

ПЕРТУРБАТИВНЫЕ И НЕПЕРТУРБАТИВНЫЕ АСПЕКТЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АММ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ С КУЛОНОВСКИМ ПОЛЕМ СВЕРХТЯЖЕЛОГО ЯДРА

А. А. Роечко¹, К. А. Свешников²

Физический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

В рамках пертурбативного и существенно непертурбативного подходов рассмотрено поведение нижних уровней дираковской частицы за счет взаимодействия $\Delta U_{\text{АММ}}$ аномалии магнитного момента (АММ) с кулоновским полем ядра при $Z\alpha > 1$, когда с самого начала учитывается полная зависимость волновых функций (ВФ) частицы от $Z\alpha$. Вклад от $\Delta U_{\text{АММ}}$ вычислялся как через ядро, рассматриваемое как однородно заряженный протяженный кулоновский источник, так и заданным в виде распределенной системы точечных u - и d -кварков. Показано, что в обоих случаях непертурбативный учет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в рамках уравнения Дирака (УД) приводит к совпадающим результатам. В то же время специфика $\Delta U_{\text{АММ}}$ проявляется в том, что при $\Delta g \simeq \text{const}$ результаты теории возмущений (ТВ) и непертурбативных вычислений существенно различаются, тогда как при наличии динамической экранировки АММ на малых расстояниях пертурбативные и непертурбативные способы учета $\Delta U_{\text{АММ}}$ в УД практически совпадают.

Within perturbative and significantly nonperturbative approaches, the behavior of the lowest levels of the Dirac particle due to the interaction $\Delta U_{\text{АММ}}$ of the particle's anomalous magnetic moment (АММ) with the Coulomb field of nucleus with $Z\alpha > 1$ is considered by taking into account the complete dependence of particle's wavefunction (WF) on $Z\alpha$. The contribution from $\Delta U_{\text{АММ}}$ was calculated via both the nucleus considered as a uniformly charged extended Coulomb source and as a distributed system of point u - and d -quarks. It is shown that in both cases nonperturbative account of $\Delta U_{\text{АММ}}$ in the Dirac equation (DE) leads to coinciding results. At the same time, specificity of $\Delta U_{\text{АММ}}$ is manifested in the fact that for $\Delta g \simeq \text{const}$ the results of perturbation theory (PT) and nonperturbative calculations differ significantly, whereas in the case of dynamical screening of АММ at short distances the perturbative and nonperturbative methods of accounting $\Delta U_{\text{АММ}}$ in DE are practically the same.

PACS: 12.20.-m; 31.30.jf; 31.15-p

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие аномалии магнитного момента (АММ) дираковской частицы с внешним кулоновским источником всегда вызывало интерес, в частности, в связи с возможным усилением роли магнитных эффектов на предельно малых расстояниях [1–4], поскольку

¹E-mail: roenko@physics.msu.ru

²E-mail: costa@bog.msu.ru

для точечного кулоновского источника оператор Дирака–Паули

$$\Delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{r}) = \frac{\Delta g}{2} \frac{e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (1)$$

к которому сводится эффективное взаимодействие АММ дираковского фермиона с внешним электромагнитным полем в статическом пределе, обладает максимально допустимой для уравнения Дирака (УД) сингулярностью $\sim 1/r^2$ и доминирует при $r \rightarrow 0$. В КЭД, однако, АММ не является исходно присущей дираковской частице характеристикой, но возникает лишь в результате радиационных эффектов, поэтому зависит в том числе и от конфигурации внешнего поля, и его значение вблизи внешнего источника должно отличаться от свободного случая, т. е. $\Delta g \rightarrow \Delta g_{\text{free}} c(r)$, где $c(r)$ описывает подавление магнитных эффектов на малых расстояниях [5, 6]. Непертурбативное вычисление функции $c(r)$ в компактных системах типа e^+e^- сопряжено с большими трудностями, поскольку требует самосогласованного учета не только конфигурации внешнего поля, но и волновых функций (ВФ) частицы [6, 7], однако вдали от резонансных состояний (в частности, для стационарных состояний атомов) можно ограничиться подходом в рамках теории возмущений (ТВ) и не учитывать влияние ВФ [5, 8]. В то же время $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (1) становится актуальным, если АММ дираковского фермиона имеет хотя бы частично неэлектромагнитную природу.

Для электрона эффективный потенциал (1) справедлив лишь в (статическом) пределе малых значений переданного импульса, когда зависимость электронного формфактора $F_2(q^2)$ от переданного импульса не учитывается, т. е. $F_2(q^2) \simeq F_2(0)$. Для стационарных состояний электрона (в том числе в сверхтяжелых атомах при $Z\alpha > 1$) в качестве эффективного потенциала взаимодействия АММ электрона с кулоновским полем сферически-симметричного источника вместо (1) следует использовать следующее выражение, учитывающее динамическую экранировку АММ [9],

$$\Delta U_{\text{АММ}}(r) = -i Z \lambda \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla} \left(-\frac{c(r)}{r} \right), \quad (2)$$

где $\lambda = \alpha^2/4\pi m$, $\alpha = e^2/4\pi$,

$$c(r) = 2 \int_0^\infty q dq \sin qr \left(-\frac{1}{Ze} \tilde{\Phi}(q) \right) \frac{1}{\pi} \frac{F_2(-q^2)}{F_2(0)}, \quad (3)$$

а $\tilde{\Phi}(q)$ является фурье-образом внешнего кулоновского поля $\Phi(r)$. С учетом зависимости электронного формфактора $F_2(q^2)$ от переданного импульса $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2) в однопетлевом приближении для точечного кулоновского источника при $r \rightarrow 0$ ведет себя как $\sim \log mr$, так что кулоновское взаимодействие продолжает доминировать и на малых расстояниях [8, 9]. При этом существенно, что экранировка АММ происходит прежде всего на малых расстояниях $r \ll 1/m$, а не за счет амплитуды внешнего поля.

Следует отметить, что в обоих случаях (1) и (2) оператор $\Delta U_{\text{АММ}}$ сохраняет все необходимые для картины Фарри свойства гамильтониана, поэтому допускает детальный пертурбативный анализ (причем не только по $Z\alpha$, но и частично по α/π), а также сравнение результатов с ТВ. Особый интерес такой пертурбативный анализ $\Delta U_{\text{АММ}}$

представляет для сверхтяжелых ядер при $Z > Z_{\text{cr}}$, когда КЭД предсказывает целый ряд нетривиальных эффектов [9–16, и ссылки там]. Одна из причин состоит в том, что для точечного источника оператор (1) приводит к тому, что для любых Z ВФ частицы становится всюду регулярной, имеющей в кулоновской особенности нули бесконечной кратности для обеих компонент биспинора, что в свою очередь приводит к существенному различию между пертурбативными и непертурбативными результатами для сдвигов уровней при больших Z [17].

Кроме того, при $\Delta g \simeq \text{const}$ следует учитывать, что в протяженном ядре фактическими источниками электрического заряда являются валентные (конституентные) u - и d -кварки, которые как точечные носители (дробного) заряда проявляют себя, как те же атомные электроны, т. е. их заряд всегда локализован в некоторой точке. Поэтому последовательный анализ вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в сверхтяжелых ядрах в силу его специфики в неэкранированном случае требует задания структуры ядра как системы точечных (дробных) зарядов, локализованных в его объеме. Подчеркнем, что такую «чувствительность» к структуре источника заряда проявляет только оператор (1) при $\Delta g \simeq \text{const}$ за счет сингулярности при $r \rightarrow 0$. Ни кулоновское взаимодействие, ни $\Delta U_{\text{АММ}}$ с учетом экранировки (2) таким свойством не обладают.

В настоящей работе будет показано, насколько нетривиальным оказывается такой анализ для потенциалов (1) и (2), а также как меняются его результаты при переходе от учета отдельных точечных источников (кварков), расположенных в центре ядра, к учету их смещения на периферию и от чисто пертурбативного к существенно непертурбативному подходу для учета $\Delta U_{\text{АММ}}$.

В частности, мы покажем, что в сверхтяжелых атомах для $\Delta U_{\text{АММ}}$ при $\Delta g \simeq \text{const}$ наилучшие результаты дает непертурбативный подход, когда оператор (1) является равноправным членом УД, а ТВ по α/π не работает. При этом ядро с равномерной плотностью заряда и его имитация дискретной системой большого числа (до 170–180 при критических Z) точечных источников приводят для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ к совпадающим с точностью не менее 0,1 % результатам, несмотря на существенное различие в структуре дираковской волновой функции (ВФ). В то же время с учетом экранировки между пертурбативными и непертурбативными способами учета $\Delta U_{\text{АММ}}$ в УД также возникает некоторая, но существенно менее значимая разница в пользу последних, медленно растущая с ростом Z , а вычисление вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ через кварковую структуру и равномерно заряженное ядро вообще приводит к совпадающим в пределах точности расчетов результатам. Последний результат легко объясним — характерный масштаб изменения ВФ частицы как для (2), так и для кулоновского взаимодействия будет порядка ее комптоновской длины, и после усреднения точечных источников по положению внутри ядра в силу малости размеров последнего будет восстанавливаться ВФ частицы для всего однородно заряженного ядра как источника кулоновского поля.

1. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЭКРАНИРОВКА АММ ДЛЯ КУЛОНОВСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Динамическая экранировка АММ за счет $F_2(q^2)$ приводит к возникновению эффективной зависимости АММ электрона от расстояния r до кулоновского источника, которая имеет вид $\Delta g(r) = \Delta g_{\text{free}} c(r)$, где $c(r)$ определена в соответствии с (3). Для

заданного кулоновского потенциала функция $c(r)$ может быть вычислена, и для точечного кулоновского источника она имеет следующий вид (обозначаем c_q) [8, 9]:

$$c_q(r) = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} e^{-Qr} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im} F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad (4)$$

а в случае протяженного ядра радиуса R с потенциалом

$$\Phi(r) = -\frac{Ze}{4\pi r}, \quad r > R, \quad \Phi(r) = -\frac{Ze}{4\pi} \frac{3R^2 - r^2}{2R^3}, \quad r \leq R, \quad (5)$$

функция $c(r)$ может быть записана в виде (обозначаем c_N) [9]

$$c_N(r) = 1 - \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3QR \cosh QR - 3 \sinh QR}{R^3 Q^3} e^{-Qr} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im} F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r > R, \quad (6a)$$

$$c_N(r) = \frac{(3R^2 - r^2)}{2R^3} r - \frac{r}{2m^2 R^3} + \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{3(QR + 1)}{R^3 Q^3} \sinh QR e^{-QR} \frac{1}{\pi} \frac{\text{Im} F_2(Q^2)}{F_2(0)}, \quad r < R, \quad (6b)$$

где в однопетлевом приближении [18]

$$\frac{1}{\pi} \text{Im} F_2(Q^2) = 2F_2(0) \frac{m^2}{Q^2} \frac{1}{\sqrt{1 - 4m^2/Q^2}}.$$

Из (4), (6) следует, что $c(r) \simeq 1$ в области $r \gtrsim 1/m$, а при $r \rightarrow 0$ монотонно стремится к нулю. Таким образом, вне зависимости от величины заряда кулоновского источника поведение $\Delta U_{\text{АММ}}$ в экранированном случае существенно отличается от потенциала Дирака–Паули на расстояниях порядка комптоновской длины электрона $r \lesssim 1/m$.

2. УРАВНЕНИЕ ДИРАКА С $\Delta U_{\text{АММ}}$ В СЛУЧАЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЭКРАНИРОВКИ

Общий вид УД для частицы в кулоновском поле ядра с учетом дополнительного эффективного взаимодействия за счет АММ (2) имеет вид ($\hbar = c = m = 1$)

$$(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \beta + U(r) + \Delta U_{\text{АММ}}) \psi = E \psi, \quad (7)$$

где $U(r) = e\Phi(r)$ — кулоновский потенциал ядра, в котором кварковая структура никакой специальной роли не играет, и поэтому $\Phi(r)$ выбирается в виде (5), где радиус ядра R , как и в [9], определяется через Z формулой (упрощенной) $R \simeq 1,229(2,5Z)^{1/3}$ Фм.

Начнем с рассмотрения $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2), когда учитывается динамическая экранировка АММ. Заметим, что оператор (2) может быть переписан через коммутатор

в виде $Z\lambda[\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}, V(\mathbf{r})]$. Тогда из уравнения (7) для верхней $i\varphi$ и нижней χ компонент дираковского биспинора следует

$$\begin{aligned} i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} + \lambda[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})])\varphi &= (\epsilon + 1 - U(r))\chi, \\ i(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} - \lambda[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})])\chi &= -(\epsilon - 1 - U(r))\varphi. \end{aligned} \quad (8)$$

При этом $V(\mathbf{r}) = Zc_N(r)/r$ для всего ядра, рассматриваемого как отдельный однородно заряженный кулоновский источник для $\Delta U_{\text{АММ}}$, а при учете кварковой структуры $V(\mathbf{r})$ будет определяться по $c_q(\mathbf{r})$ с учетом конкретной конфигурации кварков.

Сначала рассмотрим центральную задачу, исходя из того, что размер ядра существенно меньше среднего радиуса электронной ВФ, и поэтому смещением кварков из центра ядра можно пренебречь. Тогда для отдельного кварка в центре ядра $V(\mathbf{r}) = Z_q c_q(r)/r$.

Как для центральных кварков, так и для всего ядра при наличии $\Delta U_{\text{АММ}}$ будут по-прежнему сохраняться полный момент электрона \mathbf{j} и оператор $k = \beta(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{1} + 1)$, поэтому в стандартном представлении для матриц Дирака верхний и нижний спиноры электронной ВФ будут содержать шаровые спиноры Ω_{jlm_j} и $\Omega_{jl'm_j}$ различной четности и радиальные функции $if_j(r)$ и $g_j(r)$

$$\psi_{jm_j} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} if_j(r) \Omega_{jlm_j} \\ g_j(r) \Omega_{jl'm_j} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

При этом $f_j(r)$ и $g_j(r)$ вещественны, и $l + l' = 2j$. Определение сферических гармоник и шаровых спиноров следует из [19], при этом $\Omega_{jl'm_j} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\Omega_{jlm_j}$. Состояния с $j = l + 1/2$ и различной четностью отличаются значениями $\kappa = \pm(j + 1/2)$ и удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (\partial_r - Z\lambda\nu(r)/r^2 + \kappa/r) f_j &= (\epsilon + 1 - U(r)) g_j, \\ (\partial_r + Z\lambda\nu(r)/r^2 - \kappa/r) g_j &= -(\epsilon - 1 - U(r)) f_j, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\nu(r) = c(r) - rc'(r)$.

Еще раз отметим, что в случае центральных кварков член $\nu_q(r)/r^2$ ведет себя при $r \ll 1$ как $\log r$ (что соответствует $c(r) \rightarrow 0$), а при $r \rightarrow \infty$ как $1/r^2$ (что соответствует $c(r) \rightarrow 1$) [8]. Для протяженного ядра отличие в поведении $\nu_N(r)/r^2$ по сравнению с точечным источником возникает на масштабах порядка радиуса ядра, а при $r \ll R$ член $\nu_N(r)/r^2$ ведет себя почти линейно и обращается в нуль в центре ядра, что опять же свидетельствует о том, что в динамической экранировке АММ существенны именно предельно малые расстояния, а не амплитуда поля, которая в центре ядра также исчезает.

Численное решение системы (10) для центральных кварков и $c(r) = c_q(r)$ показывает, что для ядра с критическим зарядом $Z = 170$ уровень $1s_{1/2}$, который соответствует $\kappa = -1$, будет сдвинут относительно чисто кулоновского случая с потенциалом (5) следующим образом:

$$\Delta\epsilon_u(1s_{1/2}) = 4,58 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_d(1s_{1/2}) = -2,29 \text{ эВ}, \quad (11a)$$

а для ядра с $Z = 183$ и уровня $2p_{1/2}$ ($\kappa = 1$) аналогичный расчет дает

$$\Delta\epsilon_u(2p_{1/2}) = -4,29 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_d(2p_{1/2}) = 2,15 \text{ эВ}. \quad (11b)$$

Отметим, что возможность вычисления энергетического сдвига вниз относительно чисто кулоновского обеспечивается таким выбором зависимости $R(Z)$ в (5), чтобы нижние кулоновские уровни $1s_{1/2}$ при $Z = 170$ и $2p_{1/2}$ при $Z = 183$ лежали чуть выше порога отрицательного континуума.

Эти результаты для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в сдвиг уровней являются полностью непертурбативными по $Z\alpha$ и по α/π (частично) за счет того, что фактической константой связи в $\Delta U_{\text{АММ}}$ в данном случае является $Z_q\lambda$, куда α/π входит как множитель. Подчеркнем, однако, что эта зависимость не имеет ничего общего с суммированием разложения по петлям для АММ, поскольку исходное выражение для оператора (3) основано на однопетлевом приближении для вершинного фактора. Но поскольку в рамках одночастичного УД (7) имеется возможность непертурбативного учета вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$, этим следует воспользоваться, чтобы сравнить результаты пертурбативного и непертурбативного подходов к учету $\Delta U_{\text{АММ}}$ при больших Z ввиду последних существенно непертурбативных расчетов вакуумной энергии при $Z > Z_{\text{кр},1s}$ [14–16], которые демонстрируют явно нелинейный характер этого эффекта за рамками ТВ.

Прежде всего результаты (11) следует сравнить с оценкой сдвига по ТВ, когда $\Delta U_{\text{АММ}}$ рассматривается как возмущение кулоновского потенциала (5). В этом случае сдвиг кулоновских уровней с квантовыми числами nj за счет центральных кварков находится по формуле

$$\Delta\epsilon_q(nj)^{\text{PT}} = \langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = -2Z_q\lambda \int_0^\infty dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r) \nu_q(r), \quad (12)$$

где $f_{nj}^{(0)}(r)$, $g_{nj}^{(0)}(r)$ — радиальные компоненты невозмущенного кулоновского уровня определенной четности $\psi_{nj}^{(0)}$. Вычисленные в соответствии с (12) значения $\Delta\epsilon_q^{\text{PT}}$ совпадают с результатами (11) с точностью не менее 0,1%. Если теперь учесть, что в рассматриваемом случае средний радиус электронной ВФ будет порядка $O(1) \gg R$, вероятность нахождения электрона внутри ядра $\simeq 0,02$, причем как с кварками в центре, так и без них, то на первый взгляд вклад от кварков со смещением из центра ядра может отличаться от (11) только на поправки, и результирующий сдвиг электронного уровня может быть найден как прямая сумма

$$\Delta\epsilon_{\text{АММ}} = (2Z + N)\Delta\epsilon_u + (Z + 2N)\Delta\epsilon_d, \quad (13)$$

где Z — число протонов; $N \simeq 1,5Z$ — число нейтронов (для больших Z). В результате для сдвига уровней $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ при ядре с $Z = 170$ и $2p_{1/2}$ при $Z = 183$ получаем

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170) &= 1,17 \text{ кэВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183) &= -1,18 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (14)$$

Если же пренебречь кварковой структурой ядра и использовать $c_N(r)$, определенную в соответствии с (6), то для полного сдвига уровня с помощью численного решения системы (10) для всего ядра как источника $\Delta U_{\text{АММ}}$ получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170) &= 1,12 \text{ кэВ}, \\ \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183) &= -1,09 \text{ кэВ}. \end{aligned} \quad (15)$$

Оценка по ТВ в этом случае может быть сделана на основе кулоновских ВФ $\psi_{nj}^{(0)}$ по формуле

$$\mathcal{D}\epsilon(nj)^{\text{PT}} = \langle \psi_{nj}^{(0)} | \Delta U_{\text{АММ}} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = -2Z\lambda \int_0^{\infty} dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r) \nu_N(r), \quad (16)$$

и она дает значения, совпадающие с непертурбативными результатами (15) с точностью не хуже 0,1%, так же как и непертурбативные результаты для сдвигов от отдельных центральных кварков (11), (12). Однако в приближении центральных кварков результаты для сдвига уровней через кварковую структуру (14) и протяженное однородно заряженное ядро (15) заметно отличаются, и далее мы покажем, как с учетом вклада от кварков на периферии ядра это соответствие может быть значительно улучшено.

2.1. Учет вклада от периферии по теории возмущений. Результаты (14) для сдвигов уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ выводятся в предположении, что все кварки в ядре можно рассматривать как центральные. Однако заметное расхождение этих результатов с (15) указывает на то, что следует отдельно учесть вклад кварков, находящихся на периферии ядра. Сначала рассмотрим смещение кварков из центра ядра как возмущение. Для этого по ТВ находим поправку, вызванную смещением на вектор \mathbf{a} центрального кварка, затем усредняем полученную поправку по всем векторам, для которых выполняется условие $|\mathbf{a}| \leq R$.

Начнем со случая, когда нулевое приближение соответствует центральным кваркам, и тем самым невозмущенные ВФ теперь будут через кулоновский член в (7) содержать точную зависимость от $Z\alpha$ и одновременно нелинейно зависеть от α/π через множитель $Z_q\lambda$ в $\Delta U_{\text{АММ}}$. Тогда полный сдвиг уровня с квантовыми числами n, j с учетом усреднения положения кварка типа q по объему ядра составит $\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q$, где

$$\delta\epsilon_q(nj) = \frac{3}{4\pi R^3} \int d\mathbf{a} \langle \psi_{nj}^{(q)} | \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) | \psi_{nj}^{(q)} \rangle, \quad (17)$$

при этом $\psi_{nj}^{(q)}$, $f_{nj}^{(q)}$, $g_{nj}^{(q)}$ — ВФ задачи (10) с кварком q в центре ядра и

$$\delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) = -i Z_q \lambda \left(\nu_q(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|) \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} - \nu_q(r) \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \right). \quad (18)$$

Выражение (17) после упрощения принимает следующий вид (для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$):

$$\begin{aligned} \delta\epsilon_q(nj) = & 2Z_q\lambda \int_0^{\infty} dr f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) \nu_q(r) - \\ & - Z_q\lambda \frac{3}{R^3} \int_0^R a^2 da \int_0^{\infty} r^2 dr \int_{-1}^1 dx f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) \nu_q([r^2 + a^2 - 2rax]^{1/2}) \frac{r - ax}{[r^2 + a^2 - 2rax]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Полный сдвиг уровней за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ с учетом усреднения по объему ядра определяется аналогично (13):

$$D\epsilon_{\text{АММ}} = (2Z + N)(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u) + (Z + 2N)(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d). \quad (20)$$

Прежде чем привести результаты расчетов, заметим, что в (17) в качестве нулевого приближения можно выбрать чисто кулоновские функции, как в случае с оценками (12), (16). Тогда, как уже отмечалось в разд. 2, получаемые результаты будут непертурбативно учитывать всю зависимость от $Z\alpha$, но при этом являться эффектом только первого порядка по α/π . Для сдвига уровней в результате взаимодействия электрона за счет АММ (2) с кварком, смещенным на расстояние a от центра ядра, тогда получаем (для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$):

$$\begin{aligned} (\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}(a, nj) &= \langle \psi_{nj}^{(0)} | -i Z_q \lambda (\boldsymbol{\gamma} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{a})) \frac{\nu_q(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3} | \psi_{nj}^{(0)} \rangle = \\ &= -Z_q \lambda \int_0^\infty r^2 dr \int_{-1}^1 dx f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r) \nu_q([r^2 + a^2 - 2rax]^{1/2}) \frac{r - ax}{[r^2 + a^2 - 2rax]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Зависимость $|(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q(a))^{\text{PT}}/Z_q|$ для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ при $Z \sim Z_{\text{cr}}$ показана на рис. 1.

Далее из (21) находим усредненный по положению внутри ядра сдвиг, вызванный одним кварком данного типа:

$$(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}(nj) = \frac{3}{4\pi R^3} \int d\mathbf{a} (\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}(a, nj), \quad (22)$$

после чего опять же по аналогии с (13) находим полный сдвиг $D\epsilon^{\text{PT}}(nj)$.

В табл. 1, 2 приведены значения сдвигов уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ за счет динамически экранированного АММ для отдельных кварков, найденные различными способами, как непертурбативно на основе решения системы (10) с центральными кварками, так и с использованием ТВ (12), а также с учетом смещения (17), (22). Как и в предыдущем разделе, значения, вычисленные в рамках ТВ с невозмущенными кулоновскими ВФ, дополнительно отмечены индексом «РТ». Отметим, что значения $\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q$ и $(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}$

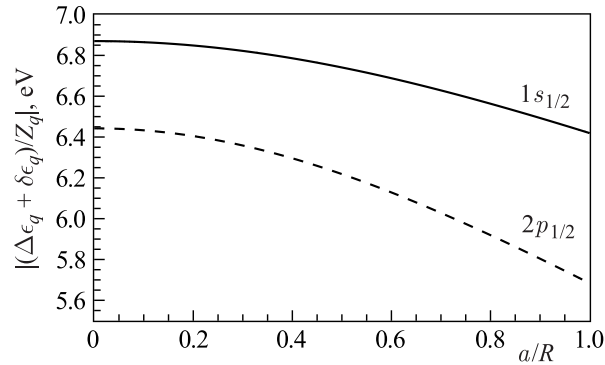


Рис. 1. Зависимость $|(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q(a))/Z_q|$ для точечных источников, если учитывается динамическая экранировка АММ. Уровень $1s_{1/2}$ при $Z = 170$ — сплошная линия, уровень $2p_{1/2}$ при $Z = 183$ — штриховая. Для положительного заряда источника сдвиг уровня $1s_{1/2}$ положительный, сдвиг уровня $2p_{1/2}$ — отрицательный

Таблица 1. Сдвиги уровня $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2) для отдельных кварков (в эВ)

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u$	$(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u)^{\text{PT}}$
140	2,380	2,382	-0,0238	2,356	2,360
150	3,120	3,125	-0,0522	3,068	3,072
160	3,905	3,910	-0,1060	3,799	3,804
170	4,575	4,580	-0,1900	4,385	4,390
Z	$\Delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d$	$(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d)^{\text{PT}}$
140	-1,190	-1,191	0,0119	-1,178	-1,180
150	-1,560	-1,563	0,0261	-1,534	-1,536
160	-1,953	-1,955	0,0529	-1,900	-1,902
170	-2,287	-2,290	0,0950	-2,192	-2,195

 Таблица 2. Сдвиги уровня $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2) для отдельных кварков (в эВ)

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u$	$(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u)^{\text{PT}}$
160	-2,652	-2,654	0,0782	-2,633	-2,637
170	-3,558	-3,560	0,1690	-3,431	-3,433
180	-4,171	-4,174	0,2850	-3,896	-3,897
183	-4,293	-4,295	0,3220	-3,970	-3,972
Z	$\Delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d$	$(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d)^{\text{PT}}$
160	1,355	1,358	-0,0391	1,316	1,318
170	1,800	1,801	-0,0844	1,715	1,716
180	2,090	2,092	-0,1420	1,948	1,949
183	2,146	2,147	-0,1610	1,985	1,986

для сдвигов с учетом смещения, найденные с различной степенью точности по α/π , отличаются не более чем на $\sim 0,1\%$ для обоих типов кварков, поэтому соответствующие кривые для $|(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q(a))/Z_q|$, показанные на рис. 1, оказываются практически неотличимыми.

В табл. 3, 4 приведены значения полных сдвигов уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ за счет динамически экранированного АММ, вычисленные непертурбативно как на основе решения системы (10) для всего ядра (15) и по ТВ (16), так и на основе результатов из табл. 1, 2. Как следует из приведенных результатов, учет вклада только от центральных кварков (первые две колонки в табл. 3, 4) с ростом Z начинает приводить к сильному (уже в третьем знаке) расхождению с более точными расчетами, учитывающими вклад от периферии ядра. В свою очередь, учет вклада от периферии ядра приводит в соответствие значения, полученные для всего ядра как кулоновского источника для $\Delta U_{\text{АММ}}$ (15), (16), и значения, найденные суммированием индивидуальных вкладов от всех кварков в ядре (17), (22), хотя учет периферии по (15), (16) и по (17), (22) существенно различный — в первом случае полный заряд задается через однородную плотность распределения по объему ядра, а во втором — смещаются точечные кварки. Сравнение результатов, полученных различными методами, показывает, что наилучшим образом между собой согласуются оценки (15) и (20) (3-я, 4-я колонки), полученные с непертурбативным учетом как по $Z\alpha$, так и (частично) по α/π , а также (16) и соответствующая сумма отдельных сдвигов (22), которые вычислены по ТВ на основе невозмущенных кулоновских ВФ (5-я, 6-я

Таблица 3. Полные сдвиги уровня $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2) (в кэВ)

Z	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon^{\text{PT}}$	$\mathcal{D}\epsilon$	$D\epsilon$	$\mathcal{D}\epsilon^{\text{PT}}$	$D\epsilon^{\text{PT}}$
130	0,346579	0,346967	0,344301	0,344506	0,344890	0,345100
140	0,499771	0,500275	0,494512	0,494765	0,495260	0,495551
150	0,701953	0,703130	0,689946	0,690200	0,691335	0,691157
160	0,937248	0,938431	0,911676	0,911853	0,912975	0,912911
170	1,166570	1,167942	1,118285	1,118136	1,119560	1,119541

Таблица 4. Полные сдвиги уровня $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (2) (в кэВ)

Z	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon^{\text{PT}}$	$\mathcal{D}\epsilon$	$D\epsilon$	$\mathcal{D}\epsilon^{\text{PT}}$	$D\epsilon^{\text{PT}}$
150	-0,354971	-0,355106	-0,372568	-0,372250	-0,372442	-0,372440
160	-0,617588	-0,617420	-0,632095	-0,631870	-0,632793	-0,632790
170	-0,893154	-0,893796	-0,874857	-0,874811	-0,875325	-0,875320
180	-1,122856	-1,123497	-1,051722	-1,051839	-1,052329	-1,052321
183	-1,178294	-1,178957	-1,089671	-1,089837	-1,090388	-1,090379

колонки). При этом с ростом Z между пертурбативными и непертурбативными результатами для полных сдвигов $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ также наблюдается расхождение, но уже только в следующем (четвертом) знаке.

2.2. Непертурбативный учет $\Delta U_{\text{АММ}}$ для нескольких смещенных кварков. Пока мы учитывали вклады от отдельных кварков в сдвиг энергетических уровней, рассматривая их смещение из центра ядра как возмущение и без учета их взаимных корреляций. Покажем теперь, каким образом может быть выполнен непертурбативный учет взаимодействия электрона с несколькими смещенными из центра ядра точечными источниками (кварками) за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$. Рассмотрим случай двух точечных кварков с зарядом Z_q , расположенных на оси z в точках $z = \pm a$. Тогда, с учетом эффективной зависимости АММ электрона от координат,

$$V(\mathbf{r}) = Z_q \left(\frac{c_q(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} + \frac{c_q(|\mathbf{r} + \mathbf{a}|)}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}|} \right), \quad \mathbf{a} = a\mathbf{e}_z. \quad (23)$$

Спиноры φ, χ , соответствующие решению системы уравнений (8) с определенной четностью и m_j , будем искать в виде разложения по шаровым спинорам, которое для четного уровня имеет вид

$$\varphi = \sum_{k=0} \left(u_k \Omega_{2k, m_j}^{(+)} + v_k \Omega_{2k+2, m_j}^{(-)} \right), \quad \chi = \sum_{k=0} \left(p_k \Omega_{2k+1, m_j}^{(+)} + q_k \Omega_{2k+1, m_j}^{(-)} \right), \quad (24a)$$

а для нечетного

$$\varphi = \sum_{k=0} \left(u_k \Omega_{2k+1, m_j}^{(+)} + v_k \Omega_{2k+1, m_j}^{(-)} \right), \quad \chi = \sum_{k=0} \left(p_k \Omega_{2k, m_j}^{(+)} + q_k \Omega_{2k+2, m_j}^{(-)} \right), \quad (24б)$$

где введены удобные для дальнейшего обозначения $\Omega_{l, m_j}^{(+)} \equiv \Omega_{j l m_j}$ и $\Omega_{l+1, m_j}^{(-)} \equiv (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \Omega_{j l m_j}$, а все радиальные функции u_k, v_k, p_k, q_k можно считать действительными.

Подстановка разложений (24а), (24б) в уравнение (8) приводит к системе уравнений на радиальные функции u_k, v_k, p_k, q_k , своей для каждой четности. Для четного уровня с фиксированным m_j система принимает вид

$$\begin{aligned}
 \partial_r u_k - \frac{2k}{r} u_k + \lambda \sum_s \left(\mathcal{A}_{2k;2s}(r) u_s + \mathcal{B}_{2k;2s+2}(r) v_s \right) &= (\epsilon + 1 - U(r)) q_k, \\
 \partial_r v_k + \frac{2k+3}{r} v_k + \lambda \sum_s \left(\mathcal{C}_{2k+2;2s}(r) u_s + \mathcal{D}_{2k+2;2s+2}(r) v_s \right) &= (\epsilon + 1 - U(r)) p_k, \\
 \partial_r p_k - \frac{2k+1}{r} p_k - \lambda \sum_s \left(\mathcal{A}_{2k+1;2s+1}(r) p_s + \mathcal{B}_{2k+1;2s+1}(r) q_s \right) &= -(\epsilon - 1 - U(r)) v_k, \\
 \partial_r q_k + \frac{2k+2}{r} q_k - \lambda \sum_s \left(\mathcal{C}_{2k+1;2s+1}(r) p_s + \mathcal{D}_{2k+1;2s+1}(r) q_s \right) &= -(\epsilon - 1 - U(r)) u_k,
 \end{aligned} \tag{25a}$$

а для нечетного

$$\begin{aligned}
 \partial_r u_k - \frac{2k+1}{r} u_k + \lambda \sum_s \left(\mathcal{A}_{2k+1;2s+1}(r) u_s + \mathcal{B}_{2k+1;2s+1}(r) v_s \right) &= (\epsilon + 1 - U(r)) q_k, \\
 \partial_r v_k + \frac{2k+2}{r} v_k + \lambda \sum_s \left(\mathcal{C}_{2k+1;2s+1}(r) u_s + \mathcal{D}_{2k+1;2s+1}(r) v_s \right) &= (\epsilon + 1 - U(r)) p_k, \\
 \partial_r p_k - \frac{2k}{r} p_k - \lambda \sum_s \left(\mathcal{A}_{2k;2s}(r) p_s + \mathcal{B}_{2k;2s+2}(r) q_s \right) &= -(\epsilon - 1 - U(r)) v_k, \\
 \partial_r q_k + \frac{2k+3}{r} q_k - \lambda \sum_s \left(\mathcal{C}_{2k+2;2s}(r) p_s + \mathcal{D}_{2k+2;2s+2}(r) q_s \right) &= -(\epsilon - 1 - U(r)) u_k,
 \end{aligned} \tag{25б}$$

где коэффициентные радиальные функции $\mathcal{A}(r), \mathcal{B}(r), \mathcal{C}(r), \mathcal{D}(r)$ представляют собой матричные элементы от коммутатора $[\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})]$ по шаровым спинорам:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{l;s}(r) &= i \langle \Omega_{l+1, m_j}^{(-)} | [\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})] | \Omega_{s, m_j}^{(+)} \rangle, \\
 \mathcal{B}_{l;s}(r) &= i \langle \Omega_{l+1, m_j}^{(-)} | [\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})] | \Omega_{s, m_j}^{(-)} \rangle, \\
 \mathcal{C}_{l;s}(r) &= i \langle \Omega_{l-1, m_j}^{(+)} | [\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})] | \Omega_{s, m_j}^{(+)} \rangle, \\
 \mathcal{D}_{l;s}(r) &= i \langle \Omega_{l-1, m_j}^{(+)} | [\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}, V(\mathbf{r})] | \Omega_{s, m_j}^{(-)} \rangle,
 \end{aligned} \tag{26}$$

и могут быть сведены к матричным элементам вида $\langle \Omega_{l, m_j}^{(\pm)} | V(\mathbf{r}) | \Omega_{s, m_j}^{(\mp)} \rangle$, для вычисления которых удобнее всего использовать аксиальную симметрию потенциала $V(\mathbf{r})$ и представить его в виде частичного разложения

$$V(\mathbf{r}) = \sum_n G_n(r) P_n(\cos \vartheta). \tag{27}$$

Тогда для функций $\mathcal{A}(r)$, $\mathcal{B}(r)$, $\mathcal{C}(r)$, $\mathcal{D}(r)$ получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{l;s}(r) &= \sum_{n=|l-s|}^{|l+s|} \left(\partial_r - \frac{l-s}{r} \right) G_n(r) W_+^+(n; l; s), \\
\mathcal{B}_{l;s}(r) &= \sum_{n=|l-s|}^{|l+s|} \left(\partial_r - \frac{l+s+1}{r} \right) G_n(r) W_-^+(n; l; s), \\
\mathcal{C}_{l;s}(r) &= \sum_{n=|l-s|}^{|l+s|} \left(\partial_r + \frac{l+s+1}{r} \right) G_n(r) W_+^-(n; l; s), \\
\mathcal{D}_{l;s}(r) &= \sum_{n=|l-s|}^{|l+s|} \left(\partial_r + \frac{l-s}{r} \right) G_n(r) W_-^-(n; l; s),
\end{aligned} \tag{28}$$

где коэффициенты $W_{\pm}^{\pm}(n; l; s) \equiv \langle \Omega_{l,m_j}^{(\pm)} | P_n(\cos \vartheta) | \Omega_{s,m_j}^{(\mp)} \rangle$ сводятся к комбинации $3j$ -символов:

$$\begin{aligned}
W_{\pm}^+(n; l; s) &= \sqrt{(l+m_j+1/2)(s \pm m_j+1/2)} w_n^-(l; s) \pm \\
&\quad \pm \sqrt{(l-m_j+1/2)(s \mp m_j+1/2)} w_n^+(l; s), \\
W_{\pm}^-(n; l; s) &= \sqrt{(l-m_j+1/2)(s \pm m_j+1/2)} w_n^-(l; s) \mp \\
&\quad \mp \sqrt{(l+m_j+1/2)(s \mp m_j+1/2)} w_n^+(l; s),
\end{aligned} \tag{29}$$

$$w_n^{\pm}(l; s) = (-1)^{m_j \pm 1/2} \begin{pmatrix} l & n & s \\ -(m_j \pm 1/2) & 0 & m_j \pm 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & n & s \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Коэффициентные функции $G_n(r)$, фигурирующие в разложении (27), имеют интегральное представление

$$G_n(r) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta P_n(\cos \theta) V(r, \theta). \tag{30}$$

Так как потенциал $V(\mathbf{r})$ является четным, то отличными от нуля будут только $G_n(r)$ для четных n . С учетом явного вида $c(r)$ для точечного источника (4) и разложения

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{a}|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} = \frac{i\pi}{2\sqrt{ra}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) J_{l+1/2}(kr_<) H_{l+1/2}^{(1)}(kr_>) P_l(\cos \theta), \tag{31}$$

где $r_< = \min(r, a)$, $r_> = \max(r, a)$, а также условия ортогональности полиномов Лежандра, результат для функций (30) при четных n можно записать в виде

$$G_n(r) = 2Z_q \left(\frac{r_<^n}{r_>^{n+1}} - \frac{2n+1}{2\sqrt{ra}} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{dQ^2}{Q^2} \frac{\text{Im} F_2(Q^2)}{F_2(0)} i J_{n+1/2}(iQr_<) H_{n+1/2}^{(1)}(iQr_>) \right). \tag{32}$$

Вычисления, проведенные для пары u - и пары d -кварков, показывают, что сдвиг уровня $\delta\epsilon_{qq}(a)$ за счет смещения из центра для таких пар пропорционален суммарному заряду кварков, а кривые $|(2\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_{qq}(a))/2Z_q|$ практически совпадают с представленными на рис. 1. Одновременный учет большего числа кварков в конфигурации типа uuu , ddd , udu , dud с дополнительным центральным кварком этой картины не изменяет. В результате величина суммарного сдвига уровня, вычисленная по аналогии с (20), составляет $D\epsilon = 1,118$ кэВ для уровня $1s_{1/2}$ при $Z = 170$ и $D\epsilon = -1,089$ кэВ для уровня $2p_{1/2}$ при $Z = 183$, что наилучшим образом согласуется с другим непертурбативным результатом (15), при вычислении которого все протяженное ядро рассматривалось как источник $\Delta U_{\text{АММ}}$, и с результатами учета смещения по ТВ, когда в качестве нулевого приближения использовались ВФ с кварком в центре $\psi_{nj}^{(q)}$. Это показывает, что непертурбативный подход к учету $\Delta U_{\text{АММ}}$ в рамках УД (7) имеет хоть и небольшое, но преимущество перед чисто пертурбативными методами. Таким образом, наилучшим приближением к точному результату для энергетического сдвига уровня nj , учитывающему и многокварковые конфигурации, является приближение однородно заряженного ядра как источника $\Delta U_{\text{АММ}}$ (15) и практически совпадающий с ним расчет через (17)–(20), что и было использовано в работе [9] при исследовании скорости роста вклада от экранированного $\Delta U_{\text{АММ}}$.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ $\Delta g \simeq \text{const}$

Приведем теперь результаты для вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (1), т. е. когда экранировка АММ по упомянутым выше причинам отсутствует. В приближении $\Delta g \simeq \text{const}$ для потенциала эффективного взаимодействия АММ с внешним кулоновским полем $\Phi(\mathbf{r})$ получаем следующее выражение

$$\Delta U_{\text{АММ}}(r) = -i \lambda \gamma \cdot \nabla \left(\frac{4\pi\Phi(\mathbf{r})}{e} \right), \quad (33)$$

которое имеет точно такую же структуру, как и использованный ранее потенциал (2). В этом случае исходное УД (7) сводится к той же системе уравнений (8) с тем лишь отличием, что теперь функция $V(\mathbf{r})$ линейно связана с кулоновским потенциалом источников, а именно $V(\mathbf{r}) = -4\pi\Phi(\mathbf{r})/e$. Для точечных источников переход к случаю, когда эффективная зависимость АММ от расстояния не учитывается, сводится к повсеместной замене $c_q(r) \equiv 1$.

Как и в предыдущих разделах, начнем с рассмотрения центральной задачи. Численное решение системы (10) для центральных кварков в приближении $\Delta g = \text{const}$ показывает, что для ядра с критическим зарядом $Z = 170$ уровень $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ с центральными кварками будет сдвинут относительно чисто кулоновского случая с потенциалом (5) следующим образом:

$$\Delta\epsilon_u(1s_{1/2}) = 244,1 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_d(1s_{1/2}) = 10,0 \text{ эВ}, \quad (34a)$$

а для ядра с $Z = 183$ и уровня $2p_{1/2}$ аналогичный численный расчет дает

$$\Delta\epsilon_u(2p_{1/2}) = 74,7 \text{ эВ}, \quad \Delta\epsilon_d(2p_{1/2}) = 194,8 \text{ эВ}. \quad (34b)$$

При этом вычисления для центральных кварков в рамках ТВ по формуле (12) (при этом $\nu_q \equiv 1$), когда $\Delta U_{\text{АММ}}$ рассматривается как возмущение кулоновского потенциала ядра, дают следующие значения:

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_u(1s_{1/2})^{\text{PT}} &= 244,26 \text{ эВ}, & \Delta\epsilon_d(1s_{1/2})^{\text{PT}} &= -122,13 \text{ эВ}, \\ \Delta\epsilon_u(2p_{1/2})^{\text{PT}} &= -390,77 \text{ эВ}, & \Delta\epsilon_d(2p_{1/2})^{\text{PT}} &= 195,38 \text{ эВ}.\end{aligned}\quad (35)$$

Возникающие существенные различия между (34) и (35) для u -кварка в случае уровня $2p_{1/2}$ и d -кварка в случае $1s_{1/2}$ обусловлены тем, что при наличии точечного кварка в центре ядра $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (33) приводит к значительной перестройке одной из компонент ВФ и их экспоненциально быстрому убыванию при $r \rightarrow 0$ на фоне максимальной амплитуды [20], тем самым его учет по ТВ и должен приводить к другому результату. Значительное расхождение с полученными ранее результатами (11) для центральных кварков, когда учитывалась эффективная зависимость АММ от расстояния, обусловлено тем, что для больших $Z \sim Z_{\text{cr}}$ ВФ локализована вблизи ядра на расстояниях $r \lesssim 1/m$, т. е. как раз в той области, в которой рассмотренная ранее динамическая экранировка АММ наиболее существенна.

