Письма в ЭЧАЯ. 2022. Т. 19, № 4(243). С. 236–246

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

РЕЛЯТИВИСТСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО

С. А. Федорук [1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Релятивистское обобщение рациональной модели Калоджеро получено с помощью деформации калибровочной матричной системы с дополнительными полудинамическими переменными. Гамильтониан этой системы получен после наложения условий фиксации калибровки и исключения калибровочных степеней свободы. Доказана интегрируемость предложенной релятивистской модели.

A relativistic generalization of the rational Calogero model is obtained by using the deformation of a gauging matrix system with extra semi-dynamical variables. The Hamiltonian of this system is derived by imposing the gauge fixing conditions and eliminating gauge degrees of freedom. The integrability of the proposed relativistic model is proved.

PACS: 11.10.Ef; 02.10.Yn; 02.30.Ik

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1, 2] построено суперсимметричное обобщение многочастичных рациональных систем Калоджеро [3] (см. обзоры [4–6]) с использованием процедуры суперсимметричного калибрования матричной системы [7]. В чисто бозонном случае калибровочное матричное описание моделей Калоджеро рассматривалось в [8, 9].

В последнее время наблюдается большой интерес к обобщению моделей Калоджеро, в частности, к их расширению на релятивистский случай. Известным обобщением такого типа являются модели Руйсенарса–Шнайдера [10] (см. также описание этих моделей в [6, 11–13] и приведенные там ссылки). Но обобщение такой модели на суперсимметричный случай вызывает в настоящее время определенные проблемы (см. [14–18]). Одним из объяснений этого является отсутствие подходящего лагранжевого описания модели Руйсенарса–Шнайдера [2].

Но, как отмечалось выше, одним из наиболее эффективных способов нахождения лагранжевого формализма для многочастичных систем калоджеровского типа является использование процедуры калибрования в подходящих динамических матричных системах. По этой причине в этой короткой статье мы рассматриваем получение

[1] E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

[2] Довольно сложный лагранжиан работы [11], полученный из гамильтониана Руйсенарса–Шнайдера с помощью преобразования Лежандра, плохо подходит для процедуры суперсимметризации.

релятивистского обобщения модели Калоджеро именно с помощью калибровочной матричной системы. При этом мы будем использовать естественные релятивистские соотношения из физики элементарных частиц и не будем накладывать строгое требование совпадения находимого релятивистского обобщения модели Калоджеро и модели Руйсенарса–Шнайдера.

В калибровочном подходе система Калоджеро описывается лагранжианом [1,2,8,9]

$$L_C = \frac{m}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\nabla X \nabla X\right) + \kappa\,\mathrm{Tr}\,A + \frac{i}{2}\left(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z} Z\right), \tag{B.1}$$

где

$$\nabla X = \dot{X} + i\,[A, X], \quad \nabla Z = \dot{Z} + iAZ, \quad \nabla\bar{Z} = \dot{\bar{Z}} - iZA \tag{B.2}$$

являются ковариантными производными положительно определенного эрмитова c-числового $(n{\times}n)$-матричного поля

$$X(t) := \|X_a{}^b(t)\|, \quad (X_a{}^b)^* = X_b{}^a, \quad \det X \neq 0,$$

тогда как

$$Z(t) := \|Z_a(t)\|, \quad \bar{Z}(t) := \|\bar{Z}^a(t)\|, \quad \bar{Z}^a = (Z_a)^*$$

есть комплексное c-числовое $U(n)$-спинорное поле. Индекс a принимает n значений: $a = 1, \ldots, n$. Величина κ — вещественная константа, тогда как m — массовый параметр. Точка в выражениях вида $\dot{X}$ обозначает производную по временной переменной t.

Эрмитово c-числовое матричное калибровочное поле

$$A(t) := \|A_a{}^b(t)\|, \quad (A_a{}^b)^* = A_b{}^a,$$

присутствующее в лагранжиане (B.1) и в определениях ковариантных производных (B.2), является калибровочным полем для $U(n)$-локальной инвариантности

$$X \to gXg^\dagger, \quad Z \to gZ, \quad \bar{Z} \to \bar{Z}g^\dagger, \quad A \to gAg^\dagger + i\dot{g}g^\dagger, \tag{B.3}$$

где $g(\tau) \in U(n)$. Зафиксировав калибровку для этой симметрии и исключив вспомогательные степени свободы, получим, что модель (B.1) описывает n-частичную рациональную модель Калоджеро, в которой κ играет роль константы связи. В такой формулировке парное взаимодействие Калоджеро между частицами возникает за счет процедуры калибрования матричной модели.

В свободном случае, без калибровочного взаимодействия, модель (B.1) описывает n нерелятивистских частиц в пространстве-времени размерности $D = 1 + 1$ (с одним пространственным измерением). Релятивизация этой простой системы является стандартной. В случае одной частицы вместо лагранжиана $L_{nr} = (1/2)m\dot{x}\dot{x}$ необходимо взять лагранжиан $L_r = -mc^2\sqrt{1-(1/c^2)\,\dot{x}\dot{x}}$, где c — вещественная постоянная (скорость света). Конечно, в пределе $c \to \infty$ лагранжиан L_r переходит в L_{nr} с точностью до слагаемого mc^2. Гамильтониан этой одночастичной релятивистской системы имеет вид $H_r = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$, где p — импульс для координаты x. После перехода от фазовых переменных (x, p) к переменным (q, w), определяемым соотношениями $p = mc\sinh w$, $q = mc\,x\cosh w$, где w — безразмерная быстрота частицы, релятивистский гамильтониан принимает вид $H_r = mc^2\cosh w$.

В случае n невзаимодействующих частиц одинаковой массы, описываемых фазовыми переменными (x_a, p_a) или (q_a, w_a), $a = 1, \ldots, n$, соответствующие лагранжиан и гамильтониан имеют вид

$$L_r = -mc^2 \sum_a \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\dot{x}_a \dot{x}_a}, \quad H_r = mc^2 \sum_a \cosh w_a. \tag{B.4}$$

Этот лагранжиан представляется в матричном виде, если ввести $(n{\times}n)$ диагональную матрицу $\|X_a{}^b(t)\|$ с величинами x_a на диагонали. Тогда релятивистские и нерелятивистские свободные лагранжианы переписываются в виде

$$L_r = -mc^2 \,\mathrm{Tr} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\dot{X}\dot{X}}, \quad L_{nr} = \frac{m}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\dot{X}\dot{X}\right). \tag{B.5}$$

Этот простой факт говорит нам о том, что для получения релятивистского обобщения модели Калоджеро мы можем выполнить аналогичную замену в матричной системе (B.1). То есть в качестве релятивистского обобщения системы Калоджеро мы рассматриваем модель (B.1), в которой первый член заменен на

$$-mc^2 \,\mathrm{Tr} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\nabla X \nabla X}. \tag{B.6}$$

Такая релятивистская деформация системы Калоджеро, естественная с физической точки зрения, и будет предметом рассмотрения настоящей статьи.

План этой статьи следующий. В разд. 1 представлено матричное релятивистское обобщение рациональной системы Калоджеро. Здесь даны лагранжиан этой матричной системы с полудинамическими степенями свободы и ее гамильтониан со связями, порождающими калибровочную симметрию $U(n)$. В разд. 2 представлена рассматриваемая здесь система после фиксации всех калибровок. Полученная система описывается n координатами и n импульсами, как и модель Калоджеро. Но, в отличие от последней системы, полученная система является ее релятивистским обобщением: рациональная система Калоджеро получается только в нерелятивистском пределе $c \to \infty$. Разд. 3 посвящен обсуждению интегрируемости построенной системы. Здесь показано, что пара Лакса для рациональной системы Калоджеро и ее интегрируемость могут быть легко получены из анализа эквивалентной ей физической системы калибровочных матриц. С помощью этого метода получена интегрируемость релятивистской системы с представлением полного набора сохраняющихся зарядов. Разд. 4 содержит заключительные замечания.

1. МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ С КАЛИБРОВАНИЕМ: ЛАГРАНЖИАН, ГАМИЛЬТОНИАН И СВЯЗИ

Как было отмечено во введении, для описания релятивистского обобщения системы Калоджеро мы рассматриваем лагранжиан

$$L_{rC} = -mc^2 \,\mathrm{Tr} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\nabla X \nabla X} + \kappa\,\mathrm{Tr}\,A + \frac{i}{2}\left(\bar{Z}\nabla Z - \nabla\bar{Z} Z\right). \tag{1.1}$$

В пределе $c \to \infty$ имеет место соотношение

$$\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\,\nabla X \nabla X} \simeq 1 - \frac{1}{2c^2}\,\nabla X \nabla X, \tag{1.2}$$

а также

$$L_{rC} \simeq L_C - n\,mc^2, \tag{1.3}$$

где L_C — лагранжиан (B.1); n — размерность $(n{\times}n)$-матрицы X, а nmc^2 — числовой член. Следовательно, в нерелятивистском пределе система (1.1) переходит в n-частичную рациональную систему Калоджеро (B.1).

Рассмотрим гамильтонизацию матричной системы (1.1).

Система с лагранжианом (1.1) описывается следующими парами фазовых переменных $({X_a}^b, {P_c}^d)$, $(Z_a, \mathcal{P}^b)$, $(\bar{Z}^a, \bar{\mathcal{P}}_b)$, ненулевые скобки Пуассона которых имеют следующий вид:

$$\{{X_a}^b, {P_c}^d\}_{\mathrm{P}} = \delta_a^d \delta_c^b, \quad \{Z_a, \mathcal{P}^b\}_{\mathrm{P}} = \delta_a^b, \quad \{\bar{Z}^a, \bar{\mathcal{P}}_b\}_{\mathrm{P}} = \delta_b^a. \tag{1.4}$$

Нахождение $U(n)$-спинорных импульсов $\mathcal{P}^a$, $\bar{\mathcal{P}}_a$ дает первичные связи

$$G^a := \mathcal{P}^a - \frac{i}{2}\,\bar{Z}^a \approx 0, \quad \bar{G}_a := \bar{\mathcal{P}}_a + \frac{i}{2}\,Z_a \approx 0. \tag{1.5}$$

Кроме того, импульс матричной координаты ${X_a}^b$ имеет вид

$${P_a}^b = \frac{\partial L_{rC}}{\partial {\dot{X}_b}{}^a} = m \left[\nabla X \left(1 - \frac{1}{c^2}\,\nabla X \nabla X \right)^{-1/2} \right]_a^b, \tag{1.6}$$

тогда как импульсы координат ${A_a}^b$ равны нулю.

Канонический гамильтониан системы равен

$$H = {P_b}^a \dot{X}_a^b + \mathcal{P}^a \dot{Z}_a + \bar{\mathcal{P}}_a \dot{\bar{Z}}^a - L_{rC} = mc^2\,\mathrm{Tr}\sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\,P^2} + \mathrm{Tr}\,(AF), \tag{1.7}$$

где во втором члене $\mathrm{Tr}\,(AF)$ присутствует матрица

$${F_a}^b := i[P, X]_a^b + Z_a \bar{Z}^b - \kappa\,\delta_a^b. \tag{1.8}$$

Равенство нулю импульсов переменных A_a^b указывает на то, что величины (1.8) определяют вторичные связи

$$F_a^b \approx 0, \tag{1.9}$$

а величины A_a^b в гамильтониане (1.7) играют роль множителей Лагранжа для этих связей.

Связи (1.5) являются связями второго рода. Используя для них скобки Дирака и исключая $\mathcal{P}$-импульсы, получаем, что ненулевые скобки Дирака остальных фазовых переменных принимают вид

$$\{X_a^b, P_c^d\}_D = \delta_a^d \delta_c^b, \quad \{Z_a, \bar{Z}^b\}_D = -i\delta_a^b. \tag{1.10}$$

Оставшиеся связи ${F_a}^b = (F_b^a)^*$, определенные в (1.9), образуют алгебру $u(n)$ относительно скобок Дирака (1.10):

$$\{{F_a}^b, {F_c}^d\}_D = -i\delta_a^d F_c^b + i\delta_c^b F_a^d. \qquad (1.11)$$

Таким образом, связи (1.8), (1.9) являются связями первого рода и генерируют $U(n)$-преобразования

$$\delta {X_a}^b = -i[\alpha, X]_a{}^b, \quad \delta {P_a}^b = -i[\alpha, P]_a{}^b, \quad \delta Z_a = -i(\alpha Z)_a, \quad \delta \bar{Z}_a = i(\bar{Z}\alpha)^a, \qquad (1.12)$$

где ${\alpha_a}^b(\tau) = ({\alpha_b}^a(\tau))^*$ — локальные параметры.

