ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-2000-13

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова,
С.А.Васильев*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО РЕЛЯТИВИСТСКОГО АНАЛОГА УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

---

*Российский университет дружбы народов, Москва
**Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ,
грант 98-01-00190, грант 97-01-0746, грант 99-01-01101

2000

1. Введение. При изучении свойств связанных состояний элементарных частиц, в том случае когда релятивистские эффекты вносят существенный вклад, более последовательным является применение квазипотенциальных уравнений, которые были получены при одновременной формулировке проблемы двух тел в квантовой теории поля [1 – 3]. Достоинство такого подхода — наряду с учетом релятивистских эффектов — близость к формализму нерелятивистской квантовой механики. Так например, в квазипотенциальных моделях сохраняется вероятностная интерпретация волновой функции.

Мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [4-6] в релятивистском конфигурационном пространстве для радиальных волновых функций связанных состояний двух одинаковых элементарных частиц

$$[2c\sqrt{q^2+m^2c^2} - H_0^{rad} - V(r)]\psi(r) = 0, \tag{1}$$

$$H_0^{rad} = 2mc^2\, ch\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r+\frac{i\hbar}{mc})}\, exp\left(\frac{i\hbar}{mc}\frac{d}{dr}\right) =$$

$$= 2mc^2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p)!}\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{2p}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr(r+\frac{i\hbar}{mc})}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\left(\frac{i\hbar}{mc}\right)^p\frac{d^p}{dr^p},$$

где m, q и l — масса,импульс и момент элементарных частич, а $V(r)$ — квазипотенциал.

Если в этом уравнении формально устремить величину c к бесконечности, то это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\left[\hbar^2\frac{d^2}{dr^2} - \hbar^2\frac{l(l+1)}{r^2} - mV(r) + q^2\right]u(r) = 0. \tag{2}$$

В работе [7] рассмотрен вопрос о регулярной сходимости решений уравнения (1) к решениям уравнения (2).

Далее, для упрощения формул удобно перейти к системе единиц, в которой $\hbar = 1, m = 1$. Пусть

$$\varepsilon = \frac{1}{c}, \lambda = \frac{2q^2}{\sqrt{1+\varepsilon^2 q^2}+1}, v = V(r), q^2 = (1+0.25\varepsilon^2\lambda)\lambda,$$

тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$L_\infty(\psi) + \lambda\psi = 0, \tag{3}$$

$$L_\infty = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\varepsilon^{2p-2}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}} - \frac{l(l+1)}{r(r+i\varepsilon)}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{i^p}{p!}\varepsilon^p\frac{d^p}{dr^p} - v(r).$$

Это дифференциальное уравнение бесконечного порядка с малым параметром при старших производных ($\varepsilon << 1$), что позволяет отнести его к классу сингулярно возмущенных уравнений.

Если в уравнении (3) ограничиться конечным порядком $m > 2$, тогда можно записать:

$$L_{2m}(\psi_{2m}) + \lambda_{2m}\psi_{2m} = 0,$$

$$L_{2m} = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\varepsilon^{2p-2}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}} - \frac{l(l+1)}{r(r+i\varepsilon)}\sum_{p=0}^{2m}\frac{i^p}{p!}\varepsilon^p\frac{d^p}{dr^p} - v(r),$$

где ψ_{2m} — решение дифференциального уравнения порядка $2m$.

Для этого дифференциального уравнения порядка $2m$ сформулируем краевую задачу на отрезке $[0, r_0]$ для нахождения собственных функций и собственных значений таким образом:

$$L_{2m}(\psi_{2m}) + \lambda_{2m}\psi_{2m} = 0, \tag{4}$$

$$D^i\psi_{2m}(0) = D^i\psi_{2m}(r_0) = 0, i = 0, 1, \ldots, m-1, D^i = \frac{d^i}{dr^i}. \tag{5}$$

Выбор таких краевых условий не является случайным. Как показано в работах [7,9], краевые условия (5) обеспечивают регулярность вырождения при $\varepsilon \to 0$ решений задачи (4),(5) к решениям задачи

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - v(r) + \lambda_0\right]\psi_0(r) = 0,$$

$$\psi_0(0) = \psi_0(r_0) = 0.$$

В этой работе мы исследуем поведение собственных функций ψ_{2m} и собственных значений λ_{2m} задачи (4), (5) , во-первых, при устремлении малого параметра ε к нулю при фиксированном порядке дифференциального уравнения $2m$, во-вторых, при различных $2m$ и фиксированном $\varepsilon << 1$.

2. Построение асимптотического решения задачи. Для поиска решений задачи (4),(5) мы привлекаем методы, применяемые в рамках теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений [8 – 13].

Для этой цели мы построим такой асимптотический ряд

$$A\psi(r,\varepsilon) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \psi_k(r), \tag{6}$$

что частная сумма этого ряда

$$A_j\psi(r,\varepsilon) = \sum\nolimits_{k=0}^{j} \varepsilon^k \psi_k(r)$$

будет удовлетворять неравенству для $\psi_{2m}(r,\varepsilon)$

$$\max_{r\in[\delta,r_0-\delta]} |\psi_{2m}(r,\varepsilon) - A_j\psi(r,\varepsilon)| < M\varepsilon^{j+1}$$

и аналогичному неравенству для краевых условий, где M и $\delta << 1$ — положительные постоянные, не зависящие от r и ε.

