

## СВЕТИМОСТЬ КОЛЛАЙДЕРА С АСИММЕТРИЧНЫМИ ПУЧКАМИ

*И. Н. Мешков*<sup>1</sup>

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна  
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Получена формула светимости коллайдера при столкновении двух пучков, отличающихся своими параметрами. Пучки имеют совпадающие продольные оси. Формула справедлива для встречных и «попутных» пучков. Приведены три частных случая формулы: столкновение двух идентичных аксиально-симметричных сгустков сгруппированных пучков, столкновение сгустка с распущенным пучком и столкновение двух распущенных пучков.

A formula for the collider luminosity is derived for a head-on collision of two beams with different parameters. The colliding beams have coinciding longitudinal axes. The formula is valid for colliding and partially separated (“merging”) beams. Three particular cases are presented: the collision of two identical axially symmetric bunches, the collision of a bunch with a disbanded beam, and the collision of two disbanded bunches.

PACS: 29.20.db; 29.27.Fh

### ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета светимости коллайдера известна со времени появления первых ускорителей на встречных пучках. Тем не менее до сих пор не предложено достаточно компактной формулы, описывающей светимость коллайдера в общем случае столкновения двух пучков с произвольными параметрами, позволяющей производить аналитические или численные расчеты, не прибегая к методам математического моделирования. Подобная формула нужна для проведения расчетов на уровне оценок, что необходимо для выбора исходных значений параметров коллайдера. Наиболее известны формулы для случая столкновения двух одинаковых сгустков встречных пучков (см., например, [1–3]). Попытки получить формулу для достаточно общего случая приводят, как правило, к громоздким выражениям, содержащим многократные интегралы по шести координат пространства координат-импульсов [4].

В данной работе рассматривается случай столкновения в коллайдере двух пучков, параметры которых — вид частиц сгустка и их число, энергия, размеры и форма — различны.

---

<sup>1</sup>E-mail: meshkov@jinr.ru

### 1. АСИММЕТРИЧНЫЕ ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ — ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Распределение плотности частиц в обоих сгустках сгруппированных пучков гауссово по всем трем измерениям  $(x, y, s)$ :

$$\rho_i(t) = \frac{N_i}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{x_i}(t) \sigma_{y_i}(t) \sigma_{s_i}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_{x_i}^2(t)} + \frac{y^2}{\sigma_{y_i}^2(t)} + \frac{s^2}{\sigma_{s_i}^2} \right) \right\}, \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Аналогичная формула распределения плотности в распущенном (coasting) пучке с равномерным распределением плотности  $N_i$  частиц по периметру кольца имеет вид

$$\rho(t) = \frac{N_i}{2\pi \sigma_{x_i}(t) \sigma_{y_i}(t) C_{\text{ring}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_{x_i}^2(t)} + \frac{y^2}{\sigma_{y_i}^2(t)} \right) \right\}. \quad (2)$$

Для упрощения описания кинематики столкновений (рисунок) выберем отсчет времени и начало координат так, что при  $t = 0$  центры обоих сгустков будут находиться в начале координат  $(x = y = s = 0)$ . Координаты центров сгустков  $s_i^0$  изменяются со временем как

$$s_i^0(t) = v_i t, \quad x_i = y_i = 0. \quad (3)$$

Ограничимся случаем так называемых «лобовых столкновений», когда оси сгустков совпадают между собой и с осью  $s$ . Как будет показано, результат, полученный ниже, справедлив как для встречных (counter propagating), так и для «попутных» (co-propagating), или «сливающихся» (merging), сгустков (рисунок).

Зависимость поперечных размеров сгустков  $\sigma_{x_i}(t)$ ,  $\sigma_{y_i}(t)$  от времени появляется при их движении в фокусирующей системе:

$$\sigma_{\alpha i}(t) = \sqrt{\varepsilon_{\alpha i} \beta_{\alpha i}}, \quad \alpha = x, y, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_{\alpha i} = \text{const}$  — эмиттанс пучка,

$$\beta_{\alpha i}(s_i(t)) = \beta_{\alpha i}^* + \frac{s_i^2(t)}{\beta_{\alpha i}^*} \quad (5)$$

