

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ БЫСТРОВРАЩАЮЩИХСЯ СВЕРХПЛОТНЫХ НЬУТОНОВСКИХ ПОЛИТРОП

С. А. Михеев, В. П. Цветков

Тверской государственной университет, Тверь, Россия

В работе получено аналитическое представление распределения плотности быстро вращающихся сверхплотных ньютоновских политроп в виде многочленов по степеням параметров сплюснутости e и индекса политропы n , аппроксимирующих его с погрешностью 10^{-3} . Построена схема определения критических точек в распределении плотности конфигурации. Для случая $n = 1,4$ получены значения параметров, характеризующих аналитическое представление плотности вблизи критических точек. Исследована динамика критических точек в зависимости от параметра e . Показано возникновение катастроф типа A_2 , A_3 . Доказано, что вблизи точки $e = 0,3503$ в распределении плотности возникает область пузыря, имеющего форму эллиптического тора.

In this work we have obtained an analytic expression of density distribution of rapidly rotating superdense Newtonian polytropes by polynomials based on degrees of parameter flatness e and a polytropic index n approximating it with an accuracy of 10^{-3} . We have built the diagram of definition of critical points in configuration density distribution. For the case where $n = 1.4$, we have obtained the parameter values characterizing the analytic expression of density near the critical points. In this work there has been studied the critical points dynamics versus e parameter. This work visualizes formation of bumping of type A_2 , A_3 . It has been proved that near the point of $e = 0.3503$ in density distribution, a «bubble area» in the form of elliptic torus arises.

PACS: 97.10.Kc

ВВЕДЕНИЕ

Уникальные данные об уравнениях состояния сверхплотной ядерной материи с плотностью $\rho > 2,9 \cdot 10^{14}$ г/см³ могут быть получены как из наблюдения свойств вращающихся нейтронных звезд (пульсаров), так и лабораторных экспериментов по столкновению встречных высокоэнергичных пучков тяжелых ионов.

Наиболее перспективными в этом аспекте являются наблюдения за эволюцией экстремально вращающихся миллисекундных пульсаров. Многие их свойства начинают сильно зависеть от вида уравнения состояния [1].

Существенным вкладом в решение данной задачи является поиск на ускорителях новых состояний ядерной материи, возникающих в процессе соударения тяжелых ионов высоких энергий. Эта задача решается на экспериментальных установках LHC (CERN, Швейцария), RHIC (BNL, США), а также планируется для изучения на будущих ускорительных комплексах NICA (ОИЯИ, Дубна) и FAIR (GSI, Германия) [2, 3]. В ОИЯИ

осуществляется строительство нового тяжелоионного коллайдера NICA с энергиями от 4 до 11 ГэВ/нуклон в системе центра масс. При таких энергиях образуется состояние горячей и плотной ядерной материи как в форме смешанной фазы из кварков и глюонов, так и из адронов. Кроме этого, на NICA будет возможен поиск сигналов перехода адронной материи в кварк-глюонную плазму [2].

В планируемых на NICA экспериментах может быть получено состояние вещества с плотностью, аналогичной плотности нейтронных звезд порядка $5 \cdot 10^{14} - 10^{15}$ г/см³. Возникает уникальная возможность получения информации об уравнениях состояния смешанной фазы и кварк-глюонной плазмы, использование ее в расчетах свойств быстровращающихся нейтронных звезд, таких как масса, радиусы, момент инерции, скорость изменения их периода вращения. Сравнение расчетов с астрофизическими данными позволит получить ограничения на механизмы взаимодействия кварков и глюонов в указанном выше диапазоне плотностей.

