обращается в 0).

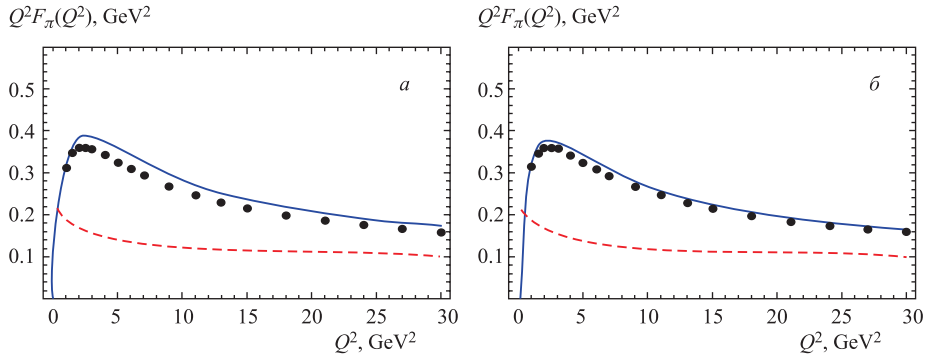


Рис. 7. Сравнение точного $O(\alpha_s)$ -результата для пионного ФФ в подходе локальной дуальности $F_\pi^{\text{LD};(1)}(Q^2)$ (темные точки) с моделями $F_\pi^{\text{WI};(1)}(Q^2)$ ((32а), рис. а) и $F_{\pi;imp}^{\text{WI};(1)}(Q^2, s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2))$ ((33), рис. б), показанными на обоих графиках сплошными линиями. Асимптотическое пертурбативное КХД-предсказание $F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2)$ также показано в виде штриховых линий

Как только спектральная плотность $\rho_3^{(1)}(s_1, s_2, Q^2)$ стала известной [19], стало возможным улучшить представление «мягкой» части, описывающей вклад ЛД в (32а), за счет учета ведущей $O(\alpha_s)$ -поправки в электромагнитной вершине. В результате мы уточнили свою прежнюю модель для сшивания «мягкой» и «жесткой» частей — теперь она должна браться в виде $F_{\pi;imp}^{\text{WI};(1)}(Q^2, s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2))$, где

$$F_{\pi;imp}^{\text{WI};(1)}(Q^2, S) = F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2, S) + \frac{S}{4\pi^2 f_\pi^2} \left\{ \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \left(\frac{2S}{2S + Q^2} \right)^2 + F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2) \left(\frac{Q^2}{2S + Q^2} \right)^2 \right\}. \quad (33)$$

Здесь мы явно ввели зависимость от порога S , чтобы применять эту формулу позднее с порогом $S = s_0^{\text{LD-eff}}(Q^2)$, извлеченным из сравнения полученных нами результатов в

ПС КХД с НВК с $O(\alpha_s)$ -подходом ЛД. Отметим, что предложенное нами улучшение имеет правильное поведение при $Q^2 \rightarrow 0$, если при этом $S \simeq s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2) = 4\pi^2 f_\pi^2 / (1 + \alpha_s(Q^2)/\pi)$. В самом деле, мы имеем $F_\pi^{\text{LD};(0)}(0, S) = S / (4\pi^2 f_\pi^2)$, и за счет того, что вклад $F_\pi^{\text{pQCD};(1)}(Q^2)$ в этом пределе обращается в ноль благодаря фактору $[Q^2 / (2S + Q^2)]^2$, полный результат есть¹

$$F_{\pi;\text{imp}}^{\text{WI};(1)}(0, s_0^{\text{LD};(1)}(0)) = \frac{s_0^{\text{LD};(1)}(0)}{4\pi^2 f_\pi^2} \left[1 + \frac{\alpha_s(s_0)}{\pi} \right] = 1.$$

Графическое сравнение точности улучшенной модели в сравнении с точным ответом ЛД в однопетлевом приближении имеется на рис. 7, б. Хорошо видно, что новая формула сшивания (33) работает лучше: ее относительная ошибка уменьшилась до 4 % при $Q^2 = 1-10 \text{ ГэВ}^2$ и 3 % при $Q^2 = 30 \text{ ГэВ}^2$.

