

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МАГНУСА ДЛЯ РАСЧЕТА ВЕРОЯТНОСТИ ВЫЖИВАНИЯ НЕЙТРИНО

В. П. Ломов^{a, б, 1}, А. В. Шайдунова^{б, 2}

^a Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова
Сибирского отделения РАН, Иркутск, Россия

^б Иркутский государственный университет, Иркутск, Россия

Рассмотрен численный метод решения уравнения осцилляций нейтрино в среде с использованием разложения Магнуса. Для трехнейтринного случая построена зависимость вероятности выживания электронного нейтрино от энергии и проведен анализ зависимости от углов смешивания и управляющего параметра алгоритма при распространении в веществе Солнца и сверхновой.

The numerical solution of equation of neutrino oscillation in matter using Magnus expansion is considered. For three-neutrino case the survival probability of electron neutrino as function of energy is calculated and dependence on mixing angles and algorithm control parameter is analyzed for Sun and supernova models.

PACS: 13.15.+g; 14.60.Pq; 02.70.-c

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время работает несколько крупных нейтринных экспериментов (IceCube, Baikal-GVD, KM3NeT и Daya Bay), которые регистрируют события от проходящих нейтрино, проходящих по мере своего распространения как через вакуум, так и через вещество, что необходимо учитывать при анализе собранных данных. В случае обычного вещества путь от собранных данных до достоверного определения значений параметров требует массивных численных интегрирований линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от расстояния, которое нейтрино проходят вдоль среды.

Вектор решения уравнения осцилляций нейтрино обладает важным свойством: нормирован на единицу. В любой точке распространения эта норма должна сохраняться.

В общем случае решение дифференциального уравнения стандартными методами высокого порядка, такими как метод Рунге–Кутты, не сохраняет свою норму на каждом

¹E-mail: v.p.lomov@yandex.ru

²E-mail: arinolololo@mail.ru

этапе интегрирования. Для получения решения уравнения нейтринных осцилляций в веществе такой метод будет неприменим. В случае данной задачи геометрические интеграторы имеют большое преимущество: унитарность применяемых операторов эволюции сохраняет норму волновых функций, тем самым гарантируется сохранение плотности вероятности и надежности численных схем. Геометрические методы интегрирования предназначены для точного сохранения этого свойства (до ошибки округления). Их разработка в последние годы в области численного анализа дифференциальных уравнений [1, 2] велась с целью сохранения при дискретизации качественных (очень часто геометрических) свойств, которыми обладает дифференциальное уравнение. В качестве такого метода выбран подход, основанный на разложении Магнуса [3, 4].

Отличительной особенностью разложения Магнуса является то, что приближенное решение, предоставляемое процедурой, разделяет с точным решением соответствующие геометрические свойства. Более конкретно, для рассматриваемого случая соответствующее свойство отвечает унитарному характеру оператора эволюции времени и, следовательно, норме вектора решения. В численном расчете это проверяется на каждом шаге интегрирования, и, следовательно, вероятность сохраняется за счет окончательного решения, полученного путем составления последовательных шагов.

Рассмотрим уравнение нейтринных осцилляций в веществе. Суть осцилляций заключается в том, что нейтрино находятся в состоянии суперпозиции из собственных векторов, отвечающих за аромат (флэйвор) ν_α , $\alpha \in \{e, \mu, \tau\}$. Флэйворные состояния не идентичны массовым состояниям ν_k , $k \in \{1, 2, 3\}$.

Эта суперпозиция осуществляется с помощью унитарной матрицы смешивания. Матрица смешивания U в случае с тремя нейтрино является PMNS-матрицей (Понтекорво–Маки–Накагава–Сакага)

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle. \quad (1)$$

Так как вычислительная программа для данной работы разрабатывалась для анализа астрофизических нейтрино, рассматривалась модель «эксперимента», где релятивистское нейтрино ν_α рождалось в центре среды в момент времени t_0 , распространялось в нем до границы r_* , после чего продолжало свой путь в вакууме.

Состояние системы $|\psi(t)\rangle$ во время $t \geq t_0$ может быть выражено как $|\psi(t)\rangle = \sum_\beta \psi_\beta(t) |\nu_\beta\rangle$ с условием $\psi_\beta(t_0) = \delta_{\alpha\beta}$. Время t между рождением нейтрино и его детектированием в экспериментах обычно неизвестно, однако хорошим приближением будет принять $t = r$, где r — переменная, равная расстоянию, которое нейтрино преодолело. Используются внесистемные единицы ($\hbar = c = 1$). Тогда вероятность перехода флэйвора нейтрино от α в β запишется следующей формулой:

$$P_{\alpha\beta}(r) = |\psi_\beta(r)|^2, \quad (2)$$

которая подчиняется условию $\sum_\beta P_{\alpha\beta}(r) = 1$.

