

УДК 621.372.8

## К ЗАДАЧЕ О ВОЗБУЖДЕНИИ РЕЗОНАТОРА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ЗАРЯЖЕННЫХ СГУСТКОВ

*В. Г. Кочарян*

Ереванский физический институт, Ереван, Армения

С использованием метода собственных функций и метода конечных элементов предложен единый метод описания вынужденных электромагнитных полей в регулярном резонаторе с произвольным поперечным сечением, возбуждаемых сгустком и последовательностью сгустков различных форм и с различным распределением заряда. Приведены результаты расчета возбуждаемых электромагнитных полей для различных конфигураций бицилиндрических и пентацилиндрических резонаторов.

The description method of stimulated electromagnetic field in the regular resonator with the arbitrary cross section, generated by sequence of bunches of various shapes and with a various charge distribution, is offered using the eigenfunction method and the finite element method. The calculation results in excited electromagnetic fields for various configurations of bicylindrical and pentacylindrical resonators are given.

### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] изложены основные принципы расчета возбуждения вынужденных электромагнитных полей в простом цилиндрическом резонаторе последовательностью заряженных сгустков и проведена оптимизация по энергообмену двухпучковой схемы с совмещенными траекториями ведущих и ведомых сгустков. Метод расчета и полученные результаты, не умаляя общности, могут быть распространены на случай регулярных резонаторов со сложным поперечным сечением для схем ускорения заряженных частиц с пространственно-разнесенными траекториями ведущих и ускоряемых сгустков.

### 1. РАСЧЕТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Если боковые стенки, имеющие координаты  $z = 0$  и  $z = a$ , пересекала последовательность из  $N$  одинаковых сгустков с произвольной площадью поперечного сечения  $S$ , с однородно распределенным зарядом  $q$  по длине  $L$  и движущаяся вдоль оси  $z$  со скоростью  $v$ , то для возбужденной продольной компоненты электрического поля, в случае

идеального резонатора, имеем

$$E_z(t, x, y, z) = -\frac{4\pi qv}{\varepsilon Sa} \sum_{n,m,l} \frac{\lambda_{lm}^2}{\omega_{lmn}} \varepsilon_n \frac{\varphi_{lm}(x, y) \int \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'}{(\lambda_{lm}^2 + (1 - \beta^2 \varepsilon) \chi_n^2)} \times$$

$$\times \left\{ \left[ \cos(\pi n) \sin \left( \omega_{lmn} \left( t - \frac{(N-1)d + 2a + L}{2v} \right) \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sin \left( \omega_{lmn} \left( t - \frac{(N-1)d + L}{2v} \right) \right) \right] \right\}, \quad (1)$$

$$\frac{\sin \left( \frac{\omega_{lmn} L}{2v} \right) \sin \left( \frac{\omega_{lmn} Nd}{2v} \right)}{\frac{\omega_{lmn} L}{2v} \sin \left( \frac{\omega_{lmn} d}{2v} \right)} \cos(\chi_n z),$$

где  $d$  — расстояние между сгустками, задающее период следования последовательности;  $\psi_{lmn}(x, y, z) = \varepsilon_n \frac{\varphi_{lm}(x, y)}{\sqrt{a}} \cos(\chi_n z)$  — собственные функции резонатора;  $\varepsilon_n = 2$  при  $n \neq 0$ ,  $\varepsilon_n = 1$  при  $n = 0$ ,  $\omega_{lmn}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon} (\lambda_{lm}^2 + \chi_n^2)$  — собственные частоты резонатора;  $\chi_n = \frac{\pi n}{a}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$  — индекс моды поля, определяющий число вариаций вдоль оси  $0z$ , а  $\lambda_{lm}$  — собственные поперечные волновые значения.

