Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 323–328

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

КВАНТОВЫЕ ПОПРАВКИ В ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ В ОБОБЩЕННЫХ МОДЕЛЯХ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Д. М. Толкачев [а, б, 1], *Д. И. Казаков* [а, в, 2], *Р. М. Яхиббаев* [а, 3]

[а] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Институт физики им. Б. И. Степанова, Минск

[в] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия

Построено ренормгрупповое (РГ) уравнение для эффективного потенциала в приближении лидирующих логарифмов, которое справедливо для произвольной скалярной теории поля в четырех измерениях. Данное уравнение воспроизводит стандартное уравнение РГ для теории ϕ^4, а также позволяет изучить более сложные потенциалы скалярного взаимодействия. В общем случае полученное уравнение не удается решить аналитически, однако в некоторых случаях оно сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые можно изучать численно.

A renormalization group (RG) equation for the effective potential in the leading logarithm approximation is constructed which is valid for arbitrary scalar field theory in four dimensions. This equation reproduces the standard RG equation for ϕ^4 theory and also allows one to study more complex scalar interaction potentials. In general, the resulting equation cannot be solved analytically, but in some cases it reduces to ordinary differential equations which can be studied numerically.

PACS: 04.60.Gw; 11.15.Kc

1. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Эффективный потенциал дополняет классический потенциал квантовыми эффектами виртуальных частиц. В теории со скалярным потенциалом $V_0(\phi) = g\phi^4/4!$ он был впервые рассмотрен в работе Коулмана и Вайнберга [1], которые изучали возможность спонтанного нарушения симметрии за счет радиационных поправок. Однопетлевая поправка к классическому потенциалу в этом случае имеет вид

$$V_1(\phi) = \frac{g^2}{16\pi^2}\phi^4 \frac{1}{16} \frac{\log \phi^2}{\mu^2} \tag{1}$$

[1] E-mail: den3.1415@gmail.com

[2] E-mail: kazakovd@theor.jinr.ru

[3] E-mail: ravmarat@gmail.com

и приводит к появлению нетривиального минимума, ведущего к спонтанному нарушению симметрии. Однако учет всех квантовых поправок в потенциал в лидирующем логарифмическом приближении, что может быть получено с помощью уравнений РГ, ведет к восстановлению симметрии при малых ϕ^2, так что эффективный потенциал описывается выражением, содержащим полюс Ландау [1]:

$$V_{\text{eff}}^{\text{RG}} = \frac{g\phi^4/4!}{1 - \dfrac{g}{16\pi^2}\dfrac{3}{2}\log\phi^2/\mu^2}. \tag{2}$$

Для теории с потенциалом произвольного вида подобного анализа не существует, поскольку для неперенормируемых взаимодействий нет соответствующего уравнения РГ. Наша задача состоит как раз в получении такого уравнения.

Эффективный потенциал в скалярной теории произвольного вида получается следующим образом [1,2]. В исходном лагранжиане вводится расщепление поля на классическую и квантовую части $\phi \to \phi^{\text{cl}} + \phi$ и производится разложение в ряд по квантовому полю. Далее вычисляются одночастично-неприводимые вакуумные диаграммы во внешнем классическом поле. Правила Фейнмана при этом следуют из разложения исходного лагранжиана: внутренние линии с множеством вставок $v_2 = \partial^2 V_0/\partial\phi^2$, которые играют роль массы скалярного поля, имеют вид

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - v_2}, \tag{3}$$

а вершины выражаются через производные потенциала $v_n = \partial^n V_0/\partial\phi^n$.

Задача состоит в нахождении УФ-расходимостей в петлевых интегралах, так как лидирующие логарифмы по полям и лидирующие расходимости находятся в однозначном соответствии. В дальнейшем для регуляризации расходимостей мы используем размерную регуляризацию, полагая $d = 4 - 2\epsilon$. Несмотря на то, что в неперенормируемых теориях расходимости не устраняются обычной процедурой перенормировки, их нахождение может быть осуществлено с помощью $\mathcal{R}$-операции Боголюбова [3]. Существенным здесь является то, что коэффициенты при лидирующих расходимостях (лидирующих логарифмах) не зависят от произвола в вычитаниях, т. е. являются универсальными. Этот факт оправдывает наши дальнейшие действия, несмотря на то, что мы не решаем проблему произвола при устранении расходимостей в неперенормируемых теориях.

2. РЕНОРМГРУППОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ТИПА

Вывод искомого РГ-уравнения для эффективного потенциала базируется на $\mathcal{R}$-операции. Напомним, что действие $\mathcal{R}$-операции на n-петлевую диаграмму сводится к вычитанию УФ-расходимостей, начиная с однопетлевого подграфа и до $(n-1)$-петлевого, а затем вычитается оставшаяся n-петлевая расходимость, которая в силу теоремы Боголюбова–Парасюка [4–6] всегда является локальной. Причем это свойство не зависит от перенормируемости теории.