Наибольшей популярностью пользуется задание уравнения состояния в виде политропы. Как показано в нашей работе [4], с высокой точностью как уравнения состояния идеального ферми-газа, так и реалистические уравнения Бете–Джонсона и Рейда можно приблизить политропой соответствующего индекса.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В случае политропы относительная плотность $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ (ρ_0 — плотность в центре) определяется интегральным уравнением (Ляпунова) с подвижной границей в R^3 [1]:

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0(1+n) \left(\tilde{\rho}^{\frac{1}{n}} - 1 \right) - \varepsilon \frac{r^2}{a_1^2} = 0, \quad (1)$$

где D — область R^3 , в которой $\tilde{\rho} \geq 0$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_1 = x/a_1$, $x_2 = y/a_1$, $x_3 = z/a_3$, a_1 , a_3 — длины большой и малой полуосей сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации; $e = a_3/a_1$, $\varepsilon = \omega^2/(4\pi G\rho_0)$, ω — угловая скорость вращения конфигурации; G — гравитационная постоянная; $K_0 = P_0/(2\pi G\rho_0^2 a_1^2)$, P_0 — давление в центре конфигурации; n — индекс политропы.

Граница конфигурации находится из условия $\rho(\mathbf{r}) = 0$.

В дальнейшем для упрощения обозначений положим $x_3 = z$ и будем искать решение (1) в виде полинома наилучшего приближения в метрике L_2 в случае фигур вращения:

$$\tilde{\rho} = 1 + \sum_{a+b=2}^N \tilde{\rho}_{ab}(e, n) r^a z^b. \quad (2)$$

В (2) значения индексов a и b берутся четными, а N возьмем равным шести.

Теоретическим основанием (2) является теорема Стоуна–Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывной на компакте функции нескольких переменных [5].

Используя разработанный нами в [6] комплекс символьно-численных программ в системе MAPLE, мы получили аналитическое выражение в виде многочленов по степеням e и n , аппроксимирующих с погрешностью порядка 10^{-6} численные значения коэффициентов $\tilde{\rho}_{ab}(e, n)$.

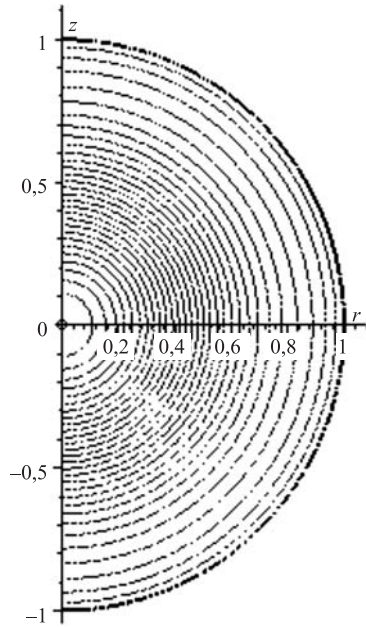


Рис. 1. ЛПУ для $e = 1,0000$

Основная задача нашей работы — это анализ структуры (2) в зависимости от управляющих параметров e и n . Общий случай произвольных значений e и n чрезвычайно сложен, поэтому мы, качественно не упрощая задачу, будем рассматривать ее при фиксированном значении индекса политропы $n = 1,4$. Данное значение близко к значению индекса политропы для идеального нерелятивистского ферми-газа нейтронов и приводит к очень интересным эффектам в распределении $\tilde{\rho}$. Управляющим параметром задачи остается только параметр сплюснутости $e(\varepsilon)$.

Одним из простых и наглядных методов изучения функции $\tilde{\rho}(r, z, e)$ является метод изучения поверхностей постоянного уровня (ППУ), полученных при фиксированных значениях $\tilde{\rho}$. Для фигур вращения эту задачу можно упростить. Рассмотрим сечение конфигурации полуплоскостью $\phi = \text{const}$ (ϕ — угол азимута). Тогда ППУ при пересечении с полуплоскостью образуют семейство линий постоянного уровня (ЛПУ). Они также являются алгебраическими кривыми шестого порядка.

Рассмотрим вначале самый простой случай $e = 1$, т. е. сферически-симметричный случай без вращения. ЛПУ с шагом $1/30$ показаны на рис. 1.

Как видно из рис. 1, ЛПУ представляют собой окружности. Отметим, что в центральной части и вблизи границы плотность убывает существенно медленнее, чем в срединной ее части.

При наличии вращения $\varepsilon \neq 0$ и $e \neq 1$ картина усложняется. Зависимость ε от e при $n = 1,4$ дает график рис. 2.

В случае $e = 0,6$ ($\varepsilon = 0,03225$) ЛПУ изображены на рис. 3.