В случае гауссовского распределения заряда вдоль длины сгустка продольная компонента возбужденного поля примет вид

$$E_z(t, x, y, z) = -\frac{4\pi qv}{\varepsilon a S} \sum_{n,m,l} \varepsilon_n \frac{\lambda_{lm}^2 \varphi_{lm}(x, y) \cos \left( \frac{\pi n}{a} z \right) \int \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'}{(\lambda_{lm}^2 + (1 - \beta^2 \varepsilon) \chi_n^2) \omega_{lmn}} \times$$

$$\times \left[ \cos(\pi n) \sin \left( \omega_{lmn} \left( t - \frac{(N-1)d + 2a}{2v} \right) \right) - \sin \left( \omega_{lmn} \left( t - \frac{(N-1)d}{2v} \right) \right) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\sin \left( \frac{\omega_{ml} d N}{2v} \right)}{\sin \left( \frac{\omega_{ml} d}{2v} \right)} \exp \left( \frac{\omega_{lmn}^2 l^2}{4v^2} \right),$$

где  $l^2$  имеет смысл эффективной полуширины гауссовского распределения. Для однородных мод при выполнении условий

$$\omega_{ml0} = \frac{2\pi kv}{L}, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3)$$

частота  $f_{ml0} = \frac{\omega_{ml0}}{2\pi}$  свободных колебаний резонатора оказывается равной  $k$ -й гармонике частоты следования сгустков  $f_{ml0} = v/d$  и на резонансной моде, индексы которой удовлетворяют условию (3), напряженность поля резко возрастает и для случая, когда все  $N$

сгустков пересекли резонатор, оказывается равной  $E_{z,m,l}(x, y, z, t) = NE_{z,m,l}^0(x, y, z, t)$ , где  $E_{z,m,l}^0(x, y, z, t)$  — поле излучения одного сгустка. Таким образом, при выполнении условия (3) на соответствующей собственной частоте резонатора выполняется резонансное условие.

Как следует из разложений (1) и (2), вклад отдельных мод дается коэффициентом разложения как

$$\varepsilon_n \frac{\lambda_{lm}^2 \varphi_{lm}(x, y) \cos((\pi n)/a) z \int \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'}{(\lambda_{lm}^2 + (1 - \beta^2 \varepsilon) \chi_n^2) \omega_{lmn}}, \quad (4)$$

где интегрирование собственных функций производится по поперечному сечению сгустка. Поэтому величина возбуждаемого поля, даже при выполнении резонансного условия, зависит от области пролета возбуждающего пучка, т. е. там, где значение интеграла по поперечному сечению сгустка отлично от нуля, для соответствующей моды. При выполнении условий для резонансного отбора энергии от пучка [2] потери отдельных сгустков оказываются пропорциональны квадрату данного интеграла, т. е.

$$\varphi_{\text{ex}} = \int_{\frac{a+L}{v}}^{\frac{d+a+L}{v}} \int_V j(x', y', z') E_z(x', y', z', t) dx' dy' dz' dt \sim \left( \int_{S_{\text{ex}}} \varphi_{lm}(x', y') dx' dy' \right)^2. \quad (5)$$

Отбор энергии от поля ускоряемым сгустком пропорционален

$$\varphi_{\text{acc}} \sim \int_{S_{\text{acc}}} \varphi_{lm}(x'', y'') dx'' dy'' \int_{S_{\text{ex}}} \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'. \quad (6)$$

В (6) интегрирование ведется по областям пролета ведущих и ведомого сгустка.

Из вышесказанного следует, что при выборе геометрии резонатора для двухпучковой схемы ускорения заряженных частиц с пространственно-разнесенными траекториями ведущих и ускоряемых сгустков важным параметром оказываются собственные моды резонатора, имеющие различные значения экстремумов продольной составляющей электрического поля в различных областях резонатора. Такое распределение продольной составляющей поля характерно для некоторых мод бицилиндрического резонатора [3] с различными радиусами цилиндрических областей, а также для резонатора, составленного из большего числа цилиндров, такого как пентацилиндрический. Оценку  $\eta$ -эффективности двухпучковой схемы ускорения для выбранного резонатора можно сделать следующим образом, рассматривая отношение энергии потерь ведущего и ускоряемого сгустков при прочих равных условиях, так как равенство зарядов и размеров сгустков

$$\eta = \frac{\varphi_{\text{acc}}}{\varphi_{\text{ex}}} \sim \frac{\int_{S_{\text{acc}}} \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'}{\int_{S_{\text{ex}}} \varphi_{lm}(x', y') dx' dy'}, \quad (7)$$

