

## ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ МЕЖЪЯДЕРНОЙ ОСИ НА ВЕРОЯТНОСТИ РОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

*Р. В. Попов<sup>а, б, 1</sup>, В. М. Шабаетов<sup>а, б</sup>, И. А. Мальцев<sup>б</sup>,  
Д. А. Тельнов<sup>б</sup>, Н. К. Дулаев<sup>б</sup>, А. Д. Миронов<sup>б</sup>,  
А. М. Рыжков<sup>а, б</sup>*

<sup>а</sup> Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова  
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,  
Гатчина, Россия

<sup>б</sup> Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Разработан метод вычисления вероятностей рождения электрон-позитронных пар в столкновениях тяжелых ядер за рамками монополярного приближения с учетом эффектов вращения межъядерной оси. Учет эффектов вращения производился двумя способами: во вращающейся и инерциальной системах отсчета. Результаты расчетов для симметричных столкновений ядер урана показывают, что влияние вращения на значение вероятностей рождения пар является пренебрежимо малым для низкоэнергетических столкновений с малыми прицельными параметрами.

A method has been developed for calculating the electron–positron pair-creation probabilities in collisions of heavy nuclei beyond the monopole approximation, taking into account the effects of rotation of the internuclear axis. The effects of rotation were taken into account in two ways: in a rotating and an inertial frames of reference. The results of the calculations for symmetric collisions of uranium nuclei show that the effect of the rotational coupling on the pair-creation probabilities is negligible for low-energy collisions with small impact parameters.

PACS: 12.20.–m; 34.90.+q

### ВВЕДЕНИЕ

Наряду с постоянно развивающимися лазерными технологиями столкновения тяжелых ядер представляют собой инструмент, открывающий доступ к изучению процессов, протекающих в присутствии сильных электромагнитных полей. Одним из таких процессов является спонтанное рождение электрон-позитронных пар в сверхкритических кулоновских полях, также известное как распад электрически нейтрального вакуума. Впервые существование этого явления было независимо предсказано

---

<sup>1</sup>E-mail: r.v.popov@yandex.ru

в работах советских [1, 2] и немецких [3] ученых. Началом работы в этом направлении принято считать статью [4], в которой изучалось поведение энергий связанных состояний водородоподобных ионов в зависимости от заряда ядра  $Z$ . В этой работе было продемонстрировано, что для протяженных ядер при увеличении  $Z$  энергия основного состояния становится отрицательной и при некотором критическом значении  $Z_{\text{cr}}$  достигает границы отрицательно-энергетического континуума. Для  $1s$ -состояния  $Z_{\text{cr}} \approx 173$ . При превышении этого заряда  $1s$ -уровень погружается в отрицательно-энергетический континуум в виде резонанса. Если до погружения уровень был не занят, то он приносит с собой две вакансии или дырки. Изначально локализованные вблизи ядра эти дырки могут уйти на бесконечность, что проявляется как излучение позитронов. Более подробное описание этого явления можно найти в работах [5–18]. Ввиду отсутствия в природе ядер с настолько большими зарядами единственным доступным способом наблюдения такого процесса является столкновение двух ядер с суммарным зарядом, превышающим критическое значение. В этом случае спонтанное рождение пар может происходить, когда на достаточно малых межъядерных расстояниях наинизший незанятый квазимолекулярный уровень погрузится в нижний континуум. Однако задача наблюдения пар, рожденных в столкновениях за счет спонтанного механизма, сильно усложняется активным динамическим рождением, дающим основной вклад в рассматриваемый процесс.

Спонтанное рождение электрон-позитронных пар продолжительное время являлось объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований [19–29]. Однако поиски свидетельств существования этого процесса не увенчались успехом. Интерес к этой области возобновился в связи со строительством новых экспериментальных комплексов в Германии (GSI/FAIR) [30, 31], Китае (HIAF) [32] и России (NICA) [33]. Новые исследования посвящены как статическим, так и динамическим аспектам сверхкритического перехода. Исследовались параметры сверхкритических резонансов в монополярном приближении [34, 35] и с использованием двухцентрового потенциала [36–38]. В ряде работ изучалась энергия вакуумной поляризации для сверхкритических кулоновских полей (см., например, [39–41]). Были выполнены численные расчеты вероятностей рождения электрон-позитронных пар и энергетических спектров позитронов в низкоэнергетических столкновениях тяжелых ядер как в монополярном приближении [42–44], так и за его рамками [45–47]. Первые численные расчеты угловых распределений вылетающих позитронов можно найти в работе [48]. Ранее угловые спектры позитронов были рассмотрены методом мнимого времени в работе [26]. Аналитический анализ неустойчивости электрон-позитронного вакуума в рамках релятивистского квазиклассического подхода рассмотрен в работе [49].

Не так давно нашей научной группой был предложен способ наблюдения перехода в сверхкритический режим, где возможно спонтанное рождение пар [50, 51]. В его основе лежит исследование столкновений ядер с фиксированным расстоянием наибольшего сближения  $R_{\text{min}}$  и различными энергиями. В качестве второго параметра для задания траекторий удобно использовать отношение  $\eta = E/E_0$ , где  $E$  — энергия столкновения и  $E_0$  — энергия лобового столкновения с таким же значением  $R_{\text{min}}$ . Посредством расчетов, выполненных в рамках монополярного приближения, было обнаружено, что поведение вероятностей рождения пар и позитронных спектров в зависимости от  $\eta$  качественно меняется, когда параметры столкновений соответствуют достаточно глубокому проникновению в сверхкритическую область. Эти ре-

зультаты были подтверждены независимым расчетом в работе [52]. В нашей недавней статье [53] мы расширили технику вычислений за рамки монополярного приближения и повторили ряд расчетов, выполненных ранее в работах [50, 51]. Результаты вычислений показали, что все свидетельства перехода к сверхкритическому режиму сохраняются и при использовании полного двухцентрового потенциала, а проявление некоторых из них даже усиливается.

В работе [53], как и ранее в [45, 46], расчеты выполнялись в системе отсчета, в которой ось  $z$  направлена вдоль межъядерной оси и вращается вместе с ней. При переходе в такую систему отсчета в гамильтониане возникает дополнительный член  $-\hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , где  $\hat{\mathbf{J}}$  — оператор полного углового момента электрона, а  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости вращения межъядерной оси. Этот член связывает электронные состояния с различными проекциями углового момента на ось  $z$ . Его учет приводит к значительному увеличению сложности вычислений. В связи с этим в существующих по настоящее время расчетах, связанных с рождением электрон-позитронных пар в ион-атомных столкновениях, этот член отбрасывался, так как предполагалось, что он не может сильно повлиять на результат [54–56]. В настоящей работе мы разработали два метода, позволяющих учесть эффект вращения межъядерной оси, и оценили количественно степень его влияния на вероятности рождения пар в столкновениях ядер с одинаковыми значениями заряда и массы.

В настоящей работе используется релятивистская система единиц ( $\hbar = c = 1$ ).

## 1. ТЕОРИЯ

Для исследования процесса рождения электрон-позитронных пар в сильных внешних электромагнитных полях мы используем формализм квантовой электродинамики с нестабильным вакуумом, разработанный в [57] (см. также [20]). В рамках данного подхода интересующие нас величины выражаются через одночастичные амплитуды перехода электрона из отрицательно-энергетического континуума в состояния дискретного спектра и положительно-энергетический континуум или наоборот. Для нахождения этих амплитуд необходимо решить нестационарное уравнение Дирака

$$i\partial_t\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}(t)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1)$$

Мы делаем это численно с использованием конечного базисного набора. Зависящая от времени волновая функция электрона приближенно записывается в виде

$$\psi_i(\mathbf{r}, t) = \sum_{\kappa\mu} \sum_{j=1}^{2n} a_{ji}^{\kappa\mu}(t) u_j^{\kappa\mu}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $\kappa$  — релятивистское угловое квантовое число;  $\mu$  — проекция полного углового момента электрона на ось  $z$ , индекс  $i$  используется для обозначения определенных начальных условий. Базисные функции  $u_j^{\kappa\mu}(\mathbf{r})$  имеют вид биспиноров, у которых радиальная часть описывается  $B$ -сплайнами  $B_j(r)$  [58] в рамках метода дуального кинетического баланса [59]. Угловая же часть представлена шаровыми спинорами  $\Omega_{\kappa\mu}(\hat{\mathbf{r}})$  ( $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ ). Для каждой пары  $\kappa, \mu$  базисный набор состоит из двух поднаборов