Продолжая предложенную процедуру на двухпетлевой уровень, мы получаем двухпетлевую оценку пионного ФФ, $F_\pi^{\text{WI};(2)}(Q^2, s_0^{\text{LD};(2)}(Q^2))$, в следующем виде:

$$F_\pi^{\text{WI};(2)}(Q^2, S) = F_\pi^{\text{LD};(0)}(Q^2, S) + \frac{S}{4\pi^2 f_\pi^2} \left\{ \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi} \left(\frac{2S}{2S + Q^2} \right)^2 + F_\pi^{\text{FAPT};(2)}(Q^2) \left(\frac{Q^2}{2S + Q^2} \right)^2 \right\}, \quad (34)$$

где $F_\pi^{\text{FAPT};(2)}(Q^2)$ есть аналитическое выражение, которое получено из $F_\pi^{\text{pQCD};(2)}(Q^2)$ с помощью ДАТВ при выборе не зависящего от Q^2 значения масштаба факторизации μ_F^2 :

$$F_\pi^{\text{FAPT};(2)}(Q^2) = \mathcal{A}_1^{(2)}(Q^2) \mathcal{F}_\pi^{\text{LO}}(Q^2; \mu_F^2) + \frac{1}{\pi} \mathcal{L}_{2;1}^{(2)}(Q^2) \mathcal{F}_\pi^{(1,\text{F})}(Q^2; \mu_F^2) + \frac{1}{\pi} \mathcal{A}_2^{(2)}(Q^2) \left[\mathcal{F}_\pi^{\text{NLO}}(Q^2; \mu_F^2) - \mathcal{F}_\pi^{(1,\text{F})}(Q^2; \mu_F^2) \ln \frac{Q^2}{\Lambda_3^2} \right], \quad (35)$$

которое дает для факторизованной части ФФ результат, очень близкий к получаемому в аналитической теории возмущений при стандартном выборе масштабов, $\mu_R^2 = \mu_F^2 = Q^2$.

Эта модель дает нам возможность применить $O(\alpha_s^2)$ -результаты коллинеарного приближения пертурбативной КХД для расчета ФФ пиона в двухпетлевом приближении без явного счета трехпетлевой трехточечной спектральной плотности — а этот счет достаточно сложен. Отметим, что при моделировании однопетлевого выражения ЛД в этом подходе с помощью (33), как мы только что показали (см. рис. 7, а), ошибка получается не более 10 %. Поскольку относительный вклад двухпетлевой поправки в ФФ пиона сам

¹Обычно применяется «замораживание» порога $s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2) = 4\pi^2 f_\pi^2 / (1 + \alpha_s(s_0)/\pi)$ при $Q^2 \leq s_0 \simeq 0,6 \text{ ГэВ}^2$. В этом случае такое же «замораживание» должно использоваться в (33) для аргумента α_s : $\alpha_s(Q^2) \rightarrow \alpha_s(s_0)$ при $Q^2 \leq s_0$. Напомним, что для правильного расчета электромагнитного радиуса пиона (т.е. производной пионного ФФ в области малых Q^2) необходимо применять другой тип операторного разложения и соответствующее ему другое ПС (детали см. в [21]).

по себе имеет порядок 10 %, см. [8, 45], то относительная ошибка нашей оценки $O(\alpha_s^2)$ -поправки получается на уровне 1 % — если только мы учли $O(\alpha_s)$ -поправку точно за счет специального выбора $s_0(Q^2)$, как это и делается в (36). Т.е. все, что нам надо сейчас сделать, это построить эффективные пороги ЛД $s_0^{\text{LD};(1)}(Q^2)$.

Как мы уже говорили в самом начале этого раздела, задача получения эффективного порога континуума $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ является центральной для подхода ЛД. С нашей точки зрения, они должны определяться из условия совпадения результатов ЛД с результатами борелевских ПС КХД. В предыдущем разделе мы построили и обработали такие ПС и получили интерполяционные формулы (26а), (26б), которые применимы для $Q^2 \in [1, 10]$ ГэВ². Теперь с их помощью мы можем определить соответствующие эффективные пороги $s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ и $s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ в минимальной и улучшенной гауссовых моделях вакуума КХД соответственно:

$$F_{\pi;\text{imp}}^{\text{WI};(1)}(Q^2, s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)) = F_{\pi;\text{min}}^{\text{SR}}(Q^2), \quad (36a)$$

$$F_{\pi;\text{imp}}^{\text{WI};(1)}(Q^2, s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)) = F_{\pi;\text{imp}}^{\text{SR}}(Q^2). \quad (36б)$$

