

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P17-2000-35

Ф.К.Рахимов*, Х.О.Абдуллоев*, В.К.Федянин

ОДНО- И ДВУХСОЛИТОННОЕ РЕШЕНИЕ
СКАЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ
ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМИ
ПОТЕНЦИАЛАМИ

*Таджикский государственный национальный университет

2000

Как известно, в последние годы алгебро-геометрический метод интегрирования [1] стал одним из наиболее неоспоримых методов для построения широкого класса решений ряда фундаментальных нелинейных уравнений математической физики. Этот метод позволяет получить в явном виде [3,4] известные и новые многосолитонные решения данных уравнений, в частности нелинейного уравнения Шредингера, и является одним из наиболее простых методов, позволяющих получать решения и в тех случаях, когда для вспомогательных нелинейных задач нет последовательного решения прямой и обратной задачи рассеяния.

Часто в физике при исследовании нелинейных волновых процессов возникают системы нелинейных дифференциальных уравнений, моделирующих взаимодействие конечного числа волн или волновых пакетов, которые управляются скалярным нелинейным уравнением Шредингера (СНУШ):

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + U(x,t)\Psi = 0, \quad (1)$$

в котором роль потенциала выполняет низкочастотная волна, описываемая следующими уравнениями:

$$(\partial_t + \partial_x)U = \pm|\Psi|^2 - \text{уравнение Яджима - Ойкава}, \quad (2)$$

$$(\square + \alpha\partial_x)U - \beta\partial_x U = -|\Psi|_{xx}^2 - \text{уравнение Маханькова}. \quad (3)$$

Следует отметить, что соотношения (2) [5] и (3) [6] в подавляющем большинстве случаев описывают смесь газов в магнитных кристаллах, обладающих слоистой структурой, где взаимодействие между слоями влияет на динамическое поведение кристалла. В низкотемпературном пределе их можно отождествить с моделью бозе-газа Гейзенберга, осуществляющей динамическое описание соответствующих систем.

Используя алгебро-геометрический метод интегрирования [1], приступим к получению солитонных решений СНУШ с условием самосогласования вида

$$U_t = \pm 2|\Psi|_x^2. \quad (4)$$

Рассмотрим односолитонный случай. В рамках этой теории рациональная функция $E(k)$ и условия самосогласования для потенциала $U(x,t)$, который описывается уравнением (4), имеют следующий вид:

$$E(k) = k^2 + \alpha k + \varepsilon \frac{b^2}{k - k_1}, \quad (5)$$

$$\frac{u_t}{2} + \alpha \frac{u'_x}{2} = \varepsilon |U(x,t)_x|^2 - \left(\sum_{i,j=1}^N \Psi_i E_{ij} \Psi_j \right)_x, \quad (6)$$

где $E_{ij} = C_{ij}(E(\bar{k}_i) - E(k_j))$.

С учетом выбранных условий решение можем записать

$$\Psi(x,t) = \sqrt{|\lambda|} \sum_{i=1}^N \gamma_i \Psi_i(x,t) = \sqrt{|\lambda|} \frac{\det M^l(x,t,k)}{\det M(x,t)}, \quad (7)$$

где матрица $M^l(x,t,k)$ выражается соотношением

$$M_{ij}^l = M_{ij} \text{ при } l \neq j; M_{ij}^l = -e^{-i\omega_i} \text{ при } l = j \quad (8)$$

$$M_{ij} = C_{ij} + \frac{e^{i(\omega_i - \omega_j)}}{\kappa_i - \kappa_j},$$

$$\omega_i = \kappa_i(x + \kappa_i t),$$

$$\kappa = \alpha + i\beta.$$

Учитывая (8), односолитонное решение СНУШ сконструируем в следующем виде:

$$\Psi = \sqrt{\lambda} \frac{4\gamma e^{i(\alpha x + (\alpha^2 - \beta^2)t + \ln \alpha \beta)}}{D \operatorname{ch}(\beta x + 2\alpha \beta t + \eta)}, \quad (9)$$

$$\text{где } e^{-\eta} = \left[\frac{\lambda \gamma^2}{2\alpha} \right]^{1/2}, \quad D = [\kappa |\gamma|^2 \cdot 2\alpha]^{1/2}.$$

В случае $N=1$, используя (9), можно сконструировать “солитонный” потенциал оператора Шредингера, убывающий по всем направлениям, кроме $k = -2\alpha t + \text{const}$:

$$U(x, t) = -4D\lambda^2 \beta^2 \left(\frac{1}{\operatorname{ch}(\beta x + 2\alpha \beta t + \eta)} \right). \quad (10)$$

В данном случае величины α и β нужно выбирать лежащими в первом квадранте комплексной плоскости, т.е. $\alpha > 0, \beta > 0$.