Таким образом, полученная релятивистская матричная система описывается гамильтонианом

$$H = H_{rC} + \lambda_b^a F_a^b, \qquad (1.13)$$

где первый член имеет следующий вид:

$$H_{rC} = mc^2\,\mathrm{Tr}\sqrt{1 + \frac{1}{m^2c^2}\,P^2}, \qquad (1.14)$$

Величины λ_a^b в (1.13) являются множителями Лагранжа связей (1.9), тогда как функции F_a^b в фазовом пространстве определены в (1.8).

2. ФИКСАЦИЯ КАЛИБРОВКИ В МАТРИЧНОЙ СИСТЕМЕ

Калибровки $X_a^b = 0$ при $a \neq b$ фиксируют локальные преобразования (1.12) с параметрами $\alpha_a^b(\tau)$, $a \neq b$, порожденные недиагональными связями $F_a^b \approx 0$, $a \neq b$, в множестве (1.8), (1.9). То есть, по аналогии с работой [1], рассмотрим закрепление калибровки в виде

$$x_a^b \approx 0, \qquad (2.1)$$

где x_a^b и p_a^b, $a \neq b$, представляют собой недиагональные части в матричных разложениях

$$X_a^b = x_a\delta_a^b + x_a^b, \quad P_a^b = p_a\delta_a^b + p_a^b. \qquad (2.2)$$

Кроме того, с помощью связей $F_a^b \approx 0$, $a \neq b$, импульсы p_a^b выражаются через остальные фазовые переменные:

$$p_a^b = -\frac{i\,Z_a\bar{Z}^b}{x_a - x_b}, \quad a \neq b. \qquad (2.3)$$

Таким образом, условия частичной фиксации калибровки (2.1) и уравнения связей (2.3) удаляют $2n(n-1)$ фазовых переменных x_a^b и p_a^b, $a \neq b$.

В результате частичной фиксации калибровки фазовое пространство рассматриваемой системы определяется $2n$ вещественными переменными x_a, p_a и n комплексными переменными Z_a. Благодаря «разрешенной форме» условий фиксации калибровки (2.1) относительно исключаемых переменных x_a^b, скобки Дирака для остальных фазовых переменных остаются неизменными. Их ненулевые скобки Дирака имеют вид

$$\{x_a, p_b\}'_D = \delta_{ab}, \qquad \{Z_a, \bar{Z}^b\}'_D = -i\,\delta_a^b. \qquad (2.4)$$

Фазовые переменные x_a, p_a, Z_a, $\bar{Z}^a$ подчинены n оставшимся связям первого рода (диагональные части (1.8)):

$$F_a := Z_a \bar{Z}^a - \kappa \approx 0 \quad (\text{нет суммирования по } a), \tag{2.5}$$

где a принимает n значений, $a = 1, \ldots, n$. Эти связи (2.5) генерируют следующие фазовые преобразования $U(n)$-спинорных переменных Z_a:

$$Z_a \to \mathrm{e}^{i\phi_a} Z_a, \quad \bar{Z}^a \to \mathrm{e}^{-i\phi_a} \bar{Z}^a. \tag{2.6}$$

Фиксацией этой калибровочной симметрии является требование вещественности переменных Z_a:

$$Z_a = \bar{Z}^a \tag{2.7}$$

при всех значениях a. В результате этого все переменные Z_a калибровочно исключаются из системы. Подобно предыдущему закреплению калибровки, условия фиксации калибровки (2.7) (как и связи (2.5)) не содержат остальных переменных. Поэтому введение скобки Дирака для условий (2.5) и (2.7) не изменяет коммутационных соотношений для x_a и p_a. При этом уравнения

$$Z_a \bar{Z}^a = \kappa \quad \forall a \quad (\text{нет суммирования по } a) \tag{2.8}$$

выполняются в сильном смысле.

