

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭКРАНИРОВКА АММ И КЭД-ЭФФЕКТЫ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ АТОМОВ ПРИ БОЛЬШИХ Z

А. А. Роечко¹, К. А. Свешников²

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

Рассмотрено эффективное взаимодействие $\Delta U_{\text{АММ}}$ аномалии магнитного момента (АММ) электрона с кулоновским полем протяженного ядра, когда с самого начала учитывается зависимость электронного формфактора $F_2(q^2)$ от q^2 , что приводит к возникновению динамической экранировки АММ на малых расстояниях $r \ll 1/m$. В рамках непертурбативного подхода рассмотрено поведение нижних электронных уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в сверхтяжелом протяженном ядре при $Z\alpha > 1$. Показано, что скорость роста вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ демонстрирует существенно немонотонное поведение с ростом Z . В то же время в области $Z \gg Z_{\text{cr},1s}$ сдвиг электронных уровней вблизи нижнего континуума монотонно убывает. Последний результат допускает обобщение на весь собственно энергетический вклад в сдвиг электронных уровней и тем самым на возможное поведение радиационных КЭД-эффектов с обменом виртуальным фотоном вне рамок теории возмущений (ТВ) по $Z\alpha$.

The effective interaction $\Delta U_{\text{АММ}}$ of the electron anomalous magnetic moment (АММ) with the Coulomb field of extended nucleus is considered by taking into account the dependence of the electronic form factor $F_2(q^2)$ on q^2 from the very beginning, which leads to dynamical screening of АММ at small distances $r \ll 1/m$. Within the nonperturbative approach, the behavior of the lowest states in the field of a superheavy extended nucleus with $Z\alpha > 1$, caused by $\Delta U_{\text{АММ}}$, is considered. It is shown that the growth rate of the contribution from $\Delta U_{\text{АММ}}$ demonstrates significantly nonmonotonic behavior with increasing Z . At the same time, in the region $Z \gg Z_{\text{cr},1s}$ the shift of the electronic levels near the threshold of the lower continuum decreases monotonically. The last result is generalized to the whole self-energy contribution to the shift of levels and so to the possible behavior of radiative QED-effects with virtual photon exchange outside the perturbation theory (PT) in $Z\alpha$.

PACS: 12.20.-m; 31.30.jf; 31.15-p

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие дираковского фермиона с кулоновским полем точечного источника с учетом аномалии магнитного момента (АММ) интенсивно исследовалось в [1–4, ссылки там] с целью исследования возможности возникновения резонансов в системах типа e^+e^- на масштабах порядка адронных размеров и масс за счет возможного возрастания роли

¹E-mail: roenko@physics.msu.ru

²E-mail: costa@bog.msu.ru

магнитных эффектов на предельно малых расстояниях. В настоящей работе мы рассмотрим принципиально другой аспект наличия у фермиона АММ, а именно, обусловленные им сдвиги нижних электронных уровней в поле протяженного кулоновского источника с большим $Z\alpha > 1$ (типа сверхтяжелого ядра) с непertурбативным учетом зависимости от величины заряда и размеров источника. Интерес к задаче связан с тем, что для $Z > Z_{cr,1s} \sim 170$ КЭД предсказывает непertурбативную перестройку вакуума, которая должна сопровождаться целым рядом нетривиальных эффектов, в частности, испусканием вакуумных позитронов [5–8 и ссылки там]. Однако многолетние эксперименты на установках GSI (Дармштадт) и в Аргоннской национальной лаборатории (США) так и не привели к однозначному выводу о статусе закритической области, что придает вопросу о роли непertурбативности в КЭД-эффектах при $Z > Z_{cr,1s}$ особую значимость [7–11]. В частности, последние существенно непertурбативные расчеты энергии поляризации вакуума при $Z > Z_{cr,1s}$ показывают, что КЭД-эффекты в закритической области действительно могут быть принципиально отличными от пертурбативного случая [11–13]. И хотя для атомного электрона ΔU_{AMM} является лишь одной из составляющих эффективного взаимодействия, возникающего за счет собственно энергетического вклада в полный радиационный сдвиг уровней, тем не менее, оно занимает выделенное положение, так как описывается локальным оператором, который сохраняет все необходимые для картины Фари свойства гамильтониана и поэтому допускает детальный непertурбативный анализ, причем не только по $Z\alpha$, но и частично по α/π , поскольку последний входит как множитель в константу связи при ΔU_{AMM} , а также сравнение результатов с теорией возмущений (ТВ).

Как известно, для электрона АММ возникает лишь в результате радиационных эффектов и не является характеристикой, исходно присущей электрону, поэтому в случае сильных внешних полей (или на предельно малых расстояниях $\ll 1/m$) необходимо учитывать зависимость электронного формфактора $F_2(q^2)$ от переданного импульса [2, 14, 15], в то время как эффективный потенциал Дирака–Паули

$$\Delta U_{AMM} = \frac{\Delta g_{free}}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (1)$$

справедлив лишь в пределе малых значений переданного импульса, когда эта зависимость не учитывается, т. е. $F_2(q^2) \simeq F_2(0)$. В общем случае вычисление формфакторов, отвечающих за АММ, требует самосогласованного учета как внешнего поля, так и электронной волновой функции (ВФ) [15]. Однако для стационарных состояний электрона даже в сверхтяжелых атомах при $Z > Z_{cr,1s}$ средний радиус электронной ВФ значительно превышает радиус ядра, так что время нахождения электрона внутри ядра не превышает нескольких процентов, поэтому для корректной оценки соответствующих формфакторов можно ограничиться теорией возмущений по α/π . Поскольку однопетлевая поправка к вершинной функции может быть записана через формфакторы электрона $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ в виде [16]

$$\Gamma^\mu(q^2) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i}{2m} F_2(q^2) \sigma^{\mu\nu} q_\nu, \quad (2)$$

в случае сверхсильных полей (или на предельно малых расстояниях $\ll 1/m$) в качестве эффективного потенциала взаимодействия АММ электрона с кулоновским полем

источника вместо (1) следует использовать выражение

$$\Delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{r}) = \frac{e}{2m} \sigma^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^{(\text{cl})}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$\mathcal{A}_\mu^{(\text{cl})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \tilde{A}_\mu^{(\text{cl})}(\mathbf{q}) F_2(-\mathbf{q}^2), \quad (4)$$

а $\tilde{A}_\mu^{(\text{cl})}(\mathbf{q})$ является фурье-образом потенциала внешнего поля $A_\mu^{(\text{cl})}(\mathbf{r})$.

