

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-2000-51

Э.А.Айрян, П.Н.Вабишевич¹, М.Павлуш², А.В.Федоров

АДДИТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ
ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ
В МНОГОПЛАСТОВЫХ СИСТЕМАХ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

¹Институт математического моделирования РАН, Москва

²Технический университет, Кошице, Словакия

Моделирование фильтрации жидкости в практических приложениях основывается чаще всего на использовании моделей плановой фильтрации [1, 2] с осреднением фильтрационных потоков по толщине водоносного слоя. Типичной является ситуация, когда отдельные водоносные слои перемежаются слабопроницаемыми пластами. Математические модели фильтрации в многопластовых системах строятся на основе предположения о преимущественном продольном течении жидкости в водоносных слоях и поперечном течении в разделяющих пластах (модель Митяева - Гириного [3, 4, 5]). Эти математические модели могут быть обоснованы с помощью теории гомогенизации [6].

Для численного решения задач плановой фильтрации используются различные подходы [7]. Простейший из них состоит в использовании обычных разностных схем с весами [8], например, чисто неявной схемы для параболической связанной системы уравнений для напора в каждом водоносном слое и применении для решения соответствующей системы того или иного итерационного процесса, в основе которого лежит идея определения напора в каждом слое отдельно. В [7] строятся разностные схемы расщепления по пространственным переменным. Для многопластовых систем реализация такого подхода даже для одномерных задач (зависимость только от одной продольной переменной) связана с использованием матричной прогонки, что, конечно, значительно усложняет расчетные схемы.

Для построения экономичных разностных схем традиционно используются аддитивные разностные схемы, примером которых выступают схемы переменных направлений и локально-одномерные схемы [8], а для нестационарных задач строятся безытерационные вычислительные алгоритмы на основе использования регионально-аддитивных схем [9].

В данной работе на основе общих результатов теории разностных схем анализируются разностные схемы для решения задач плановой фильтрации в многопластовых системах. Основное внимание уделяется схемам расщепления по физическим процессам, когда разделяются процессы фильтрации вдоль слоев и перетоки между ними. Получен ряд абсолютно устойчивых аддитивных разностных схем, реализация которых не связана с существенной переработкой программного обеспечения, которое имеется для численного решения задач фильтрации в однопластовых системах. Строятся параллельные алгоритмы решения задач фильтрации в многопластовых системах. Наиболее естественный подход связан с решением задачи фильтрации в каждом водоносном слое на отдельном процессоре. Обсуждается программная реализация такого подхода на многопроцессорной вычислительной системе *SPP2000*.

1. Постановка задачи

Рассматривается плановая фильтрация в многопластовой системе, состоящей (см. рис.1) из p водоносных слоев, которые разделяются слабопроницаемыми пластами. Ограничимся для примера случаем, когда все эти слои горизонтальны. Гидростатический напор в точке (x, y) слоя α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, на момент времени t обозначим $H_\alpha(x, y, t)$. Пусть $k_\alpha = k_\alpha(x, y)$ – коэффициент фильтрации, m_α – мощность водопроницаемого слоя α , $T_\alpha = k_\alpha m_\alpha$ – проводимость слоя, $\mu_\alpha = \mu_\alpha(x, y)$ – упругая емкость

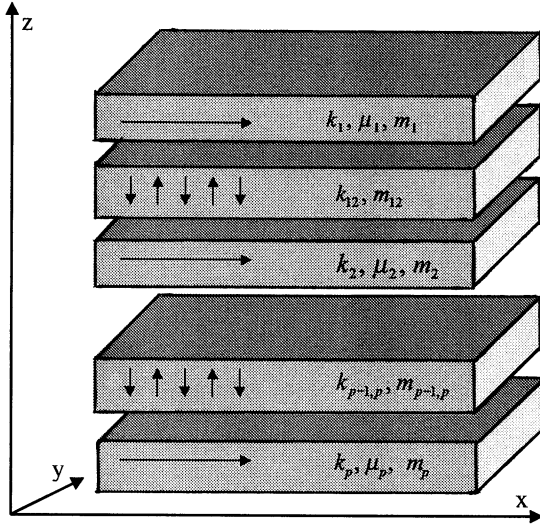


Рис. 1. Многопластовая система

слоя. Соответственно, $k_{\alpha,\beta} = k_{\alpha,\beta}(x, y)$, $\beta = \alpha + 1, \alpha - 1$ — коэффициент фильтрации и $m_{\alpha,\beta}$ — мощность слабопроницаемого пласта, $\chi_{\alpha,\beta} = k_{\alpha,\beta}/m_{\alpha,\beta}$ — коэффициент перетока [1, 7].