На основе результатов (34), (35) по аналогии с (13) получаем оценку на полный сдвиг уровней вблизи границы нижнего континуума, если все кварки считаются центральными:

$$\begin{aligned}\Delta\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170) &= 152,0 \text{ кэВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170)^{\text{PT}} &= 62,3 \text{ кэВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183) &= 190,4 \text{ кэВ}, \\ \Delta\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183)^{\text{PT}} &= -107,3 \text{ кэВ}.\end{aligned}\quad (36)$$

Для всего протяженного ядра в качестве источника $\Delta U_{\text{АММ}}$ система уравнений получается из (10) с помощью замены

$$Z\lambda\nu(r)/r^2 \rightarrow Z\lambda r/R^3, \quad r \leq R; \quad Z\lambda\nu(r)/r^2 \rightarrow Z\lambda/r^2, \quad r > R, \quad (37)$$

на основе которой сдвиг может быть определен непертурбативным образом как по $Z\alpha$, так и (частично) по α/π . Вычисления дают (для уровня $2p_{1/2}$ приведен сдвиг для $Z = 181$, поскольку для $Z = 183$ уровень погружается в отрицательный континуум)

$$\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170) = 43,93 \text{ кэВ}, \quad \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 181) = -70,77 \text{ кэВ}. \quad (38)$$

Результат в рамках ТВ в этом случае определяется по формуле

$$\mathcal{D}\epsilon(nj)^{\text{PT}} = -2Z\lambda \left[\frac{1}{R^3} \int_0^R dr r^3 + \int_R^\infty dr \right] f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r), \quad (39)$$

где $f_{nj}^{(0)}(r)$, $g_{nj}^{(0)}(r)$ определены так же, как и в (16), и составляет

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(1s_{1/2}, Z = 170)^{\text{PT}} &= 46,14 \text{ кэВ}, \\ \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 181)^{\text{PT}} &= -67,88 \text{ кэВ}, \\ \mathcal{D}\epsilon_{\text{АММ}}(2p_{1/2}, Z = 183)^{\text{PT}} &= -72,91 \text{ кэВ}.\end{aligned}\quad (40)$$

Различия между пертурбативными (40) и непертурбативными (38) результатами для всего ядра составляют не более $\sim 5-10\%$, в то время как полученные различными методами в приближении центральных кварков значения (36) заметно отличаются друг от друга и превосходят оценки для всего ядра в несколько раз. Далее рассмотрим вклад от кварков на периферии ядра и убедимся в том, что, как и в экранированном случае, учет этого вклада приводит оценки (38), (40) в соответствие оценкам для сдвига уровней через кварковую структуру.

В неэкранированном случае матричный элемент от $\delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a})$ имеет более простой вид, за счет чего интеграл по угловым переменным в (17) может быть взят для произвольных nlj . Действительно, поскольку $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{a})/|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^3 = -\mathbf{n}\nabla|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^{-1}$, вместо (19) получаем

$$\begin{aligned} \langle \psi_{nj}^{(q)} | \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) | \psi_{nj}^{(q)} \rangle &= 2Z_q \lambda \int_0^\infty dr f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) - \\ &- 2Z_q \lambda \int dr (r^2 f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r))' \int d\omega_{\mathbf{r}} \Omega_{jlm_j}^\dagger \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \Omega_{jlm_j}. \end{aligned} \quad (41)$$

Интеграл по угловым переменным берется в два этапа. Сначала для $1/|\mathbf{r} - \mathbf{a}|$ используем разложение по полиномам Лежандра и теорему сложения для угловых гармоник, после чего следует заметить, что при усреднении по \mathbf{a} интегрирование по $d\omega_{\mathbf{a}}$ оставляет в этом разложении только член с $n = 0$, и в результате угловой интеграл в (41) дает $1/a$ при $r < a$ и $1/r$ при $r > a$. С учетом того, что радиальные компоненты исчезают при $r = 0$ и при $r \rightarrow \infty$, оставшееся выражение преобразуется к простому виду

$$\int d\omega_{\mathbf{a}} \langle \psi_{nj}^{(q)} | \delta U_{\text{АММ}}(\mathbf{a}) | \psi_{nj}^{(q)} \rangle = 4\pi \cdot 2Z_q \lambda \int_0^a dr f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) \quad (42)$$

и после усреднения по объему ядра приводит к общему ответу для усредненного сдвига

$$\delta\epsilon_q(nj) = 2Z_q \lambda \int_0^R dr f_{nj}^{(q)}(r) g_{nj}^{(q)}(r) (1 - (r/R)^3). \quad (43)$$

Аналогичным образом вычисляется интеграл в (21), (22), и выбор в качестве нулевого приближения чисто кулоновских ВФ дает

$$(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}(nj) = -2Z_q \lambda \int_0^R dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r) \left(\frac{r}{R}\right)^3 - 2Z_q \lambda \int_R^\infty dr f_{nj}^{(0)}(r) g_{nj}^{(0)}(r). \quad (44)$$

В табл. 5, 6 приведены результаты вычислений сдвигов уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ без экранировки для отдельных кварков, полученные с помощью различных подходов (обозначения совпадают с используемыми ранее в табл. 1, 2). Несмотря на то, что сдвиги для центральных кварков, вычисленные непертурбативно и по ТВ, существенно различаются (d -кварк для уровня $1s_{1/2}$ и u -кварк для $2p_{1/2}$), учет кварков на периферии

Таблица 5. Сдвиги уровня $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (33) для отдельных кварков (в эВ)

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u$	$(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u)^{\text{PT}}$
140	38,9	39,0	-5,4	33,5	33,6
150	77,4	77,7	-13,8	63,6	63,9
160	145,1	145,7	-31,7	113,4	113,8
170	244,1	244,3	-63,2	180,9	181,6
Z	$\Delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d$	$(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d)^{\text{PT}}$
140	-4,4	-19,5	-12,3	-16,7	-16,8
150	-4,3	-38,9	-27,5	-31,8	-31,9
160	-0,7	-72,9	-56,0	-56,7	-56,9
170	10,0	-112,1	-100,5	-90,5	-90,8

Таблица 6. Сдвиги уровня $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (33) для отдельных кварков (в эВ)

Z	$\Delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_u$	$\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u$	$(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u)^{\text{PT}}$
160	-2,3	-107,5	-81,1	-83,4	-83,8
170	18,1	-217,7	-177,5	-159,4	-160,0
180	59,0	-350,1	-300,9	-241,9	-242,8
183	74,7	-390,8	-340,2	-265,5	-266,3
Z	$\Delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d^{\text{PT}}$	$\delta\epsilon_d$	$\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d$	$(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d)^{\text{PT}}$
160	53,5	53,7	-11,8	41,7	41,9
170	108,4	108,9	-28,7	79,7	80,0
180	174,4	175,1	-53,4	121,0	121,4
183	194,8	195,4	-62,0	132,8	133,2

приводит итоговый усредненный сдвиг $(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)$ в соответствие полученному на основе чисто кулоновских ВФ $(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q)^{\text{PT}}$. Специально отметим, что если точные сдвиги $\Delta\epsilon_q$ от центральных u - и d -кварков друг с другом никак не коррелируют, то после усреднения по объему ядра для всех Z с точностью не менее 0,1 % выполняется соотношение $(\Delta\epsilon_u + \delta\epsilon_u)/(\Delta\epsilon_d + \delta\epsilon_d) \simeq Z_u/Z_d$. Это соотношение является очевидным для случая, когда сам оператор $\Delta U_{\text{АММ}}$ рассматривается как возмущение, но в данном случае оно возникает и при таком вычислении сдвигов, когда нулевое приближение является непертурбативным по $\Delta U_{\text{АММ}}$.

В табл. 7, 8 приведены значения полных сдвигов уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$, вычисленные на основе значений из табл. 5, 6 по формулам (13), (20) с помощью решения системы (10) после замены (37), а также по ТВ (39). Учет вклада только от центральных кварков дает результаты, существенно отличные от полученных другими методами, причем для рассматриваемого потенциала (33) это расхождение в разы, в отличие от экранированного случая (ср. с табл. 3, 4). Остальные методы дают близкие результаты, однако теперь отличие между $\mathcal{D}\epsilon$ и $\mathcal{D}\epsilon^{\text{PT}}$ более заметно и составляет $\sim 5\%$. Кроме того, учет вкладов от отдельных кварков с их последующим усреднением по объему ядра приводит к практически совпадающим результатам вне зависимости от того, какие ВФ используются в качестве нулевого приближения. Далее мы покажем, что при полностью непертурбативном учете точечных кварков внутри ядра можно получить результат намного более близкий к непертурбативному результату $\mathcal{D}\epsilon$ для всего протяженного ядра.