Ряд (6) является формальным асимптотическим решением нашей задачи, поэтому можно ожидать, что частичные суммы $A_j\psi(r,\varepsilon)$ этого ряда будут хорошо приближать решение $\psi_{2m}(r,\varepsilon)$ при достаточно малом ε на интервале $(\delta, r_0 - \delta)$.

Асимптотическое разложение решения $\psi_{2m}(r,\varepsilon)$ на отрезке $[0, r_0]$ будем строить, используя метод пограничных функций [9-13]. Тогда асимптотический ряд будет иметь такой вид:

$$\psi(r,\varepsilon) = \bar{\psi}(r,\varepsilon) + \Pi\psi(\rho_1,\varepsilon) + Q\psi(\rho_2,\varepsilon) =$$

$$= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{\psi}_k(r) + \Pi\psi_k(\rho_1) + Q\psi_k(\rho_2)),$$

где

$$\bar{\psi}(r,\varepsilon) \equiv \bar{\psi}_0(r) + \varepsilon\bar{\psi}_1(r) + \varepsilon^2\bar{\psi}_2(r) + \ldots$$

- регулярная часть разложения,

$$\Pi\psi(\rho_1,\varepsilon) \equiv \Pi_0\psi(\rho_1) + \varepsilon\Pi_1\psi(\rho_1) + \varepsilon^2\Pi_2\psi(\rho_1) + \ldots$$

- пограничная функция, описывающая поведение решения на левом краю отрезка $[0, r_0]$,

$$Q\psi(\rho_2, \varepsilon) \equiv Q_0\psi(\rho_2) + \varepsilon Q_1\psi(\rho_2) + \varepsilon^2 Q_2\psi(\rho_2) + \ldots$$

- пограничная функция, описывающая поведение решения на правом крае отрезка $[0, r_0]$.

Для пограничных функций $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ здесь введены новые независимые (растянутые) переменные $\rho_1 = r/\varepsilon$ и $\rho_2 = (r_0 - r)/\varepsilon$.

Асимптотику собственных значений λ_{2m} будем искать в виде следующего асимптотического ряда по степеням ε :

$$\lambda_{2m} \equiv \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \varepsilon^3\lambda_3 + \ldots,$$

кроме того , будем предполагать возможность разложения $v(r)$ по степеням ε в виде ряда:

$$v(r) = v_0(r) + \varepsilon v_1(r) + \varepsilon^2 v_2(r) + \ldots$$

Подставим эти разложения в уравнение (4) и краевые условия задачи (5).

$$\left[\sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\varepsilon^{2p-2}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}} - \frac{l(l+1)}{r(r+i\varepsilon)}\sum_{p=0}^{2m}\frac{i^p}{p!}\varepsilon^p\frac{d^p}{dr^p}\right]\bar{\psi}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}}{d\rho_1^{2p}} - \frac{l(l+1)}{\rho_1(\rho_1+i)}\sum_{p=0}^{2m}\frac{i^p}{p!}\frac{d^p}{d\rho_1^p}\right]\Pi\psi+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2}\left[\sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}}{d\rho_2^{2p}} - \frac{l(l+1)}{\left(\rho_2 - \frac{r_0}{\varepsilon}\right)\left(\rho_2 - \frac{r_0}{\varepsilon} - i\right)}\sum_{p=0}^{2m}\frac{(-i)^p}{p!}\frac{d^p}{d\rho_2^p}\right]Q\psi+$$

$$+\left[\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p(\lambda_p - v_p(r))\right]\left[\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p(\bar{\psi}_p(r) + \Pi_p\psi(\rho_1) + Q_p\psi(\rho_2))\right] =$$

$$= L_{2m}(\bar{\psi}) + \frac{1}{\varepsilon^2}L^1_{2m}(\Pi\psi) + \frac{1}{\varepsilon^2}L^2_{2m}(Q\psi)+$$

$$+\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon^p\sum_{q=0}^{p}[(\lambda_q - v_q(r))(\psi_{q-p} + \Pi_{q-p}\psi + Q_{q-p}\psi)] = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}(0) + \Pi\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}(r_0) + Q\psi(r_0)) = 0,\ i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$L_{2m} = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\varepsilon^{2p-2}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}} - \frac{l(l+1)}{r(r+i\varepsilon)}\sum_{p=0}^{2m}\frac{i^p}{p!}\varepsilon^p\frac{d^p}{dr^p},$$

$$L_{2m}^1 = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}}{d\rho_1^{2p}} - \frac{l(l+1)}{\rho_1(\rho_1+i)} \sum_{p=0}^{2m} \frac{i^p}{p!} \frac{d^p}{d\rho_1^p},$$

$$L_{2m}^2 = \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}}{d\rho_2^{2p}} - \frac{l(l+1)}{\left(\rho_2 - \frac{r_0}{\varepsilon}\right)\left(\rho_2 - \frac{r_0}{\varepsilon} - i\right)} \sum_{p=0}^{2m} \frac{(-i)^p}{p!} \frac{d^p}{d\rho_2^p}.$$

Кроме того, на пограничные функции $\Pi_k\psi$ и $Q_k\psi$ накладываются такие дополнительные условия, которые обеспечивают стремление этих функций к нулю вне пограничного слоя. Это означает, что функця $\Pi_k\psi$ описывает поведение ψ_{2m} на левом крае отрезка в интервале $(0,\delta)$, а $Q_k\psi$ описывает поведение ψ_{2m} на правом крае отрезка в интервале $(r_0-\delta, r_0)$, где δ — сколь угодно мало и не зависит от ε, и при этом

$$\Pi_k\psi(\rho_1) \to 0, Q_k\psi(\rho_2) \to 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $r \in (0, r_0)$.