с функциями

$$u_j^{\kappa\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} B_j(r)\Omega_{\kappa\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \\ \frac{1}{2m_e} \left( \frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) B_j(r)\Omega_{-\kappa\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \quad (3)$$

для  $1 \leq j \leq n$  и

$$u_j^{\kappa\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{1}{2m_e} \left( \frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) B_{j-n}(r)\Omega_{\kappa\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \\ B_{j-n}(r)\Omega_{-\kappa\mu}(\hat{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \quad (4)$$

для  $n < j \leq 2n$ , где  $m_e$  — масса электрона.

При использовании разложения (2) дифференциальное уравнение в частных производных (1) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на коэффициенты разложения  $a_j^{\kappa\mu}(t)$ . Перенумеровав все базисные функции, перейдем для удобства от тройки индексов  $\kappa, \mu, j$  к одному новому индексу  $l$ , т. е. введем  $u_l(\mathbf{r}) \equiv u_j^{\kappa\mu}(\mathbf{r})$ ,  $l = 1, \dots, N$ , где  $N$  — полное число базисных функций. Тогда нестационарное уравнение Дирака можно представить в матричной форме

$$iS \frac{\partial \mathbf{a}_i(t)}{\partial t} = H(t)\mathbf{a}_i(t), \quad (5)$$

где  $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, \dots, a_{Ni})$  — набор коэффициентов разложения;  $S_{ij} = \langle u_i | u_j \rangle$  — матрица перекрытия базисных функций;  $H_{ij}(t) = \langle u_i | \hat{H}(t) | u_j \rangle$  — матрица гамильтониана. Начальные условия для системы (5) задаются следующим образом:

$$\mathbf{a}_i(t_{\text{in}}) = \mathbf{c}_i, \quad (6)$$

где  $\mathbf{c}_i$  является  $i$ -м решением обобщенной задачи на собственные значения матрицы  $H(t_{\text{in}})$ , соответствующим собственному числу  $\epsilon_i$ , т. е.

$$H(t_{\text{in}})\mathbf{c}_i = \epsilon_i S \mathbf{c}_i. \quad (7)$$

Решив систему ОДУ (5) с начальными условиями (6) методом Кранка–Николсон [43, 60], получим набор коэффициентов разложения  $\mathbf{a}_i(t)$  в момент времени  $t_{\text{out}}$ . После этого искомые одночастичные амплитуды переходов можно вычислить по формуле

$$A_{fi} = \mathbf{c}_f^\dagger S \mathbf{a}_i(t_{\text{out}}). \quad (8)$$

И наконец, среднее число рожденных позитронов в состоянии  $k$  определяется как

$$n_k = \sum_{\epsilon_i > -1} |A_{ki}|^2. \quad (9)$$

Выше мы описали общую схему расчета. Остановимся теперь подробнее на способах учета эффектов вращения межъядерной оси. Обычно за рамками монополярного приближения вычисления производятся в системе отсчета, ось  $z$  которой направлена

вдоль межъядерной оси и вращается вместе с ней. Начало отсчета при этом располагается в центре масс. В такой системе отсчета электронный гамильтониан с хорошей точностью имеет вид [61]

$$\hat{H}(t) = \hat{h}^{\text{free}} + V_{\text{TC}}(\mathbf{r}, t) - \hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (10)$$

$$V_{\text{TC}}(\mathbf{r}, t) = V_A(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_A(t)|) + V_B(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_B(t)|), \quad (11)$$

где  $\hat{h}^{\text{free}}$  — гамильтониан Дирака для свободной частицы;  $V_{\text{TC}}$  — двухцентровый потенциал ядер, движущихся по траекториям  $\mathbf{R}_{A/B}(t)$ ;  $\hat{\mathbf{J}}$  — оператор полного электронного углового момента;  $\boldsymbol{\omega}$  — вектор угловой скорости вращения межъядерной оси. При рассмотрении во вращающейся системе отсчета все траектории  $\mathbf{R}_{A/B}(t)$  аналогичны траекториям лобовых столкновений, но со своей зависимостью  $R_{A/B}(t)$ . Первые два слагаемых в (10) обладают аксиальной симметрией и являются диагональными по  $\mu$ . Функции с разными проекциями полного момента замещаются только последним членом  $-\hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Учет этого члена существенно усложняет численные расчеты из-за необходимости значительного увеличения базисного набора, который в таком случае должен содержать функции с разными значениями  $\mu$ . В то же время утверждается, что влияние этого члена на рождение пар мало по сравнению с потенциалом ядер (см., например, [54–56]). Поэтому он зачастую не рассматривается.

