Письма в ЭЧАЯ. 2021. Т. 18, № 1(233). С. 5–12

МЕТОД ЯДРА ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Ю. В. Гусев [1]

Институт гравитационной физики им. А. Эйнштейна Общества им. Макса Планка, Потсдам, Германия

Центр физических исследований им. П. Н. Лебедева РАН, Москва

Метод «ковариантной теории возмущений» позволяет вычислить нелокальное ядро эволюционного уравнения на спиновом римановом многообразии. Предложенное аксиоматическое определение эффективного действия вводит в безразмерную математическую теорию универсальный масштабный параметр с размерностью квадрата расстояния. Показано, что этот чисто геометрический результат имеет физический смысл действия теории поля, включая гравитацию. Два низших тензорных порядка этого ковариантного функционала не зависят от вида спиновой группы и локальны, они воспроизводят действие общей теории относительности с космологической постоянной. Значение универсального масштаба расстояния может определяться измеренной постоянной Хаббла. Данный масштабный параметр, рассматриваемый как физическая переменная, позволяет строить космологическую теорию аксиоматически.

The method of “covariant perturbation theory” allowed for the computation of the kernel of the evolution equation on a spin Riemannian manifold. The proposed axiomatic definition of the effective action introduces the universal scale parameter, with the length square dimensionality, into a dimensionless mathematical theory. It is shown that this geometrical result has a physical meaning of the action of field theory, including gravity. Two orders lowest in a tensor rank in this functional are independent of a spin group and local. They reproduce the action of relativity with the cosmological constant. The modern value of the universal scale could be determined by the measured Hubble constant. The variable scale parameter could let us build axiomatic cosmological theories.

PACS: 02.40.Ky; 04.02.Cv; 06.20.Jr; 12.10.-g; 98.80.Jk

В последние два десятилетия в математике активно развивалась теория геометрических потоков [1], частным видом которых является поток Риччи [2]. Дифференциальное уравнение потока Риччи связывает геометрические величины риманова многообразия, метрику и тензор Риччи, но при этом не содержит ковариантные производные. Потоки Риччи были использованы Г. Перельманом при доказательстве гипотезы Пуанкаре [3], которая рассматривает многообразия постоянной кривизны и поэтому не требует знания градиентной формы ядра эволюционного уравнения. Эта область

[1] E-mail: yuri.v.gussev@gmail.com

геометрического анализа была изучена в работах Х. Руза [4]. Последующий фундаментальный вклад Дж. Синга [5] был активно использован в физике, в частности при неудачных попытках построения квантовой теории гравитации [6] и в успешных алгоритмах спутникового ориентирования [7]. К сожалению, эти работы оказались не востребованы в геометрии, и интерес к ним возник только недавно [8].

Градиентная форма потока Риччи давно известна в физике [10] как «след ядра уравнения теплопроводности». Важно понимать, что эволюционное уравнение не имеет ничего общего с уравнением теплопроводности и представляет собой новый вид дифференциальных уравнений. В данной работе предлагается взглянуть на функциональный след ядра эволюционного уравнения как геометрический объект, отбросив ошибочное представление о нем как методе квантовой теории поля, укоренившееся с 1970-х гг. Мы разъясним физический смысл и применение ковариантного эффективного действия, вычисленного на основе эволюционного ядра [9].

Начнем с исторической заметки о том, что действие теории гравитации (действие Гильберта–Эйнштейна) было аксиоматически получено Д. Гильбертом [11] из общих принципов теории инвариантов, созданной им самим. Сегодня это действие признано основой общей теории относительности (теории гравитации) А. Эйнштейна [12]. Попытки связать этот геометрический результат с остальными разделами физики никогда не прекращались и известны как «объединенная теория поля». Единственный непротиворечивый путь развития физической теории состоит в геометризации физики, начатой Б. Риманом, У. К. Клиффордом и А. Пуанкаре. Эволюционное уравнение ведет именно по этому пути.

В то же время метод эффективного действия позволяет естественным образом разрешить проблему возникновения физического масштаба (размерности) в безразмерной (математической) физической теории. Ниже будет показано, что математически корректное определение главного функционала физической теории — ковариантного эффективного действия — вводит в физику *универсальный* масштабный параметр. Такое действие принимает геометрическую форму. Данный вывод достигается методом «ковариантной теории возмущений» [10], которая исторически связана с операторным анализом, созданным О. Хевисайдом [13].

