Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 562–570

СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ 3-ЧАСТИЧНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КАЛОДЖЕРО

С. А. Федорук [1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Предложены $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперсимметричные обобщения 3-частичной эллиптической системы Калоджеро. Найдены генераторы суперсимметрии системы, в которой сектор центра масс описывается супермультиплетом $(\mathbf{1},\mathcal{N},\mathcal{N}-\mathbf{1})$, тогда как сектор относительных координат — супермультиплетом $(\mathbf{2},\mathcal{N},\mathcal{N}-\mathbf{2})$. Для случая $\mathcal{N}=2$ представлена также модель, описываемая в терминах трех супермультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$.

$\mathcal{N}=2$ and $\mathcal{N}=4$ supersymmetric generalizations of the 3-particle elliptic Calogero system are proposed. Supersymmetry generators of the system are found in which the center of mass sector is described by the supermultiplet $(\mathbf{1},\mathcal{N},\mathcal{N}-\mathbf{1})$, while the sector of relative coordinates is the supermultiplet $(\mathbf{2},\mathcal{N},\mathcal{N}-\mathbf{2})$. The $\mathcal{N}=2$ model described with three supermultiplets $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ is also presented.

PACS: 11.30.Pb; 12.60.Jv; 02.30.Ik; 02.10.Yn

ВВЕДЕНИЕ

Важная роль интегрируемых многочастичных систем Калоджеро [1–4] при изучении различных моделей в разнообразных областях теоретической физики предполагает естественной задачу построения суперсимметричных обобщений таких систем. Для рациональной, тригонометрической и гиперболической систем Калоджеро были найдены различные типы суперсимметризаций как для разных типов корневых систем, так и для разного числа суперсимметрий (см., например, [5–16] и ссылки там). С эллиптической системой Калоджеро ситуация принципиально иная: до сих пор нет суперсимметричных эллиптических систем Калоджеро для $n \geqslant 3$ частиц [2].

В построенных ранее суперсимметричных обобщениях n-частичных систем Калоджеро с $\mathcal{N}$-суперсимметриями использовалось n так называемых $(\mathbf{1},\mathcal{N},\mathcal{N}-\mathbf{1})$-супермультиплетов, каждый из которых содержит одну физическую бозонную степень свободы и $\mathcal{N}$ физических фермионных степеней свободы, тогда как $\mathcal{N}-1$ бозонных степеней свободы соответствующего супермультиплета были вспомогательными. То есть при $\mathcal{N}$-суперсимметризации n-частичной системы Калоджеро бозонное фазовое пространство с координатами q_a, $a=1,\ldots,n$, и импульсами p_a расширялось $n\mathcal{N}$

---

[1] E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

[2] 2-частичная система Калоджеро сводится к разделенным одномерным подсистемам центра масс и относительного движения, и суперсимметризация каждой из них не вызывает затруднений.

вещественными грассмановыми переменными $\psi_a^A = (\psi_a^A)^*$, $A = 1, \ldots, \mathcal{N}$. Такая процедура в случае эллиптической системы Калоджеро с $n \geqslant 3$ частицами сталкивается с трудностями: требуемые условия, выполняемые в рациональном, тригонометрическом и гиперболическом случаях для функций в суперзарядах, не выполняются для подбираемых функций в эллиптическом случае.

В настоящей короткой работе предлагается иной способ построения суперсимметричных обобщений эллиптической модели Калоджеро на примере 3-частичной системы с координатами q_1, q_2, q_3. Предлагаемая процедура суперсимметризации не ограничивается требованием использования $(\mathbf{1}, \mathcal{N}, \mathcal{N} - \mathbf{1})$-супермультиплетов для суперсимметричного описания каждой из координат. Более того, суперсимметризация сектора центра масс с координатой $(q_1 + q_2 + q_3)/\sqrt{3}$ и сектора, конфигурационное пространство которого параметризовано переменными $q_a - q_b$ [1], производится независимо и описывается разными супермультиплетами в общем случае. Данная процедура, описанная для $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперсимметризации в разд. 1 и 2 соответственно, проводится в терминах новых бозонных переменных, являющихся функциями исходных координат q_1, q_2, q_3 и их импульсов. Кроме того, что полученные суперзаряды имеют сложную зависимость от координат бозонного фазового пространства, отличительной чертой предлагаемой суперсимметризации является использование супермультиплета $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ в одной из возможных $\mathcal{N}=2$ систем и супермультиплета $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$ в случае $\mathcal{N}=4$ для описания сектора относительных координат.