В калибровках (2.1), (2.3), (2.8) матричный импульс P_a^b равен матрице

$$\tilde{P}_a^{\,b} = p_a \, \delta_a^b - i(1 - \delta_a^b) \frac{\kappa}{(x_a - x_b)}, \tag{2.9}$$

зависящей от оставшихся переменных x_a, p_a. При этом гамильтониан системы (1.14) принимает вид

$$\mathrm{H}_{rC} = c \, \mathrm{Tr} \sqrt{m^2 c^2 + \tilde{P}^2}, \tag{2.10}$$

где матрица $\tilde{P}^2$, получаемая из матрицы (2.9), равна

$$(\tilde{P}^2)_a^b = \left[(p_a)^2 + \sum_{c \neq a} \frac{\kappa^2}{(x_a - x_c)^2} \right] \delta_a^b + \\ + (1 - \delta_a^b) \left[-i \, \frac{p_a + p_b}{x_a - x_b} + \sum_{c \neq a, c \neq b} \frac{\kappa}{(x_a - x_c)(x_b - x_c)} \right] Z_a \bar{Z}^b. \tag{2.11}$$

В нерелятивистском пределе $c \to \infty$ гамильтониан (2.10) принимает вид

$$\mathrm{H}_{rC} = mc^2 \, \mathrm{Tr} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2 c^2} \, \tilde{P}^2} \simeq \frac{1}{2m} \, \mathrm{Tr} \left(\tilde{P}^2 \right) + nmc^2. \tag{2.12}$$

Поэтому с точностью до численного слагаемого в нерелятивистском пределе $c \to \infty$ гамильтониан (2.10) рассматриваемой здесь релятивистской системы принимает вид

$$\mathrm{H}_{rC} \simeq \mathrm{H}_C + n \, mc^2, \tag{2.13}$$

где

$$\mathrm{H}_C = \frac{1}{2m}\sum_a (p_a)^2 + \sum_{a>b} \frac{\kappa^2/m}{(x_a - x_b)^2} \qquad (2.14)$$

— гамильтониан системы Калоджеро. Таким образом, рассматриваемая здесь система является релятивистским обобщением (или релятивистской деформацией) рациональной системы Калоджеро.

Снятие радикала в выражении гамильтониана (2.10) выполняется стандартным образом путем диагонализации матрицы $m^2c^2 + \tilde{P}^2$ в подкорневом выражении. Поскольку эта матрица является положительно определенной эрмитовой матрицей, диагональная матрица $\Lambda_a^b = \Lambda_a \delta_a^b$ получается с помощью унитарного преобразования

$$m^2c^2 + \tilde{P}^2 = U\Lambda U^\dagger, \qquad (2.15)$$

где $U \in SU(n)$. После нахождения выражений $\Lambda_a = \Lambda_a(x_b, p_b)$ гамильтониан (2.10) принимает вид

$$\mathrm{H}_{rC} = c\sum_a \sqrt{\Lambda_a(x_b, p_b)}. \qquad (2.16)$$

Сами собственные значения Λ_a определяются как решения характеристического уравнения

$$\det\left(m^2c^2 + \tilde{P}^2 - \Lambda \mathbf{1}_n\right) = \prod_a (\Lambda_a - \Lambda) = 0. \qquad (2.17)$$

Поскольку матрица $m^2c^2 + \tilde{P}^2$ является полиномиальной функцией матрицы $\tilde{P}$, то собственные значения Λ_a определяются той же функцией (см., например, [19])

$$\Lambda_a = m^2c^2 + (\lambda_a)^2 \qquad (2.18)$$

собственных значений $\lambda_a(x_b, p_b)$ матрицы $\tilde{P}$:

$$\det\left(\tilde{P} - \lambda \mathbf{1}_n\right) = \prod_a (\lambda_a - \lambda) = 0. \qquad (2.19)$$

В случае $n = 2$ собственные значения (2.19) матрицы $\tilde{P}$ равны

$$\lambda_\pm = \frac{p_1 + p_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + \frac{4\kappa^2}{(x_1 - x_2)^2}}, \qquad (2.20)$$

тогда как собственные значения (2.17) принимают вид

$$\Lambda_\pm = m^2c^2 + \frac{(p_1)^2 + (p_2)^2}{2} + \frac{\kappa^2}{(x_1 - x_2)^2} \pm \frac{p_1 + p_2}{2}\sqrt{(p_1 - p_2)^2 + \frac{4\kappa^2}{(x_1 - x_2)^2}}. \qquad (2.21)$$

Как результат этого в двухчастичном случае релятивистский гамильтониан (2.16) имеет вид

$$\mathrm{H}_{rC}^{n=2} = c\sqrt{\Lambda_+(x_1, x_2, p_1, p_2)} + c\sqrt{\Lambda_-(x_1, x_2, p_1, p_2)}, \qquad (2.22)$$

где $\Lambda_\pm$ определены в (2.21).