Если теперь приравнять члены, стоящие при одинаковых степенях ε, то получим краевые задачи для определения членов разложения $\bar{\psi}_k$, $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ и λ_k.

В нулевом приближении мы получим краевую задачу для нахождения $\bar{\psi}_0$, $\Pi_0\psi$, $Q_0\psi$ и λ_0:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_0}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}\bar{\psi}_0 + (\lambda_0 - v_0(r))\bar{\psi}_0 = 0,$$

$$L_{2m}^1(\Pi_0\psi) = 0,$$

$$L_{2m}^2(Q_0\psi) = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_0(0) + \Pi_0\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_0(r_0) + Q_0\psi(r_0)) = 0,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\Pi_0\psi(\rho_1) \to 0, Q_0\psi(\rho_2) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Системы уравнений и дополнительные условия для нахождения $\bar{\psi}_k$, $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ и λ_k при $k > 0$ имеют вид:

$$\sum_{p=1}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}\bar{\psi}_{k-2p+2}}{dr^{2p}} + \sum_{p=0}^{k}(\lambda_p - v_p(r))\bar{\psi}_{k-p} +$$

$$+\frac{i}{r} \sum_{p=1}^{\left[\frac{k+2}{2}\right]} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}\bar{\psi}_{k-2p+1}}{dr^{2p}} +$$

$$+\frac{i}{r}\sum_{p=0}^{k}(\lambda_p - v_p(r))\bar{\psi}_{k-p-1} - \frac{l(l+1)}{r^2}\sum_{p=0}^{k}\frac{i^p}{p!}\frac{d^p\bar{\psi}_{k-p}}{dr^p} = 0,$$

$$L^1_{2m}(\Pi_k\psi) + \sum_{p=0}^{k-2}(\lambda_p - v_p(\varepsilon\rho_1))\Pi_{k-p-2}\psi = 0,$$

$$L^2_{2m}(Q_k\psi) + \sum_{p=0}^{k-2}(\lambda_p - v_p(r_0 - \varepsilon\rho_2))Q_{k-p-2}\psi = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_k(0) + \Pi_k\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_k(r_0) + Q_k\psi(r_0)) = 0$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\Pi_k\psi(\rho_1) \to 0, Q_k\psi(\rho_2) \to 0, \varepsilon \to 0, k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, если существуют решения этих краевых задач, то возможно построение асимптотического решения задачи (4),(5) в виде j -й частичной суммы

$$A_j\psi = \sum\nolimits_{k=0}^{j}\varepsilon^k(\bar{\psi}_k(r) + \Pi_k\psi(\rho_1) + Q_k\psi(\rho_2)),$$

которая будет приближать точное решение краевой задачи (4),(5) при $\varepsilon \to 0$ с точностью

$$\max_{r\in[\delta,\delta-r_0]}|\psi_{2m}(r,\varepsilon) - A_j\psi(r,\varepsilon)| = o(\varepsilon^{j+1}).$$

3. Построение асимптотического решения в случае постоянного потенциала. Если в уравнении (4) положить $l = 0$ (случай S-волны) и $v(r) = 0$, тогда краевую задачу на собственные функции и собственные значения для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения на отрезке $[0, 1]$ можно поставить так:

$$L^0_{2m}(\psi_{2m}) + \lambda_{2m}\psi_{2m} = 0, \tag{7}$$

$$D^i\psi_{2m}(0) = D^i\psi_{2m}(1) = 0\ , i = 0, 1, ..., m-1, \tag{8}$$

$$L^0_{2m} = \sum_{p=1}^{m}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\varepsilon^{2p-2}\frac{d^{2p}}{dr^{2p}}.$$

Если в (7) положить $\varepsilon = 0$, то мы получим вырожденную задачу

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \lambda\psi = 0, \tag{9}$$

$$\psi(0) = \psi(1) = 0. \tag{10}$$

Уравнению (9) отвечает характеристическое уравнение

$$P_0(\nu) = \nu^2 + \lambda = 0.$$

Его корни $\kappa_1 = i\sqrt{\lambda}, \kappa_2 = -i\sqrt{\lambda}$, тогда общее решение имеет вид:

$$\psi = c_1 sin\sqrt{\lambda}r + c_2 cos\sqrt{\lambda}r. \tag{11}$$

Решение задачи (9),(10) имеет вид:

$$\psi_n(r) = sin\sqrt{\lambda_n}r, \tag{12}$$

где $\lambda = \pi^2 n^2$.