Будем считать, что ядра сталкиваются в плоскости  $xz$ . Тогда вектор  $\boldsymbol{\omega}$  будет направлен вдоль оси  $y$ , т. е.  $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega, 0)$ . С учетом этого вращательный член  $-\hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$  можно представить в виде

$$-\hat{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} = -\hat{J}_y \omega = \frac{i\omega}{2} (\hat{J}_+ - \hat{J}_-), \quad (12)$$

где  $\hat{J}_+/\hat{J}_-$  — операторы повышения/понижения проекции углового момента. Благодаря этому матричные элементы вращательного члена в гамильтониане приобретают довольно простую форму. Они оказываются диагональными по  $\kappa$ , но связывают базисные функции с разностью проекций полного углового момента  $\Delta\mu = \pm 1$ . Потенциал  $V_{\text{TC}}$  связывает функции с разными  $\kappa$ , но диагонален по  $\mu$ . Оператор  $\hat{h}^{\text{free}}$  диагонален как по  $\kappa$ , так и по  $\mu$ . Радиальные интегралы, в свою очередь, отличны от нуля только для небольшого числа пар  $B$ -сплайнов с близкими номерами, независимо от  $\kappa$  и  $\mu$ . Вследствие этого полная матрица гамильтониана  $H(t)$  получается разреженной. Используя численные алгоритмы, разработанные для работы с разреженными матрицами, можно ускорить решение системы уравнений (5).

С другой стороны, вращение межъядерной оси можно учесть и в инерциальной системе, начало отсчета которой совпадает с центром масс. При этом в гамильтониане появляется явная зависимость от угла между межъядерной осью и осью  $z$ . В такой системе отсчета электронный гамильтониан имеет простой вид

$$\hat{H}(t) = \hat{h}^{\text{free}} + V_{\text{TC}}(\mathbf{r}, t). \quad (13)$$

Здесь потенциал  $V_{\text{TC}}$  определяется тем же выражением (11), но теперь с гиперболическими траекториями  $\mathbf{R}_{A/B}(t)$ . Благодаря симметрии  $V_{\text{TC}}$  относительно вращений вокруг межъядерной оси, его можно представить в виде следующего разложения по

сферическим гармоникам  $Y_{LM}$ :

$$V_{TC}(\mathbf{r}, t) = \sum_{L=0}^{\infty} \sum_{M=-L}^L \sum_{\alpha=A,B} V_L^{\alpha}(r, R_{\alpha}(t)) Y_{LM}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{R}}_{\alpha}(t)). \quad (14)$$