где  $\varphi_{\text{ex}}$  — энергия потерь ведущего сгустка,  $\varphi_{\text{acc}}$  — получаемая энергия ведомого сгустка. Отношение (7) показывает на необходимое число ведущих сгустков, возбуждающих поле, способное унести один ускоряемый сгусток. Отсюда также следует, что для возбуждения необходимого поля ведущие сгустки могут иметь в  $\eta$  раз меньшую энергию, чем в случае двухпучковой схемы ускорения с совмещенными траекториями ведущих и ведомых сгустков.

## 2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА

Для нахождения собственных функций и собственных частот бицилиндрических и пентацилиндрических резонаторов, а также при анализе разложений (1), (2) и отношения (7) использовались программы, написанные на языке Matlab с вызовом функций из интегрированного пакета PDE (Partial Differential Equation) Matlab, позволяющего решать методом конечных элементов двумерные граничные задачи на собственные значения.

На рис. 1 представлено распределение поля для первых 15 мод бицилиндрического резонатора с радиусами окружностей  $R_1 = 1$  и  $R_2 = 0,5$  см расстоянием между центрами этих окружностей  $D = 1,45$  см. Распределение продольной составляющей электрического поля показано жирной линией, а тонкие линии внутри области могут быть интерпретированы как магнитные силовые линии.

Для двухпучковой схемы ускорения интерес представляют четвертая и седьмая моды с резонансными частотами  $f_4 = 22,557$  ГГц и  $f_7 = 26,367$  ГГц.

В расчетной программе для сгустков с поперечными радиусами 0,1 см координаты пролета ведущего сгустка брались равными  $(-1,56 \text{ см}, 0 \text{ см})$ , а ведомого  $(0,45 \text{ см}, 0 \text{ см})$ . На четвертой моде расчетная  $\eta$  оказалась равной 7,543. На седьмой моде при пролете ведущего сгустка с координатами  $(0,65 \text{ см}, 0 \text{ см})$ , а ведомого с  $(-0,98 \text{ см}, 0 \text{ см})$   $\eta = 8,1976$ . Эти случаи проиллюстрированы на рис. 2, где также нанесены области пролета сгустков.

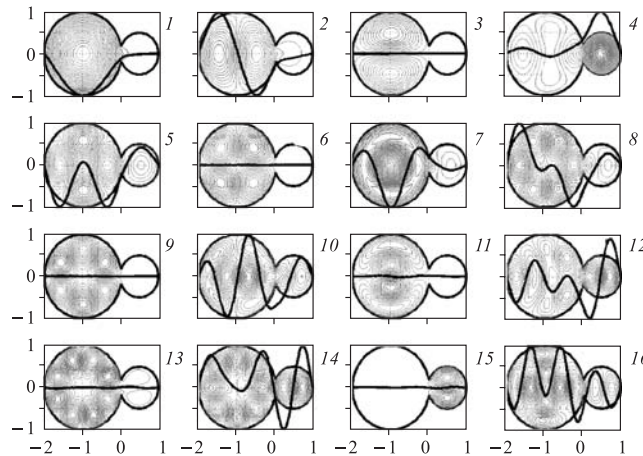


Рис. 1. Распределение поля в бицилиндрическом резонаторе

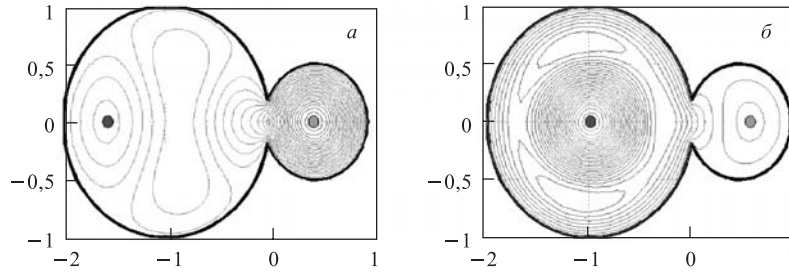


Рис. 2. Распределение поля в бицилиндрическом резонаторе на четвертой (а) и седьмой (б) модах.  
а)  $f_4 = 22,557$  ГГц;  $\eta = 7,543$ ; б)  $f_7 = 26,367$  ГГц;  $\eta = 8,1976$