Построим асимптотическое решение задачи (7),(8). Для этого представим решение $\psi_{2m}(r)$ в виде асимптотического ряда по степеням ε

$$\psi_{2m}(r,\varepsilon) = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (\bar{\psi}_k(r) + \Pi\psi_k(\rho_1) + Q\psi_k(\rho_2)),$$

где $\rho_1 = r/\varepsilon$ и $\rho_2 = (1-r)/\varepsilon$, а асимптотику собственных значений λ_{2m} в виде асимптотического ряда по степеням ε :

$$\lambda_{2m} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k.$$

Подставив эти разложения в уравнение (7) и краевые условия задачи (8), получим

$$\sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \varepsilon^{2p-2} \frac{d^{2p}\bar{\psi}}{dr^{2p}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}\Pi\psi}{d\rho_1^{2p}} + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{p=1}^{m} \frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!} \frac{d^{2p}Q\psi}{d\rho_2^{2p}} +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \sum_{q=0}^{p} [\lambda_q(\psi_{q-p} + \Pi_{q-p}\psi + Q_{q-p}\psi)] = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}(0) + \Pi\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}(1) + Q\psi(1)) = 0, \; i = 0, 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$\Pi_k\psi(\rho_1) \to 0, Q_k\psi(\rho_2) \to 0, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Теперь приравняем члены, стоящие при одинаковых степенях ε, и получим краевые задачи для определения членов разложения $\bar{\psi}_k$, $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ и λ_k.

В нулевом приближении мы получим краевую задачу для нахождения $\bar{\psi}_0$, $\Pi_0\psi$, $Q_0\psi$ и λ_0:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_0}{dr^2} + \lambda_0\bar{\psi}_0 = 0,$$

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}\Pi_0\psi}{d\rho_1^{2p}}=0,$$

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}Q_0\psi}{d\rho_2^{2p}}=0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_0(0)+\Pi_0\psi(0))=D^i(\bar{\psi}_0(1)+Q_0\psi(1))=0,$$

$$i=0,1,2,\ldots,m-1,$$

$$\Pi_0\psi(\rho_1)\to 0, Q_0\psi(\rho_2)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

Системы уравнений и дополнительные условия для нахождения $\bar{\psi}_k$, $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ и λ_k при $k>0$ имеют вид:

$$\sum_{p=1}^{[\frac{k+2}{2}]}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}\bar{\psi}_{k-2p+2}}{dr^{2p}}+\sum_{p=0}^{k}\lambda_p\bar{\psi}_{k-p}=0,$$

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}\Pi_k\psi}{d\rho_1^{2p}}+\sum_{p=0}^{k-2}\lambda_p\Pi_{k-p-2}\psi=0,$$

$$\sum_{p=1}^{m}\frac{2(-1)^{p+1}}{(2p)!}\frac{d^{2p}Q_k\psi}{d\rho_2^{2p}}+\sum_{p=0}^{k-2}\lambda_p Q_{k-p-2}\psi=0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_k(0)+\Pi_k\psi(0))=D^i(\bar{\psi}_k(1)+Q_k\psi(1))=0$$

$$i=0,1,2,\ldots,m-1,$$

$$\Pi_k\psi(\rho_1)\to 0, Q_k\psi(\rho_2)\to 0, \varepsilon\to 0, k=1,2,\ldots$$

Если в уравнении (7) ограничиться 4-ой производной, тогда краевую задачу на собственные функции и собственные значения для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения четвертого порядка на отрезке $[0,1]$ можно поставить так:

$$L_4(\psi_4)+\lambda_4\psi_4=0\ , \tag{13}$$

$$D^i\psi_4(0)=D^i\psi_4(1)=0\ , i=0,1. \tag{14}$$

Построим асимптотическое решение задачи (13),(14). Для этого представим решение $\psi_4(r)$ в виде асимптотического ряда по степеням ε

$$\psi_4(r,\varepsilon)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\bar{\psi}_k(r)+\Pi\psi_k(\rho_1)+Q\psi_k(\rho_2)),$$

где $\rho_1=r/\varepsilon$ и $\rho_2=(1-r)/\varepsilon$.

Нулевое приближение найдем, решив следующую задачу:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_0}{dr^2}+\lambda_0\bar{\psi}_0=0,$$

$$L_4^1(\Pi_0\psi)=-\frac{2}{4!}\frac{d^4\Pi_0\psi}{d{\rho_1}^4}+\frac{d^2\Pi_0\psi}{d{\rho_1}^2}=0\ , \tag{15}$$

$$L_4^2(Q_0\psi)=-\frac{2}{4!}\frac{d^4Q_0\psi}{d{\rho_2}^4}+\frac{d^2Q_0\psi}{d{\rho_2}^2}=0\ ,$$

$$D^i(\bar{\psi}_0(0)+\Pi_0\psi(0))=D^i(\bar{\psi}_0(1)+Q_0\psi(1))=0, i=0,1,$$

$$\Pi_0\psi(\rho_1)\to 0, Q_0\psi(\rho_2)\to 0, \varepsilon\to 0.$$

Системы уравнений и дополнительные условия для нахождения $\bar{\psi}_k$, $\Pi_k\psi$, $Q_k\psi$ и λ_k при $k>0$ имеют вид:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_k}{dr^2}+\sum\nolimits_{p=0}^{k}\lambda_p\bar{\psi}_{k-p}-\frac{2}{4!}\frac{d^4\bar{\psi}_{k-2}}{dr^4}=0,$$