Решения этих уравнений, а именно, $s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ и $s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$, показаны на рис. 8. Они могут быть представлены в этой области значений Q^2 такими интерполяционными формулами:

$$s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2 = x \text{ ГэВ}^2) = 0,57 + 0,307 \text{ th}(0,165 x) - 0,0323 \text{ th}(775 x), \quad (37a)$$

$$s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2 = x \text{ ГэВ}^2) = 0,57 + 0,461 \text{ th}(0,0954 x). \quad (37б)$$

Мы видим, что оба порога умеренно растут с ростом Q^2 .

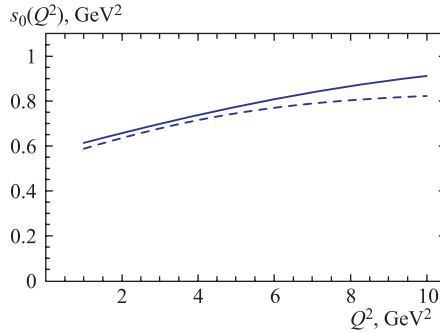


Рис. 8. Эффективные пороги континуума $s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ (сплошная линия) и $s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ (штриховая), аппроксимирующие результаты ПС КХД с НВК с помощью $O(\alpha_s)$ -формул локальной дуальности (33)

Результаты для пионного $\Phi\Phi$, полученные с помощью нашей двухпетлевой модели (34) и эффективных порогов континуума $s_{0,\text{min}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ и $s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$, показаны на рис. 9. Конечная ширина штриховых полос связана с учетом разброса параметров a_2 и a_4 пионной

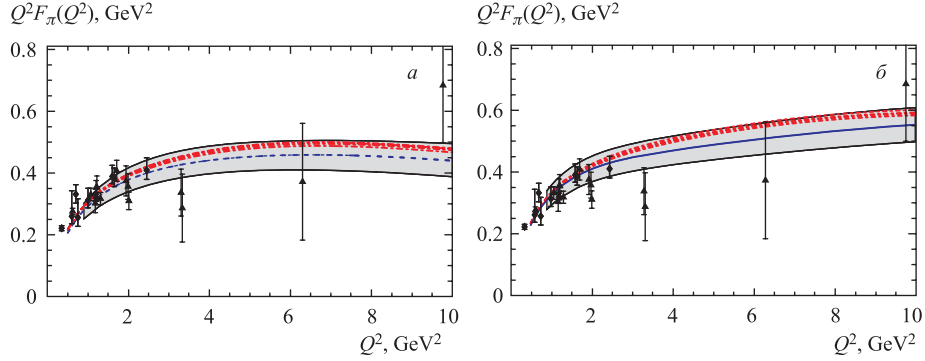


Рис. 9. Сравнение предсказаний для пионного $\Phi\Phi$ $Q^2 F_\pi(Q^2)$, полученных по формуле (34) с использованием эффективных порогов континуума $s_{0,\min}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ (а) и $s_{0,\text{imp}}^{\text{LD-eff}}(Q^2)$ (б). Результаты ПС КХД с НВК показаны на обоих графиках теми же затененными полосами, что и на рис. 4, в то время как $O(\alpha_s^2)$ -предсказаниям отвечают жирные штриховые полосы, слегка превышающие центральные линии затененных полос

амплитуды распределения (АР) в пучке моделей, диктуемых ПС КХД с НВК [17, 18, 46]. Из этого рисунка мы видим, что самое большое значение двухпетлевая поправка дает в области $Q^2 \gtrsim 4$ ГэВ², достигая здесь уровня 3–10%, что количественно неплохо совпадает с оценками, полученными нами ранее в ДАТВ [8, 45].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили и проанализировали для двух гауссовых моделей нелокального КХД-вакуума трехточечное правило сумм КХД для электромагнитного $\Phi\Phi$ пиона. К достоинствам такого анализа следует отнести независимость результатов от профиля пионной АР — это приводит к уменьшению теоретической неопределенности, связанной с параметризацией пионной АР в низкой точке нормировки (порядка 1 ГэВ). Кроме того, мы попытались уменьшить влияние нарушения калибровочной инвариантности, индуцируемой грубым моделированием нелокальности вакуумных конденсатов: в наших расчетах мы учли не только минимальную гауссову модель НВК, но также и улучшенную модель, разработанную нами в [18].

Полученные нами результаты можно суммировать следующим перечнем.

1. Основные предсказания для $\Phi\Phi$ пиона $F_\pi(Q^2)$ показаны на рис. 4 в сравнении с существующими экспериментальными данными (старыми) Корнелла [9, 29, 30] и (более новыми) группы JLab [10]. Оказалось, что учет $O(\alpha_s)$ -вклада в спектральную плотность повысил предсказание для $\Phi\Phi$ в среднем на 20%, что несколько меньше предыдущих оценок относительной важности таких поправок [19, 34].

2. Как хорошо видно из рис. 4, центральная линия предсказаний для $\Phi\Phi$ пиона, полученных в улучшенной модели, лежит внутри полосы ошибок минимальной модели вплоть до значения $Q^2 \approx 7$ ГэВ², что говорит о сравнимом качестве предсказаний обеих гауссовых моделей НВК в этой области. Основное отличие между этими двумя моделями

связано с различными вкладами кварк-глюон-антикваркового конденсата $\Phi_{\bar{q}Aq}(Q^2, M^2)$ (см. рис. 6).

3. Полученные нами предсказания хорошо согласуются с результатами недавних решеточных расчетов [31] пионного ФФ при $Q^2 \lesssim 4 \text{ ГэВ}^2$.

4. Мы построили также эффективные пороги континуума для подхода локальной дуальности, которые позволяют в этом подходе имитировать результаты, полученные нами в подходе борелевских ПС КХД. Сравнение наших предсказаний с полученными ранее в подходе локальной дуальности [34] выявляет систематическое превышение наших результатов. Причиной такой разницы является тот факт, что эффективный порог континуума $s_0^{\text{LD}}(Q^2)$ хорошо определен только в области малых Q^2 . Для больших Q^2 авторы [34] предложили пользоваться логарифмически растущим порогом

$$s_0^{\text{LD}}(Q^2) = \frac{4\pi^2 f_\pi^2}{1 + \alpha_s(Q^2)/\pi},$$

равным $0,67 \text{ ГэВ}^2$ при $Q^2 \approx 10 \text{ ГэВ}^2$. Построенный нами эффективный порог континуума, имитирующий результат ПС КХД, оказывается выше: $s_0^{\text{LD}}(Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2) = 0,87 \text{ ГэВ}^2$. Это означает, что ошибка в определении s_0^{LD} в области $Q^2 = 10 \text{ ГэВ}^2$ оказывается порядка 20 %.

5. На основе тождества Уорда мы построили [8,47] процедуру согласования факторизуемой части ФФ пиона, рассчитываемой в коллинеарной КХД, с моделью нефакторизуемого вклада, получаемой в подходе локальной дуальности с использованием построенных эффективных порогов континуума. С ее помощью мы построили выражение для ФФ пиона в $O(\alpha_s^2)$ -приближении в развитом нами подходе ДАТВ.

Благодарности. Эта работа была выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 08-01-00686 и 09-02-01149, программы сотрудничества БРФФИ–ОИЯИ (контракт № F10D-001), гранта 2010 г. программы «Гейзенберг–Ландау».

Приложение 1

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ВАКУУМНЫХ КОНДЕНСАТОВ

Как принято в подходе ПС КХД, мы используем калибровку Фока–Швингера $x^\mu A_\mu(x) = 0$. По этой причине все струнные вставки

$$\mathcal{C}(x, 0) \equiv \mathcal{P} \exp \left[-ig_s \int_0^x t^\alpha A_\mu^\alpha(y) dy^\mu \right] = 1,$$

необходимые для обеспечения калибровочной инвариантности нелокальных объектов, обращаются в единицу при выборе контура интегрирования в виде прямой линии, соединяющей точки 0 и x .