Считая выполненными предположения перетока ($k_{\alpha}/m_{\alpha} \ll \chi_{\alpha,\beta}$), будем использовать для описания фильтрации в каждом водоносном слое α , $\alpha = 2, 3, \dots, p-1$, уравнение

$$\mu_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} T_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_{\alpha} \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial y} + \quad (1)$$

$$+ \chi_{\alpha,\alpha+1}(H_{\alpha+1} - H_{\alpha}) + \chi_{\alpha,\alpha-1}(H_{\alpha-1} - H_{\alpha}) + f_{\alpha}(x, y, t),$$

где $f_{\alpha}(x, y, t)$ — источник жидкости. Для нижнего и верхнего слоев имеем

$$\mu_1 \frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} T_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} + \quad (2)$$

$$+ \chi_{1,2}(H_2 - H_1) - \chi_{1,0}H_1 + f_1(x, y, t),$$

$$\mu_p \frac{\partial H_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} T_p \frac{\partial H_p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} T_p \frac{\partial H_p}{\partial y} + \quad (3)$$

$$+ \chi_{p,p-1}(H_{p-1} - H_p) - \chi_{p,p+1}H_p + f_p(x, y, t).$$

Уравнения (2), (3) при $\chi_{1,0} = 0$, $\chi_{p,p+1} = 0$ соответствуют предположению о том, что верхний и нижний слой ограничены водоупором.

В силу закона сохранения масс в (1) – (3) имеем

$$\chi_{\alpha,\alpha+1} = \chi_{\alpha+1,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p-1. \quad (4)$$

Система уравнений (1) – (3) рассматривается в некоторой расчетной области D . Для простоты ограничимся случаем, когда D – прямоугольник:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b\}.$$

Граничные условия возьмем в простейшем виде:

$$H_\alpha(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial D, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (5)$$

Осталось выписать начальные условия:

$$H_\alpha(x, y, 0) = H_\alpha^0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (6)$$

Для приближенного решения поставленной начально - краевой задачи (1) – (6) используются разностные методы [8].

2. Дифференциально-разностная задача

Введем некоторые обозначения. Пусть вектор

$$U = U(x, y, t) = \{H_1, H_2, \dots, H_p\}$$

есть решение задачи (1) – (6), а

$$F = F(x, y, t) = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}.$$

Определим через M и θ диагональные матрицы:

$$M = \{\mu_\alpha(x, y)\delta_{\alpha,\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad (7)$$

$$\theta = \{T_\alpha(x, y)\delta_{\alpha,\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p,$$

где $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера.

Пусть теперь K – трехдиагональная матрица, соответствующая перетоку через разделяющие пласты:

$$K = \{\kappa_{\alpha,\beta}\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad (8)$$

причем

$$\kappa_{\alpha,\alpha-1} = -\chi_{\alpha,\alpha-1}, \quad \kappa_{\alpha,\alpha+1} = -\chi_{\alpha,\alpha+1}, \quad \kappa_{\alpha,\alpha} = \chi_{\alpha,\alpha-1} + \chi_{\alpha,\alpha+1}. \quad (9)$$

Наконец, определим

$$\mathcal{L}U = - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \theta \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \theta \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\}. \quad (10)$$

Принимая во внимание обозначения (7) – (10), запишем систему уравнений (1) – (3) в виде

$$M \frac{\partial U}{\partial t} + \mathcal{L}U + KU = F(x, y, t), \quad (x, y) \in D. \quad (11)$$

Граничные и начальные условия (5), (6) в аналогичных обозначениях принимают вид

$$U(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (12)$$

$$U(x, y, 0) = U^0(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (13)$$

Введем гильбертово пространство \mathcal{H} , в котором скалярное произведение определяется выражением

$$(U, W) = \sum_{\alpha=1}^p (u_\alpha, w_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^p \int_D u_\alpha(x, y) w_\alpha(x, y) dx dy.$$

С учетом (10), (12) легко устанавливается положительность и самосопряженность оператора \mathcal{L} , так как

$$(\mathcal{L}U, U) = \sum_{\alpha=1}^p \int_D T_\alpha(x, y) \left[\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy > 0.$$

Аналогично, в силу (9) (диагональное преобладание), имеем [10] $K \geq 0$, а (4) обеспечивает $K = K^*$. При $\chi_{1,0} > 0$ и/или $\chi_{p,p+1} > 0$ получим $K > 0$. Очевидны аналогичные свойства оператора M : $M = M^* > 0$ в \mathcal{H} .

