P2-2005-6

О. С. Космачев*

СПИН КАК КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОЯВЛЕНИЕ РЕЛЯТИВИЗМА

Направлено в «Journal of Physics G»

*E-mail: kos@thsun1.jinr.ru

Космачев О. С. Р2-2005-6
Спин как кинематическое проявление релятивизма

Показано, что спиновые матрицы Паули являются инфинитезимальными операторами преобразований Лоренца для неприводимого представления с первым весовым числом, равным 1/2. Это стандартное неприводимое представление не содержит пространственных (P) и временных (T) отражений. В случае орбитального движения возникает чисто релятивистский эффект, обязанный своим происхождением так называемому вигнеровскому повороту. Аналогично был выполнен также анализ для представлений группы Лоренца с весом 1/2, но являющихся (P)-, (T)- и (PT)-сопряженными по отношению к стандартным. В каждом конкретном случае меняется явный вид матриц представления. Неизменными с точностью до фазового множителя ± 1 остаются коммутационные соотношения между составляющими.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Перевод авторов

Kosmachev O. S. P2-2005-6
Spin as a Kinematical Effect of the Relativity

It is shown that Pauli spin matrices are infinitesimal boost operators for irreducible representation of Lorentz group with first weight number equal to 1/2, which do not contain space (P) and time (T) reflections. Purely relativistic effect appears under orbital motion, which is the result of so-called Wigner rotation. A similar analysis was also fulfilled for (P)-, (T)- and (PT)-conjugate irreducible representation of Lorentz group with respect to standard one. In every particular case an explicit form of spin matrices is being changed, but components of spin operators have the same commutative relations up to phase factor ± 1 and the same physical sense.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на долгую жизнь концепции спина [1] и ее частичную, но весьма успешную математическую формализацию [2], вопрос о природе спина нельзя считать закрытым. Данное сообщение ставит своей целью обратить внимание специалистов на возможную физическую интерпретацию математического формализма для одного частного случая — спина 1/2.

Понятно, что это исключительный случай. Именно с ним связаны успехи атомной спектроскопии, объяснение Периодического закона Менделееева, развитие ядерной физики и элементарных частиц и т.д. Естественно, что почтительное отношение к таким вехам, которые символизируют научный прогресс прошлого столетия, породило веру в непререкаемость некоторых исходных положений. Концепция спина в их числе.

Что касается поставленной задачи, то выделенность спина 1/2 выражается в том, что

1) σ-матрицы порождают конечную группу;

2) отсутствуют лишние компоненты спина, в отличие от полей высших спинов;

3) имеется полная согласованность с требованиями релятивизма.

Смысл третьего пункта станет ясен из дальнейшего.

1. МАТРИЦЫ ПАУЛИ И ПРИРОДА СПИНА

Будем исходить из общепринятого положения о том, что «спин является собственным моментом количества движения элементарной частицы, имеющим квантовую природу и не связанным перемещением частицы как целого» [3]. В случае спина 1/2 собственный момент количества движения, как известно, описывается формализмом спиновых матриц Паули [2]. Легко проверить, что матрицы Паули порождают группу 16-го порядка. Группа имеет десять сопряженных классов, центр, состоящий из четырех элементов, восемь одномерных неприводимых представлений (НП) и два двумерных неэквивалентных НП.

Введем следующие обозначения:

$$\sigma_z\sigma_y \equiv a_1, \qquad \sigma_x\sigma_z \equiv a_2, \qquad \sigma_y\sigma_x \equiv a_3, \tag{1}$$

и

$$\sigma_x \equiv b_1, \qquad \sigma_y \equiv b_2, \qquad \sigma_z \equiv b_3. \tag{2}$$

Можно показать, что

$$b_1 = a_1 c, \quad b_2 = a_2 c, \quad b_3 = a_3 c, \tag{3}$$

где c есть один из четырех $(I, -I, iI, -iI)$ элементов центра и $c = \sigma_x \sigma_y \sigma_z = iI$. Здесь I — единичная 2×2-матрица. Это означает, что для данного НП операторы a_1, a_2, a_3 связаны с операторами b_1, b_2, b_3 простыми соотношениями

$$b_1 = ia_1, \quad b_2 = ia_2, \quad b_3 = ia_3. \tag{4}$$

Можно отметить также, что

$$a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1} = a_1^3, \qquad a_1 a_2 = a_3, \qquad a_1^2 = a_2^2 = a_3^2. \tag{5}$$

Это означает, что a_1, a_2 порождают подгруппу кватернионов [8]. Обозначим ее как $Q_2[a_1, a_2]$. Считая элементы полной группы образующими элементами алгебры, находим такие коммутаторы:

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\ [a_1, b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\ [a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\ [a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\ [a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. & \end{array} \tag{6}$$

С точностью до общего для всех равенств нормировочного множителя 2 полученные коммутационные соотношения полностью совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственного преобразования Лоренца [4]. Далее группа, которая генерируется тремя σ-матрицами Паули, будет обозначаться как d_γ. Коммутационные соотношения (КС) (6) означают, что на группе d_γ реализуется одно из неприводимых представлений группы Лоренца. Именно в таком смысле нужно понимать третий пункт, названный во Введении.

В силу построения [4] коммутационных соотношений (6) все шесть операторов (a_1, a_2, a_3) и (b_1, b_2, b_3) имеют вполне определенный физический смысл. Поэтому если принять, что σ-матрицы описывают спин, то с необходимостью отсюда следует, что $\sigma_x \equiv b_1, \sigma_y \equiv b_2, \sigma_z \equiv b_3$ являются инфинитезимальными операторами преобразований Лоренца вдоль соответствующих пространственных осей. При этом $\sigma_z \sigma_y \equiv a_1, \sigma_x \sigma_z \equiv a_2, \sigma_y \sigma_x \equiv a_3$, имеют смысл инфинитезимальных операторов подгруппы трехмерных вращений.

Вследствие антикоммутации операторов b_1, b_2, b_3 вторая верхняя строчка (КС) (6) принимает вид

$$b_1 b_2 = -a_3, \quad b_2 b_3 = -a_1, \quad b_3 b_1 = -a_2. \tag{7}$$

Все три равенства выражают в инфинитезимальной форме известный факт — поворот на некоторый фиксированный угол одной инерциальной системы относительно другой при их релятивистском движении [5]. Очевидно, что при отклