

## ВЛИЯНИЕ КРАЕВЫХ ПОЛЕЙ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ НА ДИНАМИКУ ЧАСТИЦ В КОЛЛАЙДЕРЕ NICA

*П. Р. Зенкевич<sup>1</sup>, А. Е. Большаков*

Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова  
НИЦ «Курчатовский институт», Москва

Исследование динамической апертуры (ДА) коллайдера NICA с помощью программы MADX показало, что в выбранной рабочей точке ( $Q_x, Q_y \approx 9,43$ ) ДА значительно уменьшается при учете краевых полей квадрупольных линз и поворотных магнитов. Развита аналитическая теория для расчета силы резонансов, создаваемых краевыми полями магнитных квадрупольных линз в кольцевой машине. Показано, что выведенные формулы имеют универсальный характер и не зависят от конструкции линз. Написана программа для расчета коэффициентов ангармоничности и силы резонансов в коллайдере NICA. Разработан метод оценки силы резонансов по результатам численного расчета траекторий с помощью кода MADX. Для структуры коллайдера NICA результаты аналитического расчета силы резонанса совпадают с удовлетворительной точностью с результатами, полученными при обработке траектории.

Study of NICA dynamical aperture (DA) by the use of MADX code has shown that in chosen working point ( $Q_x, Q_y \approx 9.43$ ) DA is sharply decreased with account of fringed fields of the quadrupole lenses and dipole magnets. An analytical theory is developed for calculation of the resonance strengths created by fringe fields of the quadrupole lenses. The formulae for these parameters have general character and do not depend on lens design. The codes for numerical calculation of these parameters in NICA collider have been written. A method is developed for estimation of the resonance strength using numerical simulation of the trajectories by MADX code. For lattice of NICA collider the results of analytical calculation of the resonance strength for chosen resonance coincide with results of MADX code with satisfactory accuracy.

PACS: 29.20.db; 29.27.Bd

### ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование динамической апертуры (ДА) в коллайдере NICA [1] с помощью программы MADX [2] показало, что влияние краевого поля квадрупольных линз сильно уменьшает ДА [3]. На рис. 1 представлен график ДА для выбранной рабочей точки, рассчитанный с учетом только эффектов краевого поля.

Из графика видно, что две зеленые области «выживания» (области 1) разделены черной полосой гибнущих частиц (область 2), которая может быть идентифицирована как суммовый резонанс четвертого порядка. Работа состоит из трех частей: 1) анализ влияния эффектов краевого поля; 2) исследование движения частиц вблизи резонанса, создаваемого нелинейностью четвертого порядка; 3) сравнение результатов аналитических расчетов ширины резонансов с результатами численного моделирования.

---

<sup>1</sup>E-mail: zenkevich@itep.ru

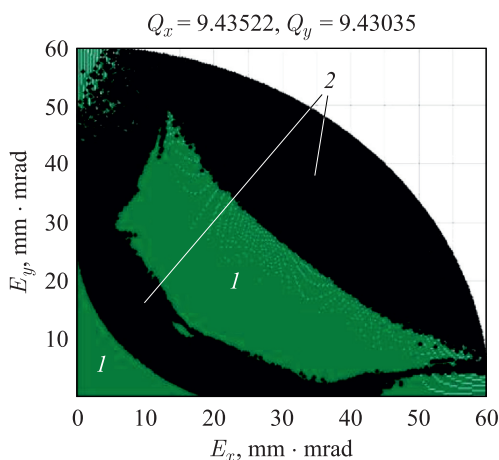


Рис. 1 (цветной в электронной версии). График ДА для выбранной рабочей точки ( $Q_x, Q_y \approx 9,43$ ), рассчитанный с учетом только эффектов краевого поля. Область «выживания» выделена зеленым цветом (1), полоса гибнущих частиц — черным цветом (2)