Учет зависимости от переданного импульса приводит к тому, что возникает динамическая экранировка АММ в зависимости от координаты до кулоновского источника. В частности, для точечного источника оператор (3) при $r \rightarrow 0$ ведет себя за счет этой экранировки как $\sim \log mr$ [14], в то время как в отсутствие экранировки оператор Дирака–Паули (1) проявляет максимально допустимую для уравнения Дирака (УД) сингулярность $\sim 1/r^2$.

В настоящей работе будет получено выражение для эффективного потенциала (3) в случае протяженного ядра, который при $r \rightarrow 0$ исчезает $\sim r$. Кроме того, мы покажем, что динамическая экранировка АММ происходит прежде всего на малых расстояниях $r \ll 1/m$, а не за счет амплитуды внешнего поля, в результате чего непертурбативный и чисто пертурбативный подходы к учету $\Delta U_{\text{АММ}}$ приводят к совпадению в пределах точности расчетов. На примере электронных уровней с $n \leq 4$, $j \leq 3/2$ будет показано, что скорость роста вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ ведет себя существенно немонотонно с ростом Z по мере приближения к $Z_{\text{cr},nj}$, однако при дальнейшем увеличении Z в область $Z \gg Z_{\text{cr},1s}$ сдвиг электронных уровней вблизи границы отрицательного континуума за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ монотонно убывает.

1. ЭФФЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗА СЧЕТ АММ

Получим явное выражение для эффективного потенциала взаимодействия за счет АММ (3). Для атомного электрона потенциал внешнего поля имеет вид $A_\mu^{(\text{cl})}(\mathbf{r}) = \delta_{0,\mu} \Phi(r)$, где $\Phi(r)$ — сферически-симметричный кулоновский потенциал ядра. С учетом того, что в лидирующем приближении $F_2(0) = \alpha/2\pi \simeq \Delta g_{\text{free}}/2$, после интегрирования по углам в (4) получаем

$$\mathcal{A}_\mu^{(\text{cl})}(r) = -\frac{\Delta g_{\text{free}}}{2} \frac{Ze}{4\pi r} c(r) \delta_{\mu,0}, \quad c(r) = 2 \int_0^\infty q dq \sin qr \left(-\frac{1}{Ze} \tilde{\Phi}(q) \right) \frac{1}{\pi} \frac{F_2(-q^2)}{F_2(0)}. \quad (5)$$

Теперь эффективный потенциал (3) может быть переписан следующим образом:

$$\Delta U_{\text{АММ}}(r) = -i Z \lambda \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(-\frac{c(r)}{r} \right), \quad (6)$$

где $\lambda = \alpha^2/4\pi m$, $\alpha = e^2/4\pi$. Далее вопрос состоит в вычислении функции $c(r)$ для заданного кулоновского потенциала $\Phi(r)$. Эффективным методом вычисления интегралов типа (5) является расширение пределов интегрирования по четности до $(-\infty, \infty)$ и сведение их к интегралу от мнимой части электронного формфактора $\text{Im} F_2(q^2)$, которая имеет более простой вид, чем $F_2(q^2)$.

1.1. Точечный источник. Для точечного источника кулоновский потенциал и его фурье-образ $\tilde{\Phi}(q)$ имеют вид

$$\Phi(r) = -\frac{Ze}{4\pi r} e^{-\mu r}, \quad \tilde{\Phi}(q) = -\frac{Ze}{q^2 + \mu^2}, \quad (7)$$

где масса фотона μ введена для регуляризации интеграла в (5), что позволяет избавиться от полюса $\tilde{\Phi}(q)$ в нуле. В случае $\mu = 0$ необходимо было бы задавать специальные правила обхода полюса в нуле или уточнять, в каком смысле понимается интеграл, однако регуляризация с помощью $e^{-\mu r}$ позволяет сместить полюс с действительной оси и упростить дальнейшие вычисления. В этом случае для функции $c(r)$ получаем следующее выражение:

$$c(r) = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} q dq e^{iqr} \left(\frac{1}{q^2 + \mu^2} \right) \frac{1}{\pi} \frac{F_2(-q^2)}{F_2(0)}. \quad (8)$$

В (8) в верхней полуплоскости подынтегральная функция имеет полюс в точке $i\mu$, кроме того, электронный формфактор $F_2(-q^2)$ имеет разрез на мнимой оси, начинающийся при $q = 2mi$, скачок при переходе через который составляет $\Delta F_2(-q^2) = 2i \operatorname{Im} F_2(-q^2)$. В итоге, после сведения интеграла к контурному (см. рис. 1, а), выражение (8) после сведения интеграла к контурному (см. рис. 1, а), выражение (8) после перехода $\mu \rightarrow 0$ принимает вид [14]

$$c(r) = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} e^{-Qr} \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{Im} F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad (9)$$

где [17]

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} F_2(Q^2) = 2F_2(0) \frac{m^2}{Q^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4m^2/Q^2}}.$$

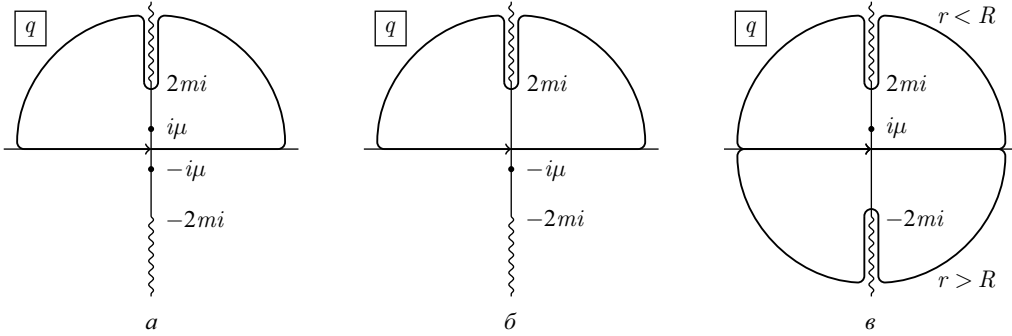


Рис. 1. Контурные интегрирования, используемые при вычислении интегралов в формулах (8), (16)