При $n > 2$ процедура нахождения собственных значений $\lambda_a(x_b, p_b)$ и гамильтониана (2.16) аналогична, хотя в общем случае мы не можем привести аналитические выражения для них из-за сложности характеристического уравнения n-го порядка (2.19). Но даже при $n = 2$ гамильтониан (2.22) отличается от двухчастичного гамильтониана Руйсенарса–Шнайдера [10]. По крайней мере мы не можем отождествить их с помощью канонического преобразования. На наш взгляд, полученная релятивистская модель с гамильтонианом (2.16) является отличной от модели Руйсенарса–Шнайдера [10].

3. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МОДЕЛИ

Использование системы калибровочных матриц в качестве исходной и применение «разрешенных» условий фиксации калибровки позволяет сделать вывод об интегрируемости полученной релятивистской системы.

Чтобы проиллюстрировать и пояснить эту процедуру, рассмотрим сначала нерелятивистский случай, т. е. калибровочную формулировку рациональной системы Калоджеро [1, 2, 8, 9], которая описывается лагранжианом (B.1).

После учета связей второго рода (1.5) полный гамильтониан системы (B.1) представлен выражением

$$H_T = \tilde{H}_C + \tilde{\lambda}^a_b F^b_a, \tag{3.1}$$

где первый член имеет вид

$$\tilde{H}_C = \frac{1}{2m} \operatorname{Tr}\left(P^2\right). \tag{3.2}$$

Величины F^b_a имеют вид (1.8) и задают связи (1.9), тогда как $\tilde{\lambda}^b_a$ — множители Лагранжа для них. Эволюция любой величины K определяется скобками Дирака полного гамильтониана (3.2) с ней:

$$\dot{K} = \{K, H_{\mathrm{T}}\}_D. \tag{3.3}$$

Здесь используются скобки Дирака (1.10). В частности, эволюция матричного импульса P^b_a представляется коммутатором

$$\dot{P}^b_a = i\,[P, \tilde{\lambda}]^b_a. \tag{3.4}$$

Поэтому след от k-й степени матрицы P

$$I_k := \operatorname{Tr}\left(P^k\right) \tag{3.5}$$

сохраняется. Таким образом, сохранение n зарядов I_k, $k = 1, \ldots, n$, гарантирует интегрируемость матричной системы (B.1). Как видим, это доказательство интегрируемости довольно простое в калибровочной матричной формулировке.

Более стандартным способом доказательства интегрируемости системы Калоджеро является рассмотрение гамильтониана (2.14) и построение пары Лакса для этой системы. Но система с гамильтонианом (2.14) физически эквивалентна системе с лагранжианом (B.1) и гамильтонианом (3.1). Точнее, система (B.1) воспроизводит систему (2.14) после наложения условий фиксации калибровки (2.1) и (2.7). Вследствие введения скобки Дирака связи $F_a^b \approx 0$ и условия фиксации калибровки (2.1) и (2.7) равны нулю в сильном смысле и выражают переменные Z_a, $\bar{Z}^a$, x_a^b, p_a^b, $a{\neq}b$, через переменные x_a и p_a. Благодаря разрешенному виду условий фиксации калибровки (2.1) и (2.7) скобки Дирака остающихся переменных сохраняются каноническими: $\{x_a, p_b\}_D = \delta_{ab}$. Кроме того, сохранение во времени условий фиксации калибровки (2.1) и (2.7)

$$\{x_a^b, H_T\}_D = 0, \quad \{Z_a - \bar{Z}^a, H_T\}_D = 0 \tag{3.6}$$

определяет лагранжевы множители $\tilde{\lambda}_a^b$ в терминах оставшихся фазовых координат

$$\tilde{\lambda}_a^b = -\delta_a^b \sum_{c\neq a} \frac{\kappa}{m(x_a - x_c)^2} + (1 - \delta_a^b)\, \frac{\kappa}{m(x_a - x_b)^2}. \tag{3.7}$$