В этом разложении коэффициенты  $V_L^{\alpha}(r, R_{\alpha}(t))$  зависят только от  $L$  и модулей векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{R}_{\alpha}(t)$ . При этом вся зависимость от угла поворота межъядерной оси содержится в последнем множителе  $Y_{LM}^*(\hat{\mathbf{R}}_{\alpha}(t))$ . В базисе (3), (4) все угловые интегралы, как и прежде, берутся аналитически. Так как разложение (14) содержит сферические гармоники со всеми проекциями  $M$ , потенциал  $V_{TC}$  будет связывать базисные функции как с разными  $\kappa$ , так и с разными  $\mu$ , уменьшая разреженность матрицы  $H(t)$  по сравнению с предыдущим методом.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Следуя описанной выше вычислительной технике, мы произвели расчеты вероятности рождения электрон-позитронных пар с захватом электрона в связанное состояние ( $P_b$ ) и полной вероятности рождения пар ( $P_t$ ) в симметричных столкновениях голых ядер урана. Расчеты выполнялись как во вращающейся системе отсчета с учетом члена  $-\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$  и без него, так и в инерциальной. Во всех случаях базисный набор включал в себя пространственно-четные функции с  $\kappa = -1, 2, -3$ . Количество же проекций углового момента  $\mu$ , представленных в базисе, зависело от используемого метода. При расчетах во вращающейся системе отсчета в приближении, не учитывающем вращение межъядерной оси, вычисления производились отдельно для  $\mu = 1/2$  и  $\mu = 3/2$ , затем полученные значения складывались и умножались на два. Как и в работе [46], вклад проекции  $\mu = 3/2$  оказался на несколько порядков меньше, чем для  $\mu = 1/2$ . Другие проекции совсем не оказывают влияния на итоговые значения вероятностей в пределах трех значащих цифр. Расчеты с учетом вращения межъядерной оси в той же системе отсчета выполнялись в двух базисах: с  $|\mu| \leq 3/2$  и  $|\mu| \leq 5/2$ , т. е. для всех возможных проекций данного набора  $\kappa$ . Расчеты в инерциальной системе отсчета производились в базисе с  $|\mu| \leq 5/2$ . Для описания радиальной части волновых функций использовались  $B$ -сплайны девятого порядка, построенные на сетке из 600 узлов. Узлы сетки были распределены степенным образом по промежутку от 0 до 205,5 релятивистских единиц. Результаты расчетов для  $R_{\min} = 17,5, 25$  фм и  $\eta = 1, 5, 10, 20$  представлены в таблице. Лобовым столкновениям ( $\eta = 1$ ) с минимальными межъядерными расстояниями  $R_{\min} = 17,5$  и 25 фм соответствуют энергии  $E_0 \approx 5,9$  и 4,1 МэВ/нуклон. Энергии столкновений с конечными прицельными параметрами при фиксированном  $R_{\min}$  определяются по формуле  $E = \eta E_0$ . Из таблицы видно, что оба метода учета вращения межъядерной оси дают идентичные значения в базисе с  $|\mu| \leq 5/2$  для всех рассмотренных параметров столкновений. Небольшие отличия в последнем знаке результатов, полученных во вращающейся системе отсчета в базисах с  $|\mu| \leq 5/2$  и  $|\mu| \leq 3/2$ , наблюдаются только для  $\eta = 20$ . Таким образом, видно преимущество расчетов во вращающейся системе отсчета по сравнению с расчетами в инерциальной системе отсчета. Помимо упомянутой выше разницы в степени разреженности матриц, для расчетов во вращающейся системе достаточно использовать

$R_{\min}$ , фм	Вероятность рождения пар	Метод	$\eta = E/E_0$			
			1	5	10	20
17,5	$P_b$	A: $ \mu  \leq 3/2$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$7,95 \cdot 10^{-3}$	$7,07 \cdot 10^{-3}$	$5,94 \cdot 10^{-3}$
		B1: $ \mu  \leq 3/2$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$7,96 \cdot 10^{-3}$	$7,09 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-3}$
		B1: все $\mu$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$7,96 \cdot 10^{-3}$	$7,09 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-3}$
		B2: все $\mu$	$1,03 \cdot 10^{-2}$	$7,96 \cdot 10^{-3}$	$7,09 \cdot 10^{-3}$	$5,96 \cdot 10^{-3}$
17,5	$P_t$	A: $ \mu  \leq 3/2$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,18 \cdot 10^{-2}$	$1,44 \cdot 10^{-2}$
		B1: $ \mu  \leq 3/2$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,46 \cdot 10^{-2}$
		B1: все $\mu$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
		B2: все $\mu$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	$1,05 \cdot 10^{-2}$	$1,19 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
25	$P_b$	A: $ \mu  \leq 3/2$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$5,15 \cdot 10^{-3}$	$5,25 \cdot 10^{-3}$	$4,97 \cdot 10^{-3}$
		B1: $ \mu  \leq 3/2$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$
		B1: все $\mu$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$
		B2: все $\mu$	$4,19 \cdot 10^{-3}$	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$5,27 \cdot 10^{-3}$	$5,00 \cdot 10^{-3}$
25	$P_t$	A: $ \mu  \leq 3/2$	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$5,88 \cdot 10^{-3}$	$7,11 \cdot 10^{-3}$	$8,96 \cdot 10^{-3}$
		B1: $ \mu  \leq 3/2$	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$5,91 \cdot 10^{-3}$	$7,18 \cdot 10^{-3}$	$9,15 \cdot 10^{-3}$
		B1: все $\mu$	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$5,91 \cdot 10^{-3}$	$7,18 \cdot 10^{-3}$	$9,17 \cdot 10^{-3}$
		B2: все $\mu$	$4,20 \cdot 10^{-3}$	$5,91 \cdot 10^{-3}$	$7,18 \cdot 10^{-3}$	$9,17 \cdot 10^{-3}$