Определим норму в пространстве \mathcal{H} , порожденную оператором M , соотношением $\|U\|_M^2 = (MU, U)$. Тогда, умножая уравнение (11) скалярно на U , для решения задачи (11) – (13) получим оценку

$$\|U(x, y, t)\|_M \leq \|U^0(x, y)\|_M + \int_0^t \|F(x, y, s)\|_{M^{-1}} ds. \quad (14)$$

Естественно для разностного аналога задачи (11) – (13) требовать выполнения оценки устойчивости разностного решения типа (14).

Рассмотрим вначале вопросы аппроксимации по пространственным переменным. В прямоугольнике D введем равномерную прямоугольную сетку с шагами h_x и h_y :

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_h &= \omega_h + \gamma_h = \{(x, y) | (x, y) = (x_i, y_j), \\ x_i &= ih_x, i = 0, 1, \dots, N_x, \quad y_j = jh_y, j = 0, 1, \dots, N_y, \\ N_x h_x &= a, N_y h_y = b\}, \end{aligned}$$

где через ω_h обозначено множество внутренних, а γ_h – множество граничных узлов сетки.

Считая коэффициенты уравнения, правую часть и начальные условия достаточно гладкими, поставим в соответствие задаче (11) – (13) дифференциально - разностную задачу для определения сеточной вектор - функции $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$:

$$M \frac{dV}{dt} + LV + KV = F(x, y, t), \quad (x, y) \in \omega_h, \quad (15)$$

$$V(x, y, 0) = U^0(x, y), \quad (x, y) \in \omega_h. \quad (16)$$

В стандартных безындексных обозначениях теории разностных схем [8] разностный оператор L определим следующим образом:

$$LV = -\{(\theta_1 V_{\bar{x}})_x + (\theta_2 V_{\bar{y}})_y\}. \quad (17)$$

где, например,

$$\theta_1(x, y) = \theta(x - h_x/2, y), \quad \theta_2(x, y) = \theta(x, y - h_y/2).$$

В сеточном гильбертовом пространстве H скалярное произведение зададим в виде

$$(V, W) = \sum_{\alpha=1}^p (v_\alpha, w_\alpha) = \sum_{\alpha=1}^p \sum_{x \in \omega_h} v_\alpha(x, y) w_\alpha(x, y) h_x h_y.$$

В H имеем $M = M^* > 0$, $L = L^* > 0$, $K = K^* \geq 0$. На основании отмеченных свойств операторов и результатов общей теории устойчивости разностных схем [8, 11] далее строятся безусловно устойчивые разностные схемы для приближенного решения дифференциально - разностной задачи (15), (16). Устойчивость устанавливается в H , когда $(W, V)_M = (MW, V)$. Мы ограничимся в своем исследовании устойчивостью разностного решения по отношению к возмущению начальных условий (в уравнении (15) положим $F(x, y, t) = 0$). Переход к более общему случаю (устойчивость и по правой части) осуществляется обычным образом (см. [8, 11]).

3. Разностные схемы

Введем по временной переменной равномерную сетку с шагом $\tau > 0$:

$$\omega_\tau = \{t \mid t = t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots\}.$$

Приближенное решение задачи (15), (16) в момент времени t_n обозначим V^n . Отметим, что построенные операторы M , L и K - постоянные (не зависят от n).

Для задачи (15), (16) отметим прежде всего класс двухслойных разностных схем с весами. В этом случае (напомним, что в (15) правая часть равна нулю) имеем

$$M \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + (L + K)(\sigma V^{n+1} + (1 - \sigma)V^n) = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (18)$$

при заданном V^0 (см. (16)).