## 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТОВ КРАЕВОГО ПОЛЯ

**1.1. Уравнения движения.** Краевое магнитное поле квадрупольной линзы с точностью до членов третьего порядка малости по поперечным координатам и их производным определяется следующими уравнениями [4]:

$$\begin{aligned} B_x &= Gy - \frac{1}{12}\ddot{G}(x^3 + 3xy^2), \\ B_y &= -Gx - \frac{1}{12}\ddot{G}(y^3 + 3x^2y), \\ B_s &= \dot{G}xy, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $xy$  — поперечные координаты;  $s$  — продольная координата;  $G(s) = \left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=0, y=0}$  —

градиент магнитного поля квадрупольной линзы, точка сверху означает производную по  $s$ . Краевое поле квадрупольной линзы часто называют «псевдооктуполем». Отметим два существенных различия между полем «псевдооктуполя» и истинной октупольной линзой: 1) знак перед членами с  $3xy^2$  и  $3x^2y$ ; 2) наличие продольной компоненты поля. Подставляя уравнение магнитного поля (1) в уравнение Лоренца, получим следующие уравнения движения в краевом поле квадрупольной линзы:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + k(s)x &= \frac{1}{12}\ddot{k}(s)(x^3 + 3xy^2) + \dot{k}(s)\frac{dy}{ds}xy, \\ \ddot{y} - k(s)y &= -\frac{1}{12}\ddot{k}(s)(y^3 + 3yx^2) - \dot{k}(s)\frac{dx}{ds}xy. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2)  $k(s) = eG(s)/pc$ . Решение этих уравнений можно найти с помощью метода вариации постоянных [5], полагая

$$x = a_x \varphi_x + C. C. \quad (3)$$

В этом уравнении  $a_x$  — комплексная амплитуда;  $\varphi_x$  — функция Флоке;  $C. C.$  — комплексно-сопряженная величина. Функция Флоке удовлетворяет нормировочному уравнению для вронскиана  $W$ :  $W = \varphi_x \dot{\varphi}_x^* - \varphi_x^* \dot{\varphi}_x = -2i\Delta$ ,  $i$  — мнимая единица,  $\Delta = 1$  м. При замене индексов получается уравнение для второй степени свободы. Подставляя (3) в (2) и учитывая нормировочное уравнение, найдем, что

$$\dot{a}_{x,y} = -\frac{1}{W}(\text{R. H. S.})_{x,y}, \tag{4}$$

где  $(\text{R. H. S.})_{x,y}$  — правая часть соответствующих уравнений в системе (2).

**1.2. Нелинейный сдвиг бетатронной частоты.** Подставляя  $x, y$  в правые части (4) и выполняя усреднение по фазам, получим, что сдвиги бетатронных частот определяются следующей формулой [6]:

$$\begin{aligned} \Delta Q_x &= C_{xx}J_x + C_{xy}J_y, \\ \Delta Q_y &= C_{yx}J_x + C_{yy}J_y, \end{aligned} \tag{5}$$

где инварианты  $J_{x,y} = 2g_{x,y}^2\Delta$ .

$$\begin{aligned} C_{xx} &= -\frac{1}{32\pi} \int_0^L \ddot{k}(s) \beta_x(s)^2 ds, \\ C_{yy} &= -\frac{1}{32\pi} \int_0^L \ddot{k}(s) \beta_y(s)^2 ds, \\ C_{xy} &= -\frac{1}{32\pi} \int_0^L \ddot{k}(s) \beta_x(s)\beta_y(s) ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь бета-функция  $\beta_{x,y}(s) = g_{x,y}^2/\Delta$ . Интегралы в (6) сводятся к интегрированию по краевому полю, для которого мы использовали ту же схему, что и в [6]. Однако, в отличие от этой работы, мы не задавались конкретной формой распределения краевого поля (в [6] была использована простая модель «двух парабол»). Рассмотрим схему выкладок на примере первого коэффициента. Пусть функция  $k(s)$  известна. Эта функция определена на интервале  $[s_b, s_f]$ , где  $s_b$  и  $s_f$  — начало и конец краевого поля. Эта функция удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$k(s_b) = k_0, k(s_f) = 0; \quad \frac{dk(s)}{ds}(s_b) = \frac{dk(s)}{ds}(s_f) = 0. \tag{7}$$