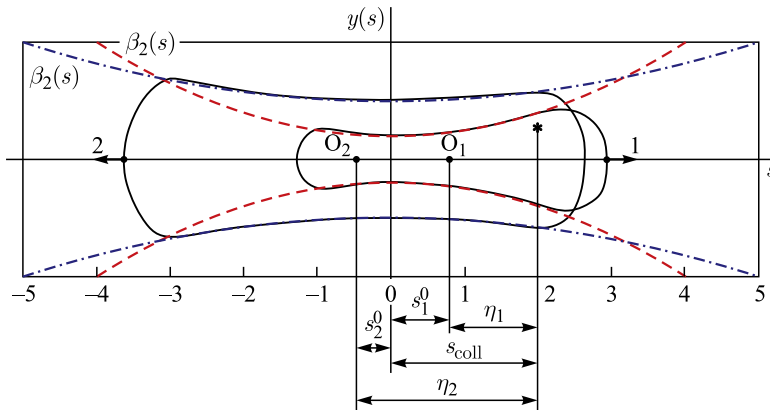


Схема столкновения двух сгустков.  $O_{1,2}$  — центры сгустков;  $\eta_{1,2}$  — расстояния точки взаимодействия двух частиц (\*) от центров сгустков;  $s_{\text{coll}}$  — то же, от начала координат;  $\beta_{1,2}$  — огибающие ( $\beta$ -функции) первого и второго пучков

— бетатронная ( $\beta$ -) функция фокусирующей системы;  $\beta_{\alpha i}^*$  — ее минимальное значение;  $s_i(t)$  — координата частицы в момент времени  $t$ .

Мы предполагаем также, что дисперсия на участке встречи пучков равна нулю, что имеет место в большинстве практических случаев.

Введем теперь координаты частиц в системах движущихся сгустков:

$$x'_i, y'_i, \eta_i.$$

Очевидно,  $x'_i = x_i$ ,  $y'_i = y_i$ , а  $s$ -координата частицы в лабораторной системе

$$s_i(t) = s_i^0(t) + \eta_i. \quad (6)$$

Соответственно  $s$ -координата двух столкнувшихся частиц сгустков 1 и 2 равна

$$s_{\text{coll}}(t) = s_1^0(t) + \eta_1 = s_2^0(t) + \eta_2. \quad (7)$$

Отсюда с учетом условий (3)

$$\eta_2 = \eta_1 + \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) s_1^0. \quad (8)$$

Здесь  $v_{1,2}$  — скорость частиц 1 и 2. Введя обозначения  $\xi \equiv s_1^0$ ,  $\eta \equiv \eta_1$ , запишем

$$\eta_2 = \eta + V\xi, \quad V \equiv 1 - \frac{v_1}{v_2}. \quad (9)$$

За время столкновения слой частиц первого сгустка  $\rho_1(x, y, \eta_1, t) d\eta_1$  пересекает сгусток 2, сталкиваясь в каждой точке  $s_{\text{coll}}$  со слоем  $\rho_2(x, y, \eta_2, t) d\eta_2$ . Поскольку мы выразили  $\eta_2$  через  $\eta$  и  $\xi(t) = v_1 t$ , интегрирование по времени столкновения можно заменить интегрированием по  $\xi$  (координате центра первого сгустка), а интегрирование по длинам сгустков провести по переменной  $\eta$ . Теперь запишем «очевидное» выражение для светимости

$$L = n_{\text{bunch}} f_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_2 \rho_1(x, y, \eta_1) \rho_2(x, y, \eta_2(t)), \quad (10)$$

где  $n_{\text{bunch}}$  — число сгустков (см. ниже разд. 5);  $f_0$  — частота обращения частиц, и затем перепишем его в виде

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^3 \sigma_{s1} \sigma_{s2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi_y(y) dy \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2}{\sigma_{s1}^2} + \frac{(\eta + V\xi)^2}{\sigma_{s2}^2} \right) \right\}, \quad (11)$$

$$\psi_x(x, \xi, \eta) = \frac{1}{\sigma_{x1}(\xi, \eta) \sigma_{x2}(\xi, \eta)} \exp \left\{ -\left( \frac{1}{\sigma_{x1}(\xi, \eta)} + \frac{1}{\sigma_{x2}(\xi, \eta)} \right) \frac{x^2}{2} \right\}. \quad (12)$$

$\psi_y(y, \xi, \eta_1)$  — аналогично с заменой индекса и аргумента  $x$  на  $y$ .

Интеграл от  $\psi_x$  по  $dx$  дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x, \xi, \eta_1) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_{x1}^2(\xi, \eta) + \sigma_{x2}^2(\xi, \eta)}}. \quad (13)$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_y(y, \xi, \eta_1) dy$  вычисляется аналогично с заменой  $x$  на  $y$ .

