

## АНАЛИЗ ФРАКТАЛОВ С КОМБИНИРОВАННЫМ ДЕЛЕНИЕМ ЧАСТЕЙ

*Т. Г. Дедович*<sup>1</sup>, *М. В. Токарев*<sup>2</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждаются свойства пространства-времени в общей теории относительности, а также дискретность и неархимедовость пространства в квантовой теории гравитации. Подчеркивается, что свойства тел в неархимедовых пространствах совпадают со свойствами поля  $P$ -адических чисел и фракталов. Авторы предполагают, что партонные ливни, используемые для описания взаимодействий частиц и ядер при высоких энергиях, имеют фрактальную структуру. В работе рассмотрен механизм формирования фрактала с комбинированным делением частей. Предложен модифицированный SePaC-метод для анализа таких фракталов. Рассматриваются BC-, PaC- и SePaC-методы определения фрактальной размерности и других характеристик фракталов (количества уровней и величины основания формирования фрактала). Установлено, что SePaC-метод имеет преимущества для анализа фракталов с комбинированным делением частей.

Properties of the space-time in general relativity, as well as discrete and non-Archimedean space in the quantum theory of gravity are discussed. It is noted that the properties of bodies in non-Archimedean spaces coincide with the properties of the field of  $P$ -adic numbers and fractals. The authors assume that parton showers used to describe interactions of particles and nuclei in high energy physics have a fractal structure. A mechanism of formation of fractals with combined branching is studied. A modified SePaC analysis method is suggested. The BC, PaC and SePaC methods of determining the fractal dimension and other characteristics of fractals are compared. It is found that SePaC method has advantages for analysis of fractals with combined branching.

PACS: M89.75.Da, M89.75.Fb

### ВВЕДЕНИЕ

В общей теории относительности пространство является четырехмерным псевдоримановым многообразием, структура которого в малой окрестности каждой точки обладает свойствами евклидова пространства [1]. Эти свойства описываются аксиомами элементарной геометрии [2]. Особое значение имеет аксиома Архимеда. Она рассматривает измерение расстояния как сравнение двух масштабов, один из которых может быть сколь угодно малым. Расстояния в евклидовой геометрии аналитически описываются вещественными числами.

---

<sup>1</sup>E-mail: dedovich@yandex.ru

<sup>2</sup>E-mail: tokarev@jinr.ru

В квантовой теории гравитации существует минимальный масштаб — планковская длина ( $\sim 10^{-35}$  м) [3]:

$$l_{\text{Pl}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad (1)$$

где  $\hbar$  — постоянная Планка;  $c$  — скорость света и  $G$  — гравитационная постоянная. Существование предельного масштаба  $l_{\text{Pl}}$  означает невозможность измерения расстояний меньше планковских. Это заключение привело к появлению нового представления о неархимедовости, дискретности пространства и зависимости его размерности от масштаба. Для рассмотрения неевклидовых, неархимедовых пространств необходимо использовать другую числовую систему. Новая система должна отражать свойства описываемого ею пространства. В неархимедовых пространствах окрестности точек не могут частично пересекаться: либо одна окрестность содержится внутри другой, либо они не пересекаются. Такую иерархическую структуру имеет поле  $P$ -адических чисел. В. Владимиров и И. Волович предложили использовать  $P$ -адические числа для описания неархимедовых пространств на малых масштабах [4].  $P$ -адический анализ применяется не только для описания физики на малых масштабах, но и в рамках традиционной физики для описания сложных систем типа спиновых стекол или фракталов [4, 5].

Для описания взаимодействий частиц и ядер при высоких энергиях предполагается, что процессы развития партонного ливня и адронизации обладают фрактальной структурой. В процессе развития ливня родительский партон  $a$  излучает два дочерних партона  $b$  и  $c$ . Такой механизм расщепления повторяется для всех дочерних партонов. Углы расщепления партонов ограничены ( $\Theta_- < \Theta < \Theta_+$ ) и упорядочены:  $\Theta_b, \Theta_c < \Theta_a$  [6]. Распределение партонов ливня в псевдобыстротном пространстве не является однородным и образует фрактал. Одной из основных характеристик фрактала, отражающих динамику его образования, является фрактальная размерность  $D_F$ . Она определяется как значение  $\delta$ , при котором мера  $M_\delta$  множества имеет конечное значение [7]:

$$M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (2)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное из всех возможных покрытий  $K$  рассматриваемого множества;  $\{l_i\}$  — диаметры шаров покрытия, не превышающие значения  $\epsilon$ . Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением.

Для определения фрактальных размерностей множеств и процессов используются различные методы: подсчета клеток (BC) [8, 9], регуляризации [10],  $R/S$  нормированного размаха [11], максимумов модулей вейвлет-преобразования [12]. В работах [13] и [14] предложены новые методы фрактального анализа: метод  $P$ -адических покрытий (PaC) и метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC) соответственно. Отметим, что эти методы используют покрытия с основанием  $P$ , которое может быть как простым, так и составным числом. Такой подход более оправдан с алгоритмической точки зрения, а использование в качестве основания только простых чисел является частным случаем данных методов.

В настоящей работе проведен анализ фракталов с комбинированным делением частот BC-, PaC- и SePaC-методами. В разд. 1 представлен сценарий партонного ливня с последующей адронизацией, который приводит к образованию такого типа фракталов.

В разд. 2 дано описание ВС-, PaC-методов и предложен модифицированный SePaC-метод для анализа фракталов с комбинированным делением частей. Выбор оптимальных значений параметров рассматриваемых методов проведен в разд. 3. Найденные значения этих параметров позволяют восстановить фрактальную размерность, количество уровней и структуру фрактала с максимальной эффективностью. В разд. 4 обсуждаются результаты сравнительного анализа фракталов с комбинированным делением частей, полученные ВС-, PaC- и SePaC-методами. Основные выводы сформулированы в заключении.