1. 3-ЧАСТИЧНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО

Гамильтониан 3-частичной эллиптической системы Калоджеро в случае корневой системы A_2 имеет вид [1, 2, 4]

$$H_{3b} = \frac{1}{2}\left[(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2\right] + (2g)^2\left[\wp(q_{12}) + \wp(q_{23}) + \wp(q_{31})\right], \qquad (1.1)$$

где q_a, p_a, $a = 1, 2, 3$, образуют канонические пары фазового пространства: их ненулевые скобки Пуассона равны $\{q_a, p_b\} = \delta_{ab}$. Переменные $q_{ab} := q_a - q_b$ — относительные (разностные) координаты конфигурационного пространства. В (1.1) функция $\wp(z) = \wp(z|\omega, \omega')$ является эллиптической функцией Вейерштрасса второго порядка с периодами 2ω и $2\omega'$ [17], тогда как константа g характеризует взаимодействие частиц (для компактности последующих выражений константа взаимодействия в гамильтониане (1.1) задана в виде множителя $(2g)^2$).

Используя теорему сложения для $\wp$-функции [17]

$$\wp(z_1) + \wp(z_2) + \wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)}\right]^2, \qquad (1.2)$$

[1] Для краткости переменные $q_a - q_b$ будут называться ниже относительными или разностными координатами, а динамический сектор, описываемый такими координатами, будет называться относительным сектором системы.

ее четность $\wp(-z)=\wp(z)$ и условие на относительные координаты $q_{23}+q_{31}=-q_{12}$, представим гамильтониан (1.1) в виде

$$H_{3b}=\frac{1}{2}\Big[(p_1)^2+(p_2)^2+(p_3)^2\Big]+g^2\left[\frac{\wp'(q_{13})+\wp'(q_{23})}{\wp(q_{13})-\wp(q_{23})}\right]^2. \tag{1.3}$$

Перейдем к новым координатам, в качестве которых возьмем координату центра масс

$$x_0=\big(q_1+q_2+q_3\big)/\sqrt{3} \tag{1.4}$$

и координаты Якоби (см., например, [1])

$$x_1=q_{12}/\sqrt{2},\qquad x_2=\big(q_{13}+q_{23}\big)/\sqrt{6}. \tag{1.5}$$

Выражения (1.5) подразумевают

$$q_{12}=\sqrt{2}x_1,\qquad q_{13}=\big(\sqrt{3}x_2+x_1\big)/\sqrt{2},\qquad q_{23}=\big(\sqrt{3}x_2-x_1\big)/\sqrt{2}. \tag{1.6}$$

Новые импульсы π_0, π_1, π_2, которые имеют ненулевые скобки Пуассона $\{x_0,\pi_0\}=$ $=\{x_1,\pi_1\}=\{x_2,\pi_2\}=1$, определяются выражениями

$$\pi_0=\big(p_1+p_2+p_3\big)/\sqrt{3},\qquad \pi_1=p_{12}/\sqrt{2},\qquad q_{23}=\big(p_{13}+p_{23}\big)/\sqrt{6}, \tag{1.7}$$