Используя значения (4) для  $\sigma_{x1,2}$ , запишем

$$\sqrt{\sigma_{x1}^2(\xi, \eta) + \sigma_{x2}^2(\xi, \eta)} = \sqrt{\varepsilon_{x1}\beta_{x1}(\xi, \eta) + \varepsilon_{x2}\beta_{x2}(\xi, \eta)}. \quad (14)$$

Аналогичное выражение для  $\sigma_{y1,2}$  найдем заменой  $x$  на  $y$ .

Подставляя значения интеграла (13) и знаменателя (14), а также их  $y$ -аналогов в (11), приходим к довольно громоздкому выражению для светимости коллайдера с полностью асимметричными сгустками:

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^2 \sigma_{s1} \sigma_{s2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta^2}{\sigma_{s1}^2} + \left( \frac{\eta + V\xi}{\sigma_{s2}} \right)^2 \right) \right\} \times \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_{x1}\beta_{x1}(\xi, \eta) + \varepsilon_{x2}\beta_{x2}(\xi, \eta)) (\varepsilon_{y1}\beta_{y1}(\xi, \eta) + \varepsilon_{y2}\beta_{y2}(\xi, \eta))}}. \quad (15)$$

Отметим, что  $\beta$ -функции в точках столкновения частиц имеют разные значения  $(\beta_{x,y})_{1,2}$ , если частицы 1 и 2 отличаются хотя бы по одному из параметров — заряду, массе или энергии. Поскольку значения бетатронных функций  $\beta_{1,2}$  пропорциональны магнитной жесткости частиц, можно ввести «параметр относительной магнитной жесткости»  $p$  сталкивающихся частиц:

$$p = \frac{\beta_1^*}{\beta_2^*} = \frac{p_1}{Z_1} \frac{Z_2}{p_2}. \quad (16)$$

Здесь  $Z_{1,2}e$ ,  $p_{1,2}$  — заряд и импульс частиц 1 и 2. Параметр  $p = 1$  и в случае пучков разных частиц, если фокусирующие системы двух колец коллайдера не имеют на общем участке (участке взаимодействия частиц) фокусирующих элементов, определяющих значения  $\beta$ -функций.

Выражение (15) существенно упрощается в трех частных случаях, рассмотренных далее.

## 2. ОДИНАКОВЫЕ ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ

В рассматриваемом случае имеем

$$\begin{aligned} v_1 = -v_2, \quad V = 2, \quad \beta_{x1}^* = \beta_{x2}^* \equiv \beta_x^*, \quad \beta_{y1}^* = \beta_{y2}^* \equiv \beta_y^*, \\ \sigma_{s1} = \sigma_{s2} \equiv \sigma_s, \quad \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} \equiv \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2} \equiv \varepsilon_y. \end{aligned} \quad (17)$$

Из (15) получим

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{8\pi^2 \sigma_s^2 \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \beta_x^* \beta_y^*} \times \text{Int}_1(\beta_x, \beta_y, \sigma_s),$$

$$\text{Int}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\xi + \eta}{\beta_x^*}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\xi + \eta}{\beta_y^*}\right)^2\right]}} \exp\left\{-\frac{\eta^2 + (\eta + 2\xi)^2}{2\sigma_s^2}\right\}.$$

Преобразуя числитель показателя экспоненты:

$$\eta^2 + (\eta + 2\xi)^2 = 2[(\xi + \eta)^2 + \xi^2],$$

перейдя затем от переменных интегрирования  $\xi, \eta$  к переменным  $\xi$  и  $\phi = \xi + \eta$  и вычислив якобиан перехода  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi, \phi)} = 1$ , находим

$$\text{Int}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2/\sigma_s^2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\phi}{\beta_x^*}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\phi}{\beta_y^*}\right)^2\right]}} e^{-\phi^2/\sigma_s^2} d\phi. \quad (18)$$

Таким образом, двойной интеграл преобразован в произведение двух интегралов. Первый из них, интеграл по  $\xi$ , равен  $\sqrt{\pi}$ . В случае  $\beta_x^* = \beta_y^* \equiv \beta^*$  получаем из (18) известное выражение светимости коллайдера на аксиально-симметричном пучке (ср. [1], формулы (6.134), (6.135)):

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{4\pi \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} \beta^*} F_{\text{HG}}, \quad F_{\text{HG}}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{1 + (\alpha \cdot u)^2}, \quad \alpha = \frac{\sigma_s}{\beta^*}. \quad (19)$$

Здесь  $F_{\text{HG}}(\alpha)$  — так называемая «функция песочных часов», описывающая зависимость светимости от параметров  $\sigma_s$  и  $\beta^*$ .