Как только нейтрино покидают среду, амплитуды эволюционируют в соответствии с уравнением, определяющим осцилляцию в вакууме, решение которого проще, если записать их через массовые состояния. Обозначая через $\mathcal{A}_j = \phi_j(r_*)$ амплитуду вероятности

обнаружения состояния аромата частицы ν_j на краю среды, для $r \geq r_*$ можно записать

$$\psi_\beta(r) = \sum_{j=1}^3 U_{\beta j} \mathcal{A}_j e^{-iE_j L}, \quad (3)$$

где E_j — значение энергии нейтрино и $L = r - r_*$ — расстояние, которое нейтрино преодолело в вакууме.

Так как значительная часть нейтрино является ультрарелятивистскими частицами, то хорошей аппроксимацией будет, если разложить энергию в ряд Тейлора до линейного члена:

$$E_k \approx E + \frac{m_k^2}{2E}, \quad E_k - E_n \approx \frac{\Delta m_{kn}^2}{2E}, \quad (4)$$

где $\Delta m_{kn}^2 \equiv m_k^2 - m_n^2$ — расщепление масс нейтрино, а $E = |\mathbf{p}|$ — энергия нейтрино в пренебрежении вкладом массы.

Подставляя (3) в (2), получаем

$$P_{\alpha\beta} = \sum_j |U_{\beta j}|^2 |\mathcal{A}_j|^2 + 2 \sum_{i>j} \text{Re} [U_{\beta i} U_{\beta j}^* \mathcal{A}_i \mathcal{A}_j^* e^{-i\Delta_{ij} L}], \quad (5)$$

с обозначением $\Delta_{ij} = \Delta m_{ij}^2 / (2E)$. Здесь нет мнимой части, так как δ_{CP} принята равной нулю.

Таким образом, проблема вычисления $P_{\alpha\beta}$ сводится к проблеме определения величины \mathcal{A}_j , т.е. к определению амплитуд вероятности массовых состояний $\phi_j(r)$ в среде, с начальным условием $\phi_j(r_0) = U_{\alpha j}^*$.

Рассматривая осцилляции, учитывают только взаимодействие по заряженному каналу, так как НС-взаимодействие диагонально и одинаково для всех типов нейтрино и генерирует общую для всех ароматов нейтрино (глобальную) фазу, которая не влияет на значение вероятности.

Для релятивистских нейтрино, распространяющихся в нормальном веществе, после вычитания глобальной фазы эволюционное уравнение для их амплитуд имеет вид

$$i \frac{d}{dr} \Phi(r) = [H_0 + U^\dagger V U] \Phi(r), \quad (6)$$

с $\Phi^T(r) = (\phi_1(r), \phi_2(r), \phi_3(r))$, $V = \text{diag}(V_{\text{CC}}, 0, 0)$. $H_0 = \text{diag}(0, \Delta_{21}, \Delta_{31})$ обозначает гамильтониан для эволюции в вакууме, в то время как второй член учитывает эффекты вещества из-за когерентного взаимодействия нейтрино с фоновыми частицами с $U \equiv U_{\text{PMNS}}$.

Так как на эволюцию флэйвора влияет только реакция когерентного рассеяния по заряженному каналу, используется потенциал заряженного тока V_{CC} . Таким образом, при распространении через обычное вещество (среда электронейтральная, немагнитная, нерелятивистская) в случае реакции $\nu_e \rightarrow \nu_e$ в такой среде используется эффективный потенциал $V_{\text{CC}} \equiv v(r) = \sqrt{2} G_F N_e(r)$, G_F — константа Ферми и $N_e(r)$ — концентрация электронов на пути распространения нейтрино. Это самый интересный случай из-за его применения к солнечным нейтрино, которые создаются и распространяются в плотных недрах Солнца.