*Примечание.* Вероятности рождения электрон-позитронных пар в столкновениях голых ядер, полученные в базе с  $\kappa = -1, 2, -3$ .  $P_b$  — вероятность рождения пар с захватом электрона в связанное состояние,  $P_t$  — полная вероятность рождения пар, A — расчет без учета вращения межъядерной оси, B — расчеты с учетом вращения межъядерной оси: B1 — во вращающейся системе отсчета, B2 — в инерциальной системе отсчета.

не все возможные проекции углового момента  $\mu$ , а только функции с  $|\mu| \leq 3/2$ . Это означает возможность использования матриц  $S$  и  $H(t)$  в уравнении (5) меньшего размера, что, в свою очередь, в несколько раз уменьшает время расчетов.

Принимая во внимание, что прицельный параметр  $b$  выражается через  $R_{\min}$  и  $\eta$  как

$$b = R_{\min} \sqrt{1 - \frac{1}{\eta}}, \quad (15)$$

из таблицы явно следует, что влияние эффектов вращения на вероятность рождения пар является пренебрежимо малым для низкоэнергетических столкновений с малыми прицельными параметрами. Именно такие столкновения рассматриваются в контексте обнаружения признаков спонтанного рождения пар. Эффекты вращения практически не проявляются вплоть до  $\eta = 5$ . Их учет приводит к некоторому росту получаемых вероятностей рождения пар. При этом изменение полной вероятности оказывается существенно большим по сравнению с изменением вероятности рождения пар с захватом электрона в связанное состояние. Влияние вращения ожидаемо возрастает по мере роста прицельного параметра и энергии столкновения.

Для проверки полученных результатов мы провели несколько расчетов другим методом, который использует естественное для двухатомных молекул двухцентровое описание в вытянутых сфероидальных координатах. Операторы и волновые функции подвергались пространственной дискретизации с помощью обобщенного псевдоспектрального метода, в котором точки коллокации определяются корнями ортогональных

полиномов. Использовались абсциссы Гаусса для представления псевдоугловой координаты (20 точек коллокации) и абсциссы Гаусса–Радау для представления псевдо-радиальной координаты (320 точек коллокации). Данные этих расчетов находятся в хорошем согласии с результатами, представленными выше, и подтверждают вывод о незначительном влиянии вращения межъядерной оси на полную вероятность рождения электрон-позитронных пар при максимальном сближении ядер 17,5 фм и энергиях столкновения 6–8 МэВ/нуклон ( $1 \leq \eta \lesssim 1,3$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработаны два метода вычисления вероятностей рождения электрон-позитронных пар в столкновениях тяжелых ядер за рамками монопольного приближения с учетом вращения межъядерной оси. С их помощью были произведены расчеты вероятностей рождения пар в симметричных столкновениях голых ядер урана. Результаты расчетов показывают, что влияние вращения межъядерной оси является пренебрежимо малым для низкоэнергетических столкновений с небольшими прицельными параметрами.

**Финансирование.** Одноцентровые расчеты с использованием мультипольного разложения потенциала ядер были выполнены при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «Базис». Расчеты в вытянутых сфероидальных координатах с применением обобщенного псевдоспектрального метода производились при поддержке Российского научного фонда (грант № 22-62-00004).