где $p_{ab}:=p_a-p_b$. В переменных (1.4), (1.5), (1.7) гамильтониан (1.3) принимает вид

$$H_{3b}=\frac{1}{2}(\pi_0)^2+\frac{1}{2}\Big[(\pi_1)^2+(\pi_2)^2\Big]+g^2\left[\frac{\wp'\Big(\frac{\sqrt{3}x_2+x_1}{\sqrt{2}}\Big)+\wp'\Big(\frac{\sqrt{3}x_2-x_1}{\sqrt{2}}\Big)}{\wp\Big(\frac{\sqrt{3}x_2+x_1}{\sqrt{2}}\Big)-\wp\Big(\frac{\sqrt{3}x_2-x_1}{\sqrt{2}}\Big)}\right]^2. \tag{1.8}$$

Последнее слагаемое в (1.8) представляется как производная логарифма. В результате этого мы имеем

$$H_{3b}=\frac{1}{2}(\pi_0)^2+\frac{1}{2}\Big[(\pi_1)^2+(\pi_2)^2\Big]+2g^2\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\ln\left\{\wp\Big(\frac{\sqrt{3}x_2+x_1}{\sqrt{2}}\Big)-\wp\Big(\frac{\sqrt{3}x_2-x_1}{\sqrt{2}}\Big)\right\}\right]^2. \tag{1.9}$$

В системе, описываемой гамильтонианом (1.9), сектор центра масс с фазовыми координатами x_0, π_0 отщепился и описывает свободное движение в этом направлении. Суперсимметризация этого сектора тривиальна. Таким образом, для полной суперсимметризации системы необходимо суперсимметризовать двухчастичный сектор с координатами x_1, x_2 и импульсами π_1, π_2.

2. $\mathcal{N}$=2 СУПЕРСИММЕТРИЗАЦИЯ

Для получения $\mathcal{N}$=2 суперсимметризации рассматриваемой 3-частичной системы перейдем в секторе с координатами x_1, x_2 (или зависимыми относительными координатами q_a-q_b) к комплексным фазовым переменным

$$z=\big(x_1+ix_2\big)/\sqrt{2},\quad \bar z=\big(x_1-ix_2\big)/\sqrt{2},\qquad p_z=\big(\pi_1-i\pi_2\big)/\sqrt{2},\quad \bar p_z=\big(\pi_1+i\pi_2\big)/\sqrt{2}, \tag{2.1}$$

ненулевые скобки Пуассона которых равны $\{z,p_z\}=\{\bar z,\bar p_z\}=1$.

В терминах новых переменных (2.1) гамильтониан (1.8) принимает вид

$$H_{3b} = \frac{1}{2}(\pi_0)^2 + p_z\bar{p}_z + g^2\big[V(z,\bar{z})\big]^2, \tag{2.2}$$

где

$$V(z,\bar{z}) \ := \ \frac{\wp'(\mathrm{e}^{-i\pi/3}z + \mathrm{e}^{i\pi/3}\bar{z}) - \wp'(\mathrm{e}^{i\pi/3}z + \mathrm{e}^{-i\pi/3}\bar{z})}{\wp(\mathrm{e}^{-i\pi/3}z + \mathrm{e}^{i\pi/3}\bar{z}) - \wp(\mathrm{e}^{i\pi/3}z + \mathrm{e}^{-i\pi/3}\bar{z})}. \tag{2.3}$$

Отметим, что имеет место выражение

$$V(z,\bar{z}) = \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\ln|W(z,\bar{z})|, \tag{2.4}$$

где

$$W(z,\bar{z}) \ := \ \wp(\mathrm{e}^{-i\pi/3}z + \mathrm{e}^{i\pi/3}\bar{z}) - \wp(\mathrm{e}^{i\pi/3}z + \mathrm{e}^{-i\pi/3}\bar{z}). \tag{2.5}$$

Следующий шаг перед процедурой симметризации — введение полярных координат в импульсном пространстве, параметризованном переменными p_z и $\bar{p}_z$. То есть вместо $p_z(t)$ и $\bar{p}_z(t)$ вводим переменные $r(t)$ и $\alpha(t)$, определяемые соотношениями

$$p_z = r\,\mathrm{e}^{i\alpha}, \qquad \bar{p}_z = r\,\mathrm{e}^{-i\alpha}. \tag{2.6}$$