1.2. Протяженное ядро. Потенциал протяженного ядра, регуляризованный с помощью множителя $e^{-\mu r}$ по аналогии с (7), выберем в стандартном виде

$$\Phi(r) = \begin{cases} -\frac{Ze}{4\pi r} e^{-\mu r}, & r > R, \\ -\frac{Ze}{4\pi R} \frac{3R^2 - r^2}{2R^2} e^{-\mu r}, & r < R, \end{cases} \quad (10)$$

где радиус ядра R определяется через Z формулой (упрощенной) $R = 1,228935 (2,5Z)^{1/3} \text{ Фм}$ ¹. Тогда фурье-образ потенциала (10) может быть записан в виде следующего выражения:

$$\tilde{\Phi}(q) = -\frac{Ze}{q} \left(\tilde{\Phi}^{(+)}(q) e^{iqR} + \tilde{\Phi}^{(-)}(q) e^{-iqR} + \tilde{\Phi}^{(0)}(q) \right), \quad (11)$$

где

$$\tilde{\Phi}^{(+)}(q) = -3 \frac{qR + i(1 + R\mu)}{2R^3(q + i\mu)^4} e^{-R\mu}, \quad (12)$$

$$\tilde{\Phi}^{(-)}(q) = -3 \frac{qR - i(1 + R\mu)}{2R^3(q - i\mu)^4} e^{-R\mu}, \quad (13)$$

$$\tilde{\Phi}^{(0)}(q) = 3q\mu \frac{q^4 R^2 + \mu^2 (-4 + R^2 \mu^2) + 2q^2 (2 + R^2 \mu^2)}{R^3 (q^2 + \mu^2)^4}. \quad (14)$$

После подстановки (11) в (5) получаем

$$c(r) = J^{(+)}(r) + J^{(-)}(r) + J^{(0)}(r), \quad (15)$$

где

$$J^{(\pm)} = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iq(r \pm R)} \tilde{\Phi}^{(\pm)}(q) \frac{1}{\pi} \frac{F_2(-q^2)}{F_2(0)}, \quad (16a)$$

$$J^{(0)} = \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} dq e^{iqr} \tilde{\Phi}^{(0)}(q) \frac{1}{\pi} \frac{F_2(-q^2)}{F_2(0)}. \quad (16b)$$

Интеграл $J^{(-)}$ вычисляется по-разному в случаях $r < R$ и $r > R$, а интегралы $J^{(+)}$, $J^{(0)}$ имеют одинаковый вид на всем интервале $r \in (0, \infty)$. В интеграл $J^{(0)}$ (контур интегрирования имеет такой же вид (рис. 1, *a*), как и в случае точечного ядра) вклад дает только полюс $i\mu$, так как $\tilde{\Phi}^{(0)} \propto \mu$, и вклад от разреза оказывается нулевым после снятия регуляризации $\mu \rightarrow 0$. Фурье-образ $\tilde{\Phi}^{(+)}$ не имеет полюсов в верхней полуплоскости, поэтому интеграл $J^{(+)}$ равен интегралу вдоль разреза функции $F_2(-q^2)$ от скачка подынтегральной функции при переходе с одного берега разреза на другой (см. рис. 1, *b*). При $r < R$ в $J^{(-)}$ остается только вклад от разреза $q \in (-2mi, -i\infty)$, так как у $\tilde{\Phi}^{(-)}$ нет полюсов в нижней полуплоскости, при $r > R$ в интеграл $J^{(-)}$ имеем вклад от полюса $i\mu$ и от разреза $q \in (2mi, i\infty)$ (см. рис. 1, *c*). В итоге получаем следующие выражения для

¹Коэффициент в этой формуле выбран таким образом, чтобы в чисто кулоновской задаче с потенциалом $\Phi(r)$ уровень $1s_{1/2}$ почти достигал порога отрицательного континуума при $Z = 170$ с энергией связи $\simeq 1,99999 m$.

интегралов (16):

$$J^{(0)}(r) = \frac{1}{2R^3} \left\{ r(3R^2 - r^2) + 3i(r^2 - R^2) \frac{F_2'(0)}{F_2(0)} + 3r \frac{F_2''(0)}{F_2(0)} - i \frac{F_2'''(0)}{F_2(0)} \right\}, \quad (17)$$

$$J^{(+)}(r) = - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3(QR + 1)}{R^3 Q^3} e^{-Q(r+R)} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad (18)$$

$$J^{(-)}(r) = \frac{1}{2R^3} \left\{ (r - R)^2(r + 2R) - 3i(r^2 - R^2) \frac{F_2'(0)}{F_2(0)} - 3r \frac{F_2''(0)}{F_2(0)} + i \frac{F_2'''(0)}{F_2(0)} \right\} - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3(QR - 1)}{R^3 Q^3} e^{-Q(r-R)} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r > R, \quad (19)$$

$$J^{(-)}(r) = \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3(QR + 1)}{R^3 Q^3} e^{-Q(R-r)} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r < R, \quad (20)$$

которые с учетом $F_2'(0) = 0$, $F_2''(0) = -F_2(0)/3m^2$, $F_2'''(0) = 0$ собираются в итоговое выражение для функции $c(r)$ для протяженного однородного заряженного ядра (10):

$$c(r) = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3QR \cosh QR - 3 \sinh QR}{R^3 Q^3} e^{-Qr} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r > R, \quad (21a)$$

$$c(r) = \frac{(3R^2 - r^2)}{2R^3} r - \frac{r}{2m^2 R^3} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3(QR + 1)}{R^3 Q^3} \sinh QR e^{-QR} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im } F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r < R. \quad (21b)$$

Сама по себе функция $c(r)$ не имеет явного физического смысла, однако выражение $\Delta g_{\text{free}} c(r)$ может интерпретироваться как зависимость АММ электрона во внешнем поле от координаты r . Анализ выражений (9), (21) показывает, что $c(r) \rightarrow 1$ в области $r \gtrsim 1/m$, а при $r \rightarrow 0$ монотонно стремится к нулю. Таким образом, вне зависимости от величины заряда кулоновского источника поведение эффективного потенциала (6) существенно отличается от (1) прежде всего на малых расстояниях $r \ll 1/m$, практически совпадая в низкоэнергетическом пределе, т. е. на расстояниях, больших $1/m$.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА С $\Delta U_{\text{АММ}}$