Запишем схему с весами (18) в каноническом виде двухслойной разностной схемы:

$$B \frac{V^{n+1} - V^n}{\tau} + AV^n = 0, \quad n = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Для операторов A и B из (18) имеем

$$B = M + \sigma A, \quad A = L + K. \quad (20)$$

В силу отмеченных выше свойств операторов L и K можем сделать вывод, что $A = A^* > 0$. Как показано в [11], устойчивость схемы (19), (20) в H_M будет иметь место при выполнении неравенства

$$M + (\sigma - 0,5)\tau A \geq 0. \quad (21)$$

При выполнении (21) справедлив разностный аналог оценки (14) :

$$\|V^{n+1}\| \leq \|V^n\|. \quad (22)$$

Специально отметим, что условия (21) являются необходимыми и достаточными. Из (21) следует, что устойчивость будет иметь место для всех $\sigma \geq 0,5$.

Безусловно устойчивые ($\sigma \geq 0,5$) разностные схемы (19), (20) характеризуются необходимостью обращения сеточного оператора B на каждом временном шаге и разностная схема (18) не принадлежит к классу экономичных разностных схем [8].

Естественным является направление построения разностных схем, для которых расчет напора на отдельном слое не был бы жестко связан, как в случае схемы (18) при $\sigma \neq 0$, с расчетом напора на других водоносных слоях. Обсудим возможности построения таким образом ориентированных разностных схем расщепления с позиций общей теории разностных схем.

Для приближенного решения задачи (15), (16) можно использовать различные варианты схем суммарной аппроксимации. Простейшая из них связана с естественным расщеплением оператора A на два оператора (см. (20)) L и K . Соответствующая схема суммарной аппроксимации имеет вид

$$M \frac{V^{n+1/2} - V^n}{\tau} + L[\sigma_1 V^{n+1/2} + (1 - \sigma_1)V^n] = 0, \quad (23)$$

$$M \frac{V^{n+1} - V^{n+1/2}}{\tau} + K[\sigma_2 V^{n+1} + (1 - \sigma_2)V^{n+1/2}] = 0, \quad (24)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

На первом полушаге (см. (23)) рассматривается перенос жидкости в водоносных слоях, а на втором (см. (24)) - переток через разделяющие слабопроницаемые пласты. В таком контексте схема суммарной аппроксимации трактуется как схема расщепления по физическим процессам.

Аналогично схеме (18) устанавливается устойчивость схемы суммарной аппроксимации (23), (24). Из (23) при $\sigma_1 \geq 0,5$ имеем (см. (22))

$$\|V^{n+1/2}\|_M \leq \|V^n\|_M. \quad (25)$$

Аналогичная оценка для уравнения (24) имеет место при дополнительном предположении существования обратного оператора K^{-1} . В рассматриваемом нами случае (см. уравнения (1) – (3) и условие (4)) существование обратного оператора, вообще говоря, не имеет места. Более благоприятная ситуация наблюдается, когда верхний и нижний слои ограничены не водоупором, а также слабопроницаемыми пластами, когда $\chi_{1,0}$ и $\chi_{p,p+1}$ положительны.

При выборе $\sigma_2 = 1$ имеет место оценка

$$\|V^{n+1}\|_M \leq \|V^{n+1/2}\|_M \quad (26)$$

для всех неотрицательных $\chi_{1,0}$ и $\chi_{p,p+1}$. Для доказательства достаточно скалярно домножить уравнение (24) на V^{n+1} . С учетом неотрицательности оператора K и в силу обобщенного неравенства Коши - Буняковского имеем

$$\|V^{n+1}\|_M^2 \leq (MV^{n+1/2}, V^{n+1/2}) \leq \|V^{n+1/2}\|_M \|V^{n+1}\|_M.$$

Отсюда и следует оценка (26). Объединяя (25), (26), мы и получаем искомую оценку устойчивости (22) при $\sigma_1 \geq 0,5$, при $\sigma_2 = 1$.

Реализация схемы суммарной аппроксимации (23), (24) связана с решением стандартных сеточных эллиптических задач для каждого отдельного слоя и учетом перетока. Для определения из (24) V^{n+1} при известном $V^{n+1/2}$ при $\sigma_2 = 1$ в каждом пространственном узле решается система линейных алгебраических уравнений с симметричной трехдиагональной матрицей:

$$(M + \tau K)V^{n+1} = MV^{n+1/2}. \quad (27)$$

С этой целью используется обычная трехточечная прогонка (метод Гаусса [8, 12].) Вычислительная устойчивость обеспечивается диагональным преобладанием.

Таким образом, этап (24) схемы суммарной аппроксимации (23), (24), связанный с учетом перетока, незначительно усложняет вычислительный алгоритм по сравнению с моделированием фильтрации в однопластовых системах и является экономичным (число арифметических действий, отнесенных к одному узлу при переходе на новый временной слой, не зависит от общего числа узлов).