Тогда выражения для координат $z(t)$ и $\bar{z}(t)$ в новых переменных имеют вид

$$z = -\mathrm{e}^{-i\alpha}(2r)^{-1}\left(rp_r - ip_\alpha\right), \qquad \bar{z} = -\mathrm{e}^{i\alpha}(2r)^{-1}\left(rp_r + ip_\alpha\right), \tag{2.7}$$

где p_r и p_α — импульсные переменные для r и α: ненулевые скобки Пуассона переменных r, α, p_r, p_α равны

$$\{r, p_r\} = \{\alpha, p_\alpha\} = 1. \tag{2.8}$$

Так как в терминах новых фазовых координат используемые в (2.5) переменные равны

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-i\pi/3}z + \mathrm{e}^{i\pi/3}\bar{z} &= -\cos\Big(\alpha + \frac{\pi}{3}\Big)p_r + r^{-1}\sin\Big(\alpha + \frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha, \\ \mathrm{e}^{i\pi/3}z + \mathrm{e}^{-i\pi/3}\bar{z} &= -\cos\Big(\alpha - \frac{\pi}{3}\Big)p_r + r^{-1}\sin\Big(\alpha - \frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha, \end{aligned} \tag{2.9}$$

функция $V = V(r,\alpha,p_r,p_\alpha) = V(z(r,\alpha,p_r,p_\alpha), \bar{z}(r,\alpha,p_r,p_\alpha))$, полученная заменой переменных (2.7) в (2.3), принимает вид

$$V = -\frac{\wp'\Big(\cos\Big(\alpha+\frac{\pi}{3}\Big)p_r - r^{-1}\sin\Big(\alpha+\frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha\Big) - \wp'\Big(\cos\Big(\alpha-\frac{\pi}{3}\Big)p_r - r^{-1}\sin\Big(\alpha-\frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha\Big)}{\wp\Big(\cos\Big(\alpha+\frac{\pi}{3}\Big)p_r - r^{-1}\sin\Big(\alpha+\frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha\Big) - \wp\Big(\cos\Big(\alpha-\frac{\pi}{3}\Big)p_r - r^{-1}\sin\Big(\alpha-\frac{\pi}{3}\Big)p_\alpha\Big)}. \tag{2.10}$$

Как результат, гамильтониан 3-частичной системы Калоджеро (2.2) в новых переменных принимает вид

$$H_{3b} = \frac{1}{2}(\pi_0)^2 + r^2 + g^2\big[V(r,\alpha,p_r,p_\alpha)\big]^2. \tag{2.11}$$

В некотором смысле каноническая замена переменных $(z, \bar{z}; p_z, \bar{p}_z) \to (r, \alpha; p_r, p_\alpha)$ в секторе относительных координат, определенная в (2.6), (2.7), может быть проинтерпретирована как переход к «дуальной» эквивалентной системе с координатой, равной радиальной части комплексного импульса.

Покажем, что система с гамильтонианом (2.11) может быть встроена в $\mathcal{N}=2$ суперсимметричную систему как бозонная подсистема последней.

2.1. $\mathcal{N}=2$ **система с использованием мультиплета** $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$. Рассмотрим сначала случай $\mathcal{N}=2$ суперсимметрии с минимальным числом используемых грассмановых переменных.

В дополнение к бозонным фазовым переменным x_0, π_0, r, φ, p_r, p_φ введем пару комплексных грассмановых переменных χ, $\bar{\chi} = (\chi)^*$ и ψ, $\bar{\psi} = (\psi)^*$, ненулевые (градуированные) скобки Пуассона (или скобки Дирака в лагранжевой теории) которых равны

$$\{\chi, \bar{\chi}\} = -i, \qquad \{\psi, \bar{\psi}\} = -i. \tag{2.12}$$

Переменная χ служит для суперсимметризации сектора центра масс, тогда использование ψ позволит построить суперсимметричное обобщение сектора относительных координат.

