

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4-2000-115

А.В.Шебеко\*, Е.В.Земляная

ДИФРАКЦИОННОЕ РАССЕЯНИЕ  
В МОДЕЛИ ЭРИКСОНА ДЛЯ  $S$ -МАТРИЦЫ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

\*Харьковский физико-технический институт, Харьков 61108,  
Украина

2000

# 1 Введение

Неотъемлемой частью существующих описаний адрон- и ядро-ядерных столкновений при промежуточных энергиях (например, рассеяния тяжелых ионов с энергиями от нескольких до десяти МэВ на нуклон) является включение ядерного поглощения и рефракции. Эти свойства ядерного взаимодействия могут быть отражены либо в свойствах реальной и мнимой частей оптических потенциалов, либо в моделях матрицы рассеяния с определенными аналитическими свойствами [1]. Одна из них, сформулированная Эриксоном [2] для  $S$ -матрицы упругого рассеяния сильно поглощающихся частиц, сыграла важную роль в развитии теории ядерной дифракции.

Наряду с другими работами в этом направлении [3-6] ее применения (см., например, [7]) стали основой качественного понимания дифракционных картин, найденных в рассеянии легчайших ядер и тяжелых ионов при энергиях столкновения выше кулоновского барьера. Прежде всего, мы имеем в виду влияние кулоновско-ядерной интерференции на формирование угловых распределений рассеянных частиц и проведение аналогий между различными режимами ядерной дифракции, с одной стороны, и явлениями дифракции Френеля и Фраунгофера в оптике и радужного рассеяния в классической механике, с другой (см. обзор [8] и ссылки там).

Благодаря простой зависимости парциальных элементов модельной  $S$ -матрицы в представлении угловых моментов от физических параметров удастся получить замкнутые аналитические выражения для амплитуды рассеяния (см., например, [1]). На практике приходится прибегать к различным приближениям, оставляя "главные" члены этих выражений, в которых конкуренция основных физических ингредиентов отражена лишь частично. Ясно, что подобное разбиение на ведущие и второстепенные вклады представляет собой весьма деликатную часть решения дифракционной проблемы с несколькими характерными величинами. Последние определяют соотношения между радиусом  $R$  области ядерного взаимодействия (сильного поглощения) и дебройлевской длиной волны  $\lambda$  во входном канале рассеяния, между  $R$  и толщиной поверхностного слоя этой области, где происходит постепенный переход от прохождения падающих парциальных волн без искажений к их почти полному поглощению. В случае рассеяния заряженных частиц важное значение приобретает корректное выделение эффектов кулоновского отталкивания, относительная роль которого регулируется значениями параметра Зоммерфельда.

На наш взгляд, имеющиеся аналитические результаты для дифракционного рассеяния в модели Эриксона не свободны от недостатков. Речь идет не столько о способах их получения, сколько о неправильных заключениях, сделанных на основе формул, которые имеют весьма ограниченную область применимости.

Цель данного сообщения состоит в том, чтобы представить новые вычисления амплитуды упругого рассеяния в рамках этой популярной модели и затем предложить возможную интерпретацию возникновения определенных дифракционных картин в ядерном рассеянии (например, за счет рефракции падающих волн). Интерес к данному исследованию подогревается недавними анализами рассеяния  $\alpha$ -частиц и пионов на ядрах [9, 10] в области энергий порядка ГэВ. В соответствующих выражениях для амплитуд рассеяния были пропущены некоторые экспоненциально малые вклады, которые нельзя игнорировать для не слишком малых углов рассеяния. Детальное обсуждение этих вкладов можно найти в наших докладах [11, 12].

Наше рассмотрение будет опираться на предыдущие теоретические разработки [13] и опыт [14] получения равномерных асимптотических разложений для типичных дифракционных интегралов (раздел 2). Раздел 3 посвящен альтернативному описанию осцилляций френелевского типа (или "радужного типа") в угловой зависимости отношения  $\sigma(\theta)/\sigma_R(\theta)$  для углов рассеяния в "освещенную" область ( $\theta < \theta_C$ , где  $\theta_C$  есть кулоновский угол, отвечающий движению заряженной частицы в кулоновском поле силового центра по траектории, касательной к области действия ядерных сил). В том же разделе показаны условия для появления глубокого провала в регулярных осцилляциях фраунгоферовского типа сечения упругого рассеяния  $\sigma(\theta)$  для углов  $\theta > \theta_C$  (область "тени"). В рамках метода комплексных угловых моментов это явление было объяснено много лет назад в работе [15]. В рассмотренных примерах наша аргументация вытекает не только из явных аналитических выражений для сечений, но и подтверждается прямым численным суммированием парциальных амплитуд. Приложения дополняют основной текст обсуждением технических деталей.

## 2 Вычисление амплитуды рассеяния сильно поглощающихся частиц

### 2.1 Модель Эриксона и связанные с ней величины

В модели [2] элементы  $S$ -матрицы, входящие в разложение

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(S_l \exp[2i\sigma_l] - 1) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma] P_l(\cos \theta) \quad (2.1)$$

для амплитуды упругого рассеяния бесспиновых заряженных частиц, аппроксимируются следующим ферми-подобным распределением:

$$S_l \equiv \eta_l \exp[2i\delta_l] = [1 + \exp \frac{\bar{l}_0 - l}{\Delta}]^{-1}, \quad (\bar{l}_0 = l_0 + il_I), \quad (2.2)$$

откуда находим коэффициент поглощения

$$\eta_l \equiv |S_l| = \frac{1 - \eta_F(l)}{[1 - 4\Delta D_F(l) \sin^2 \frac{l_I}{2\Delta}]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.3)$$

и "ядерную" фазу рассеяния

$$\delta_l \equiv \frac{1}{2} \arg S_l = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[ \frac{\eta_F(l)}{1 - 2\eta_F(l) \sin^2 \frac{l_I}{2\Delta}} \sin \frac{l_I}{\Delta} \right], \quad (2.4)$$

где использованы обозначения<sup>1</sup>  $\eta_F(l) = [1 + \exp \frac{l-l_0}{\Delta}]^{-1}$  для ферми-распределения и

$$D_F(l) \equiv \frac{d\eta_F(l)}{dl} = -\frac{1 - \eta_F(l)}{\Delta} \eta_F(l) \quad (2.5)$$

для соответствующей "absorptive shape function" (ср. [16]).

Здесь уместно ввести ядерную (квантовую) функцию отклонения

$$\Theta_N(l) \equiv 2 \frac{d\delta(l)}{dl} = \frac{1 - \eta_F(l)}{\Delta} \frac{\eta_F(l)}{1 + 4\Delta D_F(l) \sin^2 \frac{l_I}{2\Delta}} \sin \frac{l_I}{\Delta}. \quad (2.6)$$

Величины  $S_l$  удовлетворяют условию унитарности

$$|S_l| \leq 1 \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.7)$$

так что

$$\cos \frac{l_I}{\Delta} \geq 0. \quad (2.8)$$

Напомним, что граничный угловой момент  $l_0$  определяется квазиклассическим соотношением

$$l_0 + \frac{1}{2} \equiv L = kR\sqrt{1 - B/E} = kR\sqrt{1 - \frac{2n}{kR}}, \quad (2.9)$$

где  $B = Z_1 Z_2 e^2 / R$  – высота кулоновского барьера на границе ядерного взаимодействия,  $E$  – энергия столкновения и  $k = \lambda^{-1}$  – соответствующее волновое число. Параметр Зоммерфельда  $n = Z_1 Z_2 e^2 / \mu k$  (кулоновский параметр) зависит от зарядов  $Z_1$  и  $Z_2$  сталкивающихся частиц и их приведенной массы  $\mu$ .

По определению, граничный кулоновский угол рассеяния  $\theta_C$  равен

$$\theta_C = 2 \operatorname{arctg} \frac{n}{L}, \quad (2.10)$$

так что  $n = L \operatorname{tg} \frac{\theta_C}{2}$ .

<sup>1</sup> Подразумевается, что аналитическое продолжение  $g(l)$  в  $l$ -плоскости для функции  $g_l$ , заданной при целых неотрицательных значениях  $l$ , осуществляется подстановкой в формулах типа (2.2)-(2.4) любых комплексных  $l$ .