### 1. ПАРТОННЫЕ ЛИВНИ И ПРОЦЕСС АДРОНИЗАЦИИ КАК ФРАКТАЛЫ

Опишем схематично сценарий развития партонного ливня и процесса адронизации, приводящий к фракталу с комбинированным делением частей. На рис. 1 приведены первые три уровня такого фрактала в  $\eta$ -пространстве. Область пространства, допустимая для образования родительского партона, условно делится на пять частей. Для дочерних партонов допустимые диапазоны состоят из одной (второй по счету) и двух (третьей, четвертой) частей. Отличие длин этих диапазонов связано с тем, что ширина ливня для разных типов партонов различна. В рассматриваемом примере допустимые для партонов диапазоны соприкасаются, поэтому на рис. 1 виден единый диапазон, состоящий из трех частей (второй, третьей и четвертой). Каждый из партонов инициирует ливень независимо, поэтому расщепление единого диапазона происходит по принципу независимого деления. Допустимый диапазон для второго партона, состоящий из двух частей, рассматривается как единый объект, т.е. происходит его зависимое деление. Предполагается, что дальнейшее развитие ливня и адронизация сохраняют структуру заполнения  $\eta$ -пространства. Процесс формирования такого фрактала будем называть регулярным с комбинированным (зависимым и независимым) делением. На каждом уровне пространство делилось на  $M$  частей, количество которых на разных масштабах изменяется как степень основания  $P$ :  $M = P^n$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . В примере, показанном на рис. 1, основание  $P$  формирования фрактала равно 5.

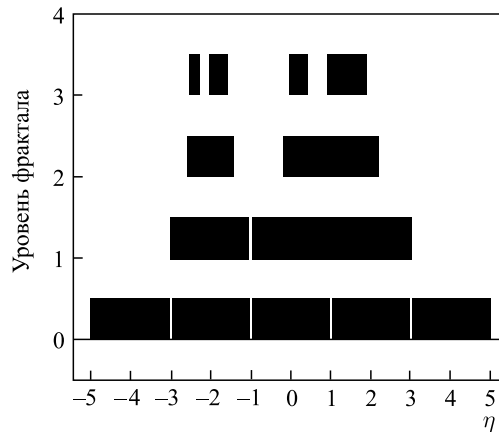


Рис. 1. Зависимость допустимых диапазонов  $\eta$ -пространства от уровня фрактала, получаемого способом комбинированного деления

Напомним, что фрактальная размерность множества — это величина  $D_F$ , при которой мера (2) конечна. Для рассматриваемых фракталов  $D_F$  является решением уравнения

$$\sum_{i=1}^{N_r^1} d_i^{D_F} = 1. \tag{3}$$

Здесь  $N_r^1$  — количество пробников (допустимых диапазонов) первого уровня;  $d_i$  — размеры пробников (длины допустимых диапазонов), покрывающих фрактал на пер-

вом уровне. Для фрактала, показанного на рис. 1, уравнение (3) имеет вид  $(1/5)^{D_F} + (2/5)^{D_F} = 1$ . Его решение — значение фрактальной размерности  $D_F \approx 0,5639 \dots$ . Фрактал характеризуется часто и клеточной размерностью  $D_b$ , определяемой по формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}. \quad (4)$$

Здесь  $N(\delta)$  — количество пробников размера  $\delta$ , покрывающих объект. В следующем разделе приведены описания методов, основанные на разных определениях размерности.

## 2. МЕТОДЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этом разделе дано краткое описание методов подсчета клеток (BC) [9],  $P$ -адических покрытий (PaC) [13], предложен модифицированный SePaC-метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий и проведено сравнение этих методов с целью определения наилучшей эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания формирования фрактала. В анализе использован набор, включающий 646 тестовых фракталов с комбинированным делением частей, содержащий всевозможные разновидности фракталов  $P = 4-7$ .

**2.1. Методы подсчета клеток и  $P$ -адических покрытий.** В BC- и PaC-методах [13] фрактальная размерность  $D_F$  определяется как параметр наклона зависимости  $N \sim M^{D_F}$  в дважды логарифмическом масштабе. Здесь  $M$  и  $N$  — количество бинов и ненулевых бинов в наборе распределений исследуемой величины. В распределениях набора количества бинов  $\{M_i\}$  изменяется по степенному закону ( $M_i = (P)^i, i = 0, 1, 2 \dots$ ), т. е. набор является  $P$ -адическим покрытием. В BC-методе, как правило, используется покрытие с основанием  $P = 2$ , а в PaC-методе — различные покрытия с  $P = 2, \dots, P_{\max}$ . В случае, если  $\chi^2$  линейной аппроксимации зависимости  $\ln N$  от  $\ln M$  меньше заданного значения параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$ , то набор рассматриваемых частиц считается фракталом с основанием  $P$  и размерностью  $D_F$ . Количество уровней фрактала определяется по условию насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$ . Отметим, что BC-метод имеет один свободный параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$ , а PaC — два параметра: значение основания максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{\max}$  и  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Детальное описание методов приведено в [13].

**2.2. Метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC).** SePaC-метод основан на определении фрактальной размерности  $D_F$  как решению системы уравнений  $P$ -адических покрытий. В методе анализируются гипотезы формирования фракталов методами зависимо и независимо деления. Размерность фракталов с комбинированным делением будет определяться на основе приближенного описания с использованием рассматриваемых гипотез. Модификация стандартного SePaC-метода [14] сводится к снятию ограничений на степенную зависимость числа ненулевых бинов и числа допустимых диапазонов от уровня фрактала. Модифицированный SePaC-метод состоит из следующих шагов.