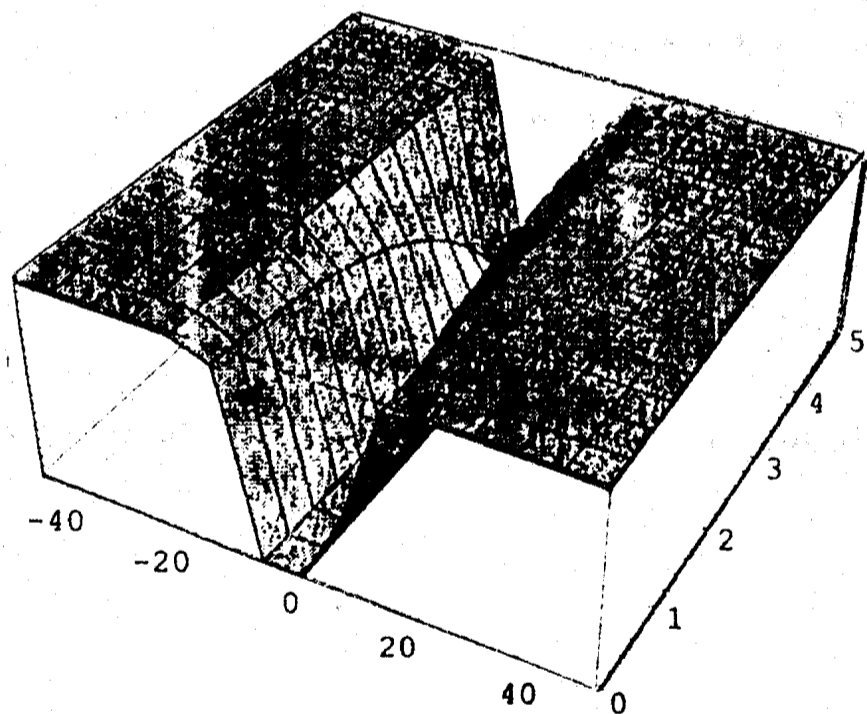


Рис. 1а) Вид функции $U(x,t)$ по формуле (10),
 $x \div -40;0$,
 $t \div 0;5$

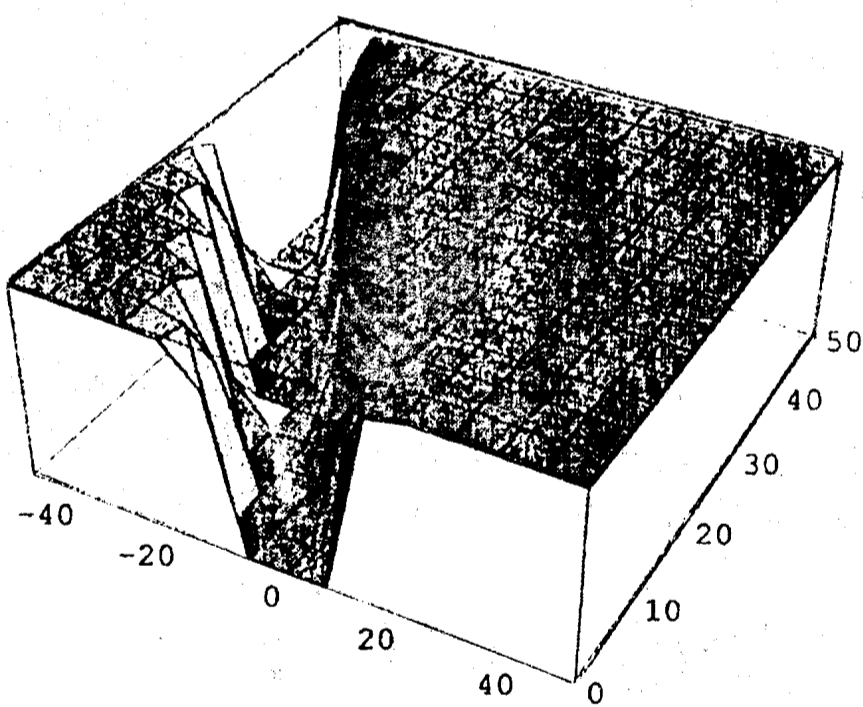


Рис. 1б) Вид функции $U(x,t)$ по формуле (10),
 $x \div -40;0$,
 $t \div 0;50$

В случае условия самосогласования

$$U_t = 2|\Psi|_x^2. \quad (11)$$

Односолитонное решение СНУШ имеет аналогичный вид, как в случае (9), но $\lambda < 0$, и ограничения для величин α и β несколько другие, т.е. должны выполняться равенства $\alpha < 0$, $\beta > 0$.

Для получения двухсолитонных решений СНУШ с убывающими граничными условиями согласно конструкции [2] необходимо взять функцию E в таком виде:

$$E(k) = k^2. \quad (12)$$

Матрица E_{ij} должна иметь ранг 1 для скалярного случая. Поэтому матрица C_{ij} должна иметь вид

$$C_{ij} = \lambda \frac{\overline{\gamma_i} \gamma_j}{k_i^2 - k_j^2}, \quad i, j = 1, 2; \quad (13)$$

$$E_{ij} = \lambda \overline{\gamma_i} \gamma_j, \quad i, j = 1, 2.$$

Используя эти соотношения, получаем

$$\left(\lambda \sum_{i,j=1}^2 \overline{\gamma_i} \gamma_j \Psi_i \Psi_j \right)_x = \lambda \left(\sum_{i,j=1}^2 |\gamma_i \Psi_i|_x^2 \right) = |\varphi|_x^2, \quad (14)$$

где $\varphi = (\gamma_1 \Psi_1 + \gamma_2 \Psi_2) \lambda$