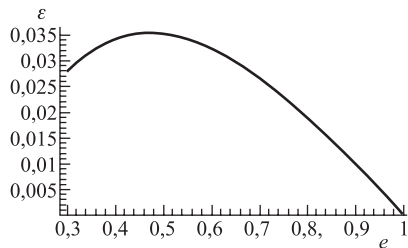


Рис. 2. Зависимость функции ε от e

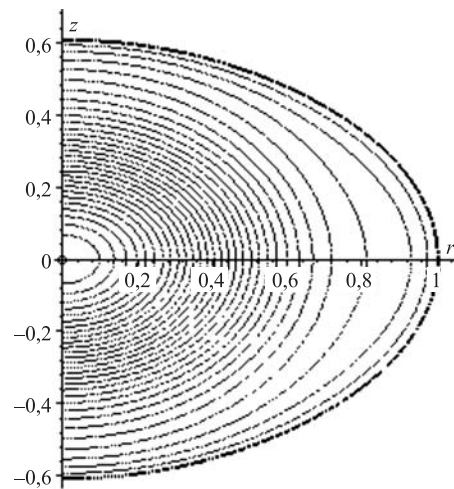


Рис. 3. ЛПУ для $e = 0,6000$

Из рис. 3 видно, что расстояние между ЛПУ в области значений $0,7 < r < 0,9$ существенно возросло. Это означает наличие в этой области экваториальной плоскости большой зоны с медленно меняющейся плотностью.

Картина ЛПУ существенно усложняется при $e \leq 0,5105$ ($\varepsilon \geq 0,03502$). Поэтому далее целесообразно для изучения структуры $\tilde{\rho}$ использовать качественные методы анализа из математической теории катастроф [7, 8]. Согласно этой теории, центральное место в нашем случае занимает вопрос о поиске критических точек, их классификации и изучении динамики при изменении управляющего параметра $e(\varepsilon)$. Эту программу несложно реализовать на компьютере в системе MAPLE, так как в рамках этой системы у нас уже есть аналитические представления коэффициентов $\tilde{\rho}_{ab}(e)$.

2. РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Критические точки r_k, z_k для гладких функций $f(r, z)$ находятся из уравнения

$$\vec{\nabla} f(r, z, e) = 0. \quad (3)$$

Поскольку у нас $\tilde{\rho}$ — полином по координатам r и z , приближающий плотность конфигурации в L_2 , мы предлагаем для поиска критических точек и изучения поведения $\tilde{\rho}$ вблизи них использовать следующий подход, эквивалентный условию (3) для гладких функций, который легко реализуется в виде компьютерной программы. Вблизи критических точек r_k, z_k представим r и z в виде

$$\begin{aligned} r &= r_k + R \cos \alpha + Z \sin \alpha, & z &= z_k + Z \cos \alpha - R \sin \alpha, \\ |R| &\ll 1, & |Z| &\ll 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), имеем

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{0k}(e) + \sum_{a+b=1}^6 F(a, b, r_k, z_k, \alpha, e) R^a Z^b. \quad (5)$$

Разность $\tilde{\rho} - \tilde{\rho}_{0k}$ удобно обозначить как h . Тогда (5) переписывается в виде

$$h = \sum_{a+b=1}^6 F(a, b, r_k, z_k, \alpha, e) R^a Z^b. \quad (6)$$

Значения r_k, z_k и α находятся из уравнений

$$F(1, 0, r_k, z_k, \alpha, e) = F(0, 1, r_k, z_k, \alpha, e) = F(1, 1, r_k, z_k, \alpha, e) = 0. \quad (7)$$

Подставляя их в (6) и сохраняя в нем значащие члены разложения по степеням R и Z в окрестности критической точки r_k, z_k , имеем

$$h = \lambda_1(e)R^2 + \lambda_2(e)Z^2 + \tilde{a}(e)R^3 + \tilde{b}(e)Z^3 + \tilde{c}(e)Z^4. \quad (8)$$

В математической теории катастроф выражение $h_M = \lambda_1 R^2 + \lambda_2 Z^2$ получило название морсовской составляющей, а $h_{NM} = \tilde{a}R^3 + \tilde{b}Z^3 + \tilde{c}Z^4$ неморсовской составляющей. В результате $h = h_M + h_{NM}$.