Минимальная гауссова модель нелокального вакуума КХД отвечает следующему анзацу:

$$f_i(\alpha, \beta, \gamma) = \delta(\alpha - \Lambda) \delta(\beta - \Lambda) \delta(\gamma - \Lambda) \quad (\text{П1.1})$$

с параметром $\Lambda = \lambda_q^2/2$. Как было показано в наших работах [18, 48], в этой модели нарушены уравнения движения КХД и двухточечный коррелятор векторных токов имеет продольную составляющую. Для того чтобы выполнить уравнение движения КХД, связывающее векторные билакальные (12б) и кварк-глюон-антикварковые конденсаты (13а), и в то же время минимизировать непоперечность VV -коррелятора, нами была предложена улучшенная гауссова модель вакуума КХД [18]:

$$f_i^{\text{imp}}(\alpha, \beta, \gamma) = (1 + X_i \partial_x + Y_i \partial_y + Z_i \partial_z) \delta(\alpha - x\Lambda) \delta(\beta - y\Lambda) \delta(\gamma - z\Lambda), \quad (\text{П1.2а})$$

где $z = y$, $\Lambda = (1/2)\lambda_q^2$ и

$$X_1 = +0,082; X_2 = -1,298; X_3 = +1,775; x = 0,788, \quad (\text{П1.2б})$$

$$Y_1 = -2,243; Y_2 = -0,239; Y_3 = -3,166; y = 0,212. \quad (\text{П1.2в})$$

За счет уравнения движения КХД эти параметры удовлетворяют следующим условиям:

$$12(X_2 + Y_2) - 9(X_1 + Y_1) = 1, \quad x + y = 1. \quad (\text{П1.3})$$

Нелокальные вакуумные конденсаты 4-кварковых операторов, как обычно, сведены к произведениям двух скалярных кварковых конденсатов (12а) с использованием гипотезы вакуумной доминантности [20].

Приложение 2

ЧИСЛЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ПРАВИЛ СУММ КХД

Приведем численные значения вакуумных конденсатов: $\lambda_q^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2$, $\langle \alpha_s GG \rangle / \pi = 0,012 \text{ ГэВ}^4$ и $\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle^2 = 1,83 \cdot 10^{-4} \text{ ГэВ}^6$. Нелокальный глюонный конденсат $\Phi_{\langle GG \rangle}(M^2)$ приводит к очень сложному выражению, которое по аналогии с кварковым случаем моделируется экспоненциальным фактором [27, 49]:

$$\Phi_{\langle GG \rangle}(M^2) = \Phi_{\langle GG \rangle}^{\text{loc}}(M^2) e^{-\lambda_g^2 Q^2 / M^4} \quad \text{с} \quad \lambda_g^2 = 0,4 \text{ ГэВ}^2.$$

Для определения наилучшего порога континуума s_0 мы для каждого значения Q^2 и s_0 вводим χ^2 -функцию:

$$\chi^2(Q^2, s_0) = \frac{\varepsilon^{-2}}{N_M} \left[\sum_{i=0}^{N_M} Q^4 F(Q^2, M_i^2, s_0)^2 - \frac{\left(\sum_{i=0}^{N_M} Q^2 F(Q^2, M_i^2, s_0) \right)^2}{N_M + 1} \right], \quad (\text{П2.1})$$