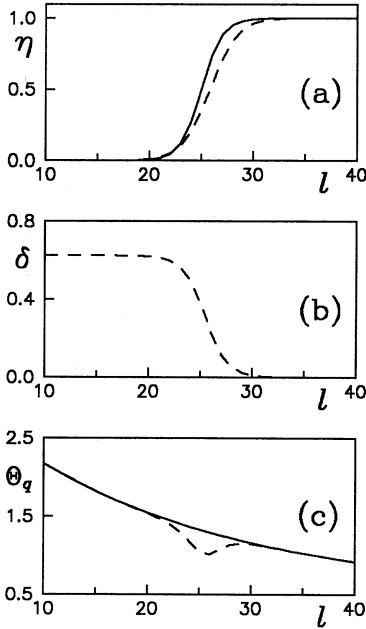


Рис.1 Коэффициент поглощения  $\eta(l)$ , фазовая функция  $\delta(l)$  и полная квантовая функция отклонения  $\Theta_q(l) \equiv \Theta_N(l) + \Theta_C(l)$  в модели Эриксона для двух наборов параметров: 1)  $l_0 = 25, n = 20, \Delta = 1,00, l_I = 0$  (верхняя сплошная кривая); 2)  $l_0 = 25,45, n = 20, \Delta = 1,20, l_I = -1,50$  (штриховые кривые). Сплошная кривая внизу показывает  $l$ -зависимость кулоновской функции отклонения  $\Theta_C(l) = 2\text{arctg}n/(l + \frac{1}{2})$

Как показано на рис.1, коэффициент  $\eta(l)$  (иногда называемый профильной функцией) монотонно возрастает от малых значений к единице. Этот рост происходит на характерном интервале  $\Delta$  значений  $l$  в окрестности  $l_0$ . Сильное поглощение может быть определено как ситуация, для которой эта область поверхностной диффузности очень мала по сравнению с касательным угловым моментом  $l_0$ , т.е.

$$\Delta \ll l_0. \quad (2.11)$$

Вместе с другим сильным неравенством

$$l_0 \sim kR \gg 1, \quad (2.12)$$

которое представляет собой условие коротких длин волн, эта идея, выдвинутая

а  $\text{rg}i_1$  и подтвержденная затем численными расчетами<sup>2</sup>, оказалась чрезвычайно плодотворной для разработки различных аналитических методов. В свою очередь, эти методы помогли исследовать происхождение таких квантовых явлений, как ядерная дифракция фраунгоферовского или френелевского типа и характерные изменения дифракционных картин в угловых распределениях рассеянных частиц за счет интерференции между кулоновским отталиванием и ядерной рефракцией (см., например, обзор [8]).

Мы видим, что в рассматриваемой трехпараметрической модели сильного поглощения (МСП) преломление падающих волн в ядерном веществе, этот необходимый элемент описания потенциального рассеяния, вводится путем замены граничного момента  $l_0$  в МСП без рефракции (с  $\delta_l \equiv 0$ ) комплексным значением  $\bar{l}_0 = l_0 + il_I$ . Такая замена не только вызывает появление дополнительного фазового сдвига  $\delta_l$ , но и модифицирует фактор  $\eta_l$ , что выглядит разумным с физической точки зрения, поскольку рассеяния на реальной и мнимой частях ядерного потенциала должны отражаться одновременно в абсорбционных и рефракционных свойствах  $S$ -матрицы.

Подобно этому, не существует какого-либо точного разделения ядерных и кулоновских эффектов (в частности, соответствующие вклады в полный фазовый сдвиг не являются аддитивными). В этом контексте "ядерная" фаза  $\delta_l$  характеризует отклонения этого сдвига (см. рис.1) от фазы  $\sigma_l$  кулоновского (резерфордского) рассеяния:

$$\exp[2i\sigma_l] = \frac{\Gamma(l+1+in)}{\Gamma(l+1-in)}. \quad (2.13)$$

Ясно, что при условии (2.11) особое значение приобретает поведение  $\delta_l$  для периферических значений  $l \geq l_0 \gg 1$  (фактически в сравнительно узкой переходной области  $l_0 - \Delta \leq l \leq l_0 + \Delta$ , поскольку для больших  $l$  центробежный барьер подавляет фазу ( $\delta_l \rightarrow 0$ )).

Унитарность  $S$ -матрицы посредством (2.8) ограничивает возможные значения параметра  $l_I$ :

$$\frac{|l_I|}{\Delta} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (2.14)$$

коль скоро ядерная фаза принимает не слишком большие значения для периферических столкновений. В самом деле, из (2.4) следует, что

$$\delta(l_0) = -\frac{1}{4} \frac{l_I}{\Delta}. \quad (2.15)$$

---

<sup>2</sup>Достаточно полный исторический экскурс в развитие теории ядерной дифракции можно найти в монографии [1].

Угол ядерного отклонения при движении по касательной траектории определяется формулой

$$\theta_N \equiv \Theta_N(l_0) = \frac{1}{2\Delta} \operatorname{tg} \frac{l_I}{2\Delta} = -\frac{1}{2\Delta} \operatorname{tg}[2\delta(l_0)]. \quad (2.16)$$

Следовательно, для того чтобы иметь отрицательное значение этого угла, мы должны считать  $l_I$  отрицательным. Это дает положительную ядерную фазу, отвечающую касательной траектории.

Наряду с отношениями  $l_0/\Delta$  и  $|l_I|/\Delta$  имеются еще две важные величины,  $l_0\theta$  и  $\Delta\theta$ . Первая из них характеризует осцилляции сечений дифракционного рассеяния, в то время как вторая определяет спад огибающих дифракционных максимумов в глубь освещенной области ( $\theta < \theta_C$ ) и области тени ( $\theta > \theta_C$ ).

Значения параметра диффузности (как правило, эмпирические) зависят от типа сталкивающихся частиц и энергии соударения (например, для пион-ядерного рассеяния при промежуточных энергиях была установлена [10] зависимость  $\Delta \simeq ka$ , где параметр  $a$  характеризует размытие ядерной плотности на границе области сильного взаимодействия). В любом случае, мы полагаем, что

$$\Delta \simeq 1. \quad (2.17)$$

Прежде чем показать наши вычисления для модели Эриксона, отметим, что обрезающий фактор  $\exp[-\gamma(l + \frac{1}{2})]$  с  $\gamma > 0$  был введен в [13] для обеспечения сходимости ряда (2.1) при наличии дальнедействующего кулоновского взаимодействия. Разумеется, следует определить смысл такой сходимости. Этот тонкий вопрос теории рассеяния был предметом тщательных исследований в 70-е годы (см., например, [17], где было показано, что подобные разложения следует рассматривать как обобщенные функции). Не вникая в детали, отметим, что параметр  $\gamma$  должен быть устремлен к нулю только в конце вычислений. Простой пример такого вычисления показан в Приложении А.

## 2.2 Суммирование парциальных амплитуд. Типичные дифракционные интегралы.

В области углов рассеяния, не слишком близких к 0 и  $\pi$ , где при условии

$$L\theta \gg 1 \quad (2.18)$$

полиномы Лежандра можно заменить их асимптотикой:

$$P_l(\cos \theta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi(l + \frac{1}{2}) \sin \theta}} \cos[(l + \frac{1}{2})\theta - \frac{\pi}{4}], \quad (2.19)$$

с помощью формулы (В.1) можно показать (ср. [14]), что

$$f(\theta) = \frac{1}{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi \sin \theta}} \{ \bar{I}_+(\theta) e^{-i\frac{\pi}{4}} + \bar{I}_-(\theta) e^{i\frac{\pi}{4}} + \bar{C}_+(\theta) \exp[i\bar{L}\theta - i\frac{\pi}{4}] + \bar{C}_-(\theta) \exp[-i\bar{L}\theta + i\frac{\pi}{4}] \}, \quad (2.20)$$

$$\bar{I}_\pm(\theta) = \int_{\bar{L}}^{\infty} \sqrt{t} \exp \phi_\pm(t) dt, \quad \phi_\pm(t) = 2i\sigma(t - \frac{1}{2}) \pm i\theta t, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_\pm(\theta) = & \int_0^{\infty} \{ \sqrt{\bar{L} + t} \exp[2i\sigma(\bar{L} - \frac{1}{2} + t) \pm i\theta t] - \\ & - \sqrt{\bar{L} - t} \exp[2i\sigma(\bar{L} - \frac{1}{2} - t) \mp i\theta t] \} \frac{dt}{\exp(\frac{t}{\Delta}) + 1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\text{с } \bar{L} = \bar{l}_0 + \frac{1}{2} = L + iI_l.$$

Существенными элементами в нашем выводе выражения (2.20) являются соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\exp(-vs)}{1 + \exp \frac{\bar{L}-s}{\Delta}} ds = \pi \Delta \frac{\exp(-\bar{L}v)}{\sin \pi \Delta v} + \\ & + \frac{\Delta \exp(-\bar{L}/\Delta)}{\Delta v - 1} F(1, 1 - \Delta v; 2 - \Delta v; -\exp(-\bar{L}/\Delta)) \end{aligned} \quad (2.23)$$

(Rev > 0)

и прием [14], который позволяет установить тесные связи с рассмотрением дифракционного рассеяния в МСП с резким краем:

$$S_l = \Theta(l - l_0) = \begin{cases} 0 & (l < l_0) \\ 1 & (l > l_0), \end{cases} \quad (2.24)$$

где приходится иметь дело с интегралами такого же типа после замены в (2.21)-(2.22) комплексного  $\bar{L}$  на  $l_0$ .