$$L_4^1(\Pi_k\psi)+\sum\nolimits_{p=0}^{k}\lambda_{p-2}\Pi_{k-p-2}\psi=0,$$

$$L_4^2(Q_k\psi)+\sum\nolimits_{p=0}^{k}\lambda_{p-2}Q_{k-p-2}\psi=0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_k(0)+\Pi_k\psi(0))=D^i(\bar{\psi}_k(1)+Q_k\psi(1))=0, i=0,1,$$

$$\Pi_k\psi(\rho_1)\to 0, Q_k\psi(\rho_2)\to 0, \varepsilon\to 0, k=1,2,\ldots$$

Решение системы (15) для нахождения нулевого приближения выглядит так:

$$\bar{\psi}_{0_n}=sin\sqrt{\lambda_{0_n}}r$$

$$\bar{\psi}_{1_n}=\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\,cos\sqrt{\lambda_{0_n}}r\ ,$$

$$\Pi_{0_n}\psi(r,\varepsilon)=0,$$

$$\Pi_{1_n}\psi(r,\varepsilon)=\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\,exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}r\Big)\ ,$$

$$Q_{0_n}\psi(r,\varepsilon)=0,$$

$$Q_{1_n}\psi(r,\varepsilon)=-\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\Big[\frac{12+\varepsilon^2\lambda_{0_n}}{12-\varepsilon^2\lambda_{0_n}}\Big]\,cos\sqrt{\lambda_{0_n}}exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}(1-r)\Big)\ .$$

Собственные значения λ_{0_n} находятся как корни уравнения

$$tg\sqrt{\lambda_0} = \frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{3}(1 - \frac{\varepsilon^2\lambda_0}{12})}.$$

Корни этого уравнения найдены численно.
Значения λ_{0_n}/π^2 приведены в следующей таблице для различных ε.

n	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$
1	1.125875	1.011647	1.001155	1.000115
2	4.498543	4.046584	4.004621	4.000461
3	10.103984	9.104802	9.010399	9.001038
4	17.921390	16.18627	16.01848	16.00184
5	27.926075	25.29098	25.02888	25.00288

Следующее приближение, удовлетворяющее уравнению и краевым условиям задачи (7),(8), с точностью (ε^2) найдем, решив систему

$$\frac{d^2\bar{\psi}_1}{dr^2} + \lambda_0\bar{\psi}_1 = -\lambda_1\bar{\psi}_0,$$

$$L_4^1(\Pi_1\psi) = 0,$$

$$L_4^2(Q_1\psi) = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_1(0) + \Pi_1\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_1(1) + Q_1\psi(1)) = 0, i = 0, 1,$$

$$\Pi_1\psi(\rho_1) \to 0, Q_1\psi(\rho_2) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Для ее разрешимости необходимо положить $\lambda_1 = 0$. Тогда ее решение можно записать так :

$$\bar{\psi}_{1_n} = sin\sqrt{\lambda_{0_n}}r,$$

$$\bar{\psi}_{2_n} = \sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\, cos\sqrt{\lambda_{0_n}}r\ ,$$

$$\Pi_{2_n}\psi(r,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\, exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}r\Big)\ ,$$

$$Q_{2_n}\psi(r,\varepsilon) = -\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\Big[\frac{12 + \varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}}{12 - \varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}}\Big] cos\sqrt{\lambda_{0_n}} exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}(1-r)\Big)\ .$$

Приближение, удовлетворяющие уравнению и краевым условиям задачи (7),(8) с точностью (ε^3) найдем из следующей системы:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_2}{dr^2} + \lambda_0\bar{\psi}_2 = \frac{2}{4!}\frac{d^4\bar{\psi}_0}{dr^4} - \lambda_2\bar{\psi}_0 - \lambda_1\bar{\psi}_1\ ,$$

$$L_4^1(\Pi_2\psi) + \lambda_0\Pi_0\psi = 0,$$

$$L_4^2(Q_2\psi) + \lambda_0 Q_0\psi = 0,$$

$$D^i(\bar{\psi}_2(0) + \Pi_2\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_2(1) + Q_2\psi(1)) = 0, i = 0, 1,$$

$$\Pi_2\psi(\rho_1) \to 0, Q_2\psi(\rho_2) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Для разрешимости этой системы необходимо, чтобы правая часть уравнения была ортогональна набору собственных функций φ_m однородной задачи, т.е.

$$\int_0^1 \Big(\frac{2}{4!}\frac{d^4\bar{\psi}_0}{dr^4} - \lambda_2\bar{\psi}_0 - \lambda_1\bar{\psi}_1\Big)\varphi_m dr = 0.$$