Уравнение (6) можно переписать в более простой форме

$$i \frac{d}{dr} \Psi(r) = H_M(r) \Psi(r), \quad H_M(r) = H_0 + v(r)W, \quad (7)$$

если сделать преобразование $\Psi(r) = \Gamma_D^\dagger \Phi(r)$, вынести $V_{CC} \equiv v(r)$ и ввести обозначение для матрицы $W = U^\dagger \text{diag}(1, 0, 0) U$. Используемая матрица W в явном виде:

$$W = \begin{pmatrix} c_{13}^2 c_{12}^2 & c_{12} s_{12} c_{13}^2 & c_{12} c_{13} s_{13} \\ c_{12} s_{12} c_{13}^2 & s_{12}^2 c_{13}^2 & s_{12} c_{13} s_{13} \\ c_{12} s_{13} c_{13} & s_{12} c_{13} s_{13} & s_{13}^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ и $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, θ_{ij} — угол смешивания.

Решение матричного уравнения (7) представляет собой нетривиальную задачу, и на данный момент аналитические свойства решения неизвестны.

1. ПОДХОД МАГНУСА

Решение нестационарного уравнения Шредингера (7) в терминах оператора $A(t) = -iH(t)$

$$\frac{d}{dt} \Psi(t) = A(t) \Psi(t), \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Psi \in \mathbb{C}^n, \quad (9)$$

дается следующей формулой:

$$\Psi(t) = e^{\Omega(t, t_0)} \Psi(t_0), \quad \Omega(t, t_0) \in \mathbb{C}^{n \times n}, \quad \Omega(t_0, t_0) = 0. \quad (10)$$

Выигрыш с экспоненциальным представлением оператора эволюции появляется, когда Ω выражается в виде ряда, который называется рядом Магнуса,

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \quad \Omega_n(t_0, t_0) = 0, \quad (11)$$

и первые три члена этого ряда:

$$\begin{aligned} \Omega_1(t, t_0) &= \int_{t_0}^t dt_1 A_1, \\ \Omega_2(t, t_0) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 [A_1, A_2], \\ \Omega_3(t, t_0) &= \frac{1}{6} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \left([A_1, [A_2, A_3]] + [[A_1, A_2], A_3] \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где использовано обозначение $A_i \equiv A(t_i)$.

1.1. Схема алгоритма и рассматриваемые модели. В целях использования разложения Магнуса в качестве числового интегратора, который дает решение $\Psi(t)$, начиная с $\Psi(t_0)$, вопрос сосредоточен на том, как эффективно обрабатывать один шаг интегрирования.

Отдельные точки, в которых ищется решение на интервале $[t_0, t_f]$, $(t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f)$, связаны с приращением времени на величину $h_n = t_{n+1} - t_n$, где $0 \leq n \leq N-1$. Определим решение в точке t_{n+1}

$$\Psi(t_{n+1}) = e^{\Omega(t_n+h_n, t_n)} \Psi(t_n). \tag{13}$$

После всех итераций решение в конечной точке интервала дает

$$\Psi(t_f) = \prod_{n=0}^{N-1} e^{\Omega(t_n; h_n)} \Psi(t_0), \tag{14}$$

с сокращенным обозначением $\Omega(t_n; h_n) \equiv \Omega(t_n + h_n, t_n)$.

Обозначим за r' порядок точности решения по степеням h_n . Другими словами, решение в точке $\Psi(\xi_n + h_n)$ вычисляется с точностью до $O(h_n^{r'+1})$. За этот порядок отвечает то, какой приближенный метод будет использоваться для нахождения Ω_k и какое значение k в ряде Магнуса (11) будет принято последним. Приближение к усеченному ряду Магнуса порядка r' : $\Omega(\xi_n; h_n) \simeq \Omega^{[r']}(\xi_n; h_n)$.

Таким образом, решение порядка точности r' по h_n будет реализовано следующей формулой:

$$\Psi(\xi_{n+1}) = e^{\Omega^{[r']}(\xi_n; h_n)} \Psi(\xi_n). \tag{15}$$

Дифференциальная система, управляющая эволюцией состояний в трехнейтринном случае осцилляций в среде, является одним из типов уравнений (9), где $n = 3$, $t = r$, и $A \equiv -iH$:

$$i \frac{d}{dr} \Psi(r) = H(r) \Psi(r), \tag{16}$$

$H(r) = H_0 + v(r)W$, а явный вид матрицы W в (8).

Начальное состояние соответствует электронному нейтрино

$$\Psi(r_0) = \begin{pmatrix} c_{12} & c_{13} \\ s_{12} & c_{13} \\ & s_{13} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Использованы значения данных параметров согласно PDG [5]:

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_{12} &= 0,307, & \Delta m_{21}^2 &= 7,53 \cdot 10^{-5} \text{ эВ}^2, \\ \sin^2 \theta_{23} &= 0,417, & \Delta m_{32}^2 &= 2,51 \cdot 10^{-3} \text{ эВ}^2, \\ \sin^2 \theta_{13} &= 0,0212. \end{aligned} \tag{18}$$

В этом случае матрица H_0 пересчитывается в виде

$$H_0 = \frac{a}{\mathcal{E}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где \mathcal{E} — численное значение энергии нейтрино в МэВ и $a = 4,35196 \cdot 10^6$, $b = 0,030554$ — безразмерные параметры.