Суперзаряды

$$Q = \pi_0 \chi + \sqrt{2}\Big[r + ig\,V(r, \alpha, p_r, p_\alpha)\Big]\psi, \tag{2.13}$$

$$\bar{Q} = \pi_0 \bar{\chi} + \sqrt{2}\Big[r - ig\,V(r, \alpha, p_r, p_\alpha)\Big]\bar{\psi} \tag{2.14}$$

образуют относительно градуированной скобки Пуассона (2.8), (2.12) $\mathcal{N}=2$ алгебру суперсимметрии:

$$\{Q, \bar{Q}\} = -2iH, \qquad \{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\}, \tag{2.15}$$

где суперсимметричный гамильтониан

$$H = H_{3b} + 2g\psi\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial p_r}V(r, \alpha, p_r, p_\alpha) \tag{2.16}$$

имеет не зависящую от грассмановых переменных часть H_{3b}, которая совпадает с гамильтонианом (2.2) 3-частичной эллиптической системы Калоджеро. Отметим, что вследствие соотношений (2.15) и тождеств Якоби гамильтониан (2.16) имеет нулевые скобки Пуассона с суперзарядами (2.13), (2.14):

$$\{H, Q\} = \{H, \bar{Q}\} = 0. \tag{2.17}$$

Таким образом, система, описываемая гамильтонианом (2.16) и суперзарядами (2.13), (2.14), является $\mathcal{N}=2$ суперсимметризацией системы с гамильтонианом (2.2), описывающим 3-частичную эллиптическую систему Калоджеро.

Структура суперзарядов (2.13), (2.14) показывает, что сектор центра масс с бозонными фазовыми переменными (x_0, π_0) описывается $\mathcal{N}=2$ супермультиплетом $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$, тогда как относительный сектор оставшихся бозонных переменных $(r, \varphi; p_r, p_\varphi)$ (или эквивалентно $(x_1, x_2; \pi_1, \pi_2)$) в суперсимметричной системе задается $\mathcal{N}=2$ супермультиплетом $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$. Последнее утверждение о $\mathcal{N}=2$ супермультиплете $(\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$ основано на количестве числа бозонных и фермионных физических степеней свободы в относительном секторе и вариации их при преобразованиях, генерируемых суперзарядами (2.13), (2.14).

Отметим, что фермионный сектор модели с гамильтонианом (2.16) и суперзарядами (2.13), (2.14) является 4-мерным, в отличие от $\mathcal{N}=2$ суперсимметричных моделей Калоджеро в неэллиптических случаях [5, 7, 9–14], использующих не менее 6 фермионов в 3-частичном случае.

2.2. $\mathcal{N}=2$ **модель в терминах мультиплетов** $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$**.** Имеет место другой вариант $\mathcal{N}=2$ суперсимметризации, когда для всех бозонных степеней свободы вводится пара фермионных переменных. То есть в суперсимметризации сектора относительных координат используется в два раза больше фермионных переменных, чем в предыдущем случае. То есть в дополнение к фермионам χ, $\bar\chi = (\chi)^*$ и ψ, $\bar\psi = (\psi)^*$ предыдущего пункта введем еще одну пару комплексных грассмановых переменных φ, $\bar\varphi = (\varphi)^*$, ненулевые (градуированные) скобки Пуассона которых равны

$$\{\varphi, \bar\varphi\} = -i. \tag{2.18}$$

Для системы, расширенной тремя комплексными грассмановыми переменными, можно построить два вида суперзарядов, коммутирующих на гамильтониан, бозонная часть которого равна (2.2).