где $M_i^2 = M_-^2 + i \Delta_M$, $\Delta_M = (M_+^2 - M_-^2) / N_M$, $N_M = 20$ и ε обозначает желаемую точность определения ФФ $F(Q^2, M_i^2, S)$ при $\chi^2 \simeq 1$ (в наших расчетах бралось значение $\varepsilon = 0,07 \text{ ГэВ}^2$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черняк В. Л., Житницкий А. Р., Сербо В. Г. Асимптотические формфакторы адронов в квантовой хромодинамике // Письма ЖЭТФ. 1977. Т. 26. С. 760–763.
2. Ефремов А. В., Радюшкин А. В. Асимптотическое поведение электромагнитного формфактора пиона в КХД // ТМФ. 1980. Т. 42. С. 147–166.
3. Radyushkin A. V. Exclusive Processes in Perturbative QCD // Nucl. Phys. A. 1991. V. 527. P. 153.
4. Radyushkin A. V. Sum Rules and Exclusive Processes in QCD // Acta Phys. Polon. B. 1984. V. 15. P. 403–417.
5. Isgur N., Llewellyn Smith C. H. Asymptopia in High Q^2 Exclusive Processes in QCD // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. P. 1080.
6. Jakob R., Kroll P. The Pion Form-Factor: Sudakov Suppressions and Intrinsic Transverse Momentum // Phys. Lett. B. 1993. V. 315. P. 463–470.
7. Stefanis N. G., Schroers W., Kim H.-C. Analytic Coupling and Sudakov Effects in Exclusive Processes: Pion and $\gamma^*\gamma \rightarrow \pi^0$ Form Factors // Eur. Phys. J. C. 2000. V. 18. P. 137–156.
8. Bakulev A. P. et al. Pion Form Factor in QCD: From Nonlocal Condensates to NLO Analytic Perturbation Theory // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 033014.
9. Bebek C. J. et al. Electroproduction of Single Pions at Low ϵ and a Measurement of the Pion Form-Factor up to $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 1693–1705.
10. Huber G. M. et al. Charged Pion Form Factor between $Q^2 = 0.60$ and 2.45 GeV^2 . II. Determination of, and Results for, the Pion Form Factor // Phys. Rev. C. 2008. V. 78. P. 045203.
11. Nesterenko V. A., Radyushkin A. V. Sum Rules and Pion Form-Factor in QCD // Phys. Lett. B. 1982. V. 115. P. 410–413.
12. Radyushkin A. V. Quark-Hadron Duality and Intrinsic Transverse Momentum // Acta Phys. Polon. B. 1995. V. 26. P. 2067–2096.
13. Ioffe B. L., Smilga A. V. Pion Form-Factor at Intermediate Momentum Transfer in QCD // Phys. Lett. B. 1982. V. 114. P. 353–358.
14. Shevchenko V., Simonov Y. Operator Product Expansion and Confinement // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 074029.
15. Mikhailov S. V., Radyushkin A. V. The Pion Wave Function and QCD Sum Rules with Nonlocal Condensates // Phys. Rev. D. 1992. V. 45. P. 1754–1759.
16. Bakulev A. P., Mikhailov S. V. The ρ -Meson and Related Meson Wave Functions in QCD Sum Rules with Nonlocal Condensates // Phys. Lett. B. 1998. V. 436. P. 351.
17. Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G. QCD-Based Pion Distribution Amplitudes Confronting Experimental Data // Phys. Lett. B. 2001. V. 508. P. 279–289.
18. Бакулев А. П., Пимиков А. В. Самосогласованная гауссова модель непертурбативного КХД-вакуума // Письма в ЭЧАЯ. 2007. Т. 4. С. 637–653.
19. Braguta V. V., Onishchenko A. I. Pion Form Factor and QCD Sum Rules: Case of Axial Current // Phys. Lett. B. 2004. V. 591. P. 267–276.
20. Shifman M. A., Vainshtein A. I., Zakharov V. I. QCD and Resonance Physics. Sum Rules // Nucl. Phys. B. 1979. V. 147. P. 385–447.
21. Нестеренко В. А., Радюшкин А. В. Анализ поведения формфактора пиона в области малых Q^2 в правилах сумм КХД // Письма ЖЭТФ. 1984. Т. 39. С. 576–579.
22. Белляев В. М., Иоффе Б. Л. Определение масс барионов и барионных резонансов из правил сумм КХД. Нестранные барионы // ЖЭТФ. 1982. Т. 56. С. 876–891.