Рассмотрены две модели: Солнца и сверхновой. В Солнце электронная плотность хорошо аппроксимируется экспоненциальным профилем [6], в единицах солнечного радиуса $\xi \equiv r/R_\odot$

$$v(\xi) = \bar{\gamma} e^{-\eta\xi} \quad (20)$$

с $\bar{\gamma} = 6,5956 \cdot 10^4$ и $\eta = 10,54$. Интегрирование велось в пределах $\xi \in [0, 1; 1]$. В случае сверхновой в данной работе применен закон для $v(\xi)$, используемый в [7]:

$$v(\xi) = \bar{\gamma}/\xi^3, \quad (21)$$

с $\bar{\gamma} = 52,934$. Соответствующие пределы интегрирования $\xi \in [0, 02; 20]$.

1.2. Алгоритм М2. Приближение второго порядка (М2) является самым простым, так как из ряда Магнуса остается только первое слагаемое $\Omega^{[2]} = \Omega_1$:

$$\Omega_1(\xi_n; h_n) = -i \int_{\xi_n}^{\xi_n+h_n} dt H(t), \quad (22)$$

и для достижения заданной точности достаточно одной точки, чтобы оценить значение интеграла (22).

Таким образом, второй порядок точности реализуется формулой

$$\Omega^{[2]}(\xi_n; h_n) = -iH(\bar{\xi})h_n = -i(H_0 + \bar{v}W)h_n, \quad (23)$$

где взята средняя точка интервала интегрирования $\bar{\xi} \equiv \xi_n + h_n/2$. Величина $\bar{v} \equiv v(\bar{\xi})$ пересчитывается на каждом шаге.

1.3. Алгоритм М4. Для данной работы применялся алгоритм с $r' = 4$, названный М4. Для достижения этой точности необходимо считать первые два члена разложения $\Omega^{[4]} = \Omega_1 + \Omega_2$, а аппроксимировать интегралы двухточечными квадратурами Гаусса–Лежандра [1].

Точки вычисления квадратур

$$\xi_{\pm} = \xi_n + \left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \frac{h_n}{2}, \quad (24)$$

в которых определены величины $H_{\pm} = H(\xi_{\pm})$.

Конечная формула такого метода сводится к следующему выражению:

$$\Omega^{[4]}(\xi_n; h_n) = -i(H_+ + H_-) \frac{h_n}{2} + \frac{\sqrt{3}}{12} [H_-, H_+] h_n^2. \quad (25)$$

1.4. Динамический шаг. Реализация постоянного шага не является эффективной, так как решение $\Psi(\xi)$ может испытывать быстрые изменения вдоль эволюции на некоторых промежутках и медленно развиваться на других, что может заметно отразиться на конечном решении. Наиболее оптимально использовать шаг, который регулируется автоматически в процессе счета наиболее подходящим образом. Один из возможных способов

реализации — ввести условие, чтобы локальная ошибка была ниже установленного значения tol (чувствительности счета), если это не так — следует уменьшить шаг.

Для оценки локальной ошибки E_r в точке ξ_{n+1} понадобятся значения обоих рассмотренных выше методов

$$\hat{\Psi}_{n+1} = e^{\Omega^{[2]}(\xi_n, h_n)} \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = e^{\Omega^{[4]}(\xi_n, h_n)} \Psi_n, \quad (26)$$

M2 и M4 соответственно. Тогда локальную ошибку метода M2 можно выразить следующим образом:

$$E_r = \|\hat{\Psi}_{n+1} - \Psi_{n+1}\|, \quad (27)$$

где используется евклидова норма вектора $\|X\| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

Таким образом, если в данной точке $E_r > \text{tol}$, то интегратор возвращается на шаг назад и считает заново в этой точке с новым меньшим шагом h_{new} ,

$$h_{\text{new}} = sh_c \left(\frac{\text{tol}}{E_r} \right)^{1/3}, \quad (28)$$

где h_c означает текущее значение шага и s (safety factor) обеспечивает уменьшение вероятности того, что при следующем шаге опять сработает условие $E_r > \text{tol}$. В данной работе использовано значение $s = 0,8$.