Функцию h_{NM} называют также ростком катастрофы, и она существенна только при $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$. Эти точки получили название катастроф. В точках катастроф в нашем случае отличными от нуля будут коэффициенты или \tilde{a} , или \tilde{b} , или \tilde{c} .

Если $\lambda_1 = 0, \tilde{a} \neq 0$ ($\tilde{b} = \tilde{c} = 0$), то $h_{NM} \sim R^3$ и имеет место тип катастрофы A_2 . Точно такой случай реализуется при $\lambda_2 = 0, \tilde{b} \neq 0$ ($\tilde{a} = \tilde{c} = 0$), $h_{NM} \sim Z^3$ и тип катастрофы A_2 . Но при $\lambda_2 = 0, \tilde{c} \neq 0$ ($\tilde{a} = \tilde{b} = 0$), $h_{NM} \sim Z^4$ и тип катастрофы уже будет A_3 . В общем случае тип катастрофы A_n определяется ростком x^{n+1} .

Критические точки с $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ называются морсовскими, с $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ неморсовскими. Морсовские точки — это точки локального максимума ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$), точки минимума ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) и седловые точки ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$). Их соответственно обозначим знаками \oplus, \ominus, \otimes .

Проведенные на компьютере расчеты показали, что постоянной критической морсовской точкой \oplus при всех значениях $e(\varepsilon)$ будет точка $r_k = z_k = 0$, т.е. в центре конфигурации. ЛПУ вблизи нее будут эллипсы с полуосями $\sqrt{h/\lambda_1}$ и $\sqrt{h/\lambda_2}$ ($h \ll 1$) соответственно.

Значения λ_1 и λ_2 при $e = 1$ ($\varepsilon = 0$) соответственно равны $-2,8652, -2,8652$, а при $e = 0,6$ ($\varepsilon = 0,03225$) $-3,5865, -7,4672$.

Вторая критическая точка возникает при $e = 0,5105$ ($\varepsilon = 0,03502$). В ней $r_k = 0,8360, z_k = 0, \alpha = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -0,2850$, росток катастрофы $A_2 = \tilde{a}R^3$ ($\tilde{a} = -12,5569$). Уравнение ЛПУ вблизи этой критической точки имеет вид

$$h = \lambda_2 Z^2 + \tilde{a}R^3. \tag{9}$$

Структура ЛПУ-конфигурации для данного случая изображена на рис. 4.

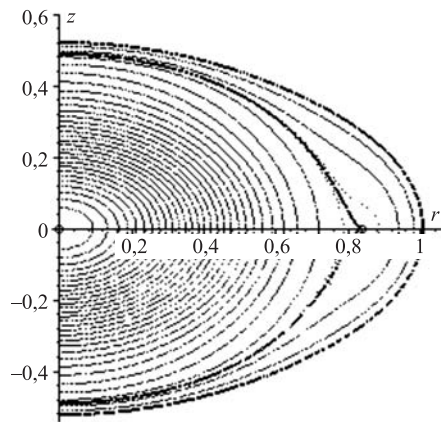


Рис. 4. ЛПУ для $e = 0,5105$

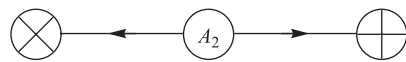


Рис. 5

При уменьшении e от значения $0,5105$ происходит процесс вытягивания из неморсовской критической точки A_2 двух морсовских — седловой точки \otimes и точки максимума \oplus . Этот процесс изображен на диаграмме на рис. 5.

Обе точки расположены в плоскости экватора.

Седловая точка с уменьшением e движется в сторону оси вращения, а точка максимума в сторону экватора. Для $e = 0,48$ приведем систему ЛПУ на рис. 6.

