

## О ТРАНСПОРТИРОВКЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПУЧКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

*В. А. Сыровой*<sup>1</sup>

Всероссийский электротехнический институт — филиал ФГУП РФЯЦ-ВНИИТФ, Москва

Для интенсивных пучков с эллиптическим сечением на основании модели, отличной от классического варианта, рассчитана конфигурация тракта транспортировки при высоком значении коэффициента заполнения канала.

For intense elliptic beams of charged particles, the drift-tube cross-section with high value of beam/tube areas ratio is calculated using a new approach which differs from the classical one.

PACS: 41.85.Ct

В литературе [1–3] хорошо известно выражение для потенциала в пучке эллиптического сечения с равномерно распределенным пространственным зарядом  $\rho$ , а также для случая произвольной зависимости  $\rho = \rho(\lambda_0^2)$  [4]

$$\lambda_0^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > b, \quad (1)$$

где  $a, b$  — полуоси сечения; через  $A, B$  обозначим вершины эллипса.

Решение в лапласовской области для этого случая приведено в [4] в виде квадратур, а при полиномиальной зависимости  $\rho(\lambda_0^2)$  выражено в элементарных функциях в работе [5].

Упомянутые модели работают только с уравнением Пуассона и имеют смысл при рассмотрении проблемы транспортировки, когда пучок движется с постоянной продольной скоростью, значительно превышающей скорость поперечного перемещения зарядов. Легче всего это условие выполняется, по-видимому, в случае релятивистских скоростей при фиксированной плотности  $\rho$ . Тем не менее в литературе встречаются варианты с ускоренным движением (например, в [3]), когда потенциал в потоке в параксиальном приближении описывается уравнением

$$\varphi_i = U - \frac{1}{4}(U'' - \rho) \left[ (x^2 + y^2) - \frac{a-b}{a+b}(x^2 - y^2) \right], \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>E-mail: olga1606@rambler.ru

где  $U(z)$  — потенциал на оси; потенциал в (2) нормирован на величину  $\Phi = |e/m|V^2$ ,  $e/m$  — удельный заряд частицы,  $V$  — характерная скорость. В релятивистском случае  $V = c$ ,  $c$  — скорость света, при малых скоростях удобно считать  $V^2 = 2|e/m|\varphi_0$ ,  $\varphi_0$  — потенциал на оси пучка. Поскольку нас интересует картина поля в поперечном сечении, будем отсчитывать потенциал от  $\varphi_0$ , а безразмерную плотность  $\rho$ , которая играет роль масштабного коэффициента, без ограничения общности положим равной единице; в качестве единицы длины выберем меньшую полуось эллипса  $b$ .

Представление (2) не соответствует асимптотической теории параксиальных потоков с малым геометрическим параметром  $\varepsilon$ , описывающим узость занятой зарядами области и «медленность» продольной вариации потенциала (см., например, [6]), согласно которой вторая производная  $U''$  имеет второй порядок малости, как и квадрат поперечной скорости в интеграле энергии.

В работе [7] отмечено, что квадрупольный член в формуле (2), введенный при рассмотрении эллиптического цилиндра в бесконечном пространстве при требовании логарифмической особенности у лапласовского потенциала  $\varphi_e$  вне пучка [1–4], не имеет смысла при рассмотрении практических задач о формировании, ускорении и поведении пучка в тракте транспортировки, так как в этих случаях условие на бесконечности заменяется краевыми условиями на стенке канала или начальными данными на границе пучка.

Представление (2) по сути в ограниченной области предлагает рассматривать эллиптический пучок не в свободном от полей пространстве, а во внешнем квадруполье, уничтожающем на бесконечности соответствующий пучку квадруполь и делающем главным членом в выражении для  $\varphi_e$  логарифмическое слагаемое<sup>1</sup>. Обозначим интенсивность введенного таким образом квадрупольа индексом  $K$  [1]:

$$C_K = -\frac{a-b}{a+b}. \quad (3)$$

Следствием этого подхода является резкое изменение потенциала в  $a/b$  раз на контуре и быстрое стремление эквипотенциалей вне пучка к окружностям, далеко отстоящим от вершины  $B$  эллипса. На рис. 1 представлен пучок с отношением полуосей  $a/b = 5$ , потенциалом в вершинах 2,1, 0,42 и эквипотенциаль  $\varphi = 5,5$  ( $a/b = 1,22$ ), которая может определять форму канала транспортировки [5].