Общий вид УД для электрона в кулоновском поле ядра с учетом дополнительного эффективного взаимодействия за счет АММ (6) имеет вид ($\hbar = c = m = 1$)

$$(\alpha \mathbf{p} + \beta + U(r) + \Delta U_{\text{АММ}}) \psi = E \psi, \quad (22)$$

где $U(r) = e\Phi(r)$ — кулоновский потенциал ядра, и $\Phi(r)$ выбирается в виде (10). В качестве источника $\Delta U_{\text{АММ}}$ будем рассматривать все протяженное ядро, так что в потенциале (6) используется $c(r)$, определенная в (21). Тогда из уравнения (22) для верхней

$i\varphi$ и нижней χ компонент дираковского биспинора следует

$$\begin{aligned} i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + \lambda[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})])\varphi &= (\epsilon + 1 - U(r))\chi, \\ i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \lambda[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})])\chi &= -(\epsilon - 1 - U(r))\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

где $V(\mathbf{r}) = Zc(r)/r$.

В этом случае будут по-прежнему сохраняться полный момент электрона \mathbf{j} и оператор $k = \beta(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l} + 1)$, поэтому в стандартном представлении для матриц Дирака верхний и нижний спиноры электронной ВФ будут содержать шаровые спиноры Ω_{jlm_j} и $\Omega_{j'l'm_j}$ различной четности и радиальные функции $if_j(r)$ и $g_j(r)$,

$$\psi_{jm_j} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} if_j(r) \Omega_{jlm_j} \\ g_j(r) \Omega_{j'l'm_j} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

При этом $f_j(r)$ и $g_j(r)$ вещественны и $l + l' = 2j$. Определение сферических гармоник и шаровых спиноров следует из [18], при этом $\Omega_{j'l'm_j} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\Omega_{jlm_j}$. Состояния с $j = l + 1/2$ и различной четностью отличаются значениями $\kappa = \pm(j + 1/2)$ и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\partial_r - Z\lambda\nu(r)/r^2 + \kappa/r) f_j &= (\epsilon + 1 - U(r))g_j, \\ (\partial_r + Z\lambda\nu(r)/r^2 - \kappa/r) g_j &= -(\epsilon - 1 - U(r))f_j, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\nu(r) = c(r) - rc'(r)$.

Отметим, что в случае точечного ядра член $\nu(r)/r^2$ ведет себя при $r \ll 1$ как $\log r$ (что соответствует $c(r) \rightarrow 0$), а при $r \rightarrow \infty$ как $1/r^2$ (что соответствует $c(r) \rightarrow 1$) [14]. Для протяженного ядра отличие в поведении $\nu(r)/r^2$ по сравнению с точечным источником возникает на масштабах порядка радиуса ядра, а при $r \ll R$ член $\nu_N(r)/r^2$ ведет себя почти линейно и обращается в нуль в центре ядра (рис. 2), что опять же свидетельствует о том, что в динамической экранировке АММ существенны именно предельно малые расстояния, а не амплитуда поля, которая в центре ядра также исчезает.

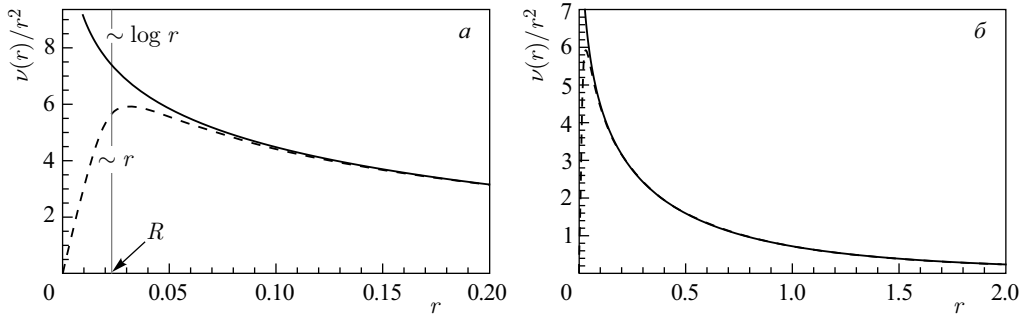


Рис. 2. Поведение члена $\nu(r)/r^2$ в уравнениях (25) на малых (а) и больших (б) расстояниях для точечного кулоновского источника (сплошная линия) и протяженного ядра радиуса R (штриховая)

Численное решение системы (25) показывает, что для ядра с критическим зарядом $Z_{\text{cr},1s} = 170$ уровень $1s_{1/2}$ (который соответствует $\kappa = -1$), а также уровень $2p_{1/2}$ ($\kappa = 1$) для ядра с $Z_{\text{cr},2p} = 183$ будут сдвинуты относительно чисто кулоновского случая

с потенциалом (10) следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170) &= 1,12 \text{ кэВ}, \\ \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183) &= -1,09 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (26)$$

Эти результаты для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в сдвиг уровней являются полностью непертурбативными по $Z\alpha$ и (частично) по α/π за счет того, что фактической константой связи в $\Delta U_{\text{АММ}}$ в данном случае является $Z\lambda$, куда α/π входит как множитель. Подчеркнем, однако, что эта зависимость не имеет ничего общего с суммированием разложения по петлям для АММ, поскольку исходное выражение для оператора (5) основано на однопетлевом приближении для вершинного фактора. Но поскольку в рамках одночастичного УД (22) имеется возможность непертурбативного учета вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$, этим следует воспользоваться, чтобы сравнить результаты пертурбативного и непертурбативного подходов к учету $\Delta U_{\text{АММ}}$ при больших Z , имея последние существенно непертурбативные расчеты поляризации вакуума при $Z > Z_{\text{cr},1s}$ [11–13], которые демонстрируют явно нелинейный характер этого эффекта за рамками ТВ.