**Конфликт интересов.** Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. // ЖЭТФ. 1969. Т. 57. С. 654.
2. Герштейн С. С., Зельдович Я. Б. // Lett. Nuovo Cim. 1969. V. 1. P. 835.
3. Pieper W., Greiner W. // Z. Phys. 1969. V. 218. P. 327.
4. Poteranchuk I., Smorodinsky J. // J. Phys. USSR. 1945. V. 9. P. 97.
5. Попов В. С. // Письма ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 254.
6. Попов В. С. // ЯФ. 1970. Т. 12. С. 429.
7. Попов В. С. // ЖЭТФ. 1970. Т. 59. С. 965.
8. Попов В. С. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. С. 1228.
9. Зельдович Я. Б., Попов В. С. // УФН. 1971. Т. 105. С. 403.
10. Müller B., Peitz H., Rafelski J., Greiner W. // Phys. Rev. Lett. 1972. V. 28. P. 1235.
11. Müller B., Rafelski J., Greiner W. // Z. Phys. 1972. V. 257. P. 62.
12. Müller B., Rafelski J., Greiner W. // Ibid. P. 183.
13. Мур В. Д., Попов В. С. // ТМФ. 1976. Т. 27. С. 204.
14. Попов В. С., Елецкий В. Л., Мур В. Д. // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. С. 856.
15. Müller B. // Ann. Rev. Nucl. Sci. 1976. V. 26. P. 351.
16. Reinhardt J., Greiner W. // Rep. Prog. Phys. 1977. V. 40. P. 219.
17. Soff G., Reinhardt J., Müller B., Greiner W. // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 592.

18. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях. М.: Наука, 1978.
19. Rafelski J., Fulcher L. P., Klein A. // Phys. Rep. 1978. V. 38C. P. 227.
20. Greiner W., Müller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
21. Müller-Nehler U., Soff G. // Phys. Rep. 1994. V. 246. P. 101.
22. Reinhardt J., Greiner W. Supercritical Fields and the Decay of the Vacuum // Proc. of the Memorial Symp. for Gerhard Soff / Ed. by W. Greiner, J. Reinhardt. Budapest: EP Systema, 2005. P. 181–192.
23. Rafelski J., Kirsch J., Müller B., Reinhardt J., Greiner W. // New Horizons in Fundamental Physics / Ed. by S. Schramm, M. Schäfer. FIAS Interdisciplinary Science Ser. Springer, 2016. P. 211–251; [https://doi.org/10.1007/978-3-319-44165-8\\_17](https://doi.org/10.1007/978-3-319-44165-8_17).
24. Понов В. С. // ЖЭТФ. 1973. Т. 65. С. 35.
25. Peitz H., Müller B., Rafelski J., Greiner W. // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 8. P. 37.
26. Понов В. С., Воскресенский Д. Н., Елецкий В. Л., Мур В. Д. // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. С. 431.
27. Smith K., Peitz H., Müller B., Greiner W. // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32. P. 554.
28. Reinhardt J., Müller B., Greiner W. // Phys. Rev. A. 1981. V. 24. P. 103.
29. Müller U., de Reus T., Reinhardt J., Müller B., Greiner W., Soff G. // Phys. Rev. A. 1988. V. 37. P. 1449.
30. Gumberidze A., Stöhlker Th., Beyer H. F., Bosch F., Brauning-Demian A., Hagmann S., Kozhuharov C., Kuhl Th., Mann R., Indelicato P., Quint W., Schuch R., Warczak A. // Nucl. Instr. Meth. B. 2009. V. 267. P. 248.
31. Lestinsky M. et al. // Eur. Phys. J. Special Topics. 2016. V. 225. P. 797.
32. Ma X., Wen W. Q., Zhang S. F., Yu D. Y., Cheng R., Yang J., Huang Z. K., Wang H. B., Zhu X. L., Cai X., Zhao Y. T., Mao L. J., Yang J. C., Zhou X. H., Xu H. S., Yuan Y. J., Xia J. W., Zhao H. W., Xiao G. Q., Zhan W. L. // Nucl. Instr. Meth. B. 2017. V. 408. P. 169.
33. Ter-Akopian G. M., Greiner W., Meshkov I. N., Oganessian Y. T., Reinhardt J., Trubnikov G. V. // Intern. J. Mod. Phys. E. 2015. V. 24. P. 1550016.
34. Ackad E., Horbatsch M. // Phys. Rev. A. 2007. V. 75. P. 022508.
35. Godunov S. I., Machet B., Vysotsky M. I. // Eur. Phys. J. C. 2017. V. 77. P. 782.
36. Ackad E., Horbatsch M. // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. P. 022503.
37. Marsman A., Horbatsch M. // Phys. Rev. A. 2011. V. 84. P. 032517.
38. Maltsev I. A., Shabaev V. M., Zaytsev V. A., Popov R. V., Tumakov D. A. // Opt. Spectr. 2020. V. 128. P. 1100.
39. Grashin P., Sveshnikov K. // Phys. Rev. D. 2022. V. 106. P. 013003.
40. Krasnov A., Sveshnikov K. // Mod. Phys. Lett. A. 2022. V. 37. P. 2250136.
41. Грашин П. А., Свешников К. А. // Письма ЭЧАЯ. 2024. Т. 21. С. 95.
42. Ackad E., Horbatsch M. // Phys. Rev. A. 2008. V. 78. P. 062711.
43. Maltsev I. A., Shabaev V. M., Tupitsyn I. I., Bondarev A. I., Kozhedub Y. S., Plunien G., Stöhlker Th. // Phys. Rev. A. 2015. V. 91. P. 032708.
44. Bondarev A. I., Tupitsyn I. I., Maltsev I. A., Kozhedub Y. S., Plunien G. // Eur. Phys. J. D. 2015. V. 69. P. 110.
45. Maltsev I. A., Shabaev V. M., Tupitsyn I. I., Kozhedub Y. S., Plunien G., Stöhlker Th. // Nucl. Instr. Meth. B. 2017. V. 408. P. 97.
46. Maltsev I. A., Shabaev V. M., Popov R. V., Kozhedub Y. S., Plunien G., Ma X., Stöhlker Th. // Phys. Rev. A. 2018. V. 98. P. 062709.
47. Popov R. V., Bondarev A. I., Kozhedub Y. S., Maltsev I. A., Shabaev V. M., Tupitsyn I. I., Ma X., Plunien G., Stöhlker Th. // Eur. Phys. J. D. 2018. V. 72. P. 115.