является убывающим при $|x| \rightarrow \infty$ решением СНУШ:

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + U(x,t)\varphi = 0 \quad (15)$$

с условием самосогласования вида

$$\frac{U_t}{2} = -|\varphi|_x^2. \quad (16)$$

Для таких условий решения СНУШ (15) имеют такой вид:

$$\varphi(x,t) = \sqrt{\lambda} \sum_{i=1}^2 \overline{\gamma_i} \Psi_i(x,t) = \sqrt{\lambda} \frac{\det M(x,t)}{\det M(x,t)}, \quad (17)$$

где 2×2 матрица $M(x,t)$ задается формулой

$$M_{ij} = \lambda \frac{\overline{\gamma_i} \gamma_j}{k_i^2 - k_j^2} + \frac{e^{i(\overline{\omega_i} - \omega_j)}}{k_i - k_j} = C_{ij} + \frac{e^{i(\overline{\omega_i} - \omega_j)}}{k_i - k_j}, \quad (18)$$

и для M_{ij} выполняется (8).

В явном виде решение уравнения (15) с условиями (13), (17) и (18) выражается следующим образом (19):

$$\varphi = \sqrt{\lambda} \frac{B_1 \operatorname{ch}(\beta_1 x + 2\alpha_1 \beta_1 t + \theta_1) e^{i(\alpha_2 x + (\alpha_2^2 - \beta_2^2)t)} + B_2 \operatorname{ch}(\beta_2 x + 2\alpha_2 \beta_2 t + \theta_2) e^{i(\alpha_1 x + (\alpha_1^2 - \beta_1^2)t)}}{C_1 \operatorname{ch}(\beta^+(x + \nu^+ T) + h_1) - C_2 \cos(qx + \omega t \omega_0) + C_3 \operatorname{ch}(\beta^+(x + \nu^- T) + h_2)},$$