Прежде всего результаты (26) следует сравнить с оценкой сдвига по ТВ, когда $\Delta U_{\text{АММ}}$ рассматривается как возмущение кулоновского потенциала (10). В этом случае соответствующая оценка может быть сделана на основе кулоновских ВФ $\psi_{nj}^{(0)}$ по формуле

$$\mathcal{D}\epsilon(nj)^{\text{PT}} = \langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = -2Z\lambda \int_0^{\infty} dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r) \nu(r), \quad (27)$$

и она дает значения, совпадающие с непертурбативными результатами (26) с точностью не хуже 0,1 %. Полученные значения (26) находятся в соответствии с полным собственно энергетическим сдвигом при $Z = 170$, который составляет $\Delta E_{\text{SE}}(1s_{1/2}) \simeq 11,0 \text{ кэВ}$ [19].

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА СДВИГОВ НИЖНИХ УРОВНЕЙ ЗА СЧЕТ $\Delta U_{\text{АММ}}$

Теперь рассмотрим зависимость сдвигов энергетических уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ от Z . Для атомного электрона сдвиг, обусловленный $\Delta U_{\text{АММ}}$, является частью собственно энергетического вклада в лэмбовский сдвиг, который в пертурбативной КЭД пропорционален Z^4/n^3 [20] и обычно представляется в терминах функции $F_{nj}(Z\alpha)$, определяемой в соответствии с выражением

$$\Delta E_{nj}^{\text{SE}}(Z\alpha) = \frac{Z^4 \alpha^5}{\pi n^3} F_{nj}(Z\alpha). \quad (28)$$

В пертурбативной ТВ $F_{nj}(Z\alpha)$ найдено для нижних электронных уровней водородоподобных атомов с зарядом ядра $Z = 1-110$ с учетом всех порядков по $Z\alpha$ [21–25 и ссылки там]. Для случая $Z\alpha > 1$ вычисление $\Delta E_{1s_{1/2}}^{\text{SE}}$ с точностью порядка нескольких процентов для зарядов ядра $Z = 140, 150, 160, 170$ приведено в работах [19, 26].

Для оператора Дирака–Паули (1) пертурбативные вычисления вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в F_{nj} проводились в [27] в приближении точечного ядра (для $Z < 137$) и в [28] для протяженного ядра с той же зависимостью $R(Z)$, что и в (10). При малых Z поведение

$F_{nj}^{\text{АММ}}(Z\alpha)$ для оператора Дирака–Паули в случае протяженного и точечного ядер практически совпадает, а с увеличением заряда ядра наблюдается их быстрый рост. При этом $F_{nj}^{\text{АММ}}(Z\alpha)$ для точечного ядра имеет два полюса при субкритическом $Z\alpha = \sqrt{3}/2$ и критическом $Z\alpha = 1$ значениях заряда ядра [27]. Однако с учетом эффективной зависимости АММ от расстояния для протяженного ядра (21) $F_{nj}^{\text{АММ}}(Z\alpha)$ ведет себя существенно иначе. На рис. 3, *a* показана функция $F_{nj}^{\text{АММ}}(Z\alpha)$ для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, рассчитанная в рамках непертурбативного подхода на основе (26), а также аналогичная зависимость для оператора Дирака–Паули (1) в случае точечного и протяженного ядер. В частности, из рис. 3, *a* следует, что для нижнего уровня $1s_{1/2}$ учет зависимости электронного формфактора от величины переданного импульса приводит к тому, что теперь $F_{1s_{1/2}}^{\text{АММ}}(Z\alpha)$ качественно повторяет поведение $F_{1s_{1/2}}(Z\alpha)$ для суммарного собственно энергетического сдвига, а именно уменьшается с ростом заряда ядра вплоть до $Z \sim 90$, после чего начинает расти (ср. с [20, 26]).

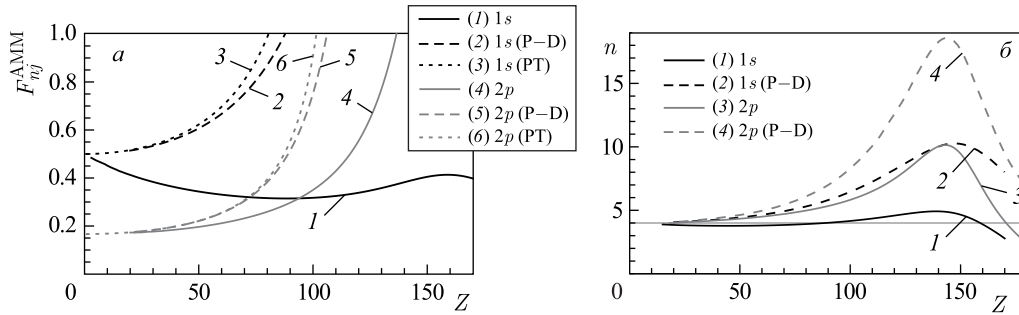


Рис. 3. Функция $F_{nj}^{\text{АММ}}$ (*a*) и степень роста (*б*) для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ как функция заряда ядра Z для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$. Для сравнения показаны зависимости для $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде оператора Дирака–Паули (1) (обозначены P–D), а также вычисленные по ТВ для точечного ядра из работы [27] (обозначены PT)

Другой важной характеристикой КЭД-эффектов является вид их степенной зависимости от Z . На рис. 3, *б* показано поведение скорости роста $n(Z)$ сдвига уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ как функции Z , определенной через логарифмическую производную

$$n(Z) = Z \frac{\partial}{\partial Z} \ln (|\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}|). \quad (29)$$

Из рис. 3, *б* следует, что в данном случае поведение $n(Z)$ в соответствии с (28), т. е. рост КЭД-эффектов $\sim Z^4$, имеет место вплоть до $Z \sim 60-80$, причем $n(Z)$ для $1s_{1/2}$ имеет пологий минимум при $Z \sim 50$ и стремится к $n = 4$ при $Z \rightarrow 0$ снизу, но далее сдвиг от $\Delta U_{\text{АММ}}$ показывает существенное увеличение степени роста, которое достигает максимума при $Z \simeq 147$ как для $1s_{1/2}$, так и для $2p_{1/2}$, причем этот максимум скорости роста значительно более выражен для $2p_{1/2}$. Для потенциала эффективного взаимодействия в виде оператора Дирака–Паули общий вид зависимости $n(Z)$ такой же, с тем лишь отличием, что максимум при $Z \simeq 147$ более выражен. Вообще говоря, такое поведение для КЭД-эффектов достаточно естественно, поскольку при $Z\alpha > 1$ следует ожидать существенного роста непертурбативности по $Z\alpha$, а максимум скорости роста

при $Z \simeq 147$ является специфической чертой $\Delta U_{\text{АММ}}$. В частности, для точечного ядра в случае $\Delta U_{\text{АММ}}$ без учета экранировки на малых расстояниях первым уровнем, достигающим нижнего континуума как раз при $Z \simeq 147$, оказывается $2p_{1/2}$, причем с такой же (максимальной) скоростью опускания уровня на пороге нижнего континуума [10].