Прямая оценка E_r , как (27), может значительно увеличить общее время вычислительной работы алгоритма. Можно посчитать локальную ошибку приближенно и менее времязатратно следующим образом:

$$E_r \simeq \left\| \left(h_n^2 S_1 + h_n^3 S_2 + \frac{1}{2} h_n^4 S_1^2 \right) \Psi_{n+1} \right\| + O(h_n^5), \quad (29)$$

где введены обозначения

$$S_1 = -\frac{\sqrt{3}}{12}(v_+ - v_-)[H_0, W], \quad (30)$$

$$S_2 = i\frac{\sqrt{3}}{24}(v_+ - v_-) \left([H_0, [H_0, W]] + \frac{1}{2}(v_+ + v_-)[W, [H_0, W]] \right).$$

1.5. Вычисление матричной экспоненты. Для получения решения необходимо вычислять действие матричной экспоненты на каждом этапе интегрирования (15). С этой целью для эффективного счета был использован алгоритм Путцера [8].

Приведем конечное алгебраическое выражение в случае эрмитовой матрицы A размерности три для явного вычисления унитарной матрицы e^{itA} , где t — параметр.

Первый шаг заключается в том, чтобы сделать матрицу A бесследовой, используя следующее: $e^{itA} = e^{itzI} e^{itA_0}$, где I — единичная матрица, $z = \text{Tr}(A)/3$. Тогда бесследовая матрица выразится как $A_0 = A - zI$. Собственные значения бесследовой матрицы A_0 действительны и для случая размерности 3×3 задаются характеристическим уравнением

$$\lambda^3 - \frac{1}{2} \text{Tr}(A_0^2)\lambda + \det(A_0) = 0, \quad (31)$$

явные решения которого могут быть записаны как

$$\lambda_k = \pm \sqrt{\frac{p}{3}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3q}{2p} \sqrt{\frac{3}{p}} \right) - \frac{2\pi k}{3} \right) \quad (32)$$

для $k = 0, 1, 2$, с $p = \text{Tr}(A_0^2)/2$ и $q = \det(A_0)$. Положительный знак соответствует $q \leq 0$, в противном случае применяется отрицательный знак. Факт $p > 0$ обеспечивает вещественность корней.

Переупорядочив собственные значения λ_k так, что $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, определим параметры

$$\begin{aligned} r_0 &= -\frac{1 - e^{iat}}{a}, \\ r_1 &= -\frac{1}{a-b} \left(\frac{1 - e^{iat}}{a} - \frac{1 - e^{ibt}}{b} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

где введены величины $a = \lambda_1 - \lambda_0$ и $b = \lambda_2 - \lambda_0$.

Наконец, используя алгоритм Путцера [8], получаем

$$e^{itA_0} = e^{i\lambda_0 t} \left[(1 - \lambda_0(r_0 - \lambda_1 r_1))I + (r_0 + \lambda_2 r_1)A_0 + r_1 A_0^2 \right]. \quad (34)$$

2. ОБСУЖДЕНИЕ АЛГОРИТМА

Все результаты, за исключением зависимости вероятности выживания от энергии, соответствуют энергии нейтрино $E = 100$ МэВ.

В работе [9] приведены графики с результатами работы алгоритма метода М4 при его реализации на Fortran; в ней авторы опирались на количественный анализ временных затрат при работе алгоритма.

Ниже мы приводим результаты работы нашего алгоритма в сравнении с упомянутыми выше референсными данными.

2.1. Численная точность и устойчивость алгоритма. На рис. 1 и 2 приведена вероятность выживания P_{ee} для электронного нейтрино. Малое количество точек при малых значениях энергии связано с тем, что при уменьшении энергии значительно увеличивается время счета.