Для построения экономичных схем используем схемы суммарной аппроксимации и при расчете движения жидкости в каждом отдельном слое. Пусть (см. (17))

$$L = L_x + L_y,$$

где

$$L_x V = -\{(\theta_1 V_x)_x \delta_{\alpha,\beta}\}, \quad L_y V = -\{(\theta_2 V_y)_y\}.$$

С учетом этого вместо (23) используем разностную схему:

$$M \frac{V^{n+1/4} - V^n}{\tau} + L_x [\sigma_1 V^{n+1/4} + (1 - \sigma_1) V^n] = 0, \quad (28)$$

$$M \frac{V^{n+1/2} - V^{n+1/4}}{\tau} + L_y [\sigma_1 V^{n+1/2} + (1 - \sigma_1) V^{n+1/4}] = 0. \quad (29)$$

Далее используется разностная схема (24) для определения V^{n+1} по найденному $V^{n+1/2}$.

Устойчивость схемы суммарной аппроксимации (24), (28), (29) исследуется аналогично схеме (23), (24). Ее реализация связана с последовательными прогонками по направлению x (см. (28)), по направлению y (см. (29)) и по вертикали (см. (24)).

Можно провести более глубокое расщепление и схемы (24). Представим оператор K в виде

$$K = K^+ + K^-, \quad (K^+)^* = K^-,$$

т.е. трехдиагональная матрица K расщепляется на нижнюю и верхнюю треугольные матрицы. Попеременно - треугольные разностные схемы предложены А.А. Самарским [13].

Вместо (24) используется схема

$$M \frac{V^{n+3/4} - V^{n+1/2}}{\tau} + K^+ [\sigma_2 V^{n+3/4} + (1 - \sigma_2) V^{n+1/2}] = 0, \quad (30)$$

$$M \frac{V^{n+1} - V^{n+3/4}}{\tau} + K^- [\sigma_2 V^{n+1} + (1 - \sigma_2) V^{n+3/4}] = 0. \quad (31)$$

Устойчивость разностной схемы (23), (30), (31) (или (28)-(31)) имеет место при тех же ограничениях, что и для схемы (23), (24).

Тем самым, на основе общих результатов теории экономичных разностных схем удается построить различные типы разностных схем для численного решения задач плановой фильтрации в многопластовых системах.

4. Параллельная реализация разностных схем

Рассматриваем разностную схему (28) – (31) расщепления задачи по физическим процессам. На первом полушаге (28), (29) рассматривается перенос жидкости в горизонтальных водоносных слоях, на втором полушаге (30), (31) рассматривается перенос жидкости по вертикали через разделяющие слабопроницаемые пласты. Уравнения (28), (29) на каждом водоносном слое α представляют собой системы линейных алгебраических уравнений с симметричными трехдиагональными матрицами, уравнения (30), (31) связывают неизвестные на слоях и представляют собой системы линейных алгебраических уравнений с соответственно верхней и нижней треугольными двухдиагональными матрицами.

Наиболее естественная параллельная реализация разностной схемы состоит в решении задачи фильтрации для каждого водоносного слоя на отдельном процессоре. В этом случае один шаг разностной схемы по времени осуществляется следующим алгоритмом.

1. Каждый процессор имеет значения напора v_α^n , $\alpha = 1, 2, \dots, p$, на сетке ω_h на водоносном слое α .
2. В соответствии с (28) осуществляем $N_y - 1$ прогонку в направлении x на каждом слое. В результате получаем значения $V^{n+1/4}$.
3. В соответствии с (29) осуществляем $N_x - 1$ прогонку в направлении y на каждом слое. В результате получаем значения $V^{n+1/2}$.
Прогонки на каждом слое осуществляются параллельно и не требуют никаких обменов данными между процессорами.
4. Решаем систему (30) с верхней треугольной матрицей снизу вверх (от p -го слоя к первому) для всех точек сетки ω_h . В результате получаем значения $V^{n+3/4}$.

5. Решаем систему (31) с нижней треугольной матрицей сверху вниз (от первого слоя к p -му) для всех точек сетки ω_h . В результате получаем значения V^{n+1} .