1. Считывание данных  $\{X = \eta, \dots\}$ , например, псевдобыстрот частиц в событии.
2. Построение набора  $P$ -адических покрытий:  $P = 3, \dots, P_{\max}$ . Для каждого из покрытий проводится анализ, описанный в последующих пунктах.
3. Подсчет количества ненулевых бинов  $N(\text{lev}, P)$ . Условие насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$  определяет количество уровней  $N_{\text{lev}} = \text{lev}$ . Рассмотрение  $P$ -адического покрытия прекращается, если  $N_{\text{lev}} = 1$ .

4. Поочередная проверка гипотезы регулярного независимого и зависимого деления, случайного независимого и зависимого деления частей. Для гипотез регулярного деления проводится анализ массивов структур и систем уравнений (5). Для гипотез случайного деления проводится анализ систем уравнений (5). При выполнении одной из гипотез оставшиеся не рассматриваются.

5. Для подтвердившейся гипотезы определяются характеристики фрактала: значения основания  $P$ , фрактальная размерность, количество уровней, тип фрактала, количество и длины допустимых диапазонов, а также структура регулярных фракталов.

Анализ массивов структур подробно описан в работе [14]. Ниже приведем схему анализа системы уравнений (5).

1. Определение количества  $Nd_{lev}$  и длин  $d_{lev}$  допустимых диапазонов для рассматриваемой гипотезы. Если  $Nd_{lev} = 1$ , то рассмотрение гипотезы прекращается.

2. Составление системы уравнений и вычисление значений фрактальной размерности  $D_F^{lev}$  методом деления отрезка пополам для каждого уровня:

$$\sum_{i=1}^{Nd_{lev}} (d_{lev})^{D_F^{lev}} = 1. \quad (5)$$

3. Определение среднего значения  $\langle D_F^{lev} \rangle$  и отклонения от среднего  $\Delta D_F^{lev}$ :

$$\langle D_F^{lev} \rangle = \sum_{lev=1}^{N_{lev}} (D_F^{lev}) / N_{lev}, \quad \Delta D_F^{lev} = |\langle D_F^{lev} \rangle - D_F^{lev}|. \quad (6)$$

4. Проверка условия точности  $\Delta D_F^{lev} / \langle D_F^{lev} \rangle < Dev$ , которое определяет, является ли набор частиц фракталом (фиксируются основание  $P$  и размерность  $D_F = \langle D_F^{lev} \rangle$ ).

Модифицированный SePaC-метод имеет два параметра: значение основания максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{max}$  и предельное отклонение от среднего  $Dev$ .

### 3. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ВС-, PaC- И SePaC-МЕТОДОВ

Каждый из методов ВС, PaC и SePaC имеет свои параметры. Выбор оптимальных значений этих параметров ( $\chi_{lim}^2$ ,  $P_{max}$ ,  $Dev$ ) позволяет определить количество восстановленных фракталов, их размерность, количество уровней и основание с максимальной эффективностью. Эффективность восстановления фрактала определяется выражением

$$Eff_{frac} = N_{frac} / N_{test}, \quad (7)$$

где  $N_{test}$  и  $N_{frac}$  — количество рассматриваемых и восстановленных фракталов. Эффективность  $Eff_V$  нахождения величины  $V = D_F, N_{lev}, P$  зависит от ошибки ее восстановления  $Err_V = (V - V_{test}) / V_{test}$ :

$$\begin{aligned} Eff_V &= 1 - |Err_V|, & \text{если } |Err_V| \leq 1, \\ Eff_V &= 0, & \text{если } |Err_V| > 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Истинное значение величины  $V$  равно  $V_{\text{test}}$ . Полная эффективность  $\text{Eff}_{\text{tot}}$  выражается через эффективности восстановления фрактальной размерности, количества уровней и основания следующей формулой:

$$\text{Eff}_{\text{tot}} = \text{Eff}_{D_F} \cdot \text{Eff}_{N_{\text{lev}}} \cdot \text{Eff}_P. \quad (9)$$

**3.1. Определение параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC- и SePaC-методов.** Параметр  $P_{\text{max}}$  является максимальным основанием в рассматриваемых  $P$ -адических покрытиях. Он определяется значением, соответствующим началу плато в зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от величины  $P_{\text{max}}$  для всех значений  $\chi_{\text{lim}}^2$  и Dev для PaC- и SePaC-методов [15, 16]:

$$\Delta D_{\text{ext}} = \Delta D_{D_F} + \Delta D_{N_{\text{lev}}} + \Delta D_P. \quad (10)$$

Здесь  $\Delta D_{D_F}$ ,  $\Delta D_{N_{\text{lev}}}$  и  $\Delta D_P$  — разность распределений по величинам  $D_F$ ,  $N_{\text{lev}}$  и  $P$  соответственно. Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от параметра  $P_{\text{max}}$  представлена на рис. 2. Выбор оптимального значения  $P_{\text{max}}$  проводился в диапазоне  $P_{\text{max}} = 3-19$ . Для PaC-метода значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  изменяется от  $10^{-13}$  до 2,5. Диапазон значений параметра Dev для SePaC-метода охватывает интервал от  $10^{-6}$  до 0,9. Зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}(P_{\text{max}})$  для обоих методов имеет плато при  $P_{\text{max}} = 7-19$ . Значения  $\Delta D_{\text{ext}}$  на плато 0,04 для PaC- и 0,0 для SePaC-методов указывают на незначительное изменение и отсутствие изменений формы всех распределений. Отметим, что  $P_{\text{max}} = 7$  (начало плато) является максимальным значением основания  $P$  формирования фракталов.