Таблица 7. Полные сдвиги уровня $1s_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (33) (в кэВ)

Z	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon^{\text{PT}}$	$\mathcal{D}\epsilon$	$D\epsilon$	$\mathcal{D}\epsilon^{\text{PT}}$	$D\epsilon^{\text{PT}}$
140	16,595	8,205	6,727	7,030	7,031	7,056
150	38,055	17,486	13,594	14,314	14,317	14,369
160	80,808	34,970	25,802	27,223	27,223	27,323
170	152,040	62,286	43,927	46,096	46,136	46,303

 Таблица 8. Полные сдвиги уровня $2p_{1/2}$ за счет $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде (33) (в кэВ)

Z	$\Delta\epsilon$	$\Delta\epsilon^{\text{PT}}$	$\mathcal{D}\epsilon$	$D\epsilon$	$\mathcal{D}\epsilon^{\text{PT}}$	$D\epsilon^{\text{PT}}$
160	32,952	-25,798	-21,539	-20,027	-20,040	-20,115
170	84,482	-55,516	-43,065	-40,623	-40,661	-40,803
180	162,738	-94,528	-68,227	-65,270	-65,334	-65,556
183	190,439	-107,272	—	-72,823	-72,908	-73,112

Непертурбативный учет взаимодействия дираковского фермиона за счет потенциала (33) с отдельными точечными источниками (кварками), смещенными из центра ядра, производится аналогично случаю экранированного АММ (см. п. 2.2). По-прежнему кварки будем рассматривать парами, что позволяет провести разделение по четности. Уровни энергии находятся из систем уравнений (25), однако в приближении $\Delta g \simeq \text{const}$ функция $V(\mathbf{r})$ определяется по-другому (необходимо положить $c_q \equiv 1$ в (23)), следовательно, другой вид будут иметь коэффициентные функции (30).

Чтобы избежать необходимости специально обеспечивать наличие нулей бесконечной кратности у ВФ на каждом из кварков при численном решении (стрельбой) уравнений (25), рассмотрим регуляризованную задачу, в которой каждый кварк имеет малый, но ненулевой размер $\rho_0 \ll \alpha^2/4\pi$. При фактических вычислениях оказалось вполне достаточно положить $\rho_0 = 10^{-6}$, чтобы обеспечить необходимую точность не менее 0,1%. Выбор для ρ_0 меньших значений 10^{-7} – 10^{-8} результатов уже практически никак не изменяет.

Коэффициентные функции (30) в этом случае для пары источников радиусом ρ_0 в точках $(0, 0, \pm a)$ для четных n будут иметь вид

$$G_n(r) = \frac{3Z_q}{2\pi\rho_0^3} \int d\mathbf{r}' \Theta\left(\rho_0 - \sqrt{a^2 - r'^2 - 2ar' \cos \vartheta'}\right) F_n(r, r') P_n(\cos \vartheta) =$$

$$= \begin{cases} \frac{2Z_q r^n}{a^{n+1}}, & r < a - \rho_0, \\ \frac{3Z_q}{\rho_0^3} \left(\frac{1}{r^{n+1}} \int_{a-\rho_0}^r dr' r'^{n+2} + r^n \int_r^{a+\rho_0} dr' \frac{1}{r'^{n-1}} \right) \xi_n(r'), & |r - a| \leq \rho_0, \\ \frac{2Z_q a^n}{r^{n+1}}, & r > a + \rho_0, \end{cases} \quad (45)$$

где

$$\xi_n(r') = \int_{x'_0}^1 dx' P_n(x') = \frac{P_{n-1}(x'_0) - P_{n+1}(x'_0)}{2n+1}, \quad x'_0 = \frac{a^2 + r'^2 - \rho_0^2}{2ar'}. \quad (46)$$

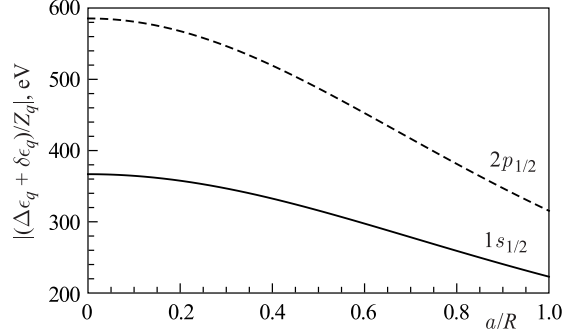


Рис. 2. Зависимость $|(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q(a))/Z_q|$ для точечных источников без экранировки АММ. Уровень $1s_{1/2}$ при $Z = 170$ — сплошная линия, уровень $2p_{1/2}$ при $Z = 183$ — штриховая. Для положительного заряда источника сдвиг уровня $1s_{1/2}$ положительный, сдвиг уровня $2p_{1/2}$ — отрицательный

Отметим, что с помощью компьютерной алгебры в (45) интегралы по dr' берутся аналитически для любого заданного n , так как подынтегральное выражение представляет собой дробно-рациональную функцию.

Вычисления, проведенные для пары u - и d -кварков, показывают, что, как и в экранированном случае, сдвиг уровня $\delta\epsilon_{qq}(a)$ за счет смещенной из центра ядра пары кварков пропорционален суммарному заряду кварков, а полученная в таком непертурбативном подходе кривая $|(2\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_{qq}(a))/2Z_q|$ практически неотличима от результатов ТВ. На рис. 2 показана зависимость $|(\Delta\epsilon_q + \delta\epsilon_q(a))/Z_q|$ для уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ при $Z \sim Z_{cr}$ для рассматриваемого потенциала (33). В итоге величина суммарного сдвига уровня, вычисленная по аналогии с (20), составляет $D\epsilon = 46,20$ кэВ для уровня $1s_{1/2}$ при $Z = 170$ и $D\epsilon = -73,11$ кэВ для уровня $2p_{1/2}$ при $Z = 183$, что согласуется с другими результатами из табл. 7, 8, основанными на ТВ, но все еще не совпадает с непертурбативным результатом $\mathcal{D}\epsilon$ для полного ядра. Однако если в случае, когда учитывается эффективная зависимость АММ от координат, одновременный учет нескольких пар источников практически не изменяет итогового результата, в случае с ΔU_{AMM} в виде оператора Дирака–Паули (33) при одновременном учете многих точечных источников внутри ядра (кварков) итоговый сдвиг претерпевает изменения.

Перейдем теперь к рассмотрению конфигураций с таким числом пар точечных источников, чтобы эффективно учитывался полный заряд ядра. Пусть N_q зеркальных пар источников с зарядами Z_{qi} расположены симметрично относительно нуля на оси z на расстоянии a_i от начала координат, при этом $2 \sum_{i=1}^{N_q} Z_{qi} = Z$, тогда коэффициентные функции (30)

$$G_n(r)|_{N_q \text{ пар}} = \sum_{i=1}^{N_q} G_n(r)|_{a \rightarrow a_i, Z_q \rightarrow Z_{qi}}, \quad (47)$$

где $G_n(r)|_{a \rightarrow a_i, Z_q \rightarrow Z_{qi}}$ определены в соответствии с выражением (45) с заменой $a \rightarrow a_i$, $Z_q \rightarrow Z_{qi}$.

Сначала будем исходить из того, что для ядра с $Z \sim 170$ на каждом диаметре в среднем находится $1275^{1/3} \simeq 11$ кварков. Поэтому с учетом (почти) независимости вклада

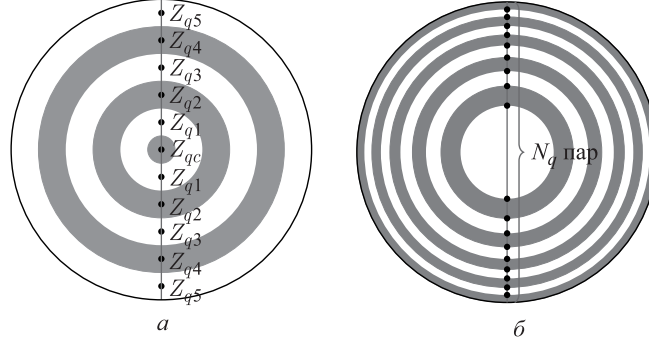


Рис. 3. Конфигурации, моделирующие сферически-симметричное распределение источников по ядру: *а*) 11 источников с зарядами, пропорциональными объему шаровых слоев между сферами с радиусами $r_i = (2i + 1)/11 R$, и суммарным зарядом Z ; *б*) N_q пар источников с суммарным зарядом Z , положение источников находится из условия равенства объемов шаровых слоев между соседними источниками

пары кварков от угла между их диаметром и осью z конфигурация, моделирующая полный заряд ядра, может быть собрана следующим образом. 11 источников располагаются в точках $a_i = \pm(2i/11)R$, $i = 0, \dots, 5$ на оси z , при этом каждый заряд Z_{qi} , $i \neq 0$, пропорционален объему шарового слоя, заключенного между радиусами $a_i - R/11$ и $a_i + R/11$ (рис. 3, *а*), а заряд центрального источника пропорционален объему шара радиусом $R/11$. Единственное, что мы реально при этом опускаем, — это корреляции между зарядами на разных диаметрах, но этот эффект оказывается следующего порядка малости по сравнению с корреляцией таких источников на одном диаметре.

Другой способ состоит в том, что на диаметре вдоль оси z размещаются N_q пар источников с зарядом $Z_q = Z/(2N_q)$ и координатами с условием $a_{i+1}^3 - a_i^3 = R^3/N_q$, которое соответствует равенству объемов шаровых слоев, расположенных между $i + 1$ -м и i -м источником (рис. 3, *б*), и таким образом снова моделируется равномерное распределение заряда по объему ядра.