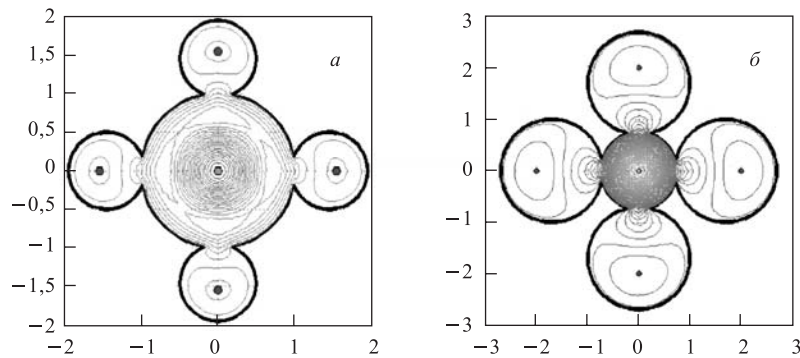


Рис. 3. Распределение полей в различных конфигурациях пентацилиндрического резонатора.  
а)  $f_{10} = 26,438$  ГГц;  $\eta = 108,5$ ; б)  $f_5 = 15,168$  ГГц;  $\eta = 204$

Необходимо отметить, что с увеличением  $D$ -расстояния между центрами окружностей  $\eta$  растет на обеих модах.

По аналогии с рассматриваемыми модами бицилиндрического резонатора были составлены и просчитаны две конфигурации пентацилиндрического резонатора с  $D = 1,48$  см между центрами составляющих окружностей. В первом случае  $R_1 = 1$  см и  $R_{2,3,4,5} = 0,5$  см на десятой моде с резонансной частотой  $f_{10} = 26,438$  ГГц,  $\eta = 108,5$ . При обратной конфигурации резонатора в случае  $R_1 = 1$  см и  $R_{2,3,4,5} = 0,5$  см на пятой моде с собственной частотой  $f_5 = 15,168$  ГГц,  $\eta = 204$ . Распределение поля для этих случаев изображено на рис. 3 с указанием областей пролета сгустков.

Результат суммирования в формулах (1) и (2) для определения временных зависимостей возбуждаемых полей точно согласуется с расчетами, проведенными для простого цилиндрического резонатора как в идеальном случае, так и с учетом конечной добротности. Оптимизация продольных размеров резонатора по максимуму напряженности продольной составляющей электрического поля за время пролета сгустков также идентична процедурам [1].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод расчета вынужденных электромагнитных полей в резонаторе с произвольным поперечным сечением оказывается верным только в случае регулярных резонаторов, т. е. для резонаторов, имеющих равный продольный размер. При оптимизации продольных размеров составных частей вышеописанных резонаторов оказывается полезным другое расширение Matlab — FEMLAB, позволяющий находить собственные функции и собственные значения для трехмерных областей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Беглоян Э. А. и др.* Особенности возбуждения резонатора последовательностью сгустков заряженных частиц // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1992. Т. 32, № 1. С. 79–85.
2. *Begloyan E. A.* The Cylindrical Cavity Geometry Optimization Over the Maximum Longitudinal Component of Electric Field // EPAC-94 Intern. Conf., London, 1994. P. 2123–2124.
3. *Иванян М. И.* Собственные моды бицилиндрического волновода // Радиотехника и электроника. 1999. Т. 44, № 4. С. 401–409.

Получено 17 февраля 2004 г.