Когда e достигает значения $e = 0,4195$ ($\varepsilon = 0,03474$), возникают еще две неморсовские критические точки $A_2, \lambda_1 = 2,3336, \lambda_2 = 0$ с коэффициентами $r_k = 0,7204, z_k = \pm 0,1227, \alpha = \mp 0,2479$. Росток катастрофы A_2 равен $\tilde{b}Z^3, \tilde{b} = -1,2300$. Вблизи этих точек уравнение ЛПУ определяется уравнением

$$h = \lambda_1 R^2 + \tilde{b}Z^3. \tag{10}$$

Критические точки $A_2, \lambda_1 = 2,3336, \lambda_2 = 0$ с коэффициентами $r_k = 0,7204, z_k = \pm 0,1227, \alpha = \mp 0,2479$. Росток катастрофы A_2 равен $\tilde{b}Z^3, \tilde{b} = -1,2300$. Вблизи этих точек уравнение ЛПУ определяется уравнением

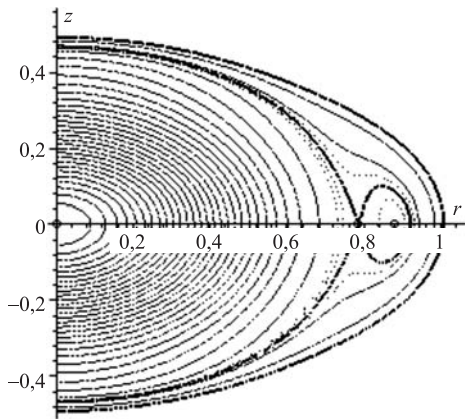


Рис. 6. ЛПУ для $e = 0,4800$

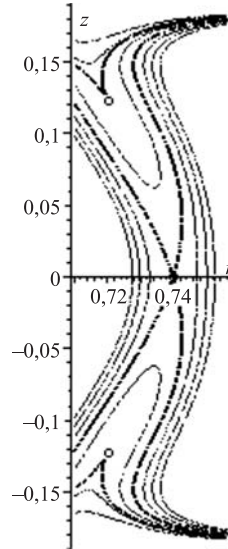


Рис. 7. ЛПУ для $e = 0,4195$

Соответствующие ЛПУ изображены на рис. 7. При дальнейшем уменьшении e из каждой неморсовской точки вытягиваются две морсовские точки минимума \ominus и седловая \otimes . Этот процесс изображен на диаграмме на рис. 8.

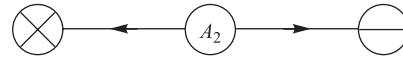


Рис. 8

Седловые точки движутся от плоскости экватора и к оси вращения. Точки минимума же сдвигаются от оси вращения и к экваториальной плоскости.

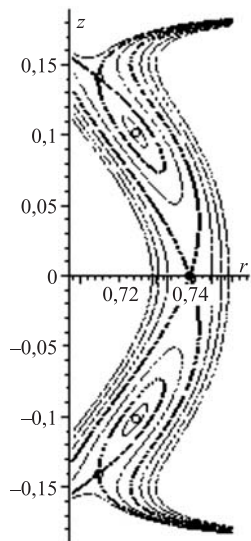


Рис. 9. ЛПУ для $e = 0,4180$

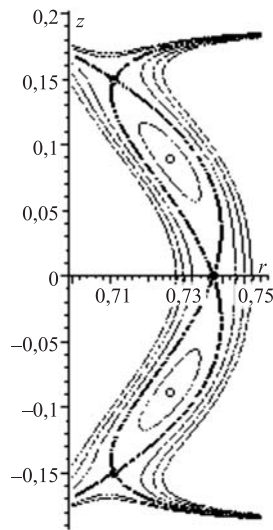


Рис. 10. ЛПУ для $e = 0,4159$

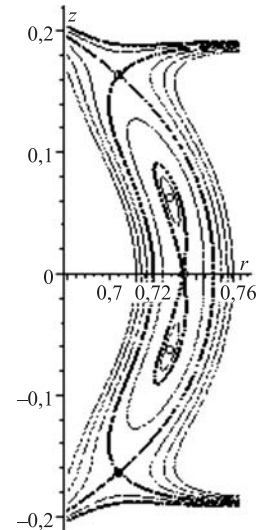


Рис. 11. ЛПУ для $e = 0,4100$

ЛПУ для $e = 0,418$ ($\varepsilon = 0,03470$) приводятся на рис. 9. Для $e = 0,4159$ ($\varepsilon = 0,03465$) и $e = 0,41$ ($\varepsilon = 0,03449$) на рис. 10 и 11 соответственно.