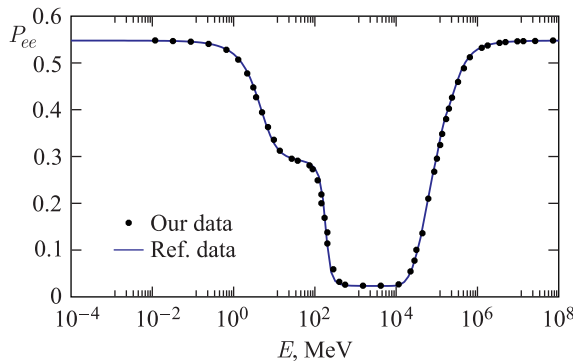


Рис. 1. Сравнение с референсными данными для солнечной модели

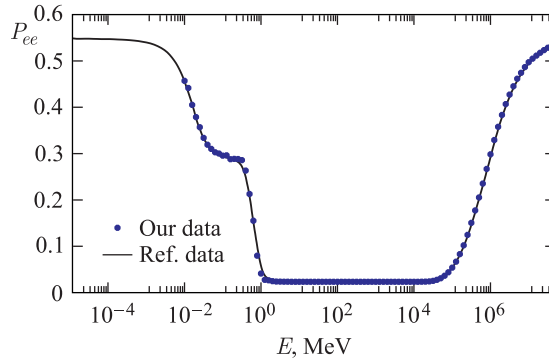


Рис. 2. Сравнение с референсными данными для модели сверхновой

В обеих моделях соответствующий график имеет вид «ванны», который типичен для профилей вещества с уменьшающейся плотностью рассеивающих частиц. Объяснение подобной зависимости приведено в [10]. Говоря кратко, при низких энергиях значение P_{ee} приблизительно соответствует случаю осцилляций в вакууме, при более высоких энергиях происходит переход на адиабатический режим осцилляций, далее — на неадиабатический.

Отметим, что теоретическое асимптотическое значение $\langle P_{ee} \rangle^{\text{theor}} = 0,547829$ правильно воспроизведено как в пределах высоких, так и низких уровней энергии. Относительная разница между численным значением $\langle P_{ee} \rangle^{\text{num}} = 0,547738$ и теоретическим составляет $\delta = 0,0166\%$.

Работа алгоритма соответствует работам других авторов, это показывает сравнение полученных данных с референсными и согласование результатов с теорией.

Для проверки стабильности решения и численной точности был проведен расчет вероятности выживания при разных значениях внешнего параметра tol . На основе полученных данных мы построили зависимость относительной разницы вероятности выживания электронного нейтрино, отнесенной к значению вероятности выживания при некотором нормировочном значении параметра чувствительности $P_{ee}^0 = P_{ee}(\text{tol} = 10^{-5})$, совпада-

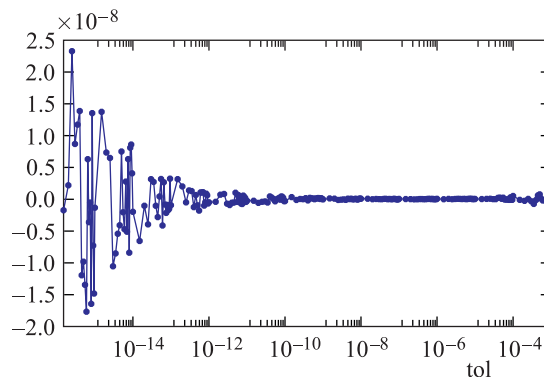


Рис. 3. Зависимость относительной разницы вероятности выживания электронного нейтрино от параметра tol для солнечной модели

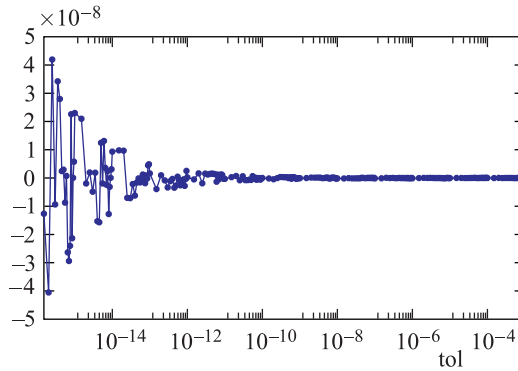


Рис. 4. Зависимость относительной разницы вероятности выживания электронного нейтрино от параметра tol для модели сверхновой

ищем для обеих рассмотренных моделей. Для моделей Солнца и сверхновой графики представлены на рис. 3 и 4 соответственно.

На графиках видно, что при малых значениях параметра tol результат перестает быть стабильным — здесь начинают сказываться погрешности счета, связанные с пределом машинной точности. Тем не менее результат колеблется в пределах восьмого знака после запятой, что гарантирует сохранение как минимум семи значащих цифр на всем представленном интервале параметра чувствительности.

2.2. Зависимость от углов смешивания. Здесь мы рассматриваем исключительно солнечную модель вещества, чтобы показать качественные характеристики решения уравнения нейтринных осцилляций в среде.

Для проверки зависимости решения от входных параметров была использована вариация параметров от заданного начального значения t_0 до изменяющихся на $n\%$ по формуле $t_{new} = t_0(1 + n/100)$, после чего проводился расчет с новым значением по рассматриваемому диапазону энергии.