Для нахождения собственно n-петлевой расходимости используют $\mathcal{R}'$-операцию (так называемую неполную $\mathcal{R}$-операцию без последнего вычитания). Требование локальности говорит о том, что УФ-расходимости, которые имеют вид полюсов по $1/\epsilon$,

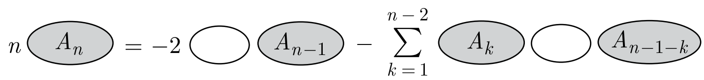

Рис. 1. Рекуррентное соотношение для коэффициентов при лидирующих расходимостях

всегда стоят при локальных структурах, т. е. все выражения типа $\log^l(p^2/\mu^2)/\epsilon^k$ должны сокращаться для любых l и k. В n-м порядке теории возмущений это условие приводит к $n-1$ уравнению на n переменных, так что коэффициент при лидирующей n-петлевой расходимости $A_n^{(n)}$ дается формулой [7]

$$A_n^{(n)} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}A_n^{(1)}, \tag{4}$$

где $A_n^{(1)}$ — это однопетлевая расходимость, оставшаяся после вычитания $(n-1)$-петлевого контрчлена. Это позволяет написать рекуррентное соотношение, связывающее лидирующую n-петлевую расходимость с $(n-1)$-петлевой, которое символически изображено на рис. 1.

Следующим шагом является определение рекуррентной структуры ведущих расходимостей. Согласно рис. 1, если однопетлевая диаграмма стоит слева или справа от всей диаграммы, то она имеет две вершины, которые имеют пару квантовых линий: одна — v_2, а другая получается из выражения для $(n-1)$-петлевого контрчлена S_{n-1} сдвигом аргумента $S(\phi+\varphi)$ и разложением S до второго порядка по квантовому полю φ. Это приводит к вершине вида

$$D_2 S_{n-1} = \frac{\partial^2 S_{n-1}}{\partial\phi^2}.$$

В случае, когда однопетлевая диаграмма стоит в середине, у нее есть две аналогичные вершины $D_2 S_k$. Подставляя эти выражения в рекуррентное соотношение, изображенное на рис. 1 с учетом (4), получаем рекуррентное соотношение для лидирующих расходимостей

$$nS_n = \frac{1}{2}v_2 D_2 S_{n-1} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-2} D_2 S_k D_2 S_{n-1-k}, \quad n \geqslant 2, \tag{5}$$

с условием $S_1 = 1/4v_2^2$. Учитывая, что $S_0 = V_0$, уравнение (5) можно переписать в виде

$$nS_n = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1} D_2 S_k D_2 S_{n-1-k}, \quad n \geqslant 1. \tag{6}$$

Напомним, что S_n — это коэффициент при лидирующей расходимости в n петлях. Введя переменную $z = g/\epsilon$ и функцию $\Sigma(z,\phi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-z)^n S_n(\phi)$, рекуррентное соотношение (6) можно свести к дифференциальному уравнению

$$\frac{d\Sigma}{dz} = -\frac{1}{4}(D_2\Sigma)^2, \quad \Sigma(0,\phi) = V_0(\phi). \tag{7}$$

Это уравнение и является обобщенным ренормгрупповым уравнением для произвольного скалярного потенциала. Эффективный потенциал из этого выражения можно получить обычной заменой аргумента $z \to -g/(16\pi)^2\log(gv_2/\mu^2)$. Несмотря на сильную нелинейность, данное уравнение в некоторых случаях сводится к более простому обыкновенному дифференциальному уравнению. Перейдем к рассмотрению этих простейших случаев.

3. СТЕПЕННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Рассмотрим степенной потенциал общего вида:

$$gV_0(\phi) = \frac{g}{p!}\phi^p. \tag{8}$$

Размерность константы связи g в этом случае равна $[4 - p]$, так что можно ввести безразмерную переменную, $y = z\phi^{p-4}$. Функцию $\Sigma(z,\phi)$ в этом случае можно представить как

$$\Sigma(z,\phi) = \frac{\phi^p}{p!} f(z\phi^{p-4}). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (7), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на функцию f:

$$f'(y) = -\frac{1}{4p!}\left[p(p-1)f(y) + (p-4)(3p-5)yf'(y) + (p-4)^2y^2f''(y)\right]^2 \tag{10}$$

с начальными условиями

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = -\frac{1}{4}\frac{p(p-1)}{(p-2)!}. \tag{11}$$

Данное уравнение не решается аналитически в общем случае и может быть решено численно.

3.1. $p = 4$**.** Для $p = 4$ уравнение (10) сильно упрощается:

$$f'(y) = -\frac{3}{2}f(y)^2. \tag{12}$$

Это есть не что иное, как обычное РГ-уравнение для эффективного потенциала, известное по работе Коулмана и Вайнберга [1]. Решение его имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{1 + 3/2y}. \tag{13}$$

Замена переменной $y \to -g/(16\pi)^2 \log(gv_2/\mu^2)$ приводит к известному выражению для эффективного потенциала:

$$V_{\mathrm{eff}}(\phi) = \frac{g\phi^4/4!}{1 - \dfrac{3}{2}\dfrac{g}{16\pi^2}\log\left(\dfrac{g\phi^2}{2\mu^2}\right)}. \tag{14}$$

Полученное выражение полностью соответствует уравнению (2).