Первым типом являются суперзаряды

$$Q = \pi_0\chi + (r + ig\,V)\psi + (r - ig\,V)\varphi - \frac{g}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\big(\varphi\bar\varphi\psi - \psi\bar\psi\varphi\big), \tag{2.19}$$

$$\bar Q = \pi_0\bar\chi + (r - ig\,V)\bar\psi + (r + ig\,V)\bar\varphi - \frac{g}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\big(\varphi\bar\varphi\bar\psi - \psi\bar\psi\bar\varphi\big), \tag{2.20}$$

образующие относительно скобок Пуассона супералгебру (2.15), (2.17), где суперсимметричный гамильтониан имеет вид

$$H = H_{3b} + 2g\frac{\partial V}{\partial p_r}\big(\psi\bar\psi - \varphi\bar\varphi\big) + 2g^2\Big\{V, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\Big\}\psi\bar\psi\varphi\bar\varphi. \tag{2.21}$$

Вторым типом генераторов $\mathcal{N}=2$ супералгебры (2.15), (2.17) являются суперзаряды

$$Q = \pi_0\chi + (r + ig\,V)\psi + (r - ig\,V)\varphi - i\frac{\partial \ln V}{\partial p_r}\big(\varphi\bar\varphi\psi + \psi\bar\psi\varphi\big), \tag{2.22}$$

$$\bar Q = \pi_0\bar\chi + (r - ig\,V)\bar\psi + (r + ig\,V)\bar\varphi + i\frac{\partial \ln V}{\partial p_r}\big(\varphi\bar\varphi\bar\psi + \psi\bar\psi\bar\varphi\big) \tag{2.23}$$

и гамильтониан

$$H = H_{3b} + 2g\frac{\partial V}{\partial p_r}\big(\psi\bar\psi + \varphi\bar\varphi\big) - 2\frac{\partial^2 \ln V}{\partial p_r^2}\psi\bar\psi\varphi\bar\varphi. \tag{2.24}$$

В отличие от суперзарядов (2.13), (2.14), суперзаряды (2.19), (2.20) и (2.22), (2.23) содержат члены третьей степени по фермионам. Как результат этого гамильтониан (2.24) имеет слагаемое четвертой степени по фермионам, в отличие от гамильтониана (2.16).

3. 3-ЧАСТИЧНАЯ $\mathcal{N}=4$ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЛОДЖЕРО

По аналогии с $\mathcal{N}=2$ случаем, рассмотренным в п. 2.1, можно построить заряды $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебры Пуанкаре с гамильтонианом, бозонная часть которого совпадает с гамильтонианом 3-частичной эллиптической системы Калоджеро (2.2).

В дополнение к переменным $\mathcal{N}=2$ случая п. 2.1 вводим вторые пары грассмановых переменных. То есть мы рассматриваем систему с фермионами χ_i, $\bar{\chi}^i = (\chi_i)^*$ и ψ_i, $\bar{\psi}^i = (\psi_i)^*$, $i = 1, 2$, ненулевые скобки Пуассона которых

$$\{\chi_i, \bar{\chi}^j\} = -i\delta_i^j, \qquad \{\psi_i, \bar{\psi}^j\} = -i\delta_i^j. \tag{3.1}$$

В рамках процедуры, рассмотренной в предыдущем разделе, находятся два возможных варианта $\mathcal{N}=4$ суперзарядов.

В первом случае генераторы $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебры Пуанкаре имеют вид

$$Q_i = \pi_0\chi_i + \sqrt{2}\left[(r + ig\,V)\psi_i - \frac{g}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k\psi_i\right], \tag{3.2}$$

$$\bar{Q}^i = \pi_0\bar{\chi}^i + \sqrt{2}\left[(r - ig\,V)\bar{\psi}^i - \frac{g}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k\bar{\psi}^i\right], \tag{3.3}$$

$$H = H_{3b} - 2g\frac{\partial V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k - g^2\Big\{V, \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial p_r}\Big\}\,(\bar{\psi}^k\psi_k)^2, \tag{3.4}$$

где H_{3b} — гамильтониан 3-частичной эллиптической системы Калоджеро, приведенный в (2.2). Легко проверить, что величины (3.2), (3.3), (3.4) имеют скобки Пуассона

$$\{Q_i, \bar{Q}^j\} = -2iH\,\delta_i^j, \qquad \{Q_i, Q_j\} = \{\bar{Q}^i, \bar{Q}^j\} \tag{3.5}$$