Результаты независимого изменения параметра s_{12}^2 на 5 и 10% от заданного значения показаны на рис. 5. Этот график очень информативен — на нем отчетливо видно,

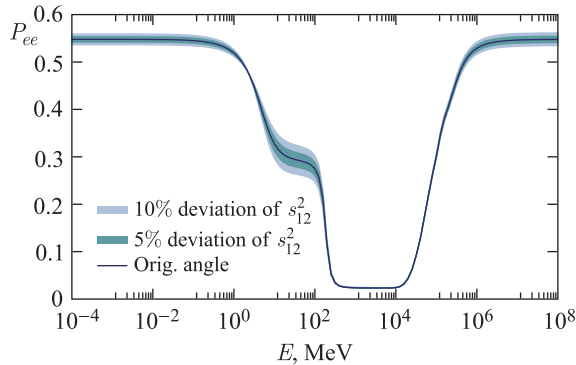


Рис. 5. Вариация s_{12}^2 на 5 и 10% от заданного значения

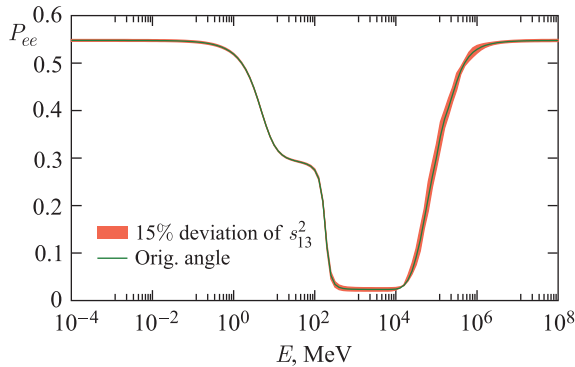


Рис. 6. Вариация s_{13}^2 на 15% от заданного значения

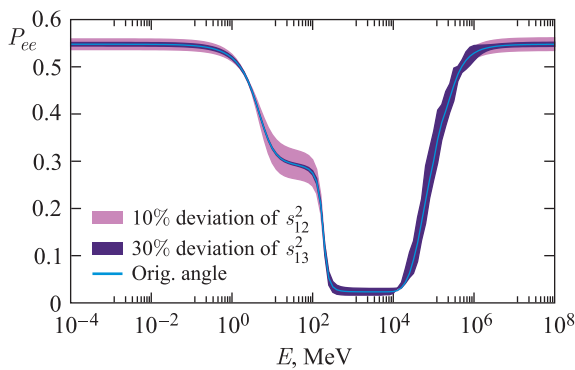


Рис. 7. Вариация s_{12}^2 и s_{13}^2 на 10 и 30% соответственно от заданного значения

что решение сильно зависит от изменения данного параметра на отдельных выделенных участках энергетического спектра.

Аналогичная ситуация наблюдается и при варьировании параметра s_{13}^2 , что показано на рис. 6. В этом случае решение оказалось менее зависимым, чем в предыдущей вариации параметра, но у него наблюдается то же свойство — при изменении параметра меняются определенные области энергии. Важным моментом здесь является то, что эти области отличны друг от друга. Это легко увидеть, если наложить зависимости, как представлено на рис. 7. Используемые проценты отклонений от начального значения были взяты для наглядности.

Обнаруженная особенность дает возможность независимого экспериментального анализа рассмотренных параметров s_{12}^2 , s_{13}^2 и уточнения значений.

2.3. Точность счета при делении интервала. Нами был рассмотрен случай использования так называемого частичного счета. Он заключается в разбиении участка интегрирования на N частей. Переход при счете от одной части к другой происходит не непрерывно: сначала считается первый отрезок, после чего результат записывается в файл, и при счете второго отрезка эти данные программа считывает как начальные параметры. Конечная точка n -го отрезка разбиения выражается формулой $b(a) = a_0 + (b_0 - a_0)n/N$, которая зависит от границ всего интервала интегрирования a_0 и b_0 .