Таким образом, определены оптимальные значения параметра  $P_{\text{max}} = 7$  для PaC- и SePaC-методов для исследуемого блока данных.

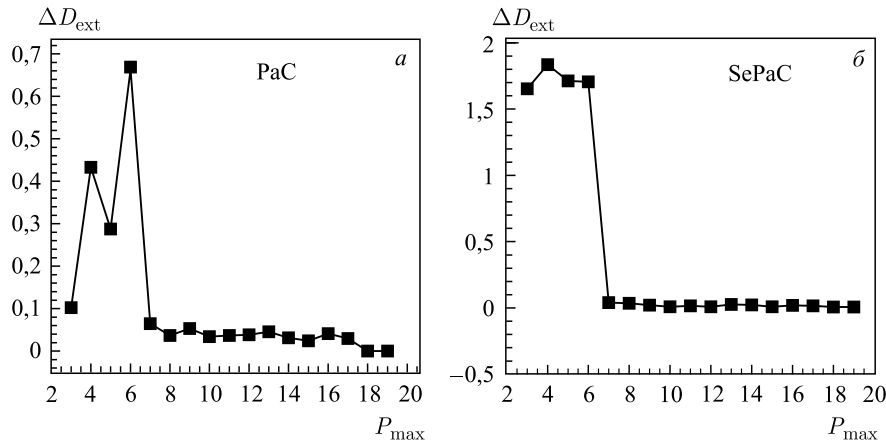


Рис. 2. Зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от параметра  $P_{\text{max}}$  для PaC- (а) и SePaC-методов (б)

**3.2. Процедура поиска параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС- и PaC-методов.** Параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$  определяет: является ли рассматриваемый набор данных фракталом? Процедура поиска этого параметра для ВС- и PaC-методов описана в статьях [15, 16]. Значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  для ВС-метода находится как минимальное значение на втором плато зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$ . Выбор значения  $\chi_{\text{lim}}^2$  для PaC-метода имеет особенности для фракталов

с независимым [15] и зависимым делением [16], а для анализа фракталов с комбинированным делением будет определен ниже. Он основан на сравнительном анализе зависимостей  $\Delta D_{\text{ext}}$  и эффективностей восстановления  $\text{Eff}_{\text{frac}}$ ,  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  от значения  $\chi_{\text{lim}}^2$ .

Для обоих методов область изменения параметра  $\chi_{\text{lim}}^2$  охватывает диапазон от  $10^{-13}$  до 2,5. В табл. 1 показано соответствие между номером  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  и значением  $\chi_{\text{lim}}^2$ . На рис. 3, а приведена зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для ВС-метода. Из этого рисунка видно, что начало второго плато соответствует значению  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 25$  или  $\chi_{\text{lim}}^2 = 0,5$ . Зависимости  $\text{Eff}_{\text{frac}}$ ,  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  от  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  (рис. 3, б) подтверждают процедуру выбора, приводящую к максимальным значениям эффективностей.

Таблица 1. Соответствие номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  и величины  $\chi_{\text{lim}}^2$

$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\chi_{\text{lim}}^2$	$10^{-13}$	$10^{-12}$	$10^{-11}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\chi_{\text{lim}}^2$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\chi_{\text{lim}}^2$	0,08	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	28	29	30	31	32	33	34	35	36
$\chi_{\text{lim}}^2$	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
$N_{\chi_{\text{lim}}^2}$	37	38	39	40	41	42	43	44	45
$\chi_{\text{lim}}^2$	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

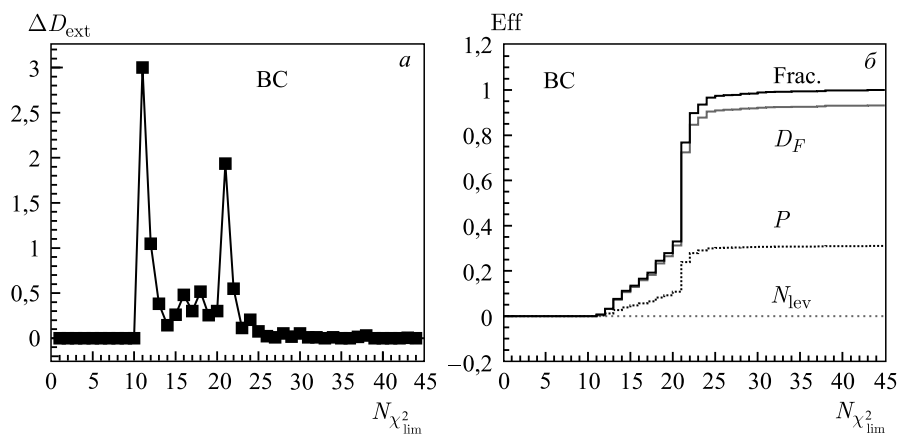


Рис. 3. Зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (а) и эффективностей восстановления характеристик фракталов (б) от номера параметра  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для ВС-метода

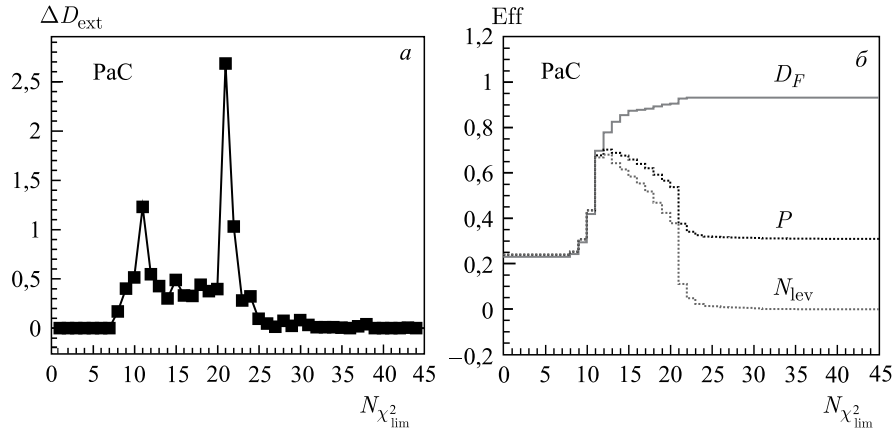


Рис. 4. Зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (а) и эффективностей восстановления характеристик фракталов (б) от номера параметра  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  для PaC-метода