Результаты расчетов сдвигов нижних уровней для конфигураций рис. 3, *а* и рис. 3, *б* (в последнем случае полагалось $Z_q = 1$, т.е. рассматривалось $Z/2$ пар) приведены в табл. 9 в сравнении с прямой суммой вкладов от пар с соответствующими зарядами. Данные для уровня $2p_{1/2}$ приведены для $Z = 180$, так как сдвиг для нечетного уровня является отрицательным и при больших Z уровень опускается в нижний континуум. Несмотря на то, что конфигурации рис. 3, *а* и рис. 3, *б* по-разному моделируют полный заряд ядра, результаты для этих двух конфигураций успешно согласуются между собой. Для обеих конфигураций значения сдвигов, вычисленные без учета корреляций между источниками ($\sum(2\Delta\epsilon_{qi} + \delta\epsilon_{qq_i}(a_i))$), с принятой точностью совпадают с результатами ТВ для всего ядра и отдельных кварков (колонки 5–7 в табл. 7, 8), в то время как учет корреляций приводит к заметному изменению ответа, который в свою очередь совпадает с непертурбативными результатами $\mathcal{D}\epsilon$ с точностью не хуже 1%, причем чем больше отдельных точечных зарядов (или пар) одновременно учитывается при непертурбативном вычислении, тем лучше воспроизводится результат, когда все ядро как целое рассматривается как источник $\Delta U_{\text{АММ}}$ в непертурбативном подходе. Такое совпадение уже

Таблица 9. Сдвиг уровней $1s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (в кэВ) при $Z \simeq Z_{\text{cr}}$ для конфигураций рис.3,а и рис.3,б, найденный с учетом корреляций между источниками и без учета

Конфигурация	$1s_{1/2}, Z = 170$		$2p_{1/2}, Z = 180$	
	3,а	3,б	3,а	3,б
$D\epsilon$	44,12	43,87	-69,37	-68,82
$\sum(2\Delta\epsilon_{q_i} + \delta\epsilon_{qq_i}(a_i))$	46,43	46,15	-65,89	-65,40

само по себе является нетривиальным результатом, поскольку одинаковый ответ дают существенно различные подходы к вычислению вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$.

Еще раз отметим, что возникающие корреляции при непertурбативном учете отдельных кварков принципиальны только в случае $\Delta g \simeq \text{const}$, поскольку для экранированного АММ одновременный учет нескольких пар точечных источников не приводит к другому ответу. Этот факт является следствием того, что каждый точечный источник для $\Delta U_{\text{АММ}}$ в виде оператора Дирака–Паули (33) приводит к существенной перестройке ВФ, чего не происходит в случае, если в потенциале эффективного взаимодействия зависимость электронного формфактора $F_2(q^2)$ от переданного импульса учитывается полностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, как с учетом $\Delta U_{\text{АММ}}$ ведут себя нижние уровни дираковского фермиона в сверхтяжелом протяженном ядре. При этом основное внимание уделялось вопросу, насколько различаются результаты для сдвигов уровней при чисто пертурбативном и непertурбативном по α/π подходах к вычислению соответствующих эффектов в рамках УД (7), если в обоих случаях с самого начала учитывается полная зависимость ВФ дираковской частицы от $Z\alpha$. Еще раз подчеркнем, что в данном случае непertурбативность по α/π никак не связана с частичным суммированием петлевого разложения для АММ, но подразумевает эффекты, которые не могут быть в принципе получены в рамках стандартной ТВ. Интерес к данному вопросу обусловлен, в частности, последними существенно непertурбативными расчетами поляризации вакуума при $Z > Z_{\text{cr},1s}$ [14–16], которые демонстрируют явно нелинейный характер этого эффекта за рамками ТВ.

Полученные результаты показывают, что при наличии экранировки АММ между пертурбативными и непertурбативными способами учета $\Delta U_{\text{АММ}}$ в УД имеется малозаметная разница в пользу последних, медленно растущая с ростом Z (см. табл. 3, 4). При этом вычисление вклада от $\Delta U_{\text{АММ}}$ через кварковую структуру и все ядро, рассматриваемое как однородно заряженный протяженный кулоновский источник, приводит к хорошо совпадающим результатам, причем вне зависимости от того, учитывается или нет динамическая экранировка АММ. В то же время для оператора Дирака–Паули (1) расхождение между различными подходами, основанными на ТВ, и полностью непertурбативными как по $Z\alpha$, так и по $\Delta U_{\text{АММ}}$ методами, когда в качестве источника $\Delta U_{\text{АММ}}$ выступает ядро с равномерной плотностью заряда или одновременно большое число точечных источников, имитирующих равномерное распределение заряда, составляет $\sim 5\text{--}10\%$ при $Z \sim Z_{\text{cr},1s}$ (см. табл. 7–9). Однако результаты, полученные с учетом динамической экранировки

АММ электрона, показывают, что в радиационных КЭД-эффектах с обменом виртуальным фотоном, к которым относится собственно энергетический вклад, расчеты по стандартной ТВ с однородно заряженным ядром являются хорошим приближением даже для сверхтяжелых атомов, что полностью согласуется с общим выводом работ [21, 22].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Barut A. O., Kraus J. Resonances in e^+e^- System due to Anomalous Magnetic Moment Interactions // Phys. Lett. B. 1975. V. 59, No. 2. P. 175–178.
2. Barut A. O., Kraus J. Solution of the Dirac Equation with Coulomb and Magnetic Moment Interactions // J. Math. Phys. 1976. V. 17, No. 4. P. 506–508.
3. Barut A. O., Komy S. Derivation of Nonperturbative Relativistic Two-Body Equations from the Action Principle in Quantum Electrodynamics // Fortsch. Phys./Prog. Phys. 1985. V. 33, No. 6. P. 309–318.
4. Reitz J. R., Mayer F. J. New Electromagnetic Bound States // J. Math. Phys. 2000. V. 41, No. 7. P. 4572–4581.
5. Geiger K., Reinhardt J., Muller B., Greiner W. Magnetic Moment Interactions in the e^-e^+ System // Z. Phys. A. At. Nucl. 1988. V. 329, No. 1. P. 77–88.
6. Barut A. O., Kraus J. Form-Factor Corrections to Superpositronium and Short-Distance Behavior of the Magnetic Moment of the Electron // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 161–164.
7. Barut A. O. The Electron–Positron System at Short Distances // Z. Phys. A. At. Nucl. 1990. V. 336, No. 3. P. 317–320.
8. Lautrup B. The Short Distance Behaviour of the Anomalous Magnetic Moment of the Electron // Phys. Lett. B. 1976. V. 62, No. 1. P. 103–104.
9. Roenko A., Sveshnikov K. Dynamical Screening of AMM and QED Effects for Large- Z Hydrogen-Like Atoms // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15, No. 1. P. 20–28.
10. Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S. S. Electron–Positron Pairs in Physics and Astrophysics: From Heavy Nuclei to Black Holes // Phys. Rep. 2010. V. 487, No. 1–4. P. 1–140; arXiv:0910.0974 [astro-ph.HE].
11. Greiner W., Mueller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. 2nd Ed. Berlin: Springer, 1985.
12. Rafelski J., Kirsch J., Mueller B., Reinhardt J., Greiner W. Probing QED Vacuum with Heavy Ions. arXiv:1604.08690. 2016.
13. Popov V. S. Critical Charge in Quantum Electrodynamics // Phys. At. Nucl. 2001. V. 64, No. 3. P. 367–392.
14. Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y. Vacuum Energy of One-Dimensional Supercritical Dirac–Coulomb System // Int. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32, No. 11. P. 1750054.
15. Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K. Nonperturbative Effects of Vacuum Polarization for the Quasi-One-Dimensional Dirac–Coulomb System with $Z > Z_{cr}$ // Phys. Part. Nucl. Lett. 2017. V. 14, No. 5. P. 698–712.
16. Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K. Vacuum Effects for One-Dimensional “Hydrogen Atom” with $Z > Z_{cr}$ // Theor. Math. Phys. 2017. V. 193, No. 2. P. 1647–1674.
17. Sveshnikov K. A., Khomovskii D. I. High Z Effects in Accounting for Radiative Component of the Electron Magnetic Moment in Hydrogen-Like Atoms // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10, No. 2. P. 119–131.

18. *Barbieri R., Mignaco J. A., Remiddi E.* Electron Form Factors up to Fourth Order. I // *Nuovo Cim. A.* 1972. V. 11, No. 4. P. 824–864.
19. *Bateman H., Erdelyi A.* Higher Transcendental Functions. New York: McGraw-Hill, 1953. V. 1–2.
20. *Sveshnikov K. A., Khomovsky D. I.* Perturbativity and Nonperturbativity in Large- Z Effects for Hydrogen-Like Atoms // *Moscow Univ. Phys. Bull.* 2016. V. 71, No. 5. P. 3.
21. *Indelicato P., Bieroń J., Jönsson P.* Are MCDF Calculations 101% Correct in the Super-Heavy Elements Range? // *Theor. Chem. Acc.* 2011. V. 129, No. 3. P. 495–505.
22. *Pyykkö P.* The Physics behind Chemistry and the Periodic Table // *Chem. Rev.* 2012. V. 112, No. 1. P. 371–384.

Получено 20 июня 2017 г.