23. *Овчинников А. А., Пивоваров А. А.* Расчет кварк-глюонного конденсата в правилах сумм КХД // ЯФ. 1988. Т. 48. С. 1135–1139.
24. *D'Elia M., Di Giacomo A., Meggiolaro E.* Gauge-Invariant Quark Antiquark Nonlocal Condensates in Lattice QCD // Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 054503.
25. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V.* Lattice Measurements of Nonlocal Quark Condensates, Vacuum Correlation Length, and Pion Distribution Amplitude in QCD // Phys. Rev. D. 2002. V. 65. P. 114511.
26. *Михайлов С. В., Радюшкин А. В.* Нелокальность кварковых конденсатов и волновая функция пиона в КХД // ЯФ. 1989. Т. 49. С. 794–803.
27. *Bakulev A. P., Radyushkin A. V.* Nonlocal Condensates and QCD Sum Rules for the Pion Form-Factor // Phys. Lett. B. 1991. V. 271. P. 223–230.
28. *Bakulev A. P.* Global Fractional Analytic Perturbation Theory in QCD with Selected Applications // Part. Nucl. 2009. V. 40. P. 715–756.
29. *Bebek C. J. et al.* Further Measurements of Forward-Charged-Pion Electroproduction at Large κ^2 // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1229–1242.
30. *Bebek C. J. et al.* Measurement of the Pion Form-Factor up to $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ // Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 25–42.
31. *Brommel D. et al.* The Pion Form Factor from Lattice QCD with Two Dynamical Flavours // Eur. Phys. J. C. 2007. V. 51. P. 335–345.
32. *Raha U., Aste A.* Electromagnetic Pion and Kaon Form Factors in Light-Cone Resummed Perturbative QCD // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 034015.
33. *Ruiz Arriola E., Broniowski W.* Pion Electromagnetic Form Factor, Perturbative QCD, and Large- N_c Regge Models // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P. 034031.
34. *Braguta V., Lucha W., Melikhov D.* Pion Form Factor at Spacelike Momentum Transfers from Local-Duality QCD Sum Rule // Phys. Lett. B. 2008. V. 661. P. 354–359.
35. *Maris P., Tandy P. C.* π , K^+ , and K^0 Electromagnetic Form Factors // Phys. Rev. C. 2000. V. 62. P. 055204.
36. *Agaev S. S., Gomshi Nobary M. A.* Pion Distribution Amplitude from Holographic QCD and the Electromagnetic Form Factor $F_\pi(Q^2)$ // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 074014.
37. *Grigoryan H. R., Radyushkin A. V.* Pion in the Holographic Model with 5D Yang–Mills Fields // Phys. Rev. D. 2008. V. 78. P. 115008.
38. *Brodsky S. J., de Teramond G. F.* Light-Front Dynamics and AdS/QCD Correspondence: The Pion Form Factor in the Space- and Time-Like Regions // Ibid. V. 77. P. 056007.
39. *Kwee H. J., Lebed R. F.* Pion Form Factor in Improved Holographic QCD Backgrounds // Phys. Rev. D. 2008. V. 77. P. 115007.
40. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* Unbiased Analysis of CLEO Data beyond LO and Pion Distribution Amplitude // Phys. Rev. D. 2003. V. 67. P. 074012.
41. *Bakulev A. P., Mikhailov S. V., Stefanis N. G.* CLEO and E791 Data: A Smoking Gun for the Pion Distribution Amplitude? // Phys. Lett. B. 2004. V. 578. P. 91–98.
42. *Ioffe B. L., Smilga A. V.* Meson Widths and Form-Factors at Intermediate Momentum Transfer in Nonperturbative QCD // Nucl. Phys. B. 1983. V. 216. P. 373.
43. *Bakulev A. P., Radyushkin A. V., Stefanis N. G.* Form Factors and QCD in Spacelike and Timelike Regions // Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 113001.
44. *Farrar G. R., Jackson D. R.* The Pion Form-Factor // Phys. Rev. Lett. 1979. V. 43. P. 246.

45. Бакулев А. П. Глобальная дробно-аналитическая теория возмущений в КХД и ее некоторые приложения // ЭЧАЯ. 2009. Т. 40. С. 1542–1620.
46. Bakulev A. P. On a QCD Based Pion Distribution Amplitude Versus Recent Experimental Data // Proc. of the 36th Rencontres De Moriond on QCD and Hadronic Interactions, Les Arcs, France, March 17–24, 2001 / Ed. by J. T. T. Van. Singapore, 2002. P. 133–136.
47. Bakulev A. P., Pimikov A. V., Stefanis N. G. QCD Sum Rules with Nonlocal Condensates and the Spacelike Pion Form Factor // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 093010.
48. Bakulev A. P., Pimikov A. V. Self-Consistent Gaussian Model of Nonperturbative QCD Vacuum // Acta Phys. Polon. B. 2006. V. 37. P. 3627–3634.
49. Михайлов С. В. Нелокальный глюонный конденсат в правилах сумм КХД для волновых функций мезонов // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 143–150.