Эффективная параллельная реализация шагов 4 и 5 требует обмена данными между процессорами перед их выполнением. Для этого разобьем сетку ω_h на p частей, выбрав значение N_x в виде $N_x = k_x p + 1$, и введем вспомогательные сетки (см. рис.2):

$$\omega_\alpha = \{(x_i, y_j) \mid x_i = ih_x, i = (\alpha - 1)k_x + 1 \dots \alpha k_x, y_j = jh_y, j = 1, 2, \dots, N_y - 1\}.$$

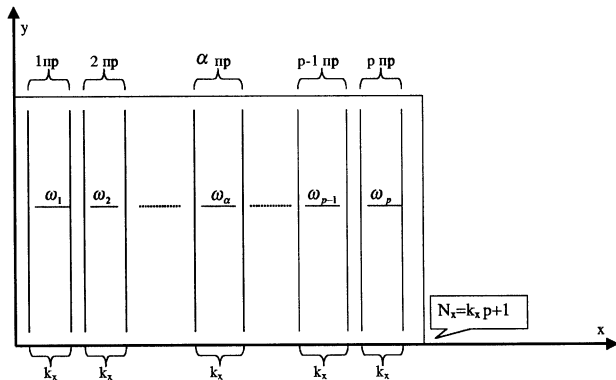


Рис. 2. Распределение точек сетки ω_h по процессорам

Процессору α предпишем обрабатывать неизвестные на сетках ω_α . На шаге 4 процессор α :

- принимает значения $v_1^{n+1/2}, \dots, v_{\alpha-1}^{n+1/2}, v_{\alpha+1}^{n+1/2}, \dots, v_p^{n+1/2}$ на сетках ω_α от процессоров $1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, p$, и размещает их вместо неизвестных $v_\alpha^{n+1/2}$ на сетках $\omega_\beta, \beta = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, p$;
- пересылает значения $v_\alpha^{n+1/2}$ на сетке $\omega_\beta, \beta = 1, \dots, \alpha - 1, \alpha + 1, \dots, p$, процессору β .

Для завершения одного шага разностной схемы по времени остается "вернуть" полученные значения V^{n+1} соответствующим процессорам.

Для многопроцессорной вычислительной системы *SPP2000* были написаны две программы на языке FORTRAN'77 с использованием MPI (Message Passing Interface) [14] для одного и p процессоров $p = 3, 4, 5, 6$. Программа для одного процессора (последовательная программа) обрабатывает p водоносных слоев. В качестве коэффициентов

уравнений, начальных и граничных условий, параметров разностной схемы выбирались следующие:

$$a = b = 1, \quad \tau = 0, 1, \quad \sigma_1 = 0, 5, \quad \sigma_2 = 1,$$

$$f_\alpha(x, y, t) = 0, \quad V_\alpha^0(x, y) = \alpha x(a - x)y(b - y)/p, \quad \mu_\alpha(x, y) = \alpha/p,$$

$$\theta_{1\alpha}(x, y) = \alpha(x - \frac{h_x}{2})y/p, \quad \theta_{2\alpha}(x, y) = \alpha x(y - \frac{h_y}{2})/p, \quad \chi_{\alpha, \alpha-1} = \chi_{\alpha, \alpha+1} = 5,$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p.$$

Расчеты проводились на трех сетках:

$$(N_x, N_y) = \{(151, 100); (301, 200); (601, 400)\},$$

где в представлении $N_x = pk_x + 1$, p и k_x выбирались по таблице

p	k_{x1}	k_{x2}	k_{x3}
3	50	100	200
4	38	75	150
5	30	60	120
6	25	50	100

На рисунке 3 приводится зависимость времени работы процессоров от их числа. Кругом обозначено среднее время работы одного процессора при счете по параллельной программе. Для сравнения квадратом обозначено время работы процессора

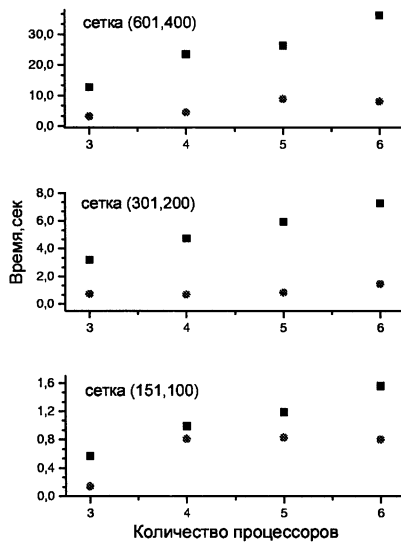


Рис. 3. Зависимость времени расчета от числа водоносных слоев (процессоров)

при счете по последовательной программе. Оба случая отвечают p водоносным слоям $p = 3, 4, 5, 6$. Напомним, что в параллельной программе число p представляет также число используемых процессоров. Для отсчета времени была использована процедура *MPI.Wtime()*. Значения времени в секундах. Из рисунка видно, что время счета по параллельной программе несущественно возрастает при увеличении числа водоносных слоев p , что свидетельствует о хорошей параллелизации алгоритма.