где

$$B_1 = \frac{1}{2} [A_3 \cdot A_1]^{1/2}; \quad B_2 = \frac{1}{2} [A_4 \cdot A_2]^{1/2};$$

$$C_1 = \frac{1}{2} [H_1 \cdot H_2]^{1/2};$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \left[\lambda \frac{\overline{\gamma_2 \gamma_1}}{k_{21}^2 k_{21}} \right]^{1/2} \left[\lambda \frac{\overline{\gamma_1 \gamma_2}}{k_{12}^2 k_{12}} \right]^{1/2}; \quad C_3 = \frac{1}{2} \left[\lambda \frac{\overline{\gamma_1 \gamma_1}}{k_{11}^2 k_{22}} \right]^{1/2} \left[\lambda \frac{|\gamma_2|^2}{k_{22}^2 k_{11}} \right]^{1/2};$$

$$A_1 = \lambda \gamma_2 |\gamma_1|^2 \left(\frac{1}{k_{12}^2} - \frac{1}{k_{11}^2} \right); \quad A_2 = \lambda \gamma_1 |\gamma_1|^2 \left(\frac{1}{k_{21}^2} - \frac{1}{k_{22}^2} \right);$$

$$A_3 = \gamma_2 \frac{\overline{k_{12}}}{k_{21} k_{11}}; \quad A_4 = \gamma_1 \frac{k_{12}}{k_{21} k_{22}};$$

$$e^{\theta_1} = \left[\frac{A_3}{A_1} \right]^{1/2}; \quad e^{\theta_2} = \left[\frac{A_4}{A_2} \right]^{1/2};$$

$$e^{h_1} = \left[\frac{H_2}{H_1} \right]^{1/2}; \quad e^{h_2} = \left[\lambda \frac{|\gamma_1|^2}{k_{11}^2 k_{22}} \right]^{1/2} \left[\frac{k_{22}^2 k_{11}}{\lambda |\gamma_2|^2} \right]^{1/2}; \quad e^{i\omega_0} = \left[\lambda \frac{\overline{\gamma_2 \gamma_1}}{k_{21}^2 k_{12}} \right]^{1/2} \left[\frac{k_{11}^2 k_{21}}{\lambda \overline{\gamma_1 \gamma_2}} \right]^{1/2};$$

$$H_1 = \lambda^2 |\gamma_1|^2 |\gamma_2|^2 \left(\frac{1}{k_{11}^2 k_{22}^2} - \frac{1}{k_{12}^2 k_{21}^2} \right);$$

$$q = \alpha_1 - \alpha_2; \quad \omega = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_1^2 - \beta_2^2;$$

$$\nu^+ = \frac{2\alpha_1 \beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2}; \quad \nu^- = \frac{2\alpha_2 \beta_2 - 2\alpha_1 \beta_1}{\beta_2 - \beta_1};$$

$$\beta^- = \beta_2 - \beta_1; \quad \beta^+ = \beta_1 + \beta_2;$$

$$k_{ij}^2 = k_i^2 - k_j^2; \quad k_{ij} = \overline{k_i} - k_j; \quad \overline{k_{ij}} = k_i - \overline{k_j}.$$

Проверка асимптотик дает такие результаты:

$$\varphi_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow 0,$$

$$\varphi_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0.$$

Для этого решения должны выполняться следующие условия:

$$\operatorname{Im} k_1 > 0 \quad \operatorname{Im} k_2 > 0$$

$$\operatorname{Re} k_1 > 0 \quad \operatorname{Re} k_2 > 0$$

$$\lambda > 0.$$

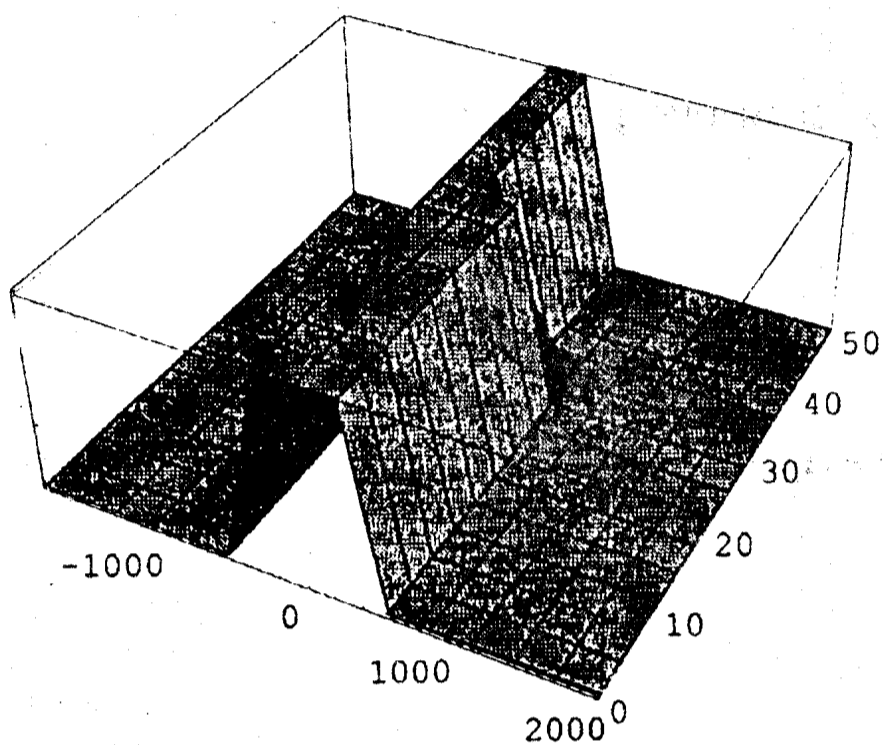


Рис. 2а) Вид функции $|\Psi(x,t)|$

по формуле (19),

$x \div -2000; 2000,$

$t \div 0; 50$

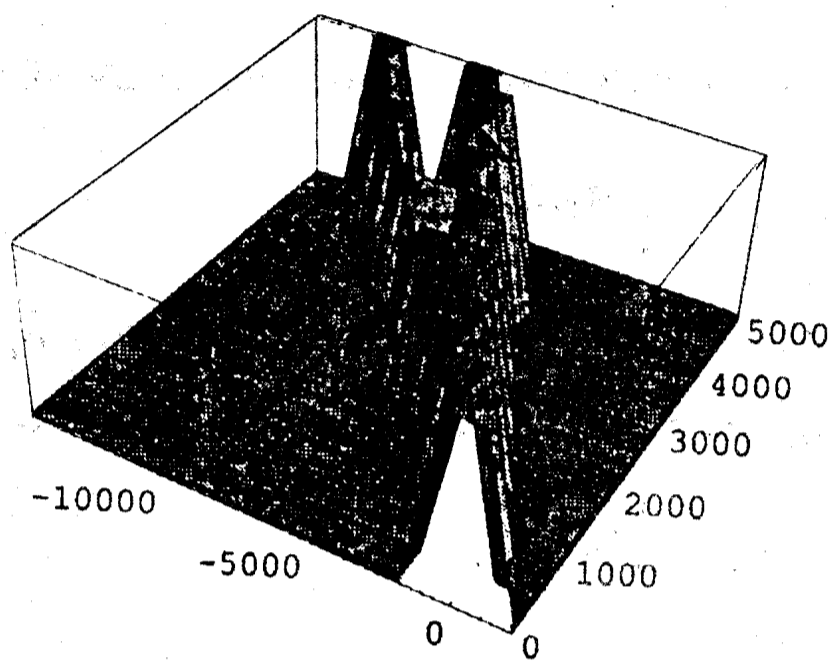


Рис. 2б) Вид функции $|\Psi(x,t)|$

по формуле (19),

$x \div -15000; 0,$

$t \div 0; 5000$

Оказывается, что для условия самосогласования вида

$$\frac{U_t}{2} = |\varphi|_x^2 \quad (20)$$

СНУШ (15) имеет такое же решение как (19), но для (20) $\lambda < 0$ и ограничения для k_1 и k_2 следующие:

$$\operatorname{Im} k_1 > 0, \quad \operatorname{Im} k_2 > 0,$$

$$\operatorname{Re} k_1 < 0, \quad \operatorname{Re} k_2 < 0.$$

Проверка асимптотик дает такие же результаты, как в случае (19).