3.2. $p > 4$**.** В случае $p > 4$ уравнение (10) значительно усложняется, что не позволяет его решить в аналитическом виде. Численные методы указывают на существование сингулярности при $y = 0$, являющейся точкой разрыва. Для ее устранения удобно представить функцию f в виде $f(y) = u(y)/y$, что позволяет устранить сингулярность. В итоге получается уравнение, которое более удобно для численного решения:

$$yu'(y) - u(y) = -\frac{1}{4p!}[12u(y) + (p-4)(p+3)yu'(y) + (p-4)^2y^2u''(y)]^2. \tag{15}$$

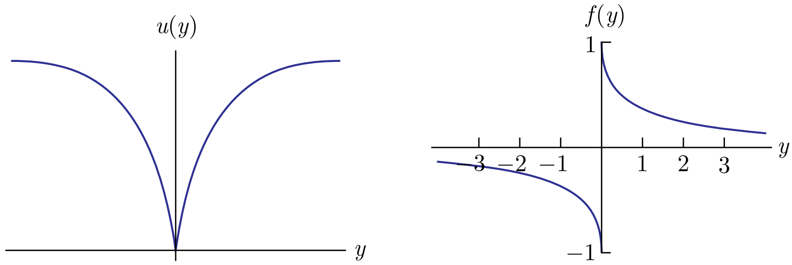

Рис. 2. Качественное поведение функций $u(y)$ (слева) и $f(y)$ (справа)

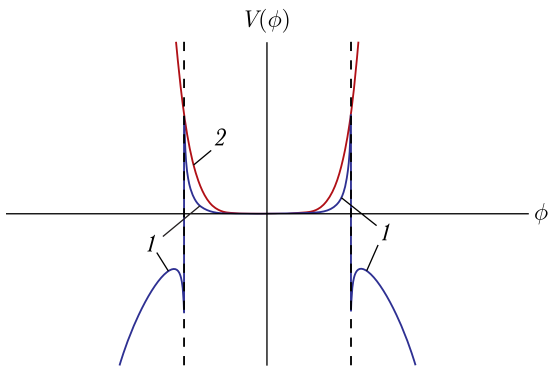

Рис. 3 (цветной в электронной версии). Эффективный потенциал для теории ϕ^6 в приближении лидирующих логарифмов. Ресуммированный потенциал обозначен синей линией (*1*), красной линией (*2*) обозначен классический потенциал

Это уравнение однородно и сохраняет форму при преобразовании зеркального отражения. Начальные условия имеют вид $u(\pm 0) = 0, u'(\pm 0) = \pm 1$. Качественное поведение решения изображено на рис. 2. На этом рисунке виден устранимый разрыв около $y = 0$. Для эффективного потенциала это означает присутствие барьера «конечной высоты» (в отличие от полюса, присущего теории ϕ^4).

Эффективный потенциал, полученный численным решением уравнения (15), изображен на рис. 3. В случае $p = 6$ потенциал симметричен, однако из-за существования конечного барьера вакуум теории метастабилен. Это же верно и для остальных четных степеней потенциала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квантовые поправки для эффективного потенциала могут быть вычислены для произвольного классического потенциала. Для произвольного потенциала нами были найдены уравнения, обобщающие обычное РГ-уравнение для ϕ^4-теории, известное по работам Коулмана и Вайнберга. В общем случае полученное уравнение не допускает аналитических решений. В частных случаях (потенциала в виде степенной функции скалярного поля) уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, и удается получить численные решения. Эти решения содержат разрывы, так что вакуум потенциалов для неперенормируемых теорий метастабилен. В общем случае имеем уравнения в частных производных.

Развитие этой темы включает разработку способов решения для потенциалов более сложного вида, например $V_0 = \tanh^2(\phi\omega)$, $V_0 = \exp(\phi\omega)$ или $V_0 = (1 - \cos(\phi\omega))$, которые встречаются при решении задач в инфляционной космологии.

Работа поддержана грантом РНФ № 21-12-0012.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Coleman S. R., Weinberg E. J.* Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking // Phys. Rev. D. 1973. V. 7. P. 1888–1910.
2. *Jackiw R.* Functional Evaluation of the Effective Potential // Phys. Rev. D. 1974. V. 9. P. 1686.
3. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.* Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1957; *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V.* Introduction to the Theory of Quantized Fields. 3rd ed. New York: Wiley, 1980.
4. *Bogoliubow N. N., Parasiuk O. S.* Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder // Acta Mathematica. 1957. V. 97. P. 227–266.
5. *Hepp K.* Proof of the Bogolyubov–Parasiuk Theorem on Renormalization // Commun. Math. Phys. 1966. V. 2. P. 301–326.
6. *Zimmermann W.* Convergence of Bogolyubov's Method of Renormalization in Momentum Space // Commun. Math. Phys. 1969. V. 15. P. 208–234.
7. *Bork L. V., Kazakov D. I., Kompaniets M. V., Tolkachev D. M., Vlasenko D. E.* Divergences in Maximal Supersymmetric Yang–Mills Theories in Diverse Dimensions // JHEP. 2015. V. 11. P. 059.

Получено 27 октября 2022 г.