и, как следствие (3.5), и для тождества Якоби выполняются скобки Пуассона

$$\{H, Q_i\} = \{H, \bar{Q}^i\} = 0. \tag{3.6}$$

Другой вариант $\mathcal{N}=4$, $d=1$ супералгебры Пуанкаре (3.5), (3.6) реализуется генераторами

$$Q_i = \pi_0\chi_i + \sqrt{2}\left[(r + ig\,V)\psi_i - i\frac{\partial \ln V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k\psi_i\right], \tag{3.7}$$

$$\bar{Q}^i = \pi_0\bar{\chi}^i + \sqrt{2}\left[(r - ig\,V)\bar{\psi}^i + i\frac{\partial \ln V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k\bar{\psi}^i\right], \tag{3.8}$$

$$H = H_{3b} - 2g\,\frac{\partial V}{\partial p_r}\,\bar{\psi}^k\psi_k + \frac{\partial^2 \ln V}{\partial p_r^2}\,(\bar{\psi}^k\psi_k)^2. \tag{3.9}$$

Представленные в (3.2), (3.3), (3.4) и (3.7), (3.8), (3.9) $\mathcal{N}=4$ системы описываются в секторе центра масс координатой x_0 и четырьмя фермионами χ_i, $\bar{\chi}^i$. То есть этот сектор описывается мультиплетом $(\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{3})$. В то же время описание относительного сектора с двумя координатами r, α использует также четыре фермиона ψ_i, $\bar{\psi}^i$. Это показывает, что данный сектор задается $\mathcal{N}=4$ мультиплетом $(\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{2})$. Подобно $\mathcal{N}=2$ случаю п. 2.1, число фермионов в $\mathcal{N}=4$ системах (3.2), (3.3), (3.4) и (3.7), (3.8), (3.9), равное 8, меньше, чем используемое число фермионов (не меньше 12 в 3-частичном случае) в $\mathcal{N}=4$ системах работ [6, 9–13, 15].

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этой работе представлены $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ суперсимметричные обобщения 3-частичной эллиптической системы Калоджеро. Важным моментом при построении являлся выход за рамки использования мультиплетов $(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{1})$ и $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$ в $\mathcal{N}=2$ и $\mathcal{N}=4$ случаях соответственно. Более того, $\mathcal{N}=4$ суперсимметризация использует как мультиплет $(\mathbf{1},\mathbf{4},\mathbf{3})$, так и мультиплет $(\mathbf{2},\mathbf{4},\mathbf{2})$. При этом суперсимметризация относительного сектора производится, фактически, в бозонных координатах, являющихся функциями исходных координат q_a и импульсов p_a.

В этой работе не представлены выражения суперзарядов в исходных переменных. Это легко получается обратными координатными преобразованиями в фазовом пространстве, но как использовать эти получаемые громоздкие выражения, не ясно в настоящее время. В связи с этим не найдено суперполевое описание полученных суперсимметричных систем.

Конечно, используемая в работе «несинхронная по всем исходным координатам q_a» суперсимметризация может быть применена и к 3-частичным системам Калоджеро других типов: рациональной, тригонометрической и гиперболической. Ситуация с общностью применения процедуры суперсимметризации для всех типов систем Калоджеро сходна $\mathcal{N}=2$ суперсимметричной модели, рассмотренной в [14] [1]. В [14] n-частичный гамильтониан имел структуру, аналогичную рассмотренной в этой работе, но его $\mathcal{N}=2$ суперсимметризация требовала увеличенного числа ($2n^2$) фермионов, в отличие от рассмотренных здесь моделей с их уменьшенным числом. Данная работа является одной из попыток нахождения наиболее подходящей процедуры суперсимметризации модели Калоджеро в эллиптическом случае. Ответ на это предположение даст рассмотрение суперсимметризаций эллиптических систем Калоджеро при разном числе суперсимметрий и с числом частиц, большим трех, изучение которых нами планируется в последующем.