Теперь рассмотрим сдвиги уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ при $Z \gg Z_{\text{кр},1s}$, когда нижнего континуума будут достигать не только уровни $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, но и уровни с другими квантовыми числами nlj . Так, при $Z \simeq 234$ в нижний континуум погружается уровень $2s_{1/2}$, при $Z \simeq 258$ — уровень $3p_{1/2}$ и т. д. На рис. 4, а, б показана зависимость функций $F_{nj}^{\text{АММ}}$ для сдвига, обусловленного $\Delta U_{\text{АММ}}$, от заряда ядра для нижних уровней с $n \leq 4$ и $j \leq 3/2$. Общее поведение функций $F_{nj}^{\text{АММ}}$ в области $Z < 110$ достаточно плавно и для уровней с $j = l + 1/2$ в целом повторяет поведение собственно энергетического вклада в лэмбовский сдвиг. Так, функция $F_{nj}^{\text{АММ}}$ для уровня $1s_{1/2}$ имеет минимум при $Z \sim 90$ (ср. с [26]), для уровней $2s_{1/2}$, $3s_{1/2}$ имеет минимум при $Z \sim 70-80$, для уровней $np_{3/2}$ монотонно увеличивается с ростом Z (ср. с [22, 23]). Однако с ростом Z степенное поведение сдвига за счет АММ становится более сложным.

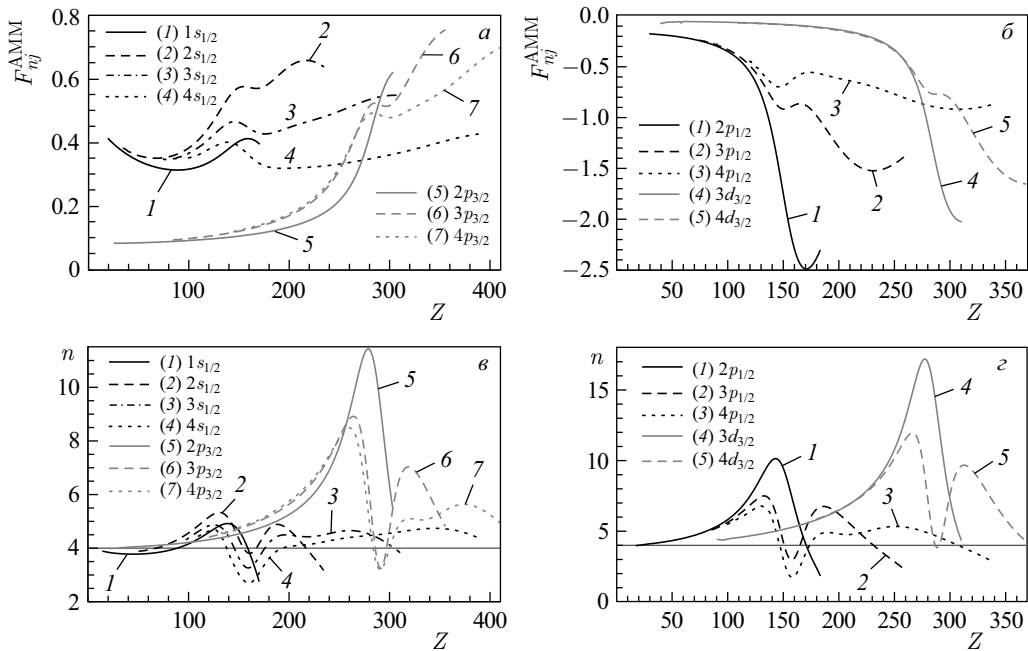


Рис. 4. Функция $F_{nj}^{\text{АММ}}$ и степень роста для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ как функция заряда ядра Z для уровней с $n \leq 4$ и $j = 1/2, 3/2$. При этом на рис. а, в показаны уровни с $j = l + 1/2$, а на рис. б, г уровни с $j = l - 1/2$

На рис. 4, в, г показано поведение скорости роста, определенной через логарифмическую производную (29), для тех же электронных уровней. При малых Z скорость роста $n(Z)$ соответствует $\sim Z^4$, однако с ростом Z по мере приближения уровня к границе нижнего континуума $n(Z)$ имеет резкий максимум (максимумы). Для каждой серии

уровней с фиксированными значениями lj степень роста для нижнего из этих уровней (например, $1s_{1/2}$) имеет один максимум, положение которого практически соответствует значению Z_{cr} , при котором происходит падение первого уровня с таким же j в случае точечного ядра без учета экранировки АММ (см. [10]); для следующего уровня (например, $2s_{1/2}$) — два максимума, причем первый из них практически повторяет пик в скорости роста для предыдущего уровня, а новый максимум вновь соответствует Z_{cr} в случае точечного неэкранированного ядра для следующего уровня с таким же j ; и т. д. Естественно, такое немонотонное поведение имеют и функции F_{nj}^{AMM} для этих уровней, но их поведение также обладает следующей особенностью: в каждой серии уровней nlj в области больших Z величина $F_{nj}^{AMM}(Z\alpha)$ уменьшается с ростом номера уровня n при заданном Z (за исключением нижнего уровня в сериях с $\kappa < 0$), т. е. при больших Z величина рассматриваемого КЭД-эффекта убывает быстрее чем $1/n^3$.