На наш взгляд, солитон такого типа принципиально отличается от известных солитонов своей динамикой и явным наличием внутренней степени свободы, характеризуемой частотой ω . Поэтому, по аналогии с бризерами уравнения SG, эти бризеры обладают энергией связи. Известно, что величина энергии связи зависит от значения констант ω и q в (19). В пределе $\omega q \rightarrow 0$ энергия связи тоже стремится к

нулю, энергия бризера состоит из суммы энергии каждого солитона, а энергия i -го солитона определяется полюсом k_i и k_j . Введем энергию бризера с полюсом k_1 и k_2 как функцию, где

$$E(k_1, k_2) = \int \left[|\varphi_x(k_1, k_2)|^2 - |\varphi^2(k_1, k_2)|^2 \right] dx \quad . \quad (21)$$

Предлагаем следующий алгоритм для вычисления энергии связи.

1. Вычислим энергию бризера, когда полюса расположены достаточно далеко друг от друга:

$$E_0 = E(k_1, k_2). \quad (22)$$

2. В качестве энергии первого солитона выберем значение функции:

$$E_1 = \frac{1}{2}(k_1, k_1'), \quad (23)$$

где k_1' - достаточно близко расположен к k_1 .

3. Энергия второго солитона вычисляется по формуле

$$E_2 = \frac{1}{2}(k_2', k_2),$$

где k_2' - достаточно близко расположен к k_2 .

4. Тогда энергия связи вычисляется по формуле

$$E_{CB} = E_1 + E_2 - E_0.$$

Так, для конкретных значений:

$$k_1 = 0,017 + i 0,087, \quad k_2 = 1 - i 0,15,$$

$$k_1' = 0,017 - i 0,087, \quad k_2' = 1 + i 0,15,$$

получаем следующие значения энергий:

$$E_1 = 20,8644, \quad E_2 = 20,8555, \quad E_0 = 38,9345,$$

$$E_{CB} = 2,7854,$$

$$\frac{E_{CB}}{E_0} \cdot 100\% = 7,15\%.$$

В заключение следует отметить, что проведенные исследования показывают, что для СНУШ с заданными самосогласованными потенциалами существуют как односолитонные, так и двухсолитонные регулярные решения.

Полученные решения можно использовать для вычисления общего выражения динамического структурного формфактора, используемого для анализа экспериментов по рассеянию нейтронов на газе солитонов в магнетиках, а также в гейзенберговских ферромагнетиках с магнон-фононным взаимодействием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чередник И.В. // Функциональный анализ и его приложения, 1978, т.12, в.3, с.42.
2. Дубровин Б.А., Маланюк Т.М., Кричевер И.М., Маханьков В.Г. // ЭЧАЯ, 1988, т. 19, в.3, с.579.
3. Абдуллоев Х.О., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г., Мумиков Х.Х. // ЖТФ, 1995, №6, т.65, с.191.
4. Абдуллоев Х.О., Рахимов Ф.К., Маханьков В.Г. // ДАН РТ, 1994, №1, т.37, с.20.
5. Yajima N., Oikawa M., Satsuma J, Namba C. // Res. I st. Appl., Phys. Rep., 1975, XXII, v.70, p.89.
6. Makhankov V.G., Pashaev O.K. // TMF, 1982, v. 53, p.55.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 марта 2000 года.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Рахимов Ф.К., Абдуллоев Х.О., Федянин В.К.

P17-2000-35

Одно- и двухсолитонное решение скалярного нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованными потенциалами

С использованием алгебро-геометрического метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений получены и исследованы новые одно- и двухсолитонные решения скалярного нелинейного уравнения Шредингера (СНУШ) с самосогласованными потенциалами Яджима—Ойкава. Полученные солитоны по аналогии с бризерами SG обладают энергией связи. Вычислены энергии связи для конкретных значений спектральных данных. Проведенные исследования показали, что для СНУШ с заданными самосогласованными потенциалами существуют как односолитонные, так и двухсолитонные регулярные решения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод авторов

Rahimov F.K., Abdulloev H.O., Fedyanin V.K.

P17-2000-35

One- and Two-Soliton Solutions of the Scalar Non-Linear Schroedinger Equation with Self-Consistent Potentials

One- and two-soliton solutions of the scalar non-linear Schroedinger equation with self-consistent potentials of the Yajima—Oikawa type were found and investigated, by using the algebraic-geometric integration method of the non-linear differential equations. The obtained solitons, in analogy with SG breathers have binding energies. The values of binding energies were calculated for the given spectral data. The investigation shows that the scalar non-linear Schroedinger equation with the given self-consistent potentials has both one- and two-soliton regular solutions.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000