Определим далее значение  $\chi_{\text{lim}}^2$  для PaC-метода. На рис. 4, а показана зависимость функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$ . Она имеет два плато при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 1-7$  и  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 27-45$ , а также пики при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 11$  и  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21$ . Аналогичное поведение функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\chi_{\text{lim}}^2})$  для PaC-метода наблюдалось и при анализе фракталов с зависимым делением [16]. Там же было показано, что для вычисления  $D_F$  величина  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  определяется как значение, при котором  $\Delta D_{\text{ext}}$  имеет второй пик. Для вычисления  $N_{\text{lev}}$  и  $P$  величина  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  равна первому значению между двумя пиками. Поведение эффективностей восстановления  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  от номера  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  (рис. 4, б) показывает, что установленный ранее выбор  $N_{\chi_{\text{lim}}^2}$  подтверждается и для фракталов с комбинированным делением. Максимальное значение  $\text{Eff}_{D_F}$  наблюдается при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21-45$ . Это соответствует выбору  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 21$ . Значения эффективностей  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  максимальны при  $N_{\chi_{\text{lim}}^2} = 13$ .

**3.3. Процедура поиска параметра Dev для SePaC-метода.** Параметр Dev определяет: является ли набор данных фракталом? Процедура поиска значения Dev подробно описана в работе [15]. Это значение находится при анализе функции  $\Delta D_{\text{ext}}(\text{Dev})$  для полученного оптимального значения параметра  $P_{\text{max}}$ . Область изменения Dev соответствует диапазону  $10^{-6}-0,9$ . В табл. 2 показано соответствие между номером  $N_{\text{Dev}}$  и значением Dev. На рис. 5, а приведена зависимость  $\Delta D_{\text{ext}}$  от номера  $N_{\text{Dev}}$ . Она имеет два пика при  $N_{\text{Dev}} = 8-11$  и  $N_{\text{Dev}} = 18$ , а также плато при  $N_{\text{Dev}} = 20-25$ . Эти особенности определяются поведением эффективностей  $\text{Eff}_{\text{frac}}$ ,  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  от номера  $N_{\text{Dev}}$  для наборов, восстановленных как фракталы (рис. 5, б). Быстрый рост  $\text{Eff}_{\text{frac}}$  наблюдается при  $N_{\text{Dev}} = 8-11$ , что соответствует первому пику функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$ . При  $N_{\text{Dev}} = 18$  (второй пик функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$ ) значение  $\text{Eff}_{\text{frac}}$  максимально и наблюдается резкое падение  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$ . При  $N_{\text{Dev}} = 20-25$  (плато функции  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$ ) видно насыщение этих эффективностей. Для определения области оптимальных значений параметра проанализируем зависимости  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  от номера  $N_{\text{Dev}}$  для всех тестовых фракталов (рис. 5, в). Максимальное значение  $\text{Eff}_{D_F}$  наблюдается при  $N_{\text{Dev}} = 18-25$ . Это соответствует области справа от второго пика в за-



висимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$  (рис. 5, *a*). Максимальные значения  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$  и  $\text{Eff}_P$  соответствуют  $N_{\text{Dev}} = 12-16$  (область между двумя пиками в зависимости  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$ ).

Установлено, что если функция  $\Delta D_{\text{ext}}(N_{\text{Dev}})$  имеет два пика и плато справа, то для вычисления фрактальной размерности величина Dev выбирается как значение для вто-

Таблица 2. Соответствие номера  $N_{\text{Dev}}$  и величины Dev

$N_{\text{Dev}}$	1	2	3	4	5	6	7	8
Dev	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
$N_{\text{Dev}}$	9	10	11	12	13	14	15	16
Dev	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
$N_{\text{Dev}}$	17	18	19	20	21	22	23	24
Dev	0,09	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7