В ноябре 2018 г. мировое метрологическое сообщество приняло резолюцию об изменениях в системе физических единиц — СИ [14]. С мая 2019 г. фундаментальные физические постоянные имеют точные фиксированные значения, а единицы физических величин определяются этими постоянными. Так, постоянная Планка стала константой, определяющей единицу массы. С введением двух новых физических постоянных М. Планком в 1900 г. [15] их число стало равно числу физических единиц, что дало возможность выбора значений этих постоянных. Если одна из констант — гравитационная постоянная, а их значениям присвоены единицы, то такую систему называют «планковской» [16]. В такой системе физические единицы, выраженные в традиционной СИ, принимают непривычные значения. Считается, что они обозначают пределы, в которых известные законы физики перестают действовать, но это не так. Вместо единицы могут быть выбраны любые другие числа, которые произвольно породят другие «планковские» значения.

Новая СИ построена иерархически, в ней есть семь определяющих («фундаментальных» в отличие от «производных») постоянных, которые тем не менее зависят друг от друга (определяются через другие) [17]. Единственная постоянная, не зависящая ни от какой другой, — это атомная частота, определяющая единицу времени — секунду, как величина, обратная частоте, выраженной целым числом. Таким образом, в основе всей современной физики лежат натуральные числа.

Все физические теории обладают обобщенным оператором второго порядка, который можно привести к следующему виду [10]:

$$\hat{F}(\nabla) = \Box\hat{1} + \hat{P} - \frac{1}{6}R\hat{1}, \tag{1}$$

где присутствие члена со скаляром кривизны Риччи R обусловлено историческими причинами, а сигнатура метрики — евклидова. Оператор Лапласа–Бельтрами в (1) построен из ковариантных производных $\Box \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$, содержащих как гравитационную связность, так и связность калибровочных полей, которые явно здесь не рассматриваются, но матричные обозначения $\hat{1}$ сохраняются. Тензор напряженности калибровочных полей определяется коммутатором ковариантных производных. Вместе с тензором кривизны Риччи $R_{\mu\nu}$ и потенциальным членом $\hat{P}$ эти напряженности физических полей обозначаются как $\Re$ и называются условно «кривизнами».

Фундаментальное уравнение геометрического анализа называется эволюционным уравнением и имеет следующую форму [10]:

$$\frac{d}{ds}\hat{K}(s|x,x') = \hat{F}(\nabla^x)\hat{K}(s|x,x'). \tag{2}$$

Вместе с начальными условиями

$$\hat{K}(s|x,x') = \hat{\delta}(x,x'), \;\; \sigma(x,x')/s \gg 1 \tag{3}$$

уравнение (2) позволяет находить эволюционное ядро $\hat{K}(s|x,x')$, где $\sigma(x,x')$ — мировая функция Руз–Синджа [5]. Как показано ниже, эволюционное ядро $\hat{K}(s|x,x')$ порождает действие изучаемой теории поля. Фундаментальное решение для эволюционного ядра задается ковариантной дельта-функцией (3). Параметр собственного времени s с физической размерностью квадрата расстояния является дополнительной переменной физической теории [18], рассматриваемой в пространстве-времени с переменными x^μ и размерностью D. Поскольку производная первого порядка берется по собственному времени, эволюционное уравнение позволяет получать физическое действие в ковариантной форме. В данной работе предлагается рассматривать уравнение (2) как фундаментальное уравнение теоретической физики, построенной геометрическими методами.

Ковариантное эффективное действие теории поля, включая гравитационную теорию, задается функциональным следом эволюционного ядра $\mathrm{Tr}\,K(s) = \int d^Dx\,\mathrm{tr}\,\hat{K}(s|x,x)$, где tr обозначает матричный след по внутренним степеням свободы и выполнено интегрирование по пространству-времени $\mathbb{R}^D$. В отличие от эволюционного ядра функциональный след $\mathrm{Tr}\,K(s)$ — безразмерный функционал. Ковариантная теория возмущений [10] дает эволюционное ядро в асимптотически плоском пространстве-времени в виде суммы нелокальных тензорных инвариантов. При этом первые два члена этой суммы локальны (как показано прямым вычислением [10] и что очевидно из размерных соображений):

$$\mathrm{Tr}\,K(s) = \frac{1}{s^{D/2}}\int d^Dx\,g^{1/2}(x)\,\mathrm{tr}\left\{\hat{1} + s\hat{P} + \mathrm{O}[\Re^2]\right\}. \tag{4}$$

Начиная со второго порядка, слагаемые этой суммы нелокальны [10], в данной работе они не рассматриваются. Вычисления начинаются с формального разбиения оператора (1) на два нековариантных слагаемых, а перевод найденного решения для $\mathrm{Tr}\,K(s)$ в ковариантную форму выполняется с помощью нелокальных непертурбативных подстановок [10]. Поэтому ковариантное выражение для $\mathrm{Tr}\,K(s)$ есть не ряд теории возмущений, а сумма нелокальных тензорных инвариантов [19]. Полученные решения [9, 10] справедливы при размерности пространства-времени $D < 6$, но ковариантное эффективное действие ниже вычислено в четырех измерениях, соответствующих наблюдаемому физическому миру.

Определим эффективное действие *аксиоматически*:

$$-W(l^2) \equiv \int_{l^2}^{\infty} \frac{ds}{s}\,\mathrm{Tr}\,K(s). \tag{5}$$

Будем считать, что функционал W задан с точностью до произвольного множителя, значение которого находится из эксперимента. Очевидно, что у интеграла по собственному времени (5) должен быть нижний предел, принимающий *произвольное* положительное значение, поскольку подынтегральный функционал не существует при $s = 0$. После подстановки решения (4) в определение (5) и интегрирования по s получаем *безразмерный* функционал $W(l^2)$, явно зависящий от значения собственного времени на нижнем пределе l^2:

$$-W(l^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (l^2)^{(n-2)} W_{(n)}(l^2). \tag{6}$$

Параметр l^2 имеет реальный смысл в терминах физических наблюдаемых. Ковариантное эффективное действие (6) вычислено в работе [20], но здесь нас интересуют два его простейших члена, которые были упущены в работах [10, 20]:

$$-W(l^2) = \int dx^4\, g^{1/2}(x)\,\mathrm{tr}\left\{ l^{-4}\,\frac{1}{2}\hat{1} + l^{-2}\,\hat{P} + \mathrm{O}[\Re^2] \right\}. \tag{7}$$

Хотя эффективное действие вычислено в евклидовом пространстве-времени, его локальные члены (7) не зависят от сигнатуры метрики.

Первый член в (7) универсален для любой теории с оператором вида (1), а второй задается конкретной формой $\hat{P}$. В современной физике фундаментальные поля описываются безмассовыми спинорами [21], в геометрическом описании их можно рассматривать как свойства спинового многообразия [22, 23]. Ковариантный оператор Дирака в форме (1) содержит скаляр кривизны Риччи с коэффициентом $(-1/4)$ [6, 23, 24]. Тогда, для того чтобы получить эффективное действие такой теории, в результате общего вида (7) нужно сделать подстановку $\mathrm{tr}\,\hat{P} = (-1/12)R\,\mathrm{tr}\,\hat{1}$ (в которой операция матричного следа обращает тензор калибровочных полей в ноль и делает зависимость от спиновой группы тривиальной: $\mathrm{tr}\,\hat{1}$). Действие (7) можно привести к форме, принятой в общей теории относительности [12], умножением на $12l^2$, что согласно основной гипотезе данной работы не должно менять физическое содержание действия (если не рассматривать космологические теории):

$$\bar{W}(l^2) = \int dx^4\, g^{1/2} \Big\{ \mathrm{tr}\,\hat{1}\,(6l^{-2} - R) + l^2 \mathrm{O}[\Re^2] \Big\}. \tag{8}$$

Первый член выражения (8) очевидным образом интерпретируется как «космологическая постоянная». Отметим, что это условное название, так как космологическую теорию мы не строим, а масштабный параметр будет входить во *все* уравнения физической теории, потому что именно l^2 задает физические размерности по иерархическому принципу, примененному в новой СИ (2019) физических единиц [17]. Второй член (8) имеет форму гравитационного действия Гильберта–Эйнштейна с правильным знаком.

Можно найти значение универсального масштабного параметра, зная космологическую постоянную:

$$\Lambda = 6/l^2. \tag{9}$$

«Стандартная космологическая модель» [21] предполагает значение $\Lambda \approx 10^{-52}$ м$^{-2}$, но поскольку Λ определяется постоянной Хаббла $H_0 = (73{,}48 \pm 1{,}66)$ (км/с)/Мпк [25], физическая размерность которой — *частота*

$$H_0 \approx (2{,}38 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-18}\ \text{с}^{-1}, \tag{10}$$

то естественно использовать значение радиуса Хаббла

$$l \approx c/H_0 \approx 1{,}26 \cdot 10^{26}\ \text{м}, \tag{11}$$

которое задается наблюдаемой H_0. Как l, так и $\Lambda^{-1/2}$ по порядку величины равняются размеру *наблюдаемой* Вселенной, как впервые предположил П. А. М. Дирак [12]. Задание универсального масштаба самым большим расстоянием в природе при отсутствии самого маленького делает теорию *наблюдаемых* физических явлений замкнутой.

Поскольку собственное время является параметром с физической размерностью, то масштаб l^2, очевидно, может считаться физической константой, только когда не принимается во внимание эволюция физического мира как целого (Вселенной). Действительно, в существующих космологических теориях постоянная Хаббла, так же как и определяемая ею космологическая постоянная, рассматривается как переменная величина [21]. Переменность универсального масштабного параметра, который иерархически задает *все* остальные определяющие физические константы [14], делает их тоже *переменными*. Это с необходимостью означает, что гипотеза Дирака об изменении гравитационной постоянной Ньютона верна [26].

Если мы принимаем три положения, которые убедительно следуют из множества известных математических и физических фактов: 1) эволюционное уравнение есть фундаментальное уравнение физики, 2) современная метрологическая система физических единиц СИ (2019) самосогласованно описывает структуру наблюдаемых физического мира, 3) космология как наука об изучении эволюции физического мира может быть построена на физических экспериментах, проведенных только в локальной части Вселенной, — то все физические константы обязаны меняться вместе с эволюцией Вселенной. Третий постулат, однако, не может быть экспериментально подтвержден, поэтому любая космологическая теория является только научной гипотезой.

В предложенной физической теории значение космологической постоянной нельзя вычислить, эта величина может быть только измерена. Действие теории гравитации содержит хорошо известные члены как низших (8), так и более высоких порядков в форме нелокальных тензорных инвариантов [27], которые являются членами, модифицирующими общую теорию относительности.

После окончания представленного анализа (2016) мы нашли в публикациях, что идея построения физической теории с переменным параметром типа космологической постоянной была предложена еще П. А. М. Дираком [28]. Он модифицировал теорию Г. Вейля и показал, что электромагнитное действие и космологическая постоянная возникают в теории поля из требования инвариантности действия по отношению к расширенному классу преобразований пространства-времени. Выше мы основывались на математическом принципе ядра эволюционного уравнения (2) как фундаментального уравнения физики, который ведет к более общей физической теории. Одна из задач, которые могут быть решены этим методом, состоит в аксиоматическом нахождении действия гравитационной теории [9] с целью его экспериментальной проверки.

Более важным следствием, однако, является окончательное построение ковариантной электродинамики с масштабным параметром типа космологической постоянной. Аксиоматически определенное ковариантное эффективное действие (7) является функционалом физических полей. Оно находится исключительно средствами геометрического анализа и не имеет отношения к квантовой теории поля. Поскольку эффективное действие выражается через тензоры наблюдаемых полей, при варьировании по метрике оно порождает нелокальный тензор энергии-импульса [29], который позволяет решать уравнения эволюционных задач с начальными условиями, в частности задачи об излучении. Напомним, что первоначально данный метод предназначался для решения проблемы Швингера о порождении частиц электромагнитным полем и проблемы об излучении Хокинга в физике черных дыр. Однако математика универсальна, поэтому ядро эволюционного уравнения применимо и в космологии, и в физике конденсированного состояния материи [30]. Множество задач еще ожидают своего решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chow B., Chu S.-C., Glickenstein D., Guenther C., Isenberg J., Ivey T., Knopf D., Lu P., Luo F., Ni L.* The Ricci Flow: Techniques and Applications. Part I: Geometric Aspects. Providence, RI: Am. Math. Soc. Press, 2007.
2. *Andrews B., Hopper C.* The Ricci Flow in Riemannian Geometry. Berlin: Springer, 2011.
3. *Tao T.* Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture: A Nonlinear PDE Perspective. arXiv:0610903[math].
4. *Ruse H. S.* Taylor's Theorem in the Tensor Calculus // Proc. London Math. Soc. 1931. V. 32. P. 87.
5. *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. М.: Мир, 1963 (Amsterdam: North-Holland, 1960).