Отметим, что формула (2.23) следует из интегрального представления для гипергеометрической функции Гаусса  $F(a, b; c; z)$  ([18], (15), с.124) и одного из соотношений Куммера ([18], (2), с.116) для аналитического продолжения гипергеометрического ряда в правой части (2.23) (см. также [19], где подобное соотношение было применено при вычислении упругого и неупругих ядерных формфакторов).

Представление (2.20) справедливо с точностью до членов двух типов: порядка  $\exp(-L/\Delta)$  и  $\exp[-(\pi\Delta - |I_l|)(2\pi - \theta)]$ . Последний характеризует вклад в (В.1) линии полюсов  $l_k = \bar{l}_0 + i(2k-1)\pi\Delta$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). При этом,



благодаря унитарности модели Эриксона, расстояние  $\pi\Delta - |l_I|$  полюса  $l_1$  от вещественной оси в  $l$ -плоскости не может быть меньше, чем  $\frac{\pi}{2}\Delta$ . Подчеркнем, что даже при выполнении сильных неравенств

$$\exp\left(-\frac{L}{\Delta}\right) \ll 1 \quad (2.25)$$

и

$$\exp\left[-\frac{\pi}{2}\Delta(2\pi - \theta)\right] \ll 1 \quad (2.26)$$

пренебрежение такими экспоненциально малыми вкладками не всегда оправдано на фоне сохраняемых вкладов порядка  $\exp[-\pi\Delta(\theta \pm \theta_C)]$ , которые показаны ниже (ср. тщательное исследование этого вопроса в [11, 12]).

Теперь, по аналогии с кулоновским углом  $\theta_C$ , давайте введем комплексный "критический" угол  $\bar{\theta}_C$ :

$$n \operatorname{ctg} \frac{\bar{\theta}_C}{2} = \bar{L} \quad \text{или} \quad \operatorname{ctg} \frac{\bar{\theta}_C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\theta_C}{2} + i \frac{l_I}{n}. \quad (2.27)$$

Имеем

$$\bar{\theta}_C = -i \ln \frac{\operatorname{ctg} \frac{\bar{\theta}_C}{2} + i}{\operatorname{ctg} \frac{\bar{\theta}_C}{2} - i} = \theta_C - 2i \frac{l_I}{n} \sin^2 \frac{1}{2} \theta_C + O(n^{-2})$$

или с точностью до членов порядка  $n^{-2}$

$$\bar{\theta}_C = \theta_C + i \frac{|l_I|}{L} \sin \theta_C. \quad (2.28)$$

Далее, используя асимптотику Стирлинга для гамма-функции, получаем для комплексных значений  $t$  с  $|t| \gg 1$

$$\phi_{\pm}(t) = t \ln \frac{t + in}{t - in} + in \ln(t^2 + n^2) \pm i\theta t - 2in + \frac{i}{4} \frac{n}{t^2 + n^2} + O(|t|^{-3}). \quad (2.29)$$

Имеющийся опыт решения задач ядерной дифракции позволяет написать в хорошем приближении (см. [13]):

$$\bar{C}_{\pm}(\theta) = i\sqrt{\bar{L}} \exp[2i\sigma(\bar{L} - \frac{1}{2})] \left\{ \frac{\pi\Delta}{\operatorname{sh}[\pi\Delta(\bar{\theta}_c \pm \theta)]} - \frac{1}{\theta_c \pm \theta} \right\}, \quad (2.30)$$

в то время как с помощью интегрирования по частям приходим к разложениям

$$\bar{I}_{\pm}(\theta) = i\sqrt{\bar{L}} \exp[2i\sigma(\bar{L} - \frac{1}{2})] \frac{\exp(\pm i\bar{L}\theta)}{\bar{\theta}_C \pm \theta} \left\{ 1 + 2i \frac{\sin^2 \frac{\bar{\theta}_C}{2}}{n(\bar{\theta}_C \pm \theta)^2} + \dots \right\}. \quad (2.31)$$

При условии

$$\frac{\sin^2 \frac{\theta_c}{2}}{n|\bar{\theta}_C - \theta|^2} \ll 1 \quad (2.32)$$

можно ограничиться первым членом в ( 2. 31), так что

$$\bar{I}_{\pm}(\theta) = i\sqrt{\bar{L}} \frac{\exp \phi_{\pm}(\bar{L})}{\bar{\theta}_C \pm \theta}. \quad (2. 33)$$

Однако неравенство ( 2. 32) может не выполняться при углах  $\theta$ , близких к  $\theta_C$ , и выражение ( 2. 33) становится несправедливым для  $\bar{I}_{-}(\theta)$ . Это связано с тем, что при таких углах рассеяния в интеграл  $\bar{I}(\theta)$  может давать вклад не только окрестность концевой точки  $t_0 = \bar{L}$ , но и окрестность точки стационарности  $t_s = L_s$ , определяемой соотношением  $\phi'_{-}(L_s) = 0$ , т.е.

$$L_s = n \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \theta + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (2. 34)$$

В такой ситуации можно воспользоваться методом, разработанным в [20], чтобы получить (подобно тому, как это сделано в [14]) следующую асимптотику, равномерную относительно стремления  $\theta$  к  $\theta_C$ :

$$\bar{I}^{(-)}(\theta) = i\sqrt{\frac{2\pi L_s}{\phi''(L_s)}} \bar{G}_1(\theta) \exp[\phi_{-}(L_s)] + i\sqrt{\bar{L}} \frac{\exp[\phi_{-}(L)]}{\bar{\theta}_C - \theta}, \quad (2. 35)$$

$$\bar{G}_1(\theta) = \bar{G}(\theta) - \frac{\exp(-\tau^2)}{2\sqrt{\pi}\tau}, \quad (2. 36)$$

с

$$\bar{G}(\theta) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Erf}(\tau) \right] \quad (2. 37)$$

и

$$\tau = [\phi(L_s) - \phi(\bar{L})]^{\frac{1}{2}}. \quad (2. 38)$$

Простые вычисления с выражением ( 2. 29) дают

$$\phi''(L_s) = -\frac{2i}{n} \sin^2 \frac{1}{2} \theta \quad (2. 39)$$

и, с точностью до членов  $\sim n^{-1}$ ,

$$\tau^2 = i\bar{L}(\theta - \bar{\theta}_C) + 2in \ln \frac{\sin \frac{1}{2} \bar{\theta}_C}{\sin \frac{1}{2} \theta}, \quad (2. 40)$$

где предполагается, что для  $|L_s - \bar{L}| \ll 1$  следует положить  $\tau \simeq [-\frac{1}{2}\phi''(L_s)]^{\frac{1}{2}}(\bar{L} - L_s)$  с главным значением квадратного корня.

Объединяя все эти результаты, находим амплитуду рассеяния в модели Эриксона:

$$f(\theta) = f_R^{as}(\theta) \left[ \bar{G}(\theta) - \frac{\exp(-\tau^2)}{2\sqrt{\pi}\tau} \right] + \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta), \quad (2. 41)$$

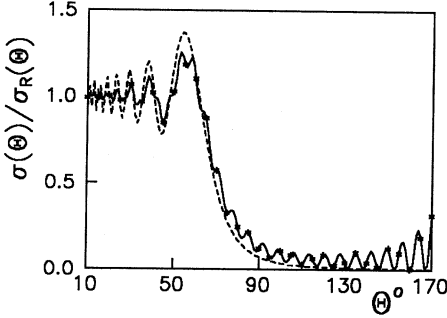


Рис.2 Отношение сечения упругого рассеяния в МСП с резким краем ( $l_0 = 25$ ,  $n = 20$ ) к резерфордовскому сечению. Сплошная линия рассчитана по формуле (3.1), штриховая - по формуле (3.5). Точки - результат численного суммирования парциальных амплитуд

где введены обозначения  $\bar{f}^{(+)}(\bar{f}^{(-)})$  для "far-side" ("near-side") ветвей

$$\bar{f}^{(\pm)}(\theta) = \frac{\pi \Delta}{k} \left[ \frac{\bar{L}}{2\pi \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{\exp[\phi_{\pm}(\bar{L}) \mp i\pi/4]}{\text{sh}[\pi \Delta(\theta_C \pm \theta)]}, \quad (2.42)$$

если использовать терминологию, принятую в геометрической теории дифракции [21], а через  $f_R^{as}(\theta)$  обозначена асимптотика при  $n \gg 1$  для амплитуды резерфордовского рассеяния:

$$f_R^{as}(\theta) = (2ik)^{-1} e^{-2in} n^{1+2in} (\sin \frac{\theta}{2})^{-2-2in}. \quad (2.43)$$

Таким образом, для характерного отношения сечений  $\sigma(\theta)/\sigma_R(\theta) = |f(\theta)|^2/|f_R(\theta)|^2$  получаем

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = |\bar{G}(\theta) - \frac{\exp(-\tau^2)}{2\sqrt{\pi}\tau} + \frac{\bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta)}{f_R^{as}(\theta)}|^2, \quad (2.44)$$

принимая во внимание, что  $|f_R(\theta)| = |f_R^{as}(\theta)|$ , где точная амплитуда определяется формулой (A.27).