48. *Dulaev N.K., Telnov D.A., Shabaev V.M., Kozhedub Y.S., Maltsev I.A., Popov R.V., Tupitsyn I.I.* // Phys. Rev. D. 2024. V. 109. P. 036008.
49. *Voskresensky D.N.* // Universe. 2021. V. 7. P. 104.
50. *Maltsev I.A., Shabaev V.M., Popov R.V., Kozhedub Y.S., Plunien G., Ma X., Stöhlker Th., Tumakov D.A.* // Phys. Rev. Lett. 2019. V. 123. P. 113401.
51. *Popov R.V., Shabaev V.M., Telnov D.A., Tupitsyn I.I., Maltsev I.A., Kozhedub Y.S., Bondarev A.I., Kozin N.V., Ma X., Plunien G., Stöhlker Th., Tumakov D.A., Zaytsev V.A.* // Phys. Rev. D. 2020. V. 102. P. 076005.
52. *de Reus T.* arXiv:2201.07324.
53. *Popov R.V., Shabaev V.M., Maltsev I.A., Telnov D.A., Dulaev N.K., Tumakov D.A.* // Phys. Rev. D. 2023. V. 107. P. 116014.
54. *Betz W., Soff G., Müller B., Greiner W.* // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. P. 1046.
55. *Soff G., Greiner W., Betz W., Müller B.* // Phys. Rev. A. 1979. V. 20. P. 169.
56. *Reinhardt J., Soff G., Müller B., Greiner W.* // Prog. Part. Nucl. Phys. 1980. V. 4. P. 547.
57. *Гитман Д. М., Фрадкин Е. С., Шварцман С. М.* Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом. М.: Наука, 1991.
58. *de Boor C.* A Practical Guide to Splines. New York: Springer-Verlag, 2001. V. 2.
59. *Shabaev V.M., Tupitsyn I.I., Yerokhin V.A., Plunien G., Soff G.* // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. P. 130405.
60. *Crank J., Nicolson P.* // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1947. V. 43. P. 50.
61. *Müller B., Greiner W.* // Z. Naturforsch. A. 1976. V. 31. P. 1.

Получено 17 сентября 2024 г.