При наложенных калибровках (2.1) и (2.7) импульсная матрица $P_a{}^b$ принимает вид (см. также матрицы (2.9)) следующей:

$$\tilde{P}_a{}^b = p_a \delta_a^b - i(1 - \delta_a^b)\, \frac{\kappa}{x_a - x_b}, \tag{3.8}$$

являющейся как раз матрицей L в уравнении Лакса для рациональной системы Калоджеро (см., например, [4,5]):

$$\dot{L} = i\,[L, M]. \tag{3.9}$$

При этом матрица $\tilde{\lambda}_a^b$, полученная в (3.7), совпадает с используемой обычно матрицей M_a^b в уравнении Лакса (3.9) (см., например, [4,5]). То есть уравнение Лакса (3.9) системы Калоджеро уже закодировано в уравнении движения (3.4) матричной переменной в матричной формулировке с калиброванием.

В релятивистском случае гамильтониан (1.13), (1.14) в матричной формулировке представляет собой c-деформацию гамильтониана Калоджеро (3.1), (3.2). Но уравнения движения матричных импульсов $P_a{}^b$ подобны уравнениям (3.4). Поэтому величины I_k, $k = 1, \ldots, n$, определенные в (3.5), сохраняются в случае модели (1.13), (1.14), как и сам гамильтониан. В результате мы получаем интегрируемость рассматриваемой здесь релятивистской модели.

Доказательство этого утверждения для системы с гамильтонианом (2.10), которая получается из системы (1.13), (1.14) после наложения условий фиксации калибровки (2.1) и (2.7), довольно громоздкое, в отличие от обычной системы Калоджеро. Из-за сложной зависимости гамильтоновой функции (1.14), (2.16) от фазовых переменных x_a и p_a уравнения движения последних имеют громоздкий вид. Аналогичные трудности возникают и при нахождении явных выражений для множителей Лагранжа λ_a^b из уравнений (3.6). Но в пределе $c \to \infty$ величины λ_a^b равны правым частям выражений (3.7): $\lim\limits_{c\to\infty} \lambda_a^b = \tilde{\lambda}_a^b$. Поскольку λ_a^b определяет матрицу M в уравнении Лакса (3.9), этот предел также будет иметь место для матрицы M релятивистского обобщения (1.1) системы Калоджеро. Таким образом, мы получаем естественный вывод: уравнения Лакса релятивистской системы (1.1) являются c-деформацией уравнений Лакса нерелятивистской системы, которая является рациональной системой Калоджеро.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Получено релятивистское обобщение рациональной системы Калоджеро. Данное релятивистское обобщение описывается матричной системой с калибровочной симметрией и дополнительными полудинамическими переменными. Модель такого типа описывает многочастичную систему Калоджеро, как было показано в [1, 2, 8, 9]. Рассматриваемая здесь более общая система содержит параметр c размерности скорости и описывает релятивистскую систему, воспроизводящую модель Калоджеро в пределе $c \to \infty$.

В матричной формулировке рассматриваемая релятивистская модель описывается гамильтонианом (1.14) и связями первого рода (1.8), (1.9), генерирующими $U(n)$-калибровочные симметрии. После фиксации калибровки и устранения вспомогательных степеней свободы физически эквивалентная редуцированная система описывается гамильтонианом (2.10) в $2n$-мерном фазовом пространстве. Представленная здесь модель отличается от модели Руйсенарса–Шнайдера [10], которая также является релятивистским обобщением модели Калоджеро. Но релятивистская система, описываемая гамильтонианом (2.10), тоже интегрируема. Для системы с гамильтонианом (2.10) интегрируемость доказать трудно, но ее легко показать в случае эквивалентной матричной системы с гамильтонианом (1.14).

Отметим, что представленная здесь модель с гамильтонианом (1.13), (1.14) является одной из систем, в которых первый член гамильтониана (часть без связей и множителей Лагранжа) зависит только от матричного импульса P. Хотя вопрос о построении лагранжианов таких моделей в общем случае остается открытым, все эти системы интегрируемы, что можно показать в рамках рассмотрения, проведенного в разд. 4.