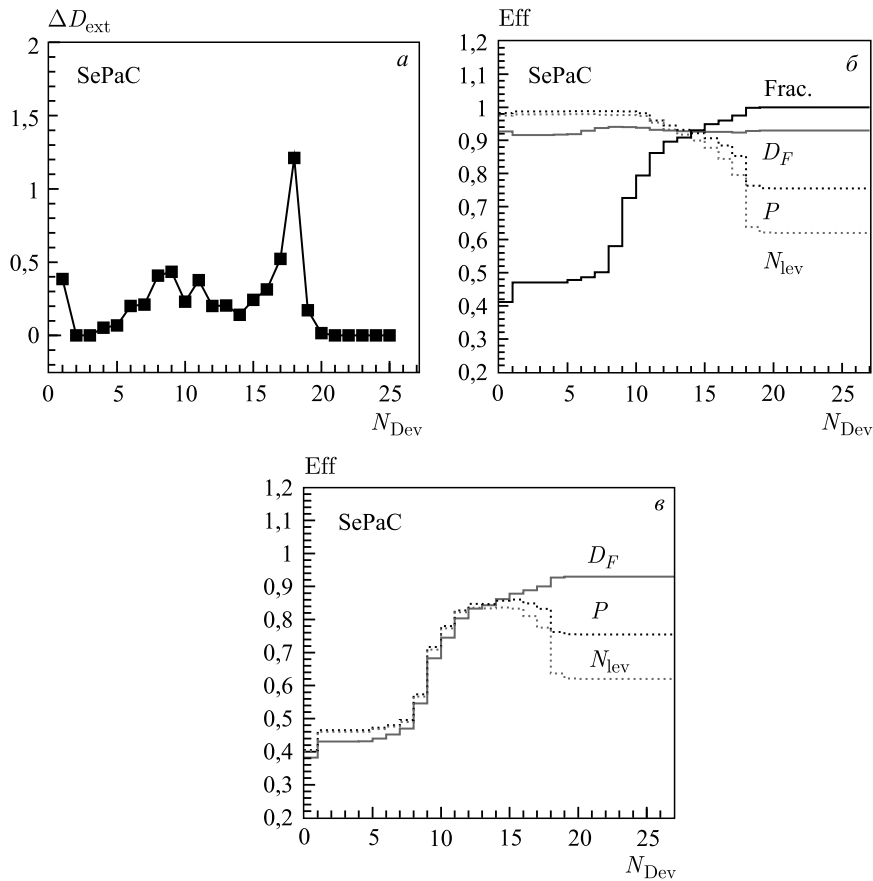


Рис. 5. Зависимости функции  $\Delta D_{\text{ext}}$  (*a*), эффективностей  $\text{Eff}_{\text{frac}}$ ,  $\text{Eff}_{D_F}$ ,  $\text{Eff}_{N_{\text{lev}}}$ ,  $\text{Eff}_P$  для наборов, восстанавливаемых как фракталы (*b*), и всех наборов данных (*в*) от номера параметра  $N_{\text{Dev}}$  для SePaC-метода

рого пика. Минимальное значение  $Dev$  перед вторым пиком используется для нахождения количества уровней и основания.

#### 4. СРАВНЕНИЕ ВС-, PaC- и SePaC-МЕТОДОВ

В данном разделе представлены результаты сравнения эффективностей и ошибок восстановления фрактальной размерности  $Err_{D_F}$ , количества уровней  $Err_{N_{lev}}$  и основания  $Err_P$ , полученные при анализе фракталов с комбинированным делением ВС-, PaC- и SePaC-методами.

На рис. 6, *a* приведено нормированное распределение ошибки  $Err_{D_F}$  для ВС-метода. Максимум распределения имеет отрицательное значение  $Err_{D_F} = -0,03$ . Это свидетельствует о том, что размерность этих фракталов незначительно меньше тестовой. В работах [15, 16] показано, что восстанавливаемая размерность ВС-методом для большинства фракталов с независимым делением меньше, а с зависимым делением больше тестовой. Таким образом, если в наборе данных присутствуют фракталы с различными типами деления, то распределение фрактальных размерностей будет искажаться. Как отмечено в п. 2.1, ВС-метод использует только одно покрытие с  $P = 2$ . Поэтому основание  $P$  и количество уровней  $N_{lev}$  не могут быть определены данным методом, а нормированные распределения ошибок  $Err_P$  и  $Err_{N_{lev}}$  (рис. 6, *б*, *в*) характеризуют только

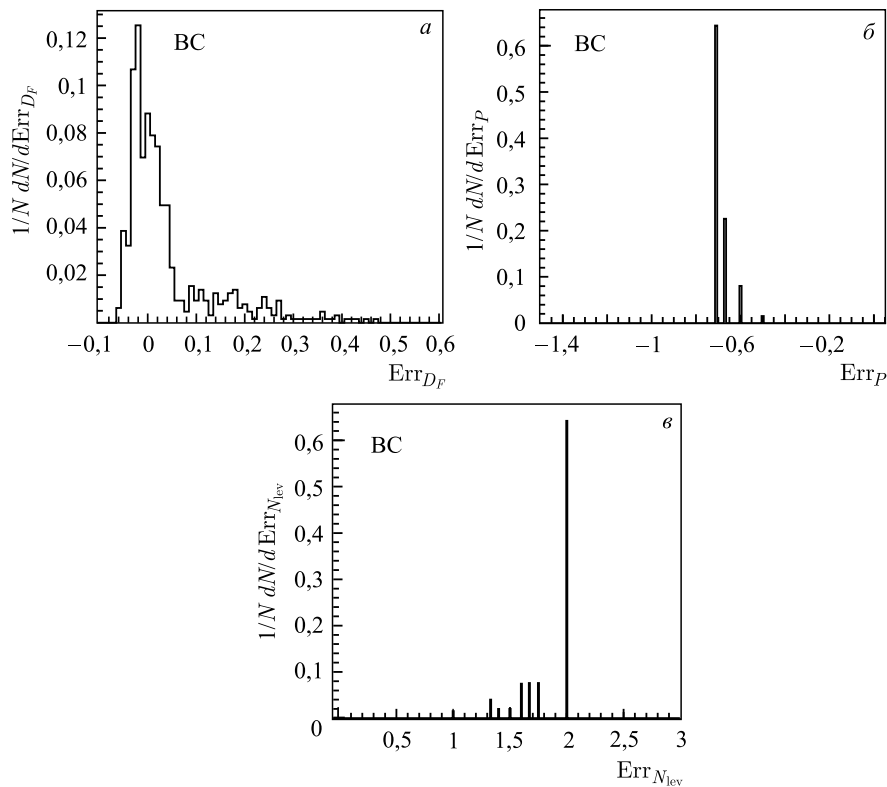


Рис. 6. Нормированные распределения ошибок фрактальной размерности  $Err_{D_F}$  (*a*), основания  $Err_P$  (*б*) и количества уровней  $Err_{N_{lev}}$  (*в*) для ВС-метода

набор данных [15]. На рис. 7, *a* представлено нормированное распределение ошибки  $\text{Err}_{D_F}$  для PaC-метода. Максимум распределения соответствует  $\text{Err}_{D_F} = 0$ . Размерность этих фракталов восстанавливается точно. В [15, 16] установлено, что восстанавливаемая размерность PaC-методом для большинства фракталов с независимым делением равна, а с зависимым делением больше тестовой. Поэтому если в наборе данных присутствуют фракталы с различным типом деления, то для PaC-метода распределение фрактальных размерностей будет искажаться меньше, чем для ВС-метода. Нормированные распределения ошибок  $\text{Err}_P$  и  $\text{Err}_{N_{\text{lev}}}$  представлены на рис. 7, *б, в*. Видно, что количество уровней и основание определяются точно для 56–58 % тестовых фракталов.