### 3 Рефракционные явления в различных режимах ядерной дифракции

Угловая зависимость рассматриваемого сечения упругого рассеяния и точность полученных асимптотик без включения ядерной фазы и с ее учетом

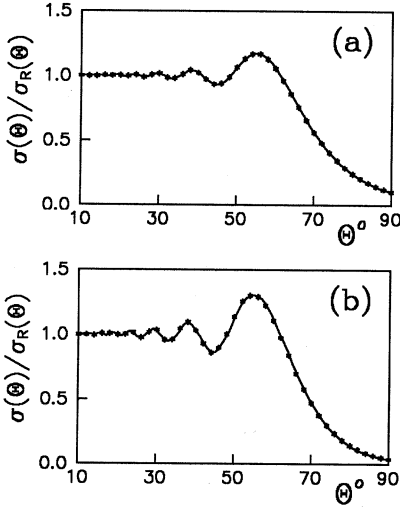


Рис.3 Сравнение вычисления по формуле (2.44) (сплошные кривые) с численным расчетом (точки) для двух наборов параметров, указанных в подписи к рис.1

в модели Эриксона иллюстрируются рис.2,3. Для того чтобы облегчить сравнение с известными результатами, мы воспроизводим вычисления (см. рис.1 из [14]) по асимптотической формуле

$$\frac{\sigma_{sco}(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = |G(\theta) + \text{sign}(\theta_C - \theta) \frac{\exp(-ix - i\pi/4)}{2(\pi x)^{\frac{1}{2}}} + \frac{f^{(+)}(\theta) + f^{(-)}(\theta)}{f_R^{as}(\theta)}|^2 \quad (3.1)$$

с

$$G(\theta) = \frac{1}{2} [1 + 2\pi^{-\frac{1}{2}} \text{sign}(\theta_C - \theta) \text{Erf}(\sqrt{ix})], \quad (3.2)$$

$$x = n \left\{ (\theta - \theta_C) \text{ctg} \frac{\theta_C}{2} + 2 \ln \frac{\sin \frac{\theta_C}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right\}, \quad (3.3)$$

$$f^{(\pm)}(\theta) = (2k)^{-1} (L/2\pi \sin \theta)^{\frac{1}{2}} e^{2i\sigma(l_0 - \frac{1}{2})} \frac{\exp(\pm il_0 \theta \mp i\frac{\pi}{4})}{\sin[(\theta_C \pm \theta)/2]}. \quad (3.4)$$

Это приближенное решение дифракционной задачи с резким обрезанием (sharp cutoff) может быть получено из формулы (2.41) после замены  $\bar{L}$  на  $L$  ( $\bar{\theta}_C$  на  $\theta_C$ )<sup>3</sup> и факторов  $\pi\Delta/\text{sh}\pi\Delta(\theta_C \pm \theta)$  на  $[\sin \frac{\theta_C \pm \theta}{2}]^{-1}$ .

<sup>3</sup>Мы пренебрегаем различием между  $\theta_0 = 2\text{arctg} \frac{n}{l_0}$  и  $\theta_C = 2\text{arctg} \frac{n}{L}$ .

Штриховая кривая на рис.2 была рассчитана по формуле

$$\frac{\sigma_{sco}(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = |G(\theta)|^2 = \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} + \text{sign}(\theta_C - \theta)C(x) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} + \text{sign}(\theta_C - \theta)S(x) \right]^2 \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

есть интегралы Френеля. Угловая зависимость фактора  $|G(\theta)|^2$  дает (после соответствующего переопределения физических параметров) френелевский закон для углового распределения интенсивности света, рассеянного краем бесконечной полуплоскости.

Такая аналогия между ядерной дифракцией и френелевской дифракцией в оптике, впервые проведенная в работах Франа и Венгера (см., например, [22]), часто используется при интерпретации упругого рассеяния тяжелых ионов. Однако, как уже отмечалось [14, 8] (ср. также критические замечания в [23]), аргументация этих авторов не является достаточно убедительной, поскольку они считали, что приближение (3.5) хорошо работает в освещенной области ( $\theta < \theta_C$ ). На самом деле тщательное исследование [14] показало, что формула (3.5) справедлива с точностью до быстро осциллирующих членов порядка  $n^{-\frac{1}{2}}$  и только в области "полутени" ( $\theta \simeq \theta_C$ ), которая стягивается к  $\theta_C$  согласно (2.32) (с  $\theta_C$  вместо  $\bar{\theta}_C$ ) по закону  $n^{-\frac{1}{2}}$ , т.е. там, где осцилляции френелевского типа отсутствуют.

Отметим, что очень хорошее согласие аналитических и численных вычислений на рис.2,3 не является чем-то исключительным. Оно сохраняется при вариациях физических параметров в допустимых пределах. Это создает надежную основу для последующих качественных заключений.

### 3.1 Кулоновско-ядерная интерференция при $\theta < \theta_C$

Продолжая анализ дифракционных картин, представляемых асимптотикой (2.41), рассмотрим углы рассеяния, не слишком близкие к  $\theta_C$ , когда

$$|\tau| \gg 1. \quad (3.6)$$

Тогда имеем ([24], с.152):

$$\text{Erf}(\tau) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ \text{sign}(\text{Re}\tau) - \frac{\exp(-\tau^2)}{\sqrt{\pi}\tau} \right], \quad (3.7)$$

так что

$$f(\theta) = \Theta(-\text{Re}\tau) f_R^{as}(\theta) + \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta). \quad (3.8)$$

Более того, можно показать, что для углов  $\theta$  таких, что

$$|\theta - \theta_C| \gg \frac{\sin \frac{1}{2}\theta_C}{\sqrt{n}}, \quad (3.9)$$

в хорошем приближении

$$\text{Re}\tau = \sqrt{\frac{x}{2}} \text{sign}(\theta - \theta_C). \quad (3.10)$$

Здесь подразумевается главное значение квадратного корня из положительно определенной величины  $x$ . Неотрицательность  $x = x(\theta) \geq 0$  для  $0 \leq \theta \leq \pi$  следует немедленно, если учесть, что

$$\frac{dx}{d\theta} = n(\text{ctg} \frac{1}{2}\theta_C - \text{ctg} \frac{1}{2}\theta)$$

и

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = \frac{1}{2} \frac{n}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Тогда  $\Theta(-\text{Re}\tau) = \Theta(\theta_C - \theta)$  и (3.8) принимает следующий вид:

$$f(\theta) = \Theta(\theta_C - \theta) f_R^{as}(\theta) + \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta). \quad (3.11)$$

Таким образом, в освещенной области

$$f(\theta) = f_R^{as}(\theta) + \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta) \quad (3.12)$$

и интересующее нас отношение

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \left| 1 + \frac{\bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta)}{f_R^{as}(\theta)} \right|^2, \quad (3.13)$$

т.е. его отклонения от единицы определяются интерференцией между амплитудой чисто кулоновского рассеяния и ветвями  $\bar{f}^{(\pm)}(\theta)$  фраунгоферовского типа. Благодаря факторам подавления  $\pi \Delta / \text{sh}[\pi \Delta(\bar{\theta}_C \pm \theta)]$  эти ветви затухают по-разному в глубине освещенной области. В частности, при достаточном удалении от  $\theta_C$  можно положить

$$\frac{\sigma(\theta)}{\sigma_R(\theta)} = \left| 1 + \frac{\bar{f}^{(-)}(\theta)}{f_R^{as}(\theta)} \right|^2. \quad (3.14)$$

Чтобы выделить эффекты ядерной рефракции в более явной форме, напишем с помощью (2.42):

$$2i\sigma(\bar{L} - \frac{1}{2}) \simeq 2i\sigma(L - \frac{1}{2}) + 2\sigma'(L - \frac{1}{2})|l_I| = 2i\sigma(L - \frac{1}{2}) + |l_I|\theta_C. \quad (3.15)$$

Отсюда

$$\bar{f}^{(\pm)}(\theta) = M_{\pm}(\theta)e^{|l_I|(\theta_C \pm \theta)} f_0^{(\pm)}(\theta), \quad (3.16)$$

$$M_{\pm}(\theta) = \frac{\text{sh}[\pi \Delta(\theta_C \pm \theta)]}{\text{sh}[\pi \Delta(\theta_C \pm \theta)]},$$

где  $f_0^{(\pm)}(\theta)$  обозначает фраунгоферовские ветви при выключении ядерной фазы, т.е.

$$f_0^{(\pm)}(\theta) = \bar{f}^{(\pm)}(\theta)|_{l_I=0}. \quad (3.17)$$

Далее, полагая

$$\text{sh}[\pi \Delta(\theta + \theta_C)] \simeq \frac{1}{2} \exp[\pi \Delta(\theta + \theta_C)],$$

имеем

$$M_+(\theta) = \exp[\pi \Delta(\theta - \bar{\theta}_C)] = \exp[-i \frac{\pi \Delta}{L} |l_I| \sin \theta_C]. \quad (3.18)$$