Это условие позволяет вычислить λ_{2_n}, так как φ_{0_m} является полной ортонормированной системой функций на отрезке $[0, 1]$,

$$\lambda_{2_n} = \frac{2}{4!}\int_0^1 \varphi_{0_n}\frac{d^4\bar{\psi}_{0_n}}{dr^4}dr = \frac{2}{4!}{\lambda_{0_n}}^2.$$

Собственные значения λ_{4_n}/π^2 задачи (7),(8) с точностью $o(\varepsilon^3)$ приведены в следующей таблице для различных ε.

n	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$
1	1.126932	1.011655	1.001155	1.000115
2	4.155408	4.046721	4.004623	4.000461
3	10.189059	9.105493	9.010406	9.001038
4	18.189037	16.18846	16.01851	16.00184
5	28.575963	25.29631	25.02885	25.00284

Решение последней системы имеет такой вид:

$$\bar{\psi}_{2_n} = sin\sqrt{\lambda_{0_n}}r - \varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}\,cos\sqrt{\lambda_{0_n}}r +$$

$$+ r\Big(\frac{\lambda_{1_n} - \lambda_{0_n}^2}{2\sqrt{\lambda_{0_n}}}\Big)(\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}}sin\sqrt{\lambda_{0_n}}r + cos\sqrt{\lambda_{0_n}}r),$$

$$\Pi_{2_n}\psi = \Big(\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}} - \frac{1}{2}\sqrt{\lambda_{0_n}^3}\Big)\, exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}r\Big)$$

$$Q_{2_n}\psi = \Big(1 - \frac{\sqrt{3}}{\varepsilon}\lambda_{0_n}(1-r)\Big)\Big(\varepsilon\sqrt{\frac{\lambda_{0_n}}{12}} cos\sqrt{\lambda_{0_n}} - sin\sqrt{\lambda_{0_n}}\Big) exp\Big(-\frac{\sqrt{12}}{\varepsilon}(1-r)\Big)\ .$$

Эту процедуру можно продолжить далее и построить асимптотический ряд, который будет приближать решение задачи (7),(8) с точностью до любого заданного порядка ε.

Теперь рассмотрим краевую задачу для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения шестого порядка

$$\frac{2}{6!}\varepsilon^4\frac{d^6\psi_6}{dr^6} - \frac{2}{4!}\varepsilon^2\frac{d^4\psi_6}{dr^4} + \frac{d^2\psi_6}{dr^2} + \lambda_6\psi_6 = 0\ , \tag{16}$$

$$D^i\psi_6(0) = D^i\psi_6(1) = 0,\ i = 0,1,2. \tag{17}$$

Нулевое приближение найдем, решив систему

$$\frac{d^2\bar{\psi}_0}{dr^2} + \lambda_0\bar{\psi}_0 = 0,$$

$$\frac{2}{6!}\frac{d^6\Pi_0\psi}{d{\rho_1}^6} - \frac{2}{4!}\frac{d^4\Pi_0\psi}{d{\rho_1}^4} + \frac{d^2\Pi_0\psi}{d{\rho_1}^2} = 0\ ,$$

$$\frac{2}{6!}\frac{d^6Q_0\psi}{d{\rho_2}^6} - \frac{2}{4!}\frac{d^4Q_0\psi}{d{\rho_2}^4} + \frac{d^2Q_0\psi}{d{\rho_2}^2} = 0\ ,$$

$$D^i(\bar{\psi}_0(0) + \Pi_0\psi(0)) = D^i(\bar{\psi}_0 dr^i(1) + Q_0\psi(1)) = 0,$$
$$i = 0,1,2.$$

Ее решение выглядит так:

$$\bar{\psi}_{0_n} = sin\sqrt{\lambda_{0_n}}r + \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}k_1}{\varepsilon^2\lambda_{0_n} - k_1^2 + k_2^2} cos\sqrt{\lambda_{0_n}}r\ ,$$

$$\Pi_{0_n}\psi = \Big[C_1 sin\,\frac{k_2}{\varepsilon}r + C_2 cos\,\frac{k_2}{\varepsilon}r\Big] exp\Big(-\frac{k_1}{\varepsilon}r\Big),$$

$$C_1 = -\frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}(k_2^2 - k_1^2 - \varepsilon^2\lambda_{0_n})}{k_2(k_2^2 + k_1^2 - \varepsilon^2\lambda_{0_n})},$$

$$C_2 = \frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}k_1}{k_2^2 + k_1^2 - \varepsilon^2\lambda_{0_n}},$$

$$Q_{0_n}\psi = \Big[D_1 sin\,\frac{k_2}{\varepsilon}(1-r) + D_2 cos\,\frac{k_2}{\varepsilon}(1-r)\Big] exp\Big(-\frac{k_1}{\varepsilon}(1-r)\Big),$$

$$D_1 = \frac{\varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}[(k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n})^2+3\varepsilon^2\lambda_{0_n}k_1^2][k_2^2-k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n}]}{k_2[k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n}][(k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n})^2-4\varepsilon^2\lambda_{0_n}k_1^2]} cos\sqrt{\lambda_{0_n}},$$

$$D_2 = -\frac{2\varepsilon\sqrt{\lambda_{0_n}}[(k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n})^2+3\varepsilon^2\lambda_{0_n}k_1^2]}{[k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n}][(k_2^2+k_1^2-\varepsilon^2\lambda_{0_n})^2-4\varepsilon^2\lambda_{0_n}k_1^2]} cos\sqrt{\lambda_{0_n}},$$