6. *Девитт Б. С.* Динамическая теория групп и полей. М.: Наука, 1987 (New York, NY: Gordon and Breach, 1965).
7. *Bahder T. B.* Navigation in Curved Space-Time // Am. J. Phys. 2001. V. 69. P. 315; doi:10.1119/1.1326078; arXiv:010107[gr-qc].
8. *Lee D. A.* Geometrical Relativity. Providence, RI: Am. Math. Soc. Press, 2019.
9. *Gusev Yu. V.* Heat Kernel Expansion in the Covariant Perturbation Theory // Nucl. Phys. B. 2009. V. 807. P. 566; doi:10.1016/j.nuclphysb.2008.08.008; arXiv:0811.1063.
10. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* Covariant Perturbation Theory. 2: Second Order in the Curvature. General Algorithms // Nucl. Phys. B. 1990. V. 333. P. 471; doi:10.1016/0550-3213(90)90047-H.
11. *Гильберт Д.* Основания физики. I // Альберт Эйнштейн и теория гравитации: Сб. ст. к 100-летию со дня рождения. М.: Мир, 1979. С. 133 (Nachtrichten K. Gesselshaft Wiss. Math.-Phys. Klasse, Heft 3. Göttingen, 1915. S. 395).
12. *Дирак П. А. М.* Общая теория относительности // Собр. науч. тр. Т. 4. М.: Физматлит, 2005. С. 110; 166 (New York, NY: Wiley, 1975).
13. *Heaviside O.* On Operators in Physical Mathematics. Part I // Proc. Roy. Soc. London. 1892. V. 52. P. 504; archive.org/details/philtrans07543961.
14. *Stock M., Davis R., de Mirandés E., Milton M. J. T.* The Revision of the SI — The Result of Three Decades of Progress in Metrology // Metrologia. 2019. V. 56. P. 022001; doi:10.1088/1681-7575/ab0013.
15. *Планк М.* О необратимых процессах излучения // Избр. тр. М.: Наука, 1975. С. 191; 233 (Ann. Phys. Berlin, 1900. V. 1. P. 69).
16. *Planck M., Masius M.* The Theory of Heat Radiation. Philadelphia, PA: P. Blakinston's Son & Co., 1914. The Project Gutenberg EBook. 2012. P. 205; 208. www.gutenberg.org/files/40030.
17. Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), Sèvres, France. New SI of Physical Units. www.bipm.org/en/measurement-units/new-si.
18. *Фок В. А.* Собственное время в классической и квантовой механике // Изв. АН СССР. 1937. Т. 4–5. С. 551;
    Фок В. А. Работы по квантовой теории поля. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. С. 141 (Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2004. P. 421).
19. *Barvinsky A. O., Gusev Yu. V., Vilkovisky G. A., Zhytnikov V. V.* The Basis of Nonlocal Curvature Invariants in Quantum Gravity Theory (Third Order) // J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 3525; doi:10.1063/1.530427; arXiv:9404061[gr-qc].
20. *Barvinsky A. O., Gusev Yu. V., Zhytnikov V. V., Vilkovisky G. A.* Covariant Perturbation Theory (IV). Third Order in the Curvature. Preprint SPIRES-HEP: PRINT-93-0274 (Manitoba); arXiv:0911.1168.
21. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group).* The Review of Particle Physics (2018) // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 030001; pdg.lbl.gov.
22. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. М.: Мир, 1987 (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984).
23. *Friedrich T.* Dirac Operators in Riemannian Geometry. Providence, RI: Am. Math. Soc. Press, 2000.
24. *Schrödinger E.* Dirac Electron in the Gravitational Field. I // Gen. Relat. Grav. 2020. V. 52. P. 4; doi:10.1007/s10714-019-2626-y (reprint of the 1932 work).
25. *Riess A. G. et al.* New Parallaxes of Galactic Cepheids from Spatially Scanning the Hubble Space Telescope: Implications for the Hubble Constant // Astrophys. J. 2018. V. 855. P. 136; doi:10.3847/1538-4357/aaadb7.
26. *Дирак П. А. М.* Пути физики. М.: Энергоатомиздат, 1983 (Directions in Physics. New York, NY: John Wiley and Sons, 1978).

27. *Mirzabekian A. G., Vilkovisky G. A., Zhytnikov V. V.* Partial Summation of the Nonlocal Expansion for the Gravitational Effective Action in Four Dimensions // Phys. Lett. B. 1996. V. 369. P. 215; doi:10.1016/0370-2693(95)01527-2.
28. *Dirac P. A. M.* Long-Range Forces and Broken Symmetries // Proc. Roy. Soc. A. 1973. V. 333. P. 403; doi:10.1098/rspa.1973.0070.
29. *Mirzabekian A. G., Vilkovisky G. A.* Particle Creation in the Effective Action Method // Ann. Phys. (N.Y.). 1998. V. 270. P. 391; doi:10.1006/aphy.1998.5860; arXiv:9803006[gr-qc].
30. *Gusev Yu. V.* The Field Theory of Specific Heat // Russ. J. Math. Phys. 2016. V. 23. P. 56; doi:10.1134/S1061920816010040; arxiv.1904.04652[cond-mat].

Получено 26 июля 2020 г.