Затем, при удалении от  $\theta_C$ , когда

$$\exp[-\pi \Delta|\theta - \theta_C|] \ll 1, \quad (3.19)$$

находим

$$M_-(\theta) = \exp[-i \frac{\pi \Delta}{L} \text{sign}(\theta_C - \theta) |l_I| \sin \theta_C]. \quad (3.20)$$

Используя эти соотношения, получаем следующее выражение для фраунгоферовской части амплитуды в освещенной области:

$$f_{Fr} \equiv \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta) = \frac{\Delta}{k} \left[ \frac{2\pi L}{\sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} e^{2i\sigma(L-\frac{1}{2})} \exp[-i \frac{\pi \Delta}{L} |l_I| \sin \theta_C] \times$$

$$\times \{ e^{-(\pi \Delta - |l_I|)(\theta_C + \theta)} \exp[iL\theta - i \frac{\pi}{4}] + e^{-(\pi \Delta - |l_I|)(\theta_C - \theta)} \exp[-iL\theta + i \frac{\pi}{4}] \} \quad (3.21)$$

Отсюда следует, что учет преломления волн в ядерном веществе усиливает "асимметрию" между положительной и отрицательной ветвями: амплитуда  $\bar{f}^{(+)}(\theta)$  ( $\bar{f}^{(-)}(\theta)$ ) увеличивается (уменьшается) по сравнению с  $f_0^{(+)}(\theta)$  ( $f_0^{(-)}(\theta)$ ), что приводит к усилению размаха осцилляций  $\sigma/\sigma_R$  при углах рассеяния  $\theta < \theta_C$ . Очевидно, что такой эффект становится особенно заметным в области первого, наиболее высокого максимума в этих осцилляциях (см. рис.4а). Такой "enhancement effect" некоторые авторы связывают с явлением радужного рассеяния в классической механике (см., например, [23] и ссылки там). Напомним, что последнее отвечает ситуации с  $\Theta'_q(l_r) = \Theta'_N(l_r) + \Theta'_C(l_r) = 0$ , когда классическая функция отклонения  $\Theta_{cl}(b)$  имеет экстремум при значении прицельного параметра  $b_r = (l_r + \frac{1}{2})/k$  и, как следствие, сечение рассеяния  $\sigma_{cl}(\theta_r) = \infty$ , где угол радужного рассеяния

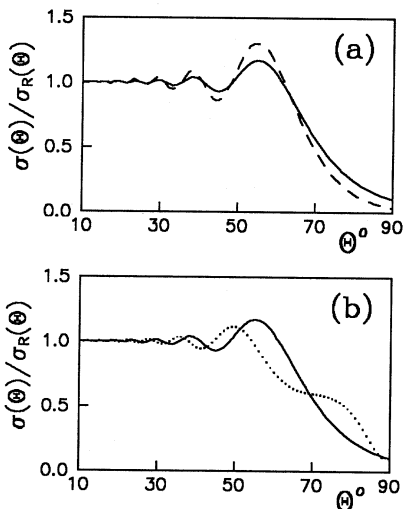


Рис.4 Наши асимптотические результаты в модели Эриксона: сплошная и штриховая кривые рассчитаны, соответственно, для набора параметров 1) и 2) (см. рис.1) по формуле (2.44); точечная - по формуле (3.14) для набора 1)

$\theta_r \equiv \Theta_{cl}(b_r)$  при  $\theta \neq 0, \pi$ . Другими словами, вблизи  $\theta_r$  классическое сечение  $\sigma_{cl}(\theta)$  становится очень большим. В модели Эриксона уравнение

$$\Theta'_N(l) + \Theta'_C(l) = 0 \quad (3.22)$$

равносильно следующему

$$-\frac{1}{2\Delta} \Theta_N(l) \eta^2(l) [1 - e^{-2\frac{l-l_0}{\Delta}}] = \frac{n}{(l + \frac{1}{2})^2 + n^2}. \quad (3.23)$$

Решения этого уравнения, если они существуют<sup>4</sup>, представляют собой значения  $l_r > l_0$ , т.е.  $l_r = l_0 + \epsilon$  с  $\epsilon > 0$ . Можно показать, что в типичной ситуации с двумя решениями, показанной пунктирной кривой на рис.5с, сдвиг  $\epsilon_1$  значения  $l_r^{(1)}$ , ближайшего к  $l_0$ , равен

$$\epsilon_1 = -\frac{\Delta^2 \sin^2 \frac{1}{2} \theta_C}{n \theta_N \eta^2(l_0)}, \quad (3.24)$$

<sup>4</sup>Нетрудно видеть, что при заданных значениях  $n$  и  $l_0$  ( $n < l_0$ ) (3.23) не имеет решения в интересующем нас интервале  $0 \leq l < \infty$  в случае достаточно слабого преломления,  $|l_l| \ll \Delta$ .



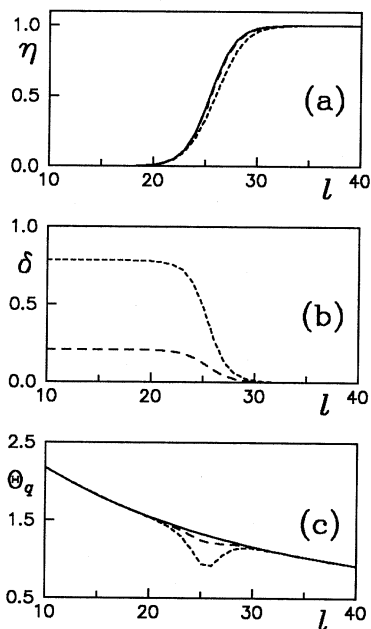


Рис.5 То же самое, что и на рис.1, для наборов с одинаковыми  $l_0 = 25, 45$ ,  $n = 20$ ,  $\Delta = 1, 20$  и различными значениями параметра  $l_I$ , характеризующего силу ядерного преломления:  $l_I = 0$  (сплошные кривые);  $l_I = -0,5$  (штриховые);  $l_I = -\frac{\pi}{2}\Delta$  (пунктирные). Последний набор отвечает ситуации с рассеянием радужного типа

$$\eta^2(l_0) = [2(1 + \cos \frac{l_I}{\Delta})]^{-1}. \quad (3.25)$$

Соответствующий угол "радужного" рассеяния с хорошей точностью определяется формулой

$$\theta_r^{(1)} \equiv \Theta_q(l_0 + \epsilon_1) \simeq \theta_C + \theta_N. \quad (3.26)$$

Для предельного значения  $|l_I| = \frac{\pi}{2}\Delta$  имеем  $\theta_N = -\frac{1}{2\Delta}$ , так что угол  $\theta_r^{(1)}$  отвечает рассеянию в глубь области, если параметр размытия  $\Delta \simeq 1$ .

Не выписывая явно второе решение  $l_r^{(2)}$ , отметим, что хотя оно соответствует более периферическим столкновениям  $l_r^{(2)} > l_r^{(1)}$ , из-за немонотонности функции  $\Theta_q(l)$  имеем  $\theta_r^{(2)} \simeq \theta_C(l_r^{(2)}) > \theta_r^{(1)}$ . Все эти свойства, присущие модели Эриксона, показаны на рис.5.

Следует подчеркнуть, что указанные тенденции в дифракционных картинах проявляются не только в случаях, когда квантовая функция отклонения  $\Theta_q(l)$  имеет один или несколько экстремумов, но и при их отсутствии (ср.

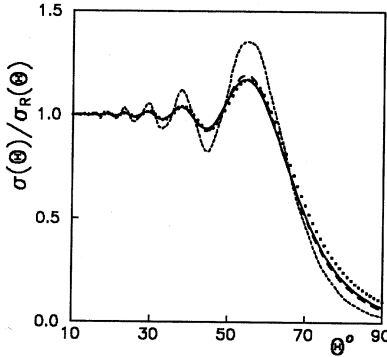


Рис.6 Усиление размаха осцилляций сечения упругого рассеяния за счет ядерной рефракции. Различия между кривыми отвечают разному выбору параметров в модели Эриксона (см. рис.5)

штриховую и пунктирные кривые на рис.6). При этом похожие качественные изменения угловой зависимости сечений дифракционного рассеяния за счет ядерной рефракции имеют место как вблизи классических углов рассеяния  $\theta_r$ , так и вдали от них. Наша равномерная асимптотика, справедливая в широком угловом интервале, отличается от тех, которые получаются при использовании других асимптотических методов вычисления типичных дифракционных интегралов (см. [25] и ссылки там). Соответствующие аналитические выражения дают угловые зависимости типа Эйри, которые, на наш взгляд, не имеют отношения к задачам ядерной дифракции.