В следующих публикациях планируется рассмотреть суперсимметричное обобщение матричной системы (1.1) в рамках процедуры, разработанной в [1, 2].

Еще одной интересной задачей является построение подобных релятивистских c-деформаций других интегрируемых систем калоджеровского типа, в частности, матричной формулировки гиперболической системы Калоджеро [20, 21].

Благодарности. Выражаю искреннюю благодарность Глебу Арутюнову, Алексею Исаеву, Евгению Иванову, Сергею Кривоносу, Андрею Миронову, Армену Нерсесяну за полезные обсуждения и комментарии. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-52-12003).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Supersymmetric Calogero Models by Gauging // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 105015; arXiv:0812.4276 [hep-th].
2. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Superconformal Mechanics // J. Phys. A. 2012. V. 45. P. 173001; arXiv:1112.1947 [hep-th].
3. *Calogero F.* Ground State of One-Dimensional N Body System // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2197; Solution of the One-Dimensional N Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419.

4. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Classical Integrable Finite Dimensional Systems Related to Lie Algebras // Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313; Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebras // Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
5. *Polychronakos A. P.* Physics and Mathematics of Calogero Particles // J. Phys. A. 2006. P. 39. V. 12793; arXiv:hep-th/0607033.
6. *Arutyunov G.* Elements of Classical and Quantum Integrable Systems. Springer Nature, 2019.
7. *Delduc F., Ivanov E.* Gauging $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Mechanics // Nucl. Phys. B. 2006. V. 753. P. 211; arXiv:hep-th/0605211.
8. *Polychronakos A. P.* Integrable Systems from Gauged Matrix Models // Phys. Lett. B. 1991. P. 266. V. 29.
9. *Gorsky A., Nekrasov N.* Relativistic Calogero–Moser Model as Gauged WZW Theory // Nucl. Phys. B. 1995. V. 436. P. 582; arXiv:hep-th/9401017.
10. *Ruijsenaars S., Schneider H.* A New Class of Integrable Systems and Its Relation to Solitons // Ann. Phys. 1986. V. 170. P. 370.
11. *Braden H. W., Sasaki R.* The Ruijsenaars–Schneider Model // Prog. Theor. Phys. 1997. V. 97. P. 1003; arXiv:hep-th/9702182.
12. *Fock V., Gorsky A., Nekrasov N., Rubtsov V.* Duality in Integrable Systems and Gauge Theories // JHEP. 2000. V. 07. P. 028; arXiv:hep-th/9906235.
13. *Gorsky A., Mironov A.* Integrable Many Body Systems and Gauge Theories // NATO Science Ser. “Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories” / Eds.: H. Aratyn, A. S. Sorin. 2001. V. 18. P. 33; arXiv:hep-th/0011197.
14. *Shastry B. S., Sutherland B.* Superlax Pairs and Infinite Symmetries in the $1/r^2$ System // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. V. 4029; arXiv:cond-mat/9212029.
15. *Brink L., Turbiner A., Wyllard N.* Hidden Algebras of the (Super)Calogero and Sutherland Models // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 1285; arXiv:hep-th/9705219.
16. *Galajinsky A.* Ruijsenaars–Schneider Three-Body Models with $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetry // JHEP. 2018. V. 1804. P. 079; arXiv:1802.08011 [hep-th].
17. *Krivonos S., Lechtenfeld O.* On $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Ruijsenaars–Schneider Models // Phys. Lett. B. 2020. V. 807. P. 135545; arXiv:2005.06486 [hep-th].
18. *Kozyrev N., Krivonos S., Lechtenfeld O.* New Approach to $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Ruijsenaars–Schneider Model // PoS. 2021. V. 394. P. 018; arXiv:2103.02925 [hep-th].
19. *Faddeev D. K., Sominsky I. S.* Problems in Higher Algebra. Translated from the Russian by G. Yankovsky. M.: Mir, 1972.
20. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Supersymmetric Hyperbolic Calogero–Sutherland Models by Gauging // Nucl. Phys. B. 2019. V. 944. P. 114633; arXiv:1902.08023 [hep-th].
21. *Fedoruk S.* $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Hyperbolic Calogero–Sutherland Model // Nucl. Phys. B. 2020. V. 953. P. 114977; arXiv:1910.07348 [hep-th].

Получено 15 февраля 2022 г.