На рис. 8, *a* приведено нормированное распределение ошибки  $\text{Err}_{D_F}$  для SePaC-метода. Максимум распределения соответствует  $\text{Err}_{D_F} = 0,02$ . Размерность этих фракталов незначительно превышает тестовую. В [15, 16] показано, что для большинства фракталов с независимым и зависимым делением восстанавливаемая размерность SePaC-методом равна тестовой. Таким образом, если в наборе данных присутствуют фракталы с различным типом деления, то для SePaC-метода распределение фрактальных размерностей будет искажаться меньше, чем для ВС- и PaC-методов. Нормированные распределения ошибок  $\text{Err}_P$  и  $\text{Err}_{N_{\text{lev}}}$  представлены на рис. 8, *б, в*. Количество уровней и основание определяются точно для 69 % тестовых фракталов. В табл. 3 приведены результаты срав-

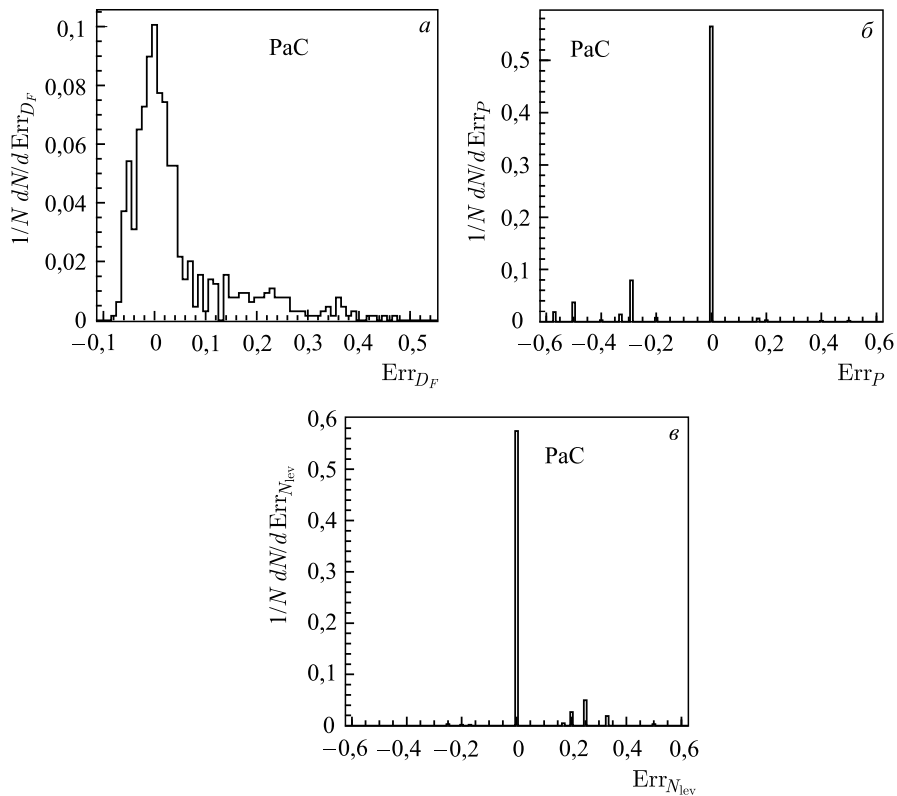


Рис. 7. Нормированные распределения ошибок фрактальной размерности  $\text{Err}_{D_F}$  (*a*), основания  $\text{Err}_P$  (*б*) и количества уровней  $\text{Err}_{N_{\text{lev}}}$  (*в*) для PaC-метода