### 3. СТОЛКНОВЕНИЕ РАСПУЩЕННОГО ПУЧКА СО СГУСТКОМ СГРУППИРОВАННОГО ПУЧКА

По-прежнему считаем фокусирующую систему аксиально-симметричной на участке встречи, но теперь пучки содержат частицы разного вида и отличающиеся, вообще говоря, по энергии. Поэтому

$$\beta_{x1}^* = \beta_{y1}^* \equiv \beta_1^* \neq \beta_{x2}^* = \beta_{y2}^* \equiv \beta_2^*. \quad (20)$$

Формула для светимости, когда один из сталкивающихся пучков ( $N_2$ ) распущен и имеет равномерную по периметру кольца  $C_{\text{ring}}$  плотность (см. формулу (2)), отличается от (15) выражением в знаменателе дроби перед интегралом, равным теперь  $(2\pi)^{3/2} \sigma_s C_{\text{ring}}$ . Здесь  $\sigma_s \equiv \sigma_{s1}$  — «гауссов» параметр длины сгустка сгруппированного пучка.

Ограничившись случаем аксиально-симметричных пучков, найдем, что формула (15) принимает вид

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^{3/2} \sigma_s C_{\text{ring}}} \times \text{Int}_2(\beta_x, \beta_y, \sigma_s),$$

$$\text{Int}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{1}{\varepsilon_1 \beta_1^* \left[ 1 + \left( \frac{\xi + \eta}{\beta_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 \beta_2^* \left[ 1 + \left( \frac{\xi + \eta}{\beta_2^*} \right)^2 \right]} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2\sigma_s^2} \right\}. \quad (21)$$

Приближение бесконечных пределов интегрирования справедливо при условии

$$\sigma_s, \beta_{1,2}^* \ll C_{\text{ring}}. \quad (22)$$

Повторим преобразование переменных аналогично сделанному выше:

$$\phi = \xi + \eta, \quad \psi = \eta.$$

Отсюда  $\xi = \psi - \phi$ ,  $\eta = \psi$  и якобиан перехода  $\frac{D(\xi, \eta)}{D(\xi, \psi)} = 1$ .

В результате

$$\text{Int}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -\frac{\psi^2}{2\sigma_s^2} \right) d\psi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\phi}{\varepsilon_1 \beta_1^* \left[ 1 + \left( \frac{\phi}{\beta_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 \beta_2^* \left[ 1 + \left( \frac{\phi}{\beta_y^*} \right)^2 \right]}. \quad (23)$$

Произведя интегрирование, окончательно получим

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2C_{\text{ring}}} \sqrt{\frac{\beta_1^* \beta_2^*}{(\varepsilon_1 \beta_1^* + \varepsilon_2 \beta_2^*)(\varepsilon_1 \beta_2^* + \varepsilon_2 \beta_1^*)}}. \quad (24)$$

Выражение (24) можно упростить, используя параметр  $p$  (16):

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2C_{\text{ring}}} \sqrt{\frac{p}{p(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + p^2)}}. \quad (25)$$

#### 4. СТОЛКНОВЕНИЕ ДВУХ РАСПУЩЕННЫХ ПУЧКОВ

При тех же условиях (22) получим из (15) аналогично (21) значение светимости:

$$L = \frac{N_1 N_2 f_0}{2C_1 C_2} \times \text{Int}_3(\beta_x, \beta_y, \sigma_s),$$

$$\text{Int}_3 = \int_{-C_1/2}^{C_1/2} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{1}{\varepsilon_1 \beta_1^* \left[ 1 + \left( \frac{\xi + \eta}{\beta_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 \beta_2^* \left[ 1 + \left( \frac{\xi + \eta}{\beta_2^*} \right)^2 \right]} \exp \left\{ -\frac{\eta^2}{2\sigma_s^2} \right\}. \quad (26)$$

Здесь  $C_1, C_2$  — периметры колец накопителей, и принято, что справедливо условие (22) для  $\beta_1^*, \beta_2^*$ . Частота столкновений:  $f_0 = v_1/C_1$  независимо от соотношения между значениями скоростей частиц  $v_1$  и  $v_2$ .