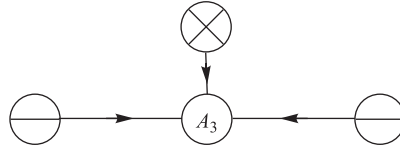


Рис. 12

Из рис. 9–11 очевидным становится (с уменьшением e) процесс сближения седловой точки в плоскости экватора и точек минимума. При $e = 0,3992$ ($\varepsilon = 0,03414$) происходит слияние этих морсовских точек в неморсовскую A_3 . Этот процесс изображен на диаграмме на рис. 12.

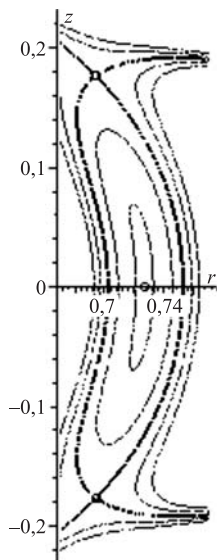


Рис. 13. ЛПУ для $e = 0,3992$



Рис. 14

Тогда $r_k = 0,7271$, $z_k = 0$, $\lambda_1 = 3,3204$, $\lambda_2 = 0$, $\alpha = 0$, росток катастрофы равен $\tilde{c}Z^4$, $\tilde{c} = 14,5289$ и семейство ЛПУ вблизи этой точки определяется уравнением

$$h = \lambda_1 R^2 + \tilde{c}Z^4. \tag{11}$$

Получились сильно вытянутые вдоль оси вращения выпуклые кривые. Семейство ЛПУ дано на рис. 13.

Далее с уменьшением e значение параметра λ_2 становится положительным и неморсовская точка катастрофы A_3 переходит в морсовскую точку локального минимума (диаграмма на рис. 14).

Эта точка минимума с дальнейшим уменьшением e сдвигается к оси вращения, а значение $\tilde{\rho}_k$ в этой точке быстро начинает уменьшаться. Значение $\tilde{\rho}_k = 0$ достигается в точке $e = 3503$ ($\varepsilon = 0,03176$). Вокруг данной точки возникает область с чрезвычайно малой плотностью, а ЛПУ образуют эллипсы с полуосями $\sqrt{h/\lambda_1}$, $\sqrt{h/\lambda_2}$. Отношение полуосей $\sqrt{\lambda_2/\lambda_1}$, равное 0,2010, говорит о том, что эти эллипсы сильно вытянуты вдоль оси вращения.

Дальнейшее уменьшение e приводит к тому, что формально в точке $r = r_k$, $z = 0$ уже $\tilde{\rho}_k < 0$, и эту точку мы обозначим \odot . Условие $\tilde{\rho} \geq 0$ начинает выполняться лишь вне некоторой малой окрестности точки $e < 3503$. Граница конфигурации вблизи нее будет определяться уравнением эллипса:

$$\frac{R^2}{(\sqrt{-\tilde{\rho}_k/\lambda_1})^2} + \frac{Z^2}{(\sqrt{-\tilde{\rho}_k/\lambda_2})^2} = 1, \tag{12}$$

а распределение плотности формулой

$$h = \lambda_1 R^2 + \lambda_2 Z^2. \tag{12a}$$

Производя обратные замены $Z = z$, $R = r - r_k$, получаем уравнение эллиптического тора в цилиндрических координатах:

$$z^2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(-\frac{\tilde{\rho}_k}{\lambda_1} - (r - r_k)^2 \right). \tag{13}$$

Зависимость параметров $\lambda_1, \lambda_2, \rho_k, r_k$ от e вблизи точки $e = 0,3503$ представляется соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_k &= 0,8870(e - 0,3503), \\ r_k &= 0,6985 + 0,5217(e - 0,3503), \\ \lambda_1 &= 4,2578 - 19,4348(e - 0,3503), \\ \lambda_2 &= 0,1720 - 4,3913(e - 0,3503). \end{aligned} \quad (14)$$