где

$$k_1 = 4.1215085, \qquad k_2 = 1.4095506.$$

Собственные значения λ_{0_n} находятся из нелинейного уравнения

$$tg\sqrt{\lambda_0} = \frac{4\varepsilon\sqrt{\lambda_0}k_1(k_1^2+k_2^2-\varepsilon^2\lambda_0)}{(k_1^2+k_2^2)^2-2\varepsilon^2\lambda_0(3k_1^2+k_2^2)+\varepsilon^4\lambda_0^2}.$$

Значения λ_{0_n}/π^2 приведены в следующей таблице для различных ε.

n	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$	$\varepsilon = 0.0001$
1	1.1990925	1.017606	1.001739	1.000173
2	4.7930609	4.070423	4.006959	4.000694
3	10.771987	9.158447	9.015659	9.001561
4	19.119479	16.28166	16.02783	16.00277
5	30.852578	25.44005	25.04349	25.00434

В этом случае, как и для задачи (13),(14), процедуру построения асимптотического ряда можно продолжить далее и получить асимптотическое решение задачи (16),(17) с точностью до любого порядка ε.

Сравнение асимптотических решений краевых задач (13),(14) и (16),(17) с решением вырожденной задачи (9),(10) на отрезке $[0,1]$ при различных ε приведены ниже в таблице.

	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
δ_{4_1}	0.187475	0.015571	0.000935
δ_{6_1}	0.328535	0.031118	0.002951
δ_{4_2}	0.364892	0.031137	0.001872
δ_{6_2}	0.686480	0.062247	0.006144
δ_{4_3}	0.524017	0.046690	0.002807
δ_{6_3}	1.070909	0.093399	0.009230
δ_{4_4}	0.791368	0.062224	0.003743
δ_{6_4}	1.492019	0.124585	0.012368
δ_{4_5}	0.769316	0.077733	0.004679
δ_{6_5}	1.983409	0.156128	0.015464

Здесь

$$\delta_{4_n} = \max_{r\in(0,1)} |\psi_{4_n}(r,\varepsilon) - \psi_{4_n}(r,0),|$$

$$\delta_{2_n} = \max_{r\in(0,1)} |\psi_{6_n}(r,\varepsilon) - \psi_{6_n}(r,0).|$$

Это сравнение позволяет сделать вывод о том, что с возрастанием порядка дифференциального уравнения решения и собственные значения этих краевых задач в случае постоянного потенциала стремится к некоторому предельному решению при условии, что $\varepsilon << 1$, т.е.

$$\psi_{2m} \to \psi_\infty, \quad \lambda_{2m} \to \lambda_\infty.$$

Кроме того, при устремлении малого параметра к нулю $\varepsilon \to 0$ асимптотические решения и собственные значения краевых задач (13),(14) и (16),(17) сходятся к решению вырожденной задачи (9),(10) равномерно на отрезке $[\delta, 1-\delta]$, где δ — достаточно мало.

4. Построение асимптотического решения в случае осцилляторного потенциала. В нерелятивистской квантовой механике колебания линейного гармонического осциллятора исследуются с помощью следующего потенциала:

$$V(r) = x^2.$$

Здесь мы ограничимся дифференциальным уравнением 4-го порядка и перейдем в этом уравнении к безразмерным переменным. Сформулируем следующую краевую задачу на оси $[0, +\infty)$:

$$-\frac{1}{12}\varepsilon^2\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{d^2w}{dx^2} + (\lambda - x^2)w = 0, \tag{18}$$

$$D^i w(0) = D^i w(+\infty) = 0, \; i = 0,1. \tag{19}$$

Вырожденная задача (18),(19) имеет вид:

$$\frac{d^2w_n}{dx^2} + (\lambda_n - x^2)w_n = 0,$$

$$w_n(0) = w_n(\infty) = 0.$$

Ее решениями являются функции Эрмита:

$$w_n = exp(-x^2/2)H_n(x), \lambda_n = 2n+1, n = 1,3,5,...,$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита.

Собственные функции и собственные значения для задачи (18),(19) будем искать в виде асимптотических рядов по степеням ε

$$w(x,\varepsilon)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k(\bar{w}_k(x)+\Pi_k w(\rho_1)),$$

$$\lambda=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k,$$

где $\rho_1=x/\varepsilon$.