Произведя интегрирование аналогично (23)–(25), находим

$$L = \frac{N_1 N_2 f_0}{2C_2} \sqrt{\frac{p}{p(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + p^2)}}. \quad (27)$$

## 5. СИНХРОНИЗАЦИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ И ИХ ЧАСТОТА. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СВЕТИМОСТИ ПО ДЛИНЕ УЧАСТКА ВСТРЕЧИ

Столкновения частиц двух сгруппированных пучков происходят на одном и том же участке, общем для обоих колец, если частоты обращения частиц  $f_{1,2}$  и число ступков в пучках  $(n_{\text{bunch}})_{1,2}$  удовлетворяют равенству

$$n_1 n_{\text{bunch}1} f_1 = n_2 n_{\text{bunch}2} f_2, \quad (28)$$

где  $n_{1,2}$  — целые числа. В оптимальном варианте размеры колец и энергия частиц выбраны так, что  $n_1 = n_2 = 1$ . При этом частота столкновений

$$f_{\text{coll}} = n_{\text{bunch}1} f_1 = n_{\text{bunch}2} f_2. \quad (29)$$

Это и есть параметр  $n_{\text{bunch}} f_0$  при столкновении двух сгруппированных пучков (см. (10), (11), (15)). Условие синхронизации (28) выполняется только для определенных значений энергии (скоростей  $v_1, v_2$ ) сталкивающихся частиц:

$$v_2 = v_1 \frac{n_1 n_{\text{bunch}1} C_2}{n_2 n_{\text{bunch}2} C_1}. \quad (30)$$

Поскольку параметры  $n_{1,2}$  и  $n_{\text{bunch}}$  — целые числа, минимальное изменение энергии частиц возможно только скачкообразно, с шагом  $\Delta n = 1$ . Сканирование с более мелким шагом требует специальных мер по изменению длины орбиты одного из пучков. Если один из пучков или оба распущенные, такая проблема не существует. Сказанное особенно существенно для встречных пучков умеренно релятивистских частиц, что имеет место, например, в электрон-ионных коллайдерах [5].

При столкновении распущенного пучка со сгруппированным  $f_{\text{coll}} = n_{\text{bunch}} f_0$ , где  $n_{\text{bunch}}$  и  $f_0$  — параметры сгруппированного пучка, а при столкновении двух распущенных пучков

$$f_{\text{coll}} = \max\{f_1, f_2\},$$

где  $f_{1,2}$  — частоты обращения частиц первого и второго пучков.

Отметим, что полученные выражения для светимости (15), (24), (25), (27) справедливы как для встречных, так и для попутных пучков.

Немаловажной характеристикой светимости является ее распределение по длине участка взаимодействия пучков. Как явно видно из подынтегральных выражений в формулах для  $\text{Int}_1$  (18) и  $F_{\text{HG}}(\alpha)$  (19),  $\text{Int}_2$  (21), (23) и  $\text{Int}_3$  (26), характерное значение  $\Delta s$

протяженности функции  $dL/ds(s)$  определяется минимальными значениями  $\beta$ -функций (если протяженность участка столкновения не ограничена специально):

$$\Delta s \approx \min \{\beta_1^*, \beta_2^*\}.$$

Автор выражает благодарность В. А. Лебедеву, Ж. Л. Мальцевой, С. С. Нагайцеву и П. Ю. Шатунову за полезные обсуждения и ценные замечания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lebedev V., Shiltsev V.* Accelerator Physics at Tevatron Collider. Springer, 2014. P. 252.
2. *Syphers M. J., Zimmermann F.* Accelerator Physics of Collider. Paragraph 29.1. Luminosity. 2015; <http://pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-accel-phys-colliders.pdf>.
3. *Batygin Y., Katayama T.* Merging Beam–Beam Collisions at RIKEN RI Beam Factory // Proc. of EPAC-1996; <http://accelconf.web.cern.ch/AccelConf/e96/PAPERS/MOPL/MOP097L.PDF>.
4. *Batygin Y., Katayama T.* Luminosity of Particle Collider. Preprint RIKEN-AF-AC-10. Tokyo, 1998. 21 p.
5. *Antonov A. N. et al.* The Electron–Ion Scattering Experiment ELISE at the International Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) — A Conceptual Design Study // Nucl. Instr. Meth. A. 2011. V. 637. P. 60–76.

Получено 19 февраля 2018 г.