Условие для производной следует из гладкости градиента магнитного поля. Разложим  $\beta_{x,y}(s)$  в ряд Тейлора по переменной  $s$  и ограничимся первыми двумя членами:  $\beta_{x,y}(s) = \beta_{x,y}(s_0) + \dot{\beta}_{x,y}(s_0)(s - s_0)$ . При интегрировании по  $s$  возникают следующие интегралы:

$$I_0 = \int_{s_f}^{s_b} \ddot{k}(s) ds, \quad I_1 = \int_{s_f}^{s_b} \ddot{k}(s)(s - s_0) ds, \quad I_2 = \int_{s_f}^{s_b} \dot{k}(s) ds.$$

Интегрируя с учетом граничных условий, получим  $I_0 = 0$ ,  $I_1 = k_0$ ,  $I_2 = -k_0$ . Используя эти формулы и учитывая, что разные линзы могут иметь разные градиенты, получим

$$\begin{aligned} C_{xx} &= -\frac{1}{32\pi} \sum_q k_0^q [F_{xx}^q(s_{2q}) - F_{xx}^q(s_{1q})], \\ C_{xy} = C_{yx} &= -\frac{1}{16\pi} \sum_q k_0^q [F_{xy}^q(s_{2q}) - F_{xy}^q(s_{1q})], \\ C_{yy} &= \frac{1}{32\pi} \sum_q k_0^q [F_{yy}^q(s_{2q}) - F_{yy}^q(s_{1q})]. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь суммирование проводится по всем квадрупольным линзам кольца,  $s_{1q}$  — координата начала квадрупольной линзы,  $s_{2q}$  — координата ее конца.

$$\begin{aligned} F_{xx}^q(s) &= \beta_x(s)\dot{\beta}_x(s), \\ F_{yy}^q(s) &= \beta_y(s)\dot{\beta}_y(s), \\ F_{xy}^q(s) &= \beta_y(s)\dot{\beta}_x(s) - \beta_x(s)\dot{\beta}_y(s). \end{aligned} \quad (9)$$

Изменение модуля функции Флоке  $g(s)$  ( $g = \sqrt{\beta(s)\Delta}$ , где  $\Delta = 1$  м) определяется уравнением  $\frac{d^2 g_{x,y}}{ds^2} \pm k_1 g_{x,y} - \frac{\Delta^2}{g_{x,y}^3} = 0$ . Для тонких линз можно пренебречь членом  $\Delta^2/g^3$ . Тогда, интегрируя по длине линзы, получим  $\dot{g}_{x,y}(s_2) - \dot{g}_{x,y}(s_1) \approx \mp k_1 g_{x,y}(s_0) L_{\text{lens}}$  и  $\dot{\beta}_{x,y}(s_2) - \dot{\beta}_{x,y}(s_1) \approx \mp 2\beta_{x,y}(s_0) L_{\text{lens}}$ , где  $L_{\text{lens}}$  — длина линзы,  $s_0$  — центральная точка линзы. Подставляя эти выражения в (8) и (9), получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} C_{xx} &\approx \frac{1}{16\pi} \sum_q k_q^2 \beta_x(s_{0q})^2 L_{\text{lens}}^q, \\ C_{xy} = C_{yx} &\approx \frac{1}{8\pi} \sum_q k_q^2 \beta_x(s_{0q}) \beta_y(s_{0q}) L_{\text{lens}}^q, \\ C_{yy} &\approx \frac{1}{16\pi} \sum_q k_q^2 \beta_y(s_{0q})^2 L_{\text{lens}}^q. \end{aligned} \quad (10)$$

Из этих формул следует, что (в отличие от октупольных линз) краевые поля квадрупольных линз приводят к тому, что все три коэффициента ангармоничности имеют положительные знаки. Значения коэффициентов ангармоничности для коллайдера NICA приведены ниже (для удобства сравнения с MADX-PTC приведены производные по эмиттансу  $E = 2I$ ).

Коэффициенты ангармоничности имеют размерность  $\text{м}^{-1}$ . Умножение на эмиттанс (в м) дает сдвиг частоты в единицах бетатронной частоты. Соответствующие значения обозначены как  $\Delta Q_x$ ; в качестве опорного эмиттанса подставлялся аксептанс камеры  $E_0 = 4 \cdot 10^{-5}$  м. В третьей колонке приведены сдвиги бетатронной частоты для диагональных частиц, для которых  $\Delta Q_x = \Delta Q_y$ , а  $E_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  м.

**1.3. Резонансы бетатронных колебаний, созданные краевыми полями линз.** Уравнения движения вблизи резонанса могут быть найдены с помощью стандартной процедуры, которая включает следующие шаги: 1) выделение резонансных членов и их периодической части; 2) разложение этой периодической части в ряд Фурье; 3) переход к независимой переменной  $\theta = s/R$ ; 4) переход от комплексных амплитуд  $a_{x,y}$  к переменным  $J_{x,y}$

Таблица 1. Коэффициенты ангармоничности  $\frac{\partial Q_x}{\partial E_x}$ ,  $\frac{\partial Q_y}{\partial E_y}$ ,  $\frac{\partial Q_x}{\partial E_y}$  и соответствующие сдвиги бета-фронтной частоты для коллайдера NICA

Расчет	$\frac{\partial Q_x}{\partial E_x} (\Delta Q_x)$	$\frac{\partial Q_y}{\partial E_y} (\Delta Q_y)$	$\frac{\partial Q_x}{\partial E_y} (\Delta Q_{x,y})$
По MADX-PTC для всего кольца	1285,86 (0,05143)	1140,99 (0,04564)	1733,05 (0,06932)
По аналитической теории для линз фин. фокуса	514,95 (0,0206)	438,39 (0,01754)	744,52 (0,02978)
По аналитической теории для всего кольца	1198,34 (0,04793)	916,06 (0,03664)	1588,41 (0,03176)

и  $\phi_{x,y}$  ( $\phi_{x,y} = \arg(a_{x,y})$ ). Полученные уравнения являются уравнениями Гамильтона. Функция Гамильтона:

$$H = \text{Re} \left\{ \sum_{l,m,n} \Phi_{l,m}(J_x, J_y) \exp \left[ i \left( l\psi_x + m\psi_y + \sigma_{l,m,n} \theta \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Здесь  $\psi_{x,y} = \arg(a_{x,y})$ ,  $\theta = s/R$  — азимутальный угол. Резонансное условие  $lQ_x + mQ_y = n$ , где  $n$  — номер азимутальной гармоники,  $\sigma_{l,m,n} = lQ_x + mQ_y - n$ . Порядок резонанса  $p = |l| + |m|$ . Всего краевые поля создают шесть резонансов, список которых приведен в табл. 2. Во второй строке этой таблицы приведены функции  $\Phi_{l,m}(J_x, J_y)$ .

Таблица 2. Резонансы, возникающие из-за краевой нелинейности в коллайдере NICA, и их характеристики

Горизонтальный резонанс четвертого порядка	Горизонтальный резонанс второго порядка	Вертикальный резонанс четвертого порядка	Вертикальный резонанс второго порядка	Суммарный резонанс связи четвертого порядка	Разностный резонанс связи четвертого порядка
$l = 4,$ $m = 0$	$l = 2,$ $m = 0$	$l = 0,$ $m = 4$	$l = 0,$ $m = 2$	$l = 2,$ $m = 2$	$l = 2,$ $m = -2$
$c_{4,0} J_x^2$	$c_{2,0} J_x^2 +$ $+ b_{2,0} J_x J_y$	$c_{0,4} J_y^2$ $c_{0,4} J_y^2$	$c_{2,0} J_x^2 +$ $+ b_{0,2} J_x J_y$	$b_{2,2} J_x J_y$	$b_{2,-2} J_x J_y$

Комплексные амплитуды  $c_{l,0,n}$  и  $b_{l,m,n}$  определяются следующими формулами:

$$c_{l,0,n} = -\frac{\alpha_{l,0}}{32\pi} \sum_q k_0^q [F_{xx}^q(s_{2q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{2q})) - F_{xx}^q(s_{1q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{1q}))],$$

$$b_{l,m,n} = -\frac{\alpha_{l,m}}{16\pi} \sum_q k_q [F_{xy}^q(s_{2q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{2q})) - F_{xy}^q(s_{1q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{1q}))], \quad (12)$$

$$c_{l,0,n} = \frac{\alpha_{l,0}}{32\pi} \sum_q k_0^q [F_{xx}^q(s_{2q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{2q})) - F_{xx}^q(s_{1q}) \exp(i\gamma_{l,m,n}(s_{1q}))],$$

где  $\gamma_{l,m,n}(s) = n(s/R) + l\vartheta_x(s) + m\vartheta_y(s)$ , значение  $F_{xx}^q(s_{2q})$  определяется (9). Значения численных коэффициентов:  $\alpha_{2,0} = \alpha_{0,2} = 4/3$ ;  $\alpha_{4,0} = \alpha_{0,4} = 1/3$ ;  $\alpha_{2,0} = \alpha_{0,2} = 1$ ;  $\alpha_{2,2} = \alpha_{2,-2} = 1/2$ . Составлена программа для численного расчета ширины резонансов. Результаты расчета ширины резонансов для коллайдера NICA приведены в табл. 3 (бетатронные частоты коллайдера  $Q_x = 9,435$ ,  $Q_y = 9,430$ ).

Таблица 3. **Ширина резонансов для коллайдера NICA**

Параметр	$x$ горизонтальный		$y$ вертикальный		$x, y$ двумерный	
$l, m$	4, 0	2, 0	0, 4	0, 2	2, 2	2, -2
$\alpha_{l,m}$	1/3	4/3	1/3	4/3	1/2	1/2
$n$	38	18	38	18	38	0
$g_{l,m}^k$	759,50	3044,40	566,64	2324,90	2964,30	3019,30
$\Delta\nu_{l,m}^k$	0,01520	0,06090	0,01135	0,04650	0,04650	0,03020

Отметим, что  $g_{l,m}^k$  имеет размерность  $\text{м}^{-1}$ . Умножение на инвариант (в м) дает ширину резонансов в единицах бетатронной частоты. Соответствующие значения обозначены как  $\Delta\nu_{l,m}^k$ ; для одномерных резонансов  $J_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  м, что соответствует акцептансу камеры  $E_0 = 4 \cdot 10^{-5}$  м. Для двумерных резонансов  $J_0 = 1 \cdot 10^{-5}$  м, так как для круглой камеры акцептанс пучка описывается уравнением  $J_x + J_y = J_0$ . Для диагонали  $J_x = J_y$  (где двумерные резонансы наиболее опасны) максимальное значение  $J_x = J_0/2$ . Как видно из табл. 3, в коллайдере NICA краевое поле квадрупольных магнитов создает весьма сильные резонансы.

## 2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ ВБЛИЗИ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕЗОНАНСА

Рассмотрим изолированный одномерный резонанс. Сделав стандартную замену переменных и переход к безразмерным переменным, найдем, что для одномерного резонанса гамильтониан записывается в следующей форме:

$$H_N = \frac{1}{2}I^2 + \lambda_N I - \frac{1}{2}\mu I^2 \cos(\psi). \quad (13)$$

Здесь  $I = J/J_0$ , где  $J_0$  — опорный инвариант, соответствующий акцептансу камеры (для коллайдера NICA  $J_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  м),  $\mu = g/C$ ,  $\lambda_N = \lambda/(CJ_0)$ ,  $H_N = H/(CJ_0^2)$ ,  $\psi = l\varphi$  (в дальнейшем будем считать  $C$  положительным параметром). Характер движения зависит от нормированной ширины резонанса  $\mu$  и нормированной расстройки  $\lambda_N$ . Уравнение (13) является квадратным относительно  $I$ . Его решение:

$$I(\psi) = \frac{-\lambda_N + \sqrt{\lambda_N^2 + 2H_N(1 - \mu \cos(\psi))}}{1 - \mu \cos(\psi)}. \quad (14)$$

Из этого решения следует, что резонанс с  $l = 2$  создает полный набор четных гармоник модуляции инварианта (2, 4, 6 и т. д.), а резонанс с  $l = 4$  создает полный набор гармоник, кратных 4 (4, 8, 12 и т. д.). Если  $\mu < 1$ , то движение устойчиво при любых расстройках

$\lambda_N$ : нелинейность стабилизирует резонанс. Возвращаясь к физическим переменным, находим, что при  $\mu \ll 1$  в линейном приближении ширина резонанса

$$g = 2 \left( \frac{\Delta J}{J_0} \right)_{\max} \frac{CJ_0 + \lambda}{J_0}, \quad (15)$$

где  $(\Delta J/J_0)_{\max}$  — амплитуда возмущения инварианта на резонансе. Рассмотрим теперь случай  $\mu > 1$ , когда движение при нулевой расстройке неустойчиво. При наличии расстройки возникает область устойчивости. Граница области устойчивости (ДА) определяется следующим уравнением:

$$I_{\max} = \frac{\lambda_N}{\mu - 1} = \frac{\lambda}{(C - g)J_0}, \quad H_N^{\max} = \frac{\lambda_N^2}{2(\mu - 1)}. \quad (16)$$

При  $H_N < H_N^{\max}$  движение устойчиво, при  $H_N > H_N^{\max}$  — неустойчиво. Заметим, что рассчитанное таким образом значение ДА обычно очень велико и неустойчивость начинается значительно раньше, чем по теории изолированного резонанса.

### 3. СРАВНЕНИЕ ШИРИНЫ РЕЗОНАНСОВ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для определения ширины резонансов по аналитической теории была написана специальная программа. Для проверки этой теории мы разработали новую методику, которая включает следующую процедуру:

— выбор рабочей точки в клетке бетатронных частот, такой, чтобы эта рабочая точка соответствовала одному из одномерных резонансов (это необходимо, чтобы можно было использовать теорию изолированного резонанса);

— численное моделирование траектории в плоскости координата–импульс с помощью программы MADX;

— расчет траектории частиц в плоскости инвариант–фаза;

— разложение этой траектории в ряд Фурье по фазе колебаний;

— расчет ширины резонанса с помощью (15).

Для выполнения этой процедуры мы выбрали рабочую точку  $Q_x = 9,50$ ,  $Q_y = 9,31$ , которая соответствует резонансу  $4Q_x = 38$ . Ниже (рис. 2) построена типичная фазовая траектория, рассчитанная с помощью программы MADX. Полученные значения амплитуд гармоник разложения Фурье  $\left( A_n = (1/2\pi) \left| \int_0^{2\pi} E(\varphi) \exp(in\varphi) d\varphi \right| \right)$  для возмущений инварианта даны на рис. 3.

Мы видим, что резонанс не является изолированным, так как наблюдается значительная амплитуда возмущений на второй гармонике с амплитудой  $\sim 0,09$  (для  $E_x = 4,5 \cdot 10^{-5}$ ). Амплитуда четвертой гармоники  $(\Delta J/J)_{\max} = 0,16$ , что в соответствии с (15) дает  $g_{4,0}^{39} = 0,64C_{xx} = 812$ . Из табл. 2 видно, что согласно аналитическому расчету  $g_{4,0}^{39} = 759,5$ . Разница менее 10%, и совпадение можно считать удовлетворительным.

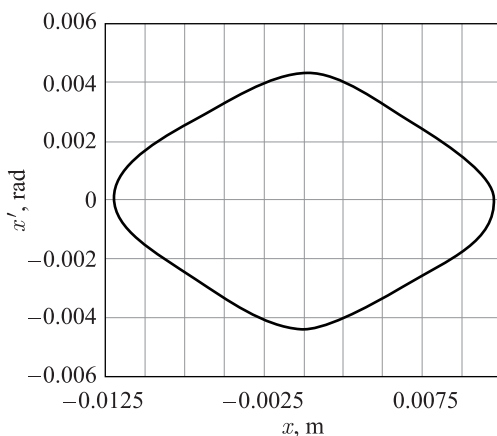


Рис. 2. Траектория частицы в координатах  $x'$

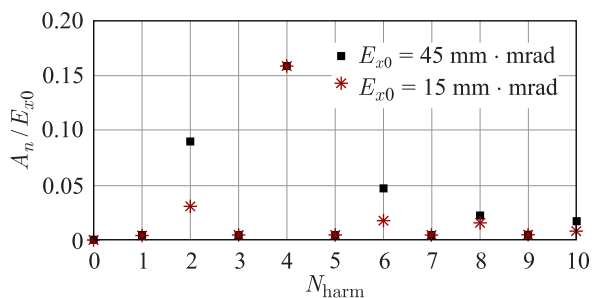


Рис. 3. Фурье-спектр гармоник траектории в координатах инвариант–фаза для двух значений эмиттанса:  $E_x = 4,5 \cdot 10^{-5}$  и  $1,5 \cdot 10^{-5}$  м

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты работы.

1. Обнаружено сильное влияние краевых полей квадрупольных линз на динамику частиц в коллайдере NICA.

2. Для кольцевой машины развита аналитическая теория для расчета силы резонансов, создаваемых краевыми полями квадрупольных линз. Написаны программы для вычисления «коэффициентов ангармоничности» и силы резонансов, вычислены значения этих параметров для коллайдера NICA.

3. Показано, что выведенные формулы носят универсальный характер и не зависят от конструкции линз.

4. Описана теория колебаний на изолированном резонансе четвертого порядка. Согласно этой теории существует эффект «самостабилизации», если значение соответствующего коэффициента ангармоничности больше ширины резонанса.

5. Разработан и применен к коллайдеру NICA метод оценки ширины резонанса по результатам численного моделирования траекторий с помощью программы MADX. Результаты оценки показали удовлетворительное совпадение с результатами аналитического расчета ширины резонансов.



**Благодарности.** Авторы благодарят проф. И. Н. Мешкова за возможность принять участие в проекте NICA.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Concept of the NICA Collider. Dubna: JINR, 2010.
2. Grote H., Schmidt F. MAD-X — An Upgrade from MAD8. CERN-AB-2003-024 ABP. Geneva: CERN, 2003.
3. *Большаков А. Е.* Влияние нелинейных краевых полей квадрупольных линз на динамику частиц в коллайдере NICA. Возможность коррекции нелинейных полей квадрупольных линз. Приватное сообщение. ОИЯИ, 2015.
4. *Штеффен К.* Оптика пучков высокой энергии. М.: Мир, 1969. 222 с.
5. *Wiedemann H.* Particle Accelerator Physics II, Nonlinear and Higher-Order Beam Dynamics. Second Ed. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1999.
6. *Levichev Eu. B., Piminov P. A.* Analytic Estimation of the Non-Linear Tune Shift Due to the Quadrupole Magnet Fringe Field. Preprint BINP 2000-014.