Используя полученные выше разложения, можно выписать системы уравнений для нахождения $\bar{w}_k(x),\Pi_k w(\rho_1),q_k$. Для $\bar{w}_0,\Pi_0 w,q_0$ имеем:

$$\frac{d^2\bar{w}_0}{dx^2}+(\lambda_0-x^2)\bar{w}_0=0,$$

$$-\frac{2}{4!}\frac{d^4\Pi_0 w}{d{\rho_1}^4}+\frac{d^2\Pi_0 w}{d{\rho_1}^2}=0\ ,$$

$$D^i(\bar{w}_0(0)+\Pi_0 w(0))=D^i\bar{w}_0(\infty)=0,i=0,1,$$

$$\Pi_0 w(\rho_1)\to 0,\varepsilon\to 0.$$

Решив ее, получим:

$$\bar{w}_{0_n}(x)=w_n(x),$$

$$\Pi_{0_n}w(x)=\varepsilon\Psi(\rho_1)\frac{H_n(0)}{\sqrt{12}}[exp(-\sqrt{12}\rho_1)-1],$$

$$\lambda_{0_n}=2n+1,n=1,3,5,...,$$

где $\Psi(\rho_1)$ — сглаживающая функция [13], непрерывная вместе со всеми своими производными на оси $[0,+\infty)$, причем $\Psi(\rho_1)=1$ при $0<x<\delta$ и $\Psi(\rho_1)=0$ при $x>\delta$, где $\delta<<1$ не зависит от ε и x).

Далее ,

$$\frac{d^2\bar{w}_1}{dx^2}+(\lambda_0-x^2)\bar{w}_1+q_1\bar{w}_0=0,$$

$$-\frac{2}{4!}\frac{d^4\Pi_1 w}{d{\rho_1}^4}+\frac{d^2\Pi_1 w}{d{\rho_1}^2}=0\ ,$$

$$D^i(\bar{w}_1(0)+\Pi_1 w(0))=D^i\bar{w}_1(\infty)=0,i=0,1.$$

$$\Pi_1 w(\rho_1)\to 0,\varepsilon\to 0.$$

Ее решение:

$$\bar{w}_{1_n}(x)=w_n(x),$$

$$\Pi_{1_n}w(x)=\varepsilon\Psi(\rho_1)\frac{H_n(0)}{\sqrt{12}}[exp(-\sqrt{12}\rho_1)-1],$$

$$\lambda_{1_n} = 0.25\varepsilon(n^2 + (n+1)^2), n = 1, 3, 5, ...$$

Как видно, полученные решения регулярно приближают решение задачи (18),(19) на полупрямой $[0, +\infty)$ с точностью $o(\varepsilon^2)$.

Теперь для любого $k > 1$

$$\frac{d^2\bar{w}_k}{dx^2} - x^2\bar{w}_k + \sum_{p=0}^{k} \lambda_p \bar{w}_{k-p} - \frac{1}{12}\frac{d^4\bar{w}_{k-2}}{dx^4} = 0,$$

$$-\frac{2}{4!}\frac{d^4\Pi_k w}{d\rho_1{}^4} + \frac{d^2\Pi_k w}{d\rho_1{}^2} = 0\ ,$$

$$D^i(\bar{w}_k(0) + \Pi_k w(0)) = D^i\bar{w}_k(\infty) = 0, i = 0, 1.$$

$$\Pi_k w(\rho_1) \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Таким образом, процедуру построения асимптотического ряда можно продолжить далее и построить асимптотическое решение задачи (18),(19) с точностью до любого заданного порядка ε.

5. Заключение. На основе методов теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений мы рассмотрели краевые задачи для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка в случае постоянных и переменных коэффициентов. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности метода пограничных функций для данного класса задач.

Литература

[1] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento, **29**, 380 (1963).

[2] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze.Nuovo Cimento, **30**, 134 (1963).

[3] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze. Phys. Let., **4**, 325 (1963).

[4] V. G. Kadyshevsky. Nucl.Phys., **B6**, 125 (1968).

[5] V. G. Kadyshevsky, M. Mateev. Nuovo Cimento, **55A**, 275 (1967).

[6] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov. Nuovo Cimento, **55A**, 1233 (1968).

[7] Е. П. Жидков, В. Г. Кадышевский, Ю. В. Катышев. ТМФ, **т.3**, N2, 1970.

[8] А.Н.Тихонов. Мат.сб. 31(73), 3(1952) с.575.

[9] М.И.Вишик,Л.А.Люстерник.УМН,том 12,вып.5(77),1957,с.3.

[10] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. "Наука", 1973.

[11] А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений,М.:Высш. школа,1990.

[12] В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, Е. В. Федотова. ЖВМиМФ, **27**, N2, 1987.

[13] В. Ф. Бутузов, Н. Н. Нефедов, Е. В. Полежаева. ЖВМиМФ, **29**, N7, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 января 2000 года.

Амирханов И.В. и др. P11-2000-13
Асимптотическое приближение решений и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера

Получена асимптотика собственных функций и собственных значений для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера. Показана регулярная сходимость асимптотических разложений решений краевых задач к вырожденным задачам для нерелятивистского уравнения Шредингера. Полученные разложения хорошо согласуются с результатами численного эксперимента.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Amirkhanov I.V. et al. P11-2000-13
Asymptotic Approximation of Solutions and Eigenvalues of a Boundary Problem for a Singular Perturbated Relativistic Analog of Schrödinger Equation

Asymptotics of eigenfunctions and eigenvalues has been obtained for a singular perturbated relativistic analog of Schrödinger equation. A singular convergence of asymptotic expansions of the boundary problems to degenerated problems is shown for a nonrelativistic Schrödinger equation. The expansions obtained are in a good agreement with a numeric experiment.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 13.03.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,62
Тираж 320. Заказ 51892. Цена 1 р. 96 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области