Благодарности. Выражаю искреннюю благодарность Евгению Иванову и Сергею Кривоносу за полезные обсуждения и комментарии. Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 21-12-00129).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Calogero F.* Ground State of One-Dimensional $\mathcal{N}$-Body System // J. Math. Phys. 1969. V. 10. P. 2197; Solution of the One-Dimensional $\mathcal{N}$-Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials // J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419; Exactly Solvable One-Dimensional Many-Body Problems // Lett. Nuovo Cim. 1975. V. 13. P. 411.
2. *Olshanetsky M. A., Perelomov A. M.* Classical Integrable Finite Dimensional Systems Related to Lie Algebras // Phys. Rep. 1981. V. 71. P. 313; Quantum Integrable Systems Related to Lie Algebras // Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313.
3. *Polychronakos A. P.* Physics and Mathematics of Calogero Particles // J. Phys. A. 2006. P. 39. V. 12793; arXiv:hep-th/0607033.

[1] В работе [14] не обсуждалось применение полученной системы для описания $\mathcal{N}=2$ эллиптической системы Калоджеро, хотя это возможно в рамках рассмотренного там подхода.

4. *Arutyunov G.* Elements of Classical and Quantum Integrable Systems. Springer Nature Switzerland AG. 2019.
5. *Freedman D. Z., Mende P. F.* An Exactly Solvable $\mathcal{N}$-Particle System in Supersymmetric Quantum Mechanics // Nucl. Phys. B. 1990. V. 344. P. 317.
6. *Wyllard N.* (Super)conformal Many-Body Quantum Mechanics with Extended Supersymmetry // J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 2826; arXiv:hep-th/9910160.
7. *Bellucci S., Galajinsky A., Krivonos S.* New Many-Body Superconformal Models as Reductions of Simple Composite Systems // Phys. Rev. D. 2003. V. 68. P. 064010; arXiv:hep-th/0304087.
8. *Galajinsky A., Lechtenfeld O., Polovnikov K.* $\mathcal{N} = 4$ Mechanics, WDVV Equations and Roots // JHEP. 2009. V. 0903. P. 113; arXiv:0802.4386 [hep-th].
9. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Supersymmetric Calogero Models by Gauging // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 105015; arXiv:0812.4276 [hep-th].
10. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Superconformal Mechanics // J. Phys. A. 2012. V. 45. P. 173001; arXiv:1112.1947 [hep-th].
11. *Fedoruk S., Ivanov E., Lechtenfeld O.* Supersymmetric Hyperbolic Calogero–Sutherland Models by Gauging // Nucl. Phys. B. 2019. V. 944. P. 114633; arXiv:1902.08023 [hep-th].
12. *Krivonos S., Lechtenfeld O., Provorov A., Sutulin A.* Extended Supersymmetric Calogero Model // Phys. Lett. B. 2019. V. 791. P. 385; arXiv:1812.10168 [hep-th].
13. *Fedoruk S.* $\mathcal{N} = 2$ Supersymmetric Hyperbolic Calogero–Sutherland Model // Nucl. Phys. B. 2020. V. 953. P. 114977; arXiv:1910.07348 [hep-th].
14. *Krivonos S., Lechtenfeld O., Sutulin A.* New $\mathcal{N} = 2$ Superspace Calogero Models // JHEP. 2020. V. 05. P. 132; arXiv:1912.05989 [hep-th].
15. *Krivonos S., Lechtenfeld O.* $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric Calogero–Sutherland Models // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. P. 086010; arXiv:2002.03929 [hep-th].
16. *Fedoruk S.* $\mathcal{N} = 4$ Supersymmetric $U(2)$-Spin Hyperbolic Calogero–Sutherland Model // Nucl. Phys. B. 2020. V. 961. P. 115234; arXiv:2007.11424 [hep-th].
17. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. М.: Наука, 1967.

Получено 5 декабря 2022 г.