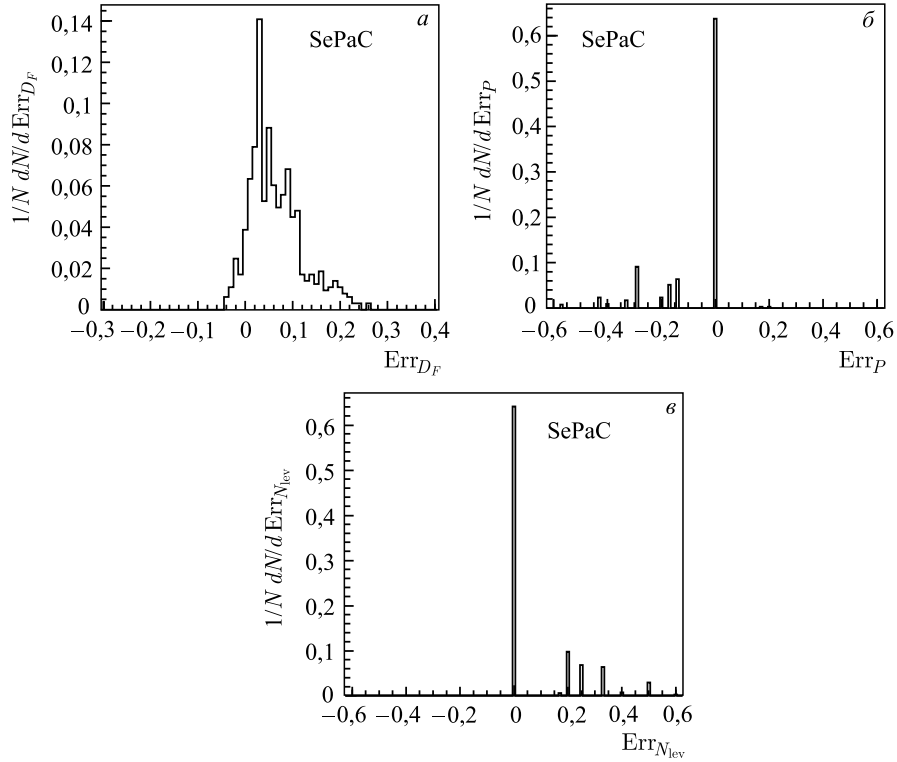


Рис. 8. Нормированные распределения ошибок восстановления фрактальной размерности  $Err_{D_F}$  (а), основания  $Err_P$  (б) и количества уровней  $Err_{N_{lev}}$  (в) для SePaC-метода

Таблица 3. Эффективности восстановления характеристик фракталов с комбинированным делением, полученные ВС-, PaC- и SePaC-методами

Метод	Eff <sub>frac</sub> , %	Eff <sub>D<sub>F</sub></sub> , %	Eff <sub>N<sub>lev</sub></sub> , %	Eff <sub>P</sub> , %	Eff <sub>tot</sub> , %
BC	96,6	91	0	30	0
PaC	98,5	93	68	70	44
SePaC	99,4	93	84	86	67

нительного анализа эффективностей и ошибок восстановления  $D_F$ ,  $P$ ,  $N_{lev}$  рассматриваемыми методами при оптимальных значениях параметров для фракталов с комбинированным делением частей. Установлено, что эффективность восстановления фракталов  $Eff_{frac}$  для ВС-, PaC- и SePaC-методов составляет 96,6–99,4%. Фрактальная размерность для всех методов восстанавливается с эффективностью  $Eff_{D_F} = 91–93\%$ . Количество уровней  $N_{lev}$  не определяется ВС-методом. Для PaC- и SePaC-методов эффективность восстановления  $Eff_{N_{lev}}$  равна 68 и 84% соответственно. Основание  $P$  определяется с эффективностью 30, 70 и 86% для ВС-, PaC- и SePaC-методов соответственно. Полная эффективность (9) SePaC-метода составляет 67% и значительно превышает эффективности PaC- и ВС-методов.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ восстановления характеристик фракталов с комбинированным делением частей ВС-, PaC- и SePaC-методами. Найдены оптимальные значения параметров  $\chi_{\text{lim}}^2$ ,  $P_{\text{max}}$ , Dev этих методов. Они использовались для определения фрактальной размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{\text{lev}}$  и основания  $P$ . Установлено, что все методы с примерно одинаковой эффективностью восстанавливают количество фракталов и фрактальную размерность. Отмечается преимущество SePaC-метода перед PaC- и ВС-методами при определении числа уровней и основания фрактала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эйнштейн А. и др.* // А. Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. М.: Мир, 1979.
2. *Gilbert D.* Grundlagen der Geometrie. Leipzig, 1987.
3. *Pers A., Rosen N.* Quantum Limitation to the Measurement of Gravitational Field // *Phys. Rev.* 1960. V. 118. P. 335–336;  
*Markov M. A.* Can the Gravitational Field Prove Essential for the Theory of Elementary Particles? // *Prog. Theor. Phys., Suppl.* 1965. V. 85. P. 85–95;  
*t' Hooft G.* On the Quantum Structure of a Black Hole // *Nucl. Phys. B.* 1985. V. 256. P. 727–745.
4. *Vladimirov V. S., Volovich I. V.* Superanalysis. Differential Calculus // *Theor. Math. Phys.* 1984. V. 59. P. 3–27;  
*Vladimirov V. S., Volovich I. V.* *P*-adic Quantum Mechanics // *Commun. Math. Phys.* 1989. V. 123. P. 659–676.
5. *Brekke L., Freund P. G. O.* *P*-adic Numbers in Physics // *Phys. Rep.* 1993. V. 233. P. 1–66.
6. *Sjostrand T. et al.* // *Comp. Phys. Commun.* 2008. V. 178. P. 852–867.
7. *Hausdorff F.* Dimension und äusseres Mass // *Math. Ann.* 1919. V. 79. P. 157–179.
8. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982.
9. *Barabasi A., Stanley H.* Fractal Concepts in Surface Growth. New York: Cambridge Univ. Press, 1995.
10. *Roueff F., Véhel J. L.* A Regularization Approach to Fractional Dimension Estimation // *Proc. of the Conf. "Fractals 98"*, Malta, Oct. 1998.
11. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
12. *Павлов А. Н., Анищенко В. С.* Мультифрактальный анализ сложных сигналов // *УФН.* 2007. Т. 177, № 8. С. 859–876.
13. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* *P*-adic Coverage Method in Fractal Analysis of Showers // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2011. V. 8. P. 521.
14. *Dedovich T. G., Tokarev M. V.* Method of Systems of the Equations of *P*-adic Coverages for Fractal Analysis of Events // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2011. V. 9. P. 552.
15. *Дедович Т. Г., Токарев М. В.* Сравнение методов фрактального анализа при изучении фракталов с независимым делением частей // *Письма в ЭЧАЯ.* 2013. Т. 10, № 6(183). С. 791–804.
16. *Дедович Т. Г., Токарев М. В.* Анализ фракталов с зависимым делением частей ВС-, PaC- и SePaC-методами // *Письма в ЭЧАЯ.* 2013. Т. 10, № 6(183). С. 805–818.

Получено 20 октября 2015 г.