Авторы выражают признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, грант 99-01-01101, при поддержке которого выполнена представленная работа. Авторы выражают благодарность профессору И.В.Пузынину за внимание к работе и полезные обсуждения, А.П.Сапожникову и Т.Ф.Сапжниковой за помощь и консультации по работе с *SPP2000*.

Литература

- [1] Г а в и ч И.К. Гидрогеодинамика.— М.: Недра, 1988.
- [2] П о л у б а р и н о в а - К о ч и н а П.Я. Теория движения грунтовых вод.— М.: Наука, 1977.
- [3] М и т я е в А.Н. Действие колодца в напорном бассейне подземных вод.— Изв. Туркм. фил. АН СССР, №3 — 4, с.43-50,1946.
- [4] М и т я е в А.Н. Напорный комплекс подземных вод и колодцы.— Изв. АН СССР, Отд. тех. н. №9, с.1069-1088, 1947.
- [5] М и т я е в А.Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод.— Изв. АН СССР, Отд. тех. н. №3, с.293-300, 1948.
- [6] С а н ч е с - П а л е н с и я Э. Неоднородные среды и теория колебаний.— М.: Наука, 1984.
- [7] Л о м а к и н Е.А., М и р о н е н к о В.А., Ш е с т а к о в В.М. Численное моделирование геофильтрации.— М.: Недра, 1988.
- [8] С а м а р с к и й А.А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.
- [9] С а м а р с к и й А.А., В а б и щ е в и ч П.Н., М а т у с П.П. Разностные схемы с операторными множителями. М., 1998.
- [10] Г а н т м а х е р Ф.Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1988.
- [11] С а м а р с к и й А.А., Г у л и н А.В. Устойчивость разностных схем.— М.: Наука, 1978.
- [12] С а м а р с к и й А.А., Н и к о л а е в Е.С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.

- [13] Самарский А.А. Об одном экономичном алгоритме численного решения систем дифференциальных и алгебраических уравнений.— ЖВМ и МФ. Т.4, № 3, с. 580-585, 1964.
- [14] Snir M., Otto S.W., Huss-Lederman S., Walker D.W., Dongarra J. MPI. The complete reference.— The MIT Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge (USA), 1997.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 2000 года.

Айрян Э.А. и др.

P11-2000-51

Аддитивные схемы для задач фильтрации жидкости
в многопластовых системах

В работе на основе общих результатов теории разностных схем анализируются разностные схемы для решения задач плановой фильтрации в многопластовых системах. Основное внимание уделяется схемам расщепления по физическим процессам, когда разделяются процессы фильтрации вдоль слоев и перетоки между ними. Получен ряд абсолютно устойчивых аддитивных разностных схем, реализация которых не связана с существенной переработкой программного обеспечения, которое имеется для численного решения задач фильтрации в однопластовых системах. Строятся параллельные алгоритмы решения задач фильтрации в многопластовых системах. Наиболее естественный подход связан с решением задачи фильтрации в каждом водоносном слое на отдельном процессоре. Обсуждается программная реализация такого подхода на многопроцессорной вычислительной системе *SPP2000*.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод авторов

Ayrjan E.A. et al.

P11-2000-51

Additive Difference Schemes for Filtration Problems
in Multilayer Systems

In the present paper difference schemes for solution of the plane filtration problem in multilayer systems are analyzed within the framework of difference schemes general theory. Attention is paid to splitting the schemes on physical processes of filtration along water-carrying layers and vertical motion between layers. Some absolutely stable additive difference schemes are obtained the realization of which needs no software modification. Parallel algorithm connected with the solving of the filtration problem in every water-carrying layer on a single processor is constructed. Program realization on the multi-processor system *SPP2000* at JINR is discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Р.Д.Фоминой

Подписано в печать 10.04.2000

Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,43

Тираж 320. Заказ 51964. Цена 1 р. 72 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области