Завершая это обсуждение влияния ядерной рефракции в области "света", покажем интерференцию отрицательной ветви  $\bar{f}^{(-)}(\theta)$  (рассеяния от "ближней" стороны области сильного взаимодействия) и амплитуды резерфордского рассеяния (кулоновского отталкивания). Как видно на рис.4b, эта интерференция не может передать поведение  $\sigma/\sigma_R$  при всех  $\theta < \theta_C$ . Мы обращаем на это внимание, поскольку в ряде подходов (см. [7, 26]), где отрицательная ветвь вычисляется методом комплексных угловых моментов, учитывающим вклад от ближайшего к вещественной оси полюса  $S$ -матрицы в первом квадранте  $l$ -плоскости, принято считать, что приближение (3.14) является совершенно оправданным.

### 3.2 Явление провала сечения упругого рассеяния в области "тени" ( $\theta > \theta_C$ )

При таких углах согласно (3.11)

$$f(\theta) = f_{Fr}(\theta) = \bar{f}^{(+)}(\theta) + \bar{f}^{(-)}(\theta) \quad (3.27)$$

с

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(\pm)}(\theta) &= \frac{\Delta}{ik} \left[ \frac{2\pi L}{\sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} e^{2i\sigma(L-\frac{1}{2})} F_{\pm}(\theta) \times \\ &\times \exp\left[\pm i\left(L\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\Delta}{L}|l_I| \sin \theta_C\right)\right], \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$F_{\pm}(\theta) = \exp[-(\pi\Delta \mp |l_I|)(\theta \pm \theta_C)]. \quad (3.29)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= |f_{Fr}(\theta)|^2 = \\ &= \frac{8\pi L}{k^2} \Delta^2 \frac{F_+(\theta)F_-(\theta)}{\sin \theta} \left\{ \cos^2\left[L\theta + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\Delta}{L}|l_I| \sin \theta_C\right] + \text{sh}^2 \xi(\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\xi(\theta) = -\frac{1}{2} \ln \frac{F_+(\theta)}{F_-(\theta)} = \pi\Delta\theta_C - |l_I|\theta. \quad (3.31)$$

Из формулы (3.30) вытекает, что если вблизи угла  $\theta = \theta_{dip}$ , для которого косинус в (3.30) обращается в нуль, функция  $\xi(\theta)$  также будет иметь нуль, то сечение становится очень малым в окрестности этого угла (эффект "провала"). Мы видим, что в модели Эриксона этот угол равен

$$\theta_{dip} = \frac{\pi\Delta}{|l_I|} \theta_C. \quad (3.32)$$

При заданном  $\theta_C$  благодаря ограничению (2.14) минимальное значение этого угла  $\theta_{dip}^{min} = 2\theta_C$ .

Разумеется, при не слишком малых значениях кулоновского угла  $\theta_C$ , когда

$$\exp(2\pi\Delta\theta_C) \gg 1, \quad (3.33)$$

чисто фраунгоферовская картина осцилляций не успевает развиться и в области "тени" сечение экспоненциально убывает, как  $\exp(-2\pi\Delta\theta)$ , без осцилляций (так называемое кулоновское затухание), и вместе с ними исчезает возможность такого явления.

В рамках моделей сильного поглощения с плавным обрезанием углы провала в сечениях дифракционного рассеяния рассматривались в [15]. Позднее в [7] (ср. [14]) при изучении упругого рассеяния тяжелых ионов было сформулировано условие провала сечения в модели Эриксона. Авторы [7] связывали появление соответствующего угла в классически запрещенной области с кулоновско-ядерной интерференцией радужного типа при больших углах рассеяния. На наш взгляд, такая интерпретация может ввести в заблуждение. Скорее всего, мы имеем дело со специфическим рефракционным явлением, которое может проявиться в области "тени" даже при слабом преломлении волн за счет кулоновского отталкивания и ядерного притяжения.

Как подчеркивалось в [15], наличие угла провала можно использовать при оценке величины ядерной фазы для касательных траекторий.

## 4 Заключение

В рамках модели Эриксона для  $S$ -матрицы в представлении угловых моментов мы исследовали совместное действие кулоновского отталкивания и ядерного взаимодействия (кулоновско-ядерной интерференции) на формирование типичных дифракционных картин в упругом рассеянии ядерных частиц (например, пионов, антипротонов, альфа-частиц, тяжелых ионов) на ядрах. Эта модель отражает не только важнейшее условие ядерной дифракции, почти полное поглощение большой совокупности падающих волн с угловыми моментами от нулевого значения до значений, близких к граничному моменту, но и преломление волн в ядерной среде с быстрым изменением ядерного фазового сдвига в области касательных траекторий.

В данной работе акцент сделан не на описание экспериментальных данных посредством подгонки трёх модельных параметров: граничного углового момента, ширины переходной области вблизи этого момента и параметра, ненулевое значение которого определяет появление мнимой части ядерной  $S$ -матрицы. Такая подгонка всегда может быть осуществлена с помощью компьютеров и не требует развития теории. Главным образом нас интересовало получение аккуратных аналитических выражений для амплитуды упругого рассеяния в широких угловых интервалах с условиями их применимости, зависящими от значений указанных параметров и параметра Зоммерфельда  $n$ . Как мы видели, наш подход, основанный на обобщении сумматорной формулы Абеля–Плана, позволяет свести эту задачу для не слишком больших углов рассеяния к рассмотрению двух интегралов по вещественной оси в  $l$ -плоскости. Последние вычисляются в компактной форме при помощи комбинирования процедуры интегрирования по частям с методом наискорейшего спуска.

Таким образом, нам достаточно знать поведение  $S$ -матрицы вблизи вещественной оси, в то время как аналитические свойства парциальных амплитуд вблизи её полюсов отодвинуты на второй план благодаря сильному подавлению вклада всей линии этих полюсов в правой  $l$ -полуплоскости. В этом состоит главное отличие данного подхода от метода комплексных угловых моментов, основанного на преобразовании Ватсона–Зоммерфельда, где для рассеяния в область "света" ( $\theta < \theta_C$ ) приходится суммировать вычеты во всех полюсах этой линии, а в области "тени" ( $\theta > \theta_C$ ) амплитуда определяется вычетами в двух полюсах, ближайших к вещественной оси.

Как показано в п.2.2, искомая амплитуда представляется в виде суммы амплитуды резерфордского рассеяния, умноженной на некоторый фактор затухания, и двух дифракционных ветвей  $f^{(\pm)}(\theta)$  фраунгоферовского типа. При больших значениях  $n$  этот фактор превращается (с точностью до аддитивных поправок  $\sim n^{-1}$ ) в ферми-ступеньку  $\Theta(\theta_C - \theta)$ , за исключением узкого интервала вблизи кулоновского угла с шириной  $\sim n^{-\frac{1}{2}}$  (области "по-

лутени"). В экстремальном случае с  $n \rightarrow \infty$  и  $\theta_C = \text{const.}$ , т.е. в  $C$ -пределе, если использовать терминологию из [22], эта область стягивается к  $\theta_C$ , так что напрашивается аналогия с явлением Гиббса при аппроксимации разрывных функций непрерывными функциями. Тем самым, мы выделяем эффект резкой границы в дифракционном рассеянии заряженных частиц.

В освещенной области вклад резерфордского рассеяния интерферирует с осциллирующими дифракционными вкладами  $f^{(\pm)}(\theta)$ , относительная роль которых регулируется экспонентами  $\exp[-\pi \Delta(\theta_C \pm \theta)]$ , так что наблюдаются характерные отклонения от единицы (чисто резерфордского рассеяния) в угловой зависимости отношения  $\sigma(\theta)/\sigma_R(\theta)$ . Как показано в разделе 3, имеется только внешнее сходство этой угловой зависимости с френелевским законом дифракции в оптике. В модели Эриксона фраунгоферовские осцилляции, наложенные на сравнительно плавную зависимость  $f_R(\theta)$ , дают типичную картину ядерной дифракции для углов  $\theta < \theta_C$ .

В затемненной (классически запрещенной) области с  $\theta > \theta_C$  вклад резерфордского рассеяния быстро вымирает, но кулоновские эффекты по-прежнему присутствуют в отрицательной  $f^{(-)}(\theta)$  и положительной  $f^{(+)}(\theta)$  ветвях, интерферирующих между собой. Их конкуренция определяется соотношением факторов подавления  $F_-(\theta)$  и  $F_+(\theta)$  (см. формулу (3.29)), экспоненциально убывающих в глубь этой области. В самом деле, отношение  $F_+(\theta)/F_-(\theta) = \exp[-2\pi \Delta\theta_C + 2|l_I|\theta]$ , т.е. при выключении ядерной рефракции ( $l_I = 0$ ) не зависит от угла рассеяния, так что кулоновское отталкивание усиливает вклад дифракционного рассеяния от близко лежащей части ядерной поверхности во всем интервале  $\theta > \theta_C$ . При выполнении сильного неравенства (3.33) этот вклад становится преобладающим и, как следствие, фраунгоферовские осцилляции не видны на фоне экспоненциального спада сечения  $\sigma(\theta)$ . Преломление волн за счет ядерного притяжения компенсирует этот кулоновский "damping" таким образом, что даже при условии (3.33) вклады  $f^{(\pm)}(\theta)$  могут быть сравнимыми и сечение будет осциллировать с периодом  $L/\pi$ , начиная с  $\theta \simeq 2\theta_C$ . Правда, следует иметь в виду, что для таких углов в глубине 'тени' в амплитуде могут играть роль другие экспоненциально малые члены, обусловленные недифракционным рассеянием (см. [11, 12]). В модели Эриксона этот вопрос заслуживает отдельного рассмотрения.