В монографии [2] приведен еще один пример использования внешнего квадрупольа: при интенсивности

$$C_L = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad (4)$$

потенциал на контуре постоянен. Автор считает, что этот случай «не представляет существенного практического интереса», так как при этом «стенки камеры вплотную прилегают к пучку». Это утверждение не совсем полное: введение поля (4) изменяет конфигурацию эквипотенциалей вне пучка. На оси  $x$  появляется точка  $x_*$  с максимумом

<sup>1</sup>При отказе от логарифмической особенности решение для потенциала  $\varphi_e$  имеет квадрупольный характер с напряженностью, неограниченно возрастающей при удалении от пучка. Это поле не создается самими зарядами, что было бы абсурдом: для поддержания выбранной эллиптической формы сечения, находясь на бесконечном удалении от потока, необходимо располагать бесконечным электрическим полем.

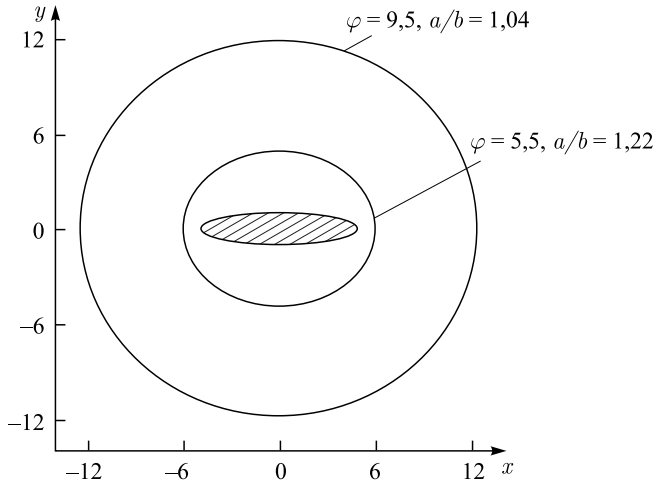


Рис. 1. Пучок с отношением полуосей  $a/b = 5$ , потенциалом в вершинах 2,1, 0,42 и эквипотенциаль  $\varphi = 5,5$  ( $a/b = 1,22$ )

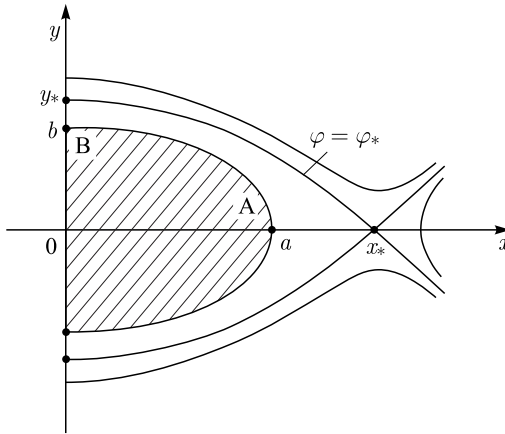


Рис. 2. Эквипотенциали вне пучка

потенциала  $\varphi_*$  и эквипотенциаль-сепаратриса  $\varphi = \varphi_*$  (рис. 2), охватывающая эллиптический контур. Как она, так и расположенные под ней эквипотенциали могли бы быть использованы в качестве стенок канала, однако кривая  $\varphi = \varphi_*$  расположена слишком близко к вершине В и достаточно далеко от вершины А. При  $a = 5$ ,  $b = 1$  соответствующие координаты  $y_*$ ,  $x_*$  имеют следующие величины:  $y_* = 1,026$ ,  $x_* = 6,6$ .

Квадруполь (3) приводит к слишком большим, а квадратуполь (4) — к недостаточно большим значениям  $y_*$ . Очевидно, что должны быть удачные промежуточные варианты.

В эллиптических координатах  $\xi$ ,  $\eta$  решение в лапласовской области в случае  $\rho = 1$  с внешним квадратуполем интенсивности  $C$  имеет вид

$$x = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \quad \operatorname{cth} \xi_0 = \frac{a}{b};$$

$$\begin{aligned} \varphi_e &= \varphi_i + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) [2 \operatorname{sh} 2\xi_0(\xi - \xi_0) - (\operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{ch} 2\xi_0) + \\ &\quad + (\operatorname{ch} 2\xi_0 \operatorname{ch} 2\xi - \operatorname{sh} 2\xi_0 \operatorname{sh} 2\xi - 1) \cos 2\eta], \\ \varphi_i &= \frac{1}{2}(a^2 - b^2) [\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta + C(\operatorname{ch} 2\xi \cos 2\eta + 1)], \\ \varphi_e &= \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \left[ \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + C \right) (1 + \operatorname{ch} 2\xi \cos 2\eta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4ab}{a^2 - b^2}(\xi - \xi_0) - \frac{2ab}{a^2 - b^2} \operatorname{sh} 2\xi \cos 2\eta \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\xi = \xi_0$  — уравнение контура.