Непосредственный интерес представляет величина радиационных эффектов у границы нижнего континуума. На рис. 5 показаны сдвиги кулоновских уровней nlj за счет ΔU_{AMM} , вычисленные через (26) при таких Z из диапазона $Z_{cr,1s} < Z < 1000$, при которых они оказываются практически у порога нижнего континуума с $\epsilon_{nlj} \simeq -1$. В каждой серии уровней с фиксированными значениями lj сдвиг уровня $\mathcal{D}\epsilon_{nlj}$ максимален при наименьшем возможном n , а по мере увеличения n (и тем самым Z) величина $\mathcal{D}\epsilon_{nlj}$ уменьшается по абсолютной величине. Последний эффект легко понять на основе вычислений по ТВ в соответствии с (27). С увеличением n радиальные ВФ $f_{nj}^{(0)}(r)$ и $g_{nj}^{(0)}(r)$ приобретают дополнительные нули, а произведение $f_{nj}^{(0)}(r)g_{nj}^{(0)}(r)$ становится знакопеременным и начинает осциллировать тем сильнее, чем больше n . И несмотря на тот факт, что область, в которой радиальные ВФ существенно отличны от нуля, увеличивается с ростом n , итоговое значение интегралов типа (27), определяющих сдвиг за счет ΔU_{AMM} , при этом уменьшается. В этом случае наибольший сдвиг уровней в каждой серии nlj у границы нижнего континуума не превышает нескольких килоэлектронвольт и медленно растет с ростом lj .

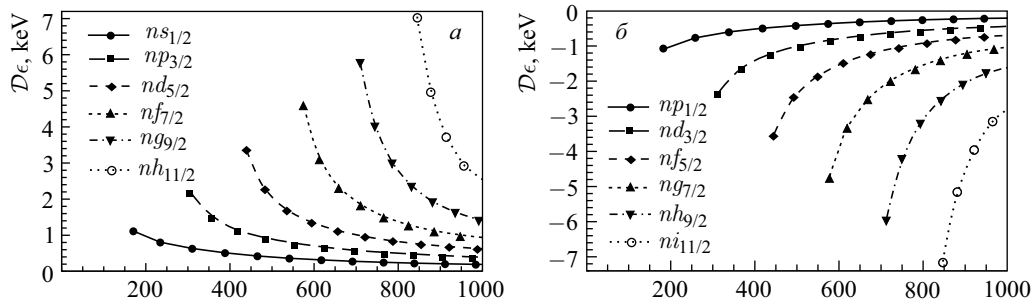


Рис. 5. Сдвиги уровней с различными nlj за счет ΔU_{AMM} , когда они оказываются почти у порога нижнего континуума, в диапазоне $Z_{cr,1s} < Z < 1000$. Отдельные траектории соответствуют уровням с фиксированными четностью и lj . При этом на рис. *a* показаны уровни с $\kappa < 0$, $j = l + 1/2$, а на рис. *б* — с $\kappa > 0$, $j = l - 1/2$

Однако само по себе убывание $\mathcal{D}\epsilon_{nlj}$ с ростом n ни о чем не говорит, интерес представляет в первую очередь отличие $\mathcal{D}\epsilon_{nlj}$ от пертурбативного результата Z^4/n^3 для

Значения $F_{nj}(Z_{cr}\alpha)$ для сдвига за счет ΔU_{AMM} для уровней с различными nlj на границе нижнего континуума в диапазоне $Z_{cr,1s} < Z < 1000$

n	$ns_{1/2}$	$np_{3/2}$	$nd_{5/2}$	$nf_{7/2}$	$ng_{9/2}$	$nh_{11/2}$
1	0,398	0	0	0	0	0
2	0,641	0,624	0	0	0	0
3	0,551	0,764	0,736	0	0	0
4	0,431	0,722	0,805	0,809	0	0
5	0,338	0,626	0,775	0,827	0,851	0
6	0,272	0,529	0,706	0,797	0,844	0,886
7	0,223	0,449	0,624	0,740	0,807	0,859
8	0,187	0,384	0,549	0,671	0,754	0,814
9	0,159	0,333	0,483	0,606	0,695	0,763
10	0,137	0,292	0,427	0,544	0,638	—
11	0,120	0,258	0,381	0,490	0,583	—
12	0,106	0,229	0,342	—	—	—
n	$np_{1/2}$	$nd_{3/2}$	$nf_{5/2}$	$ng_{7/2}$	$nh_{9/2}$	$ni_{11/2}$
2	-2,309	0	0	0	0	0
3	-1,393	-2,031	0	0	0	0
4	-0,874	-1,669	-1,749	0	0	0
5	-0,601	-1,273	-1,559	-1,586	0	0
6	-0,442	-0,969	-1,318	-1,447	-1,486	0
7	-0,341	-0,754	-1,089	-1,278	-1,358	-1,414
8	-0,272	-0,604	-0,900	-1,107	-1,228	-1,296
9	-0,223	-0,496	-0,750	-0,957	-1,095	-1,186
10	-0,187	-0,416	-0,633	-0,823	-0,968	-1,071
11	-0,160	-0,355	-0,543	-0,714	-0,855	—
12	-0,138	-0,307	-0,472	-0,624	—	—

таких Z . Для этого в таблице приведены значения $F_{nj}^{AMM}(Z_{cr}\alpha)$ для сдвига уровней на границе нижнего континуума за счет ΔU_{AMM} в диапазоне $Z_{cr,1s} < Z < 1000$, которые монотонно убывают в каждой серии уровней nlj с ростом n и тем самым с ростом Z , что подтверждает выводы, сделанные ранее из рис. 4, а именно, что для больших Z верно $|F_{n+1j}^{AMM}(Z\alpha)| < |F_{nj}^{AMM}(Z\alpha)|$. Исключения составляют только самые нижние уровни в сериях с $\kappa = -1, -2, -3, -4$ (т. е. когда $l = j - 1/2$ и $j = 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$), для которых сначала, на первом шаге, $F_{nj}^{AMM}(Z_{cr}\alpha)$ увеличиваются, но далее также монотонно убывают. А поскольку выше было показано, что с учетом экранировки АММ поведение $F_{nj}^{AMM}(Z\alpha)$ качественно воспроизводит поведение $F_{nj}(Z\alpha)$ для суммарного сдвига нижних уровней, следует ожидать, что в закритической области убывание с ростом Z будет иметь место и для всего собственно энергетического вклада.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе рассмотрено, как с учетом динамической экранировки АММ электрона на малых расстояниях ведут себя нижние электронные уровни за счет ΔU_{AMM} в сверхтяжелом протяженном ядре при $Z\alpha > 1$. При этом результаты для сдвигов

уровней были получены с помощью непертурбативного по α/π подхода к вычислению соответствующих эффектов в рамках УД (22). Еще раз подчеркнем, что в данном случае непертурбативность по α/π никак не связана с частичным суммированием петлевого разложения для АММ, но подразумевает эффекты, которые не могут быть в принципе получены в рамках стандартной ТВ. Интерес к этому вопросу обусловлен, в частности, последними существенно непертурбативными расчетами энергии поляризации вакуума при $Z > Z_{cr,1s}$ [11–13], которые демонстрируют явно нелинейный характер этого эффекта за рамками ТВ.