Показано, каким образом в модели Эриксона может быть объяснено явление провала для зависимости  $\sigma(\theta)$  в области "тени": появлением одного или нескольких соседних минимумов, гораздо более глубоких, чем в регулярной картине осцилляций сечения без ядерной рефракции.

Наши аналитические результаты справедливы в широком угловом интервале. Равномерность полученных асимптотик состоит также в том, что они обеспечивают надежные решения дифракционной задачи при вариациях модельных параметров в широких пределах. В сочетании с адиабатическим

приближением они могут быть использованы при описании дифракционных явлений в неупругом рассеянии ядерных частиц.

Один из авторов (А.В.Ш.) признателен проф. В.К.Лукьянову за гостеприимство во время пребывания в ЛТФ ОИЯИ, где была начата эта работа. Е.В.З. благодарит РФФИ за финансовую поддержку (грант 0001-006-17).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А.

### О сходимости кулоновско-подобных парциальных разложений

Следуя [13], запишем амплитуду ( 2. 1) в виде

$$f(\theta) = -(ik)^{-1} \lim_{\gamma \rightarrow 0+} \frac{\partial}{\partial \gamma} [S_\gamma(x) - \Delta_\gamma(x)], \quad (\text{A.1})$$

$$S_\gamma(x) = \sum_{l=0}^{\infty} S_l \exp[2i\sigma_l] P_l(x) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma], \quad (\text{A.2})$$

$$\Delta_\gamma(x) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma] \quad (\text{A.3})$$

$$(-1 \leq x = \cos \theta \leq 1)$$

и рассмотрим сумму

$$\delta_\gamma(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(x) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma] \quad (\text{A.4})$$

для любого  $\gamma > 0$ . Заметим, что

$$\delta_\gamma(x) = -2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \Delta_\gamma(x), \quad (\text{A.5})$$

поскольку в данном случае порядок суммирования и дифференцирования можно изменить.

Покажем, что в пространстве "хороших" (достаточно гладких<sup>5</sup>) функций  $\phi(x)$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} (\delta_\gamma, \phi) = \lim_{\gamma \rightarrow 0+} \int_a^b \delta_\gamma(x) \phi(x) dx = \begin{cases} 2\phi(1), & b = 1 \\ 0, & -1 \leq a \leq b < 1 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

<sup>5</sup>Например, дважды дифференцируемых (с непрерывной второй производной) на сегменте  $[-1, 1]$ . Более точные определения можно найти в [27].

или, в соответствии с хорошо известным результатом:

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)P_l(x) = 2\delta(1-x), \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \delta_\gamma(x) = 2\delta(1-x). \quad (\text{A.8})$$

Конечно, эти соотношения следует рассматривать в смысле обобщенных функций.

Доказательство

Прежде всего с помощью формулы

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)z^l = [1 - 2xz + z^2]^{-\frac{1}{2}} \quad (|z| < 1) \quad (\text{A.9})$$

для производящей многочленов Лежандра (см., например, [24], п.10.10) находим

$$\Delta_\gamma(x) = [2(\text{ch}\gamma - x)]^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.10})$$

откуда

$$\delta_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{sh}\gamma}{[\text{ch}\gamma - x]^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.11})$$

Теперь достаточно изучить свойства интеграла

$$I_\gamma(a, b) = \int_a^b \delta_\gamma(x) dx \quad (-1 \leq a \leq b \leq 1).$$

Имеем

$$I_\gamma(a, b) = \sqrt{2} \text{sh}\gamma \{ [\text{ch}\gamma - b]^{-\frac{1}{2}} - [\text{ch}\gamma - a]^{-\frac{1}{2}} \}.$$

Следовательно, мы получаем

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} I_\gamma(a, b) = \begin{cases} \sqrt{2} \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} \text{sh}\gamma / \sqrt{\text{ch}\gamma - 1} = 2, & b = 1 \\ 0, & b < 1 \end{cases}. \quad (\text{A.12})$$

Таким образом, согласно [27] однопараметрическое семейство  $\delta_\gamma(x)$  удовлетворяет всем условиям, необходимым, чтобы образовать  $\delta$ -образную последовательность, что и требовалось доказать.

Развивая этот подход, можно определить

$$f_\gamma^c(x) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{S_l^c - 1}{2ik} P_l(x) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma] \quad (\text{A.13})$$

для любого  $\gamma > 0$  с  $S_l^c = \exp[2i\sigma_l]$ .

Имеем

$$f_{\gamma}^c(x) = -\frac{1}{ik} \frac{\partial}{\partial \gamma} S_{\gamma}^c(x) - \frac{\delta_{\gamma}(x)}{ik}, \quad (\text{A.14})$$

$$S_{\gamma}^c(x) = \sum_{l=0}^{\infty} S_l^c P_l(x) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma]. \quad (\text{A.15})$$

Для вычисления этой суммы удобно выразить кулоновскую  $S$ -матрицу через бета-функцию:

$$S_l^c = B(l + 1 + in, 2in) / \Gamma(-2in) \quad (\text{A.16})$$

и затем использовать следующее представление (ср. [13, 14]):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha t} [\text{sh}\beta t]^{\gamma} dt = \beta^{-1} 2^{-1-\gamma} B(\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\gamma, 1 + \gamma), \quad (\text{A.17})$$

$$(\text{Re}\gamma > -1, \quad \text{Re}\beta > 0, \quad \text{Re}\frac{\alpha}{\beta} > \text{Re}\gamma).$$

Тогда

$$S_l^c = h(n) \int_0^{\infty} [\text{sh}\frac{t}{2}]^{-1-2in} e^{-(l+\frac{1}{2})t} dt \quad (\text{A.18})$$

с  $h(n) = 2^{-1-2in} / \Gamma(-2in)$ . Чтобы обеспечить сходимость интеграла (A.18), мы полагаем  $n \rightarrow n + i0$ .

После подстановки (A.18) в (A.15) и перемены порядка суммирования и интегрирования находим

$$S_{\gamma}^c(x) = h(n) \int_0^{\infty} [\text{sh}\frac{t}{2}]^{-1-2in} \Delta_{t+\gamma}(x) dt, \quad (\text{A.19})$$

или, принимая во внимание соотношение (A.10),

$$S_{\gamma}^c(x) = \frac{h(n)}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} [\text{sh}\frac{t}{2}]^{-1-2in} \frac{dt}{[\text{ch}(t + \gamma) - x]^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.20})$$

В пределе с  $\gamma \rightarrow 0+$  только первый член в (A.14) выживает при  $x \neq 1$ :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} f_{\gamma}^c(x) = \frac{h(n)}{2\sqrt{2}ik} \int_0^{\infty} [\text{sh}\frac{t}{2}]^{-2in} \frac{\text{sht}}{[\text{cht} - x]^{3/2}} dt \quad (\text{A.21})$$

или

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0+} f_{\gamma}^c(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-1-2in} \lim_{\gamma \rightarrow 0+} f_{\gamma}^c(-1), \quad (\text{A.22})$$



$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} f_\gamma^c(-1) = \frac{h(n)}{2ik} \int_0^\infty s^{-2in} \frac{ds}{[1+s^2]^{3/2}}. \quad (\text{A.23})$$

Вводя теперь  $s^2$  как новую переменную интегрирования и применяя соотношение (см. [18] п.1.5, формула (2))

$$B(x, y) = \int_0^\infty v^{x-1} (1+v)^{-x-y} dv \quad (\text{Re } x > 0, \text{Re } y > 0) \quad (\text{A.24})$$

в комбинации с формулой Лежандра ([18], с.19)

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma(z + \frac{1}{2}), \quad (\text{A.25})$$

мы приходим к следующему результату:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} f_\gamma^c(-1) = \frac{n}{2k} e^{2i\sigma_0} = f_c(-1). \quad (\text{A.26})$$

Отсюда

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0^+} f_\gamma^c(x) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-1-in} f_c(-1) = f_c(x), \quad (\text{A.26})$$

где введено обозначение

$$f_c(x) = -\frac{n}{2k} \exp[2i\sigma_0] \left(\frac{1-x}{2}\right)^{-1-in} \quad (\text{A.27})$$

для амплитуды  $f_R(\theta) = f_c(x)$  резерфордского рассеяния.

Другими словами, мы построили кулоновско-подобное разложение по парциальным волнам, которое сходится к точной кулоновской амплитуде при стремлении обрезającego фактора к единице.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В.