С уменьшением e фигура пузыря начинает существенно отличаться от эллиптического тора (рис. 15). Это связано с увеличением роли кубических и четвертой степени членов по R и Z в уравнении поверхности. С учетом этих членов уравнение поверхности пузыря вблизи точки $e = 0,3503$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} &0,8870(e - 0,3503) + (4,2578 - 19,4348(e - 0,3503)) \times \\ &\times (r - 0,6985 - 0,5217(e - 0,3503))^2 + (0,1720 - 4,3913 \times \\ &\times (e - 0,3503))z^2 - 5,1861(r - 0,6985 - 0,5217(e - 0,3503))^3 + \\ &+ 19,0380z^2(r - 0,6985 - 0,5217(e - 0,3503)) - 22,0446 \times \\ &\times (r - 0,6985 - 0,5217(e - 0,3503))^4 + 36,1585z^4 - \\ &- 102,7447z^2(r - 0,6985 - 0,5217(e - 0,3503))^2 = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку область, внутри которой $\tilde{\rho} \equiv 0$, напоминает кольцо, то мы предлагаем ее называть кольцеобразным пузырем.

В случае возникновения пузыря, в принципе, надо учитывать его при решении уравнения (1). Но поскольку размеры пузыря можно сделать сколь угодно малыми и вблизи его центра $|\tilde{\rho}_k| \ll 1$, то мы с нужной нам степенью точности влиянием области пузыря на конфигурацию можем пренебречь.

Система ЛПУ в случае образования пузыря (он заштрихован) при $e = 0,348$ ($\varepsilon = 0,03162$) дана на рис. 16.

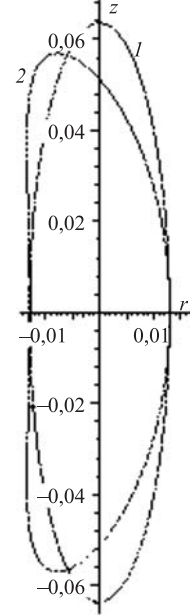


Рис. 15. Граница пузыря при $e = 0,3480$ с удерживанием только квадратичных по R и Z членов в уравнении поверхности конфигурации (кривая 1) и с учетом до четвертой степени включительно (кривая 2)

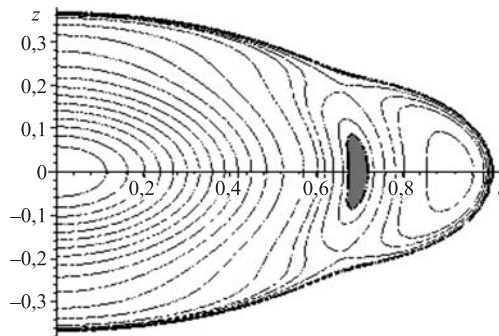


Рис. 16. ЛПУ для $e = 0,3480$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное нами изучение поведения структуры критических точек функции $\tilde{\rho}$ в зависимости от изменения параметра сплюснутости ϵ (быстроты вращения ϵ) при фиксированном индексе политропы n показало сложный характер перестройки этой структуры. Критические точки рождаются, перемещаются, сливаются. Возникает сложная динамика этих точек, в результате которой образуется состояние пузыря.

Авторы благодарны А. Н. Сисакяну за консультации по ряду разделов проекта NICA, неизменный интерес и поддержку исследований по сверхплотным гравитирующим конфигурациям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице // Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, № 4(146). С. 675–687.
2. *Сисакян А. Н.* Методы квантовой теории и физика больших множественностей / Под общ. ред. Матвеева В. А. Т. 2. Дубна, 2009. С. 115; 116; 132; 133.
3. Searching for a QCD Mixed Phase at the Nuclotron-Based Ion Collider Facility (NICA White Paper). Draft v. 2.01. 2009.
4. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Математическая модель равновесных вращающихся ньютоновских конфигураций вырожденного ферми-газа // Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». 2009. Вып. 2(13). С. 15–22.
5. *Коллатц Л., Крабс В.* Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. С. 216–222.
6. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // Мат. моделирование. 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
7. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990.
8. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

Получено 5 февраля 2010 г.