Кроме того, поскольку с учетом экранировки АММ поведение $F_{nj}^{AMM}(Z\alpha)$ качественно воспроизводит поведение $F_{nj}(Z\alpha)$ для суммарного собственно энергетического сдвига (см. рис. 4) в том диапазоне по Z , где для $F_{nj}(Z\alpha)$ имеются надежные результаты, возникает естественное предположение, что в закритической области убывание с ростом Z будет иметь место и для всего вклада в сдвиг уровней за счет собственной энергии, а тем самым и для других радиационных КЭД-эффектов с обменом виртуальным фотоном. В то же время в поведении вакуумной энергии, в которой основную роль играет вклад от фермионной петли, в закритической области по Z , т.е. вне рамок ТВ по $Z\alpha$, наблюдается существенно нелинейный рост эффекта [11–13], принципиально отличный от пертурбативного поведения, который тем самым не может быть скомпенсирован вкладом от радиационных поправок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barut A. O., Kraus J. Resonances in e^+e^- System due to Anomalous Magnetic Moment Interactions // Phys. Lett. B. 1975. V. 59, No. 2. P. 175–178.
2. Geiger K., Reinhardt J., Muller B., Greiner W. Magnetic Moment Interactions in the e^-e^+ System // Z. Phys. A. At. Nucl. 1988. V. 329, No. 1. P. 77–88.
3. Barut A. O. The Electron–Positron System at Short Distances // Z. Phys. A. At. Nucl. 1990. V. 336, No. 3. P. 317–320.
4. Reitz J. R., Mayer F. J. New Electromagnetic Bound States // J. Math. Phys. 2000. V. 41, No. 7. P. 4572–4581.
5. Greiner W., Mueller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. 2nd Ed. Berlin: Springer, 1985.
6. Popov V. S. Critical Charge in Quantum Electrodynamics // Phys. At. Nucl. 2001. V. 64, No. 3. P. 367–392.
7. Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S. S. Electron–Positron Pairs in Physics and Astrophysics: From Heavy Nuclei to Black Holes // Phys. Rep. 2010. V. 487, Nos. 1–4. P. 1–140; arXiv:0910.0974 [astro-ph.HE].
8. Rafelski J., Kirsch J., Mueller B., Reinhardt J., Greiner W. Probing QED Vacuum with Heavy Ions. arXiv:1604.08690. 2016.
9. Schwerdtfeger P., Pasteka L. F., Punnett A., Bowman P. O. Relativistic and Quantum Electrodynamical Effects in Superheavy Elements // Nucl. Phys. A. 2015. V. 944. P. 551–577.
10. Sveshnikov K. A., Khomovskii D. I. High Z Effects in Accounting for Radiative Component of the Electron Magnetic Moment in Hydrogen-Like Atoms // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10, No. 2. P. 119–131.
11. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Vacuum Energy of One-Dimensional Supercritical Dirac–Coulomb System // Int. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32, No. 11. P. 1750054.

12. Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K. Nonperturbative Effects of Vacuum Polarization for the Quasi-One-Dimensional Dirac–Coulomb System with $Z > Z_{cr}$ // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14, No. 5. P. 698–712.
13. Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K. Vacuum Effects for One-Dimensional “Hydrogen Atom” with $Z > Z_{cr}$ // Theor. Math. Phys. 2017. V. 193, No. 2. P. 1647–1674.
14. Lautrup B. The Short Distance Behaviour of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron // Phys. Lett. B. 1976. V. 62, No. 1. P. 103–104.
15. Barut A. O., Kraus J. Form-Factor Corrections to Superpositronium and Short-Distance Behavior of the Magnetic Moment of the Electron // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 161–164.
16. Itzykson C., Zuber J. B. Quantum Field Theory. New York: McGraw-Hill, 1980.
17. Barbieri R., Mignaco J. A., Remiddi E. Electron Form Factors up to Fourth Order. I // Nuovo Cim. A. 1972. V. 11, No. 4. P. 824–864.
18. Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental Functions. New York: McGraw-Hill, 1953. V. 1–2.
19. Soff G., Schlüter P., Müller B., Greiner W. Self-Energy of Electrons in Critical Fields // Phys. Rev. Lett. 1982. V. 48. P. 1465–1468.
20. Mohr P. J., Plunien G., Soff G. QED Corrections in Heavy Atoms // Phys. Rep. 1998. V. 293, No. 5. P. 227–369.
21. Mohr P. J. Self-Energy Radiative Corrections in Hydrogen-Like Systems // Ann. Phys. 1974. V. 88, No. 1. P. 26–51.
22. Mohr P. J. Self-Energy of the $n = 2$ States in a Strong Coulomb Field // Phys. Rev. A. 1982. V. 26. P. 2338–2354.
23. Mohr P. J., Kim Y. K. Self-Energy of Excited States in a Strong Coulomb Field // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. P. 2727–2735.
24. Johnson W. R., Soff G. The Lamb Shift in Hydrogen-Like Atoms, $1 \leq Z \leq 110$ // At. Data Nucl. Data Tables. 1985. V. 33, No. 3. P. 405–446.
25. Yerokhin V. A., Shabaev V. M. Lamb Shift of $n = 1$ and $n = 2$ States of Hydrogen-Like Atoms, $1 \leq Z \leq 110$ // J. Phys. Chem. Ref. Data. 2015. V. 44, No. 3. P. 033103.
26. Cheng K. T., Johnson W. R. Self-Energy Corrections to the K -Electron Binding in Heavy and Superheavy Atoms // Phys. Rev. A. 1976. V. 14. P. 1943–1948.
27. Barut A. O., Kraus J. Relativistic Formula for the Magnetic Part of the Lamb Shift and Its Z Dependence // Phys. Scripta. 1982. V. 25, No. 4. P. 561.
28. Sveshnikov K. A., Khomovskiy D. I. Perturbativity and Nonperturbativity in Large- Z Effects for Hydrogen-Like Atoms // Moscow Univ. Phys. Bull. 2016. V. 71, No. 5. P. 3.