### Обобщение формулы Абеля - Плана

Здесь мы напоминаем метод суммирования рядов, который оказался весьма эффективным при решении задач ядерной дифракции (особенно, в случае рассеяния заряженных частиц). Речь идет о подходе [13] (см. также [14]), основанном на следующем представлении:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^\infty F\left(s - \frac{1}{2}\right) ds - i \int_0^\infty \frac{F\left(is - \frac{1}{2}\right) - F\left(-is - \frac{1}{2}\right)}{\exp(2\pi s) + 1} ds -$$

$$- \pi \sum_k \text{res} \left[ \frac{e^{i\pi z}}{\sin \pi z} F(z) \right]_{z=z_k} \quad (\text{Im } z_k > 0) - \pi \sum_k \text{res} \left[ \frac{e^{-i\pi z}}{\sin \pi z} F(z) \right]_{z=z_k} \quad (\text{Im } z_k < 0). \quad (\text{B.1})$$

При выводе этой формулы предполагается, что функция  $F(z)$  имеет определенные аналитические свойства в комплексной  $z$ -плоскости:

а) она регулярна при  $\operatorname{Re} z \geq -\frac{1}{2}$ , за исключением, быть может, совокупности точек  $z_k$ , которые являются ее изолированными особыми точками с  $\operatorname{Re} z_k > -1/2$ , не лежащими на вещественной оси;

б) поведение  $F(z)$  на последовательности дуг  $C_R^{(\pm)}$  <sup>6</sup> является таким, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^{(\pm)}} F(z) (\operatorname{ctg} \pi z \pm i) dz = 0. \quad (\text{B.2})$$

Условие (B.2) выполняется, например, для функции  $F(z)$ , у которой

$$|F(z)| \leq \epsilon(x) e^{p|y|} \quad (p < 2\pi), \quad (\text{B.3})$$

если  $z = x + iy \in C_R^{(\pm)}$ , с  $\epsilon(x) \rightarrow 0$ , когда  $x \rightarrow \infty$ .

Можно проверить, что в модели Эриксона парциальная амплитуда

$$F(l) = (2l + 1) S(l) \exp[2i\sigma(l)] P_l(\cos \theta) \exp[-(l + \frac{1}{2})\gamma] \quad (\text{B.4})$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям, так что выражение (B.1) будет одним из инструментов нашего исследования. В этой связи отметим, что (B.1) обобщает формулу суммирования Абеля - Плана, вывод которой можно найти в [13] (см. также [18], с.38): в отличие от нее (B.1) справедливо как для функций  $F(z)$ , регулярных справа от вертикали  $\operatorname{Re} z = -1/2$ , так и для тех, которые имеют изолированные сингулярности в этой части  $z$ -плоскости. Разумеется, вклады от возможных разрезов для многозначной функции  $F(z)$  могут быть включены в правую часть формулы (B.1).

Подчеркнем, что наш подход занимает промежуточное место между методом Ватсона - Зоммерфельда [28], в котором решающее значение имеют аналитические свойства  $F(z)$  вне вещественной оси, и процедурой суммирования Пуассона, где исходная сумма заменяется бесконечным рядом интегралов на этой оси:

$$\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(s - \frac{1}{2}) ds + 2 \sum_0^{\infty} F(s - \frac{1}{2}) \cos[2\pi m(s - \frac{1}{2})] ds. \quad (\text{B.5})$$

В рассматриваемой модели  $S$ -матрицы мы имеем в  $l$ -плоскости линию про-

<sup>6</sup>Каждая такая дуга есть часть окружности с центром в точке  $z = 0$ , расположенной в верхней (нижней) полуплоскости и проведенной до пересечения с линией  $\operatorname{Re} z = -1/2$ .

стных полюсов<sup>7</sup>  $l_k = \bar{l}_0 + i(2k - 1)\pi\Delta$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) профильной ферми-функции и простые полюса матрицы кулоновского рассеяния (2.13) в точках  $\lambda_k = -k - 1 - in$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Вклады от полюсов  $l_k$  в (B.1) подавлены факторами  $\exp[-|l_I + (2k - 1)\pi\Delta|]$  (в общем случае,  $\exp[-|\text{Im}z_k|]$ ) по сравнению с методом Ватсона-Зоммерфельда. Как известно, его применения в теории ядерной дифракции являются весьма плодотворными ([2, 5, 6, 8]) в тех ситуациях, когда можно пренебречь вкладом так называемого фонового (background) интеграла и ограничиться вкладами особых точек  $S(l)$ , ближайших к вещественной оси. В случае рассеяния заряженных частиц этот метод комплексных угловых моментов оказывается не столь эффективным (особенно при описании дифракционных картин в освещенной области (см., например, [30]), где начинает работать вся линия полюсов  $l_k$ ).

В то же самое время успех процедуры Пуассона существенно зависит от возможности оперировать с несколькими первыми интегралами в правой части (B.4) (в наиболее благоприятном случае с первым интегралом) благодаря быстро осциллирующим множителям  $\cos[2\pi m(s - \frac{1}{2})]$ . Наш подход, основанный на формуле (B.1), позволяет сделать соответствующие оценки гораздо более простым способом (по крайней мере, для существующих МСП).

## Список литературы

- [1] *Frahn W.E.* // *Diffractive Processes in Nuclear Physics*, Oxford: Clarendon Press, 1985.
- [2] *Ericson T.E.O.* // *Preludes in Theoretical Physics*, (eds. A. de Shalit, H. Feshbach and L. Van Hove) North-Holland, Amsterdam, 1966, P.321.
- [3] *McIntyre W.E., Wang K.H., Becker L.C.* // *Phys. Rev.* 1960, V.117, P.1337.
- [4] *Frahn W.E., Venter R.H.* // *Ann. Phys.* 1963, V.24, P.243.
- [5] *Инопин Е.В.* // *ЖЭТФ* 1965, Т.21. С.1090.
- [6] *Шебеко А.В.* // *ЯФ* 1967, Т.5, С.543.
- [7] *Rowley N., Marty C.* // *Nucl. Phys.* 1976, V.A266, P.494.
- [8] *Инопин Е.В., Шебеко А.В.* // *Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами*, Киев: Наукова думка, 1987, С.154.
- [9] *Choudhury D.C., Guo T.* // *Phys. Rev.* 1989, V.C39, P.1883.
- [10] *Choudhury D.C., Scura M.A.* // *Phys. Rev.* 1994, V.C50, P.979.

<sup>7</sup> Они не являются полюсами Редже, которые встречаются в теории потенциального рассеяния. Последние распределены иным образом по сравнению с этой линией. В частности, для  $S$ -матриц, рассчитанных с локальными оптическими потенциалами, полюса отсутствуют в четвертом квадранте плоскости комплексных угловых моментов (см., например, [29] и ссылки там). Разумеется, такая возможность не может быть отвергнута a priori для эффективных нелокальных потенциалов, описывающих ядро-ядерные взаимодействия.

- [11] *Shebeko A.V.* // Proc. the 8th Int. Conf. on Nucl. Reaction Mechanisms (ed. E.Gadioli), Varenna, 1997, P.483.
- [12] *Котляр В.В., Шебеко А.В.* // Изв. РАН 1999, Т.63, С.188.
- [13] *Инопин Е.В., Шебеко А.В.* // ЯФ 1970, Т.11, С.78.
- [14] *Котляр В.В., Шебеко А.В.* // ЯФ 1981, Т.34, С.370.
- [15] *Тищенко В.И., Шебеко А.В.* // ЖЭТФ 1966, Т.23. С.1113.
- [16] *Frahn W.E., Gross D.N.* // Ann. Phys. 1976, V.101, P.520.
- [17] *Taylor J.R.* // Nuovo Cim. 1974, V.23B, P.313.
- [18] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* // Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1965, Т.1.
- [19] *Шебеко А.В.* // ЯФ 1977, Т.25, С.397.
- [20] *Bleinstein N.* // Comm. Pure Appl. Math. 1966, V.19, P.353.
- [21] *Levy V., Keller M.* // Comm. Pure Appl. Math. 1959, V.12, P.159.
- [22] *Frahn W.E.* // Nucl. Phys. 1966, V.75, P.577.
- [23] *Fricke S.H. et al.* // Nucl. Phys. 1989, V.A500, P.399.
- [24] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* // Высшие трансцендентные функции, М.: Наука, 1966, Т.2.
- [25] *Frahn W.E.* // Heavy-Ion High-Spin States and Nuclear Structure. Vienna: IAEA, 1975, V.1, P.157.
- [26] *Fuller R.C., Moffa P.J.* // Phys. Rev. 1976, V.C14, 1721
- [27] *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* // Обобщённые функции, М.: Физматгиз, 1958, Т.1.
- [28] *Sommerfeld A.* // Partial Differential Equations in Physics. New York: Academic Press, 1949.
- [29] *Takemasa T., Tamura T.* // Phys. Rev. 1978, V.C18, P.1282.
- [30] *Anni R., Taffara L.* // Nuovo Cim. 1974, V.20A, P.595.

---

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 мая 2000 года.