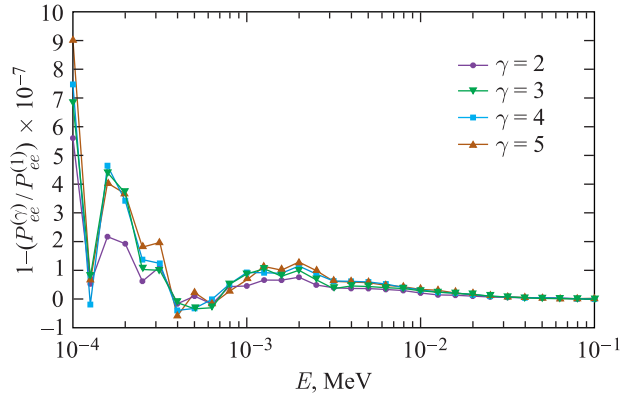


Рис. 8 (цветной в электронной версии). Сравнение относительной разницы вероятности выживания при разном частичном счете для случая разбиений отрезка на 2, 3, 4 и 5 частей

Этот анализ позволяет оценить работу алгоритма в зависимости от различных точек старта интегрирования, но при той же физической задаче. И отвечает на вопрос: можно ли использовать при расчетах уже частично просчитанные этапы и продолжить считать от них?

Необходимость оценки работы алгоритма в зависимости от различных точек старта интегрирования связана с возможностью применения частичного счета.

Результат деления интервала интегрирования на γ частей с $\gamma \in \{2, 3, 4, 5\}$ представлен на рис. 8, где показаны вероятности выживания, отнесенные к случаю $\gamma = 1$.

Исходя из полученного графика, можно сделать вывод, что, начиная со значения энергии нейтрино $E \sim 10^{-2}$ МэВ и выше, погрешности, связанные с частичным счетом, не приведут к потере точности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный численный метод решения уравнения осцилляций нейтрино в среде и его реализация на языке программирования С находится в согласии с результатами численного расчета, полученными авторами [9], и с теоретическими расчетами.

Сканирование по пространству параметров позволяет сделать следующие выводы.

- «Устойчивость» решения зависит от величины управляющего параметра tol , при значениях $tol \in (10^{-10}, 10^{-4})$ решение стабильно. Оптимальным для обеих моделей является значение $tol = 10^{-6}$. Так как результат колеблется в пределах восьмого знака после запятой, это гарантирует сохранение, как минимум, семи значащих цифр на всем представленном интервале параметра чувствительности. При оптимальном значении — восьми.

- Изменение разных углов смешивания, θ_{12} и θ_{13} , оказывает влияние на разных интервалах диапазона энергии нейтрино, что дает возможность к их независимому экспериментальному анализу и уточнению значений.

- При энергиях $\gtrsim 10^{-2}$ МэВ можно использовать методики параллельных вычислений с сохранением и последующим использованием промежуточных значений без существенной потери точности.

Благодарности. Часть расчетов выполнена на вычислительном кластере «Академик В.М. Матросов» в ИДСТУ СО РАН по государственному заданию «Развитие математических методов описания процессов в физике высоких энергий, высокотемпературной плазме и механике сплошных сред (0348-2016-0001)» АААА-А17-117032210076-0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iserles A., Munthe-Kaas H. Z., Norsett S. P., Zanna A.* Lie Group Methods // *Acta Numerica*. 2000. V. 9. P. 215–365.
2. *Hairer E., Lubich C., Wanner G.* Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations. 2nd ed. Berlin: Springer, 2006.
3. *Magnus W.* On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator // *Commun. Pure Appl. Math.* 1954. V. 7. P. 649–673.
4. *Blanes S., Casas F., Oteo J. A., Ros J.* A Pedagogical Approach to the Magnus Expansion // *Eur. J. Phys.* 2010. V. 31, No. 4. P. 907–918.
5. Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D*. 2018. V. 98. P. 030001.
6. *Bahcall J. N., Pinsonneault M. H., Basu S.* Solar Models: Current Epoch and Time Dependences, Neutrinos, and Helioseismological Properties // *Astrophys. J.* 2001. V. 555. P. 990–1012.
7. *Fogli G. L., Lisi E., Montanino D., Palazzo A.* Supernova Neutrino Oscillations: A Simple Analytical Approach // *Phys. Rev. D*. 2002. V. 65. P. 073008.
8. *Putzer E.* Avoiding the Jordan Canonical Form in the Discussion of Linear Systems with Constant Coefficients // *Am. Math. Monthly*. 1966. V. 73. P. 2–7.
9. *Casas F., D’Olivo J. C., Oteo J. A.* Efficient Numerical Integration of Neutrino Oscillations in Matter // *Phys. Rev. D*. 2016. V. 94, No. 11. P. 113008.
10. *Мухеев С. П., Смирнов А. Ю.* Резонансные осцилляции нейтрино в веществе // *УФН*. 1987. Т. 153. С. 3–58.

Получено 23 июня 2019 г.