Условие экстремума для потенциала на оси  $x$   $\partial\varphi/\partial\xi(\xi, 0) = 0$  позволяет определить координату  $\xi_*$  эквипотенциали-сепаратрисы, а затем по формулам из (5) значения потенциала  $\varphi_*$  и координаты  $x_*$ :

$$\exp(2\xi_*) = \frac{2ab + [(a^2 - b^2)C + (a^2 + b^2)]}{2ab - [(a^2 - b^2)C + (a^2 + b^2)]}, \quad x_* = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch} \xi_*. \quad (6)$$

Вдоль оси  $y$  потенциал монотонно возрастает. Для случаев  $a = 5, b = 1$  и  $a = 10, b = 1$  квадруполи (3), (4) имеют соответственно следующие интенсивности:

$$\begin{aligned} C_K &= -\frac{2}{3} \approx -0,667, & C_L &= -\frac{12}{13} \approx -0,923; \\ C_K &= -\frac{9}{11} \approx -0,8182, & C_L &= -\frac{99}{101} \approx -0,9802. \end{aligned} \quad (7)$$

В таблице приведены результаты расчета нескольких вариантов для  $a/b = 5$  и  $a/b = 10$  с разными значениями интенсивности квадруполя. Величины  $\delta x, \delta y$  обозначают расстояния от вершин эллипса до эквипотенциали-сепаратрисы,  $\delta\varphi$  — разность значений потенциала в соответствующих точках; величины  $\delta\varphi/\delta x, \delta\varphi/\delta y$  служат для оценки среднего поля; коэффициент  $k$  характеризует коэффициент заполнения, если канал выполнен в форме сепаратрисы, аппроксимируемой эллипсом с полуосями  $x_*, y_*$ . В действительности площадь такого эллипса больше площади, ограниченной сепаратрисой, не говоря уже о том, что контур канала может определяться эквипотенциалью, находящейся под кривой  $\varphi = \varphi_*$ . Упомянутые величины описываются формулами

$$\delta x = x_* - a, \quad \delta y = y_* - b, \quad \delta\varphi = \varphi - \varphi_*, \quad k = \frac{ab}{x_* y_*}; \quad \varphi_a = a^2(1+C), \quad \varphi_b = b^2(1-C), \quad (8)$$

где  $\varphi_a, \varphi_b$  — значения потенциала в вершинах эллипса.

$C$	$\varphi_a$	$\varphi_b$	$\varphi_*$	$\varphi_a/\varphi_b$	$\delta x$	$\delta y$	$\delta\varphi_a/\delta x$	$\delta\varphi_b/\delta y$	$k$
$a = 5, b = 1, \xi_0 = 0,2$									
-0,9	2,5	1,9	2,69	1,32	0,45	0,21	0,42	3,76	0,76
$a = 10, b = 1, \xi_0 = 0,1$									
-0,94	6,0	1,94	6,40	3,09	0,84	1,20	0,48	3,40	0,42
-0,96	4,0	1,96	4,15	2,04	0,42	0,60	0,36	3,65	0,60
-0,97	3,0	1,97	3,08	1,52	0,27	0,30	0,30	3,70	0,75

Для напряженности электрического поля  $E_a$ ,  $E_b$  имеем

$$E_a = 2(1 + C)a, \quad E_b = 2(1 - C)\frac{b^2}{a}. \quad (9)$$

Из таблицы видно, что достижимы варианты, когда просвет между пучком и каналом почти постоянен, а коэффициент заполнения достигает высоких значений. При  $a = 10$ ,  $b = 1$  для квадрупольной  $C_K$  при  $\varphi_* = 11$ ,  $x_* = 13$ ,  $y_* = 7$  (сепаратриса отсутствует) [5] величина поля  $\delta\varphi_a/\delta x$  при коэффициенте заполнения  $k$ , равном 0,05, оценивается величиной 7,3, вдвое превышающей данные таблицы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Капчинский И. М. Теория линейных резонансных ускорителей. Динамика частиц. М.: Энергоиздат, 1982.
2. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1980.
3. Bhatt R. J. Inverse Problems in Elliptic Charged-Particle Beams. Massachusetts Inst. of Technol., 2006.
4. Муратов М. З. Потенциалы эллипсоида. М.: Атомиздат, 1976.
5. Акимов П. И., Гаврилин А. А., Никитин А. П. и др. // Журн. радиоэлектроники. 2015. № 11.
6. Сыровой В. А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 2004.
7. Сыровой В. А. // Письма в ЭЧАЯ. 2018. Т. 15, № 3(215). С. 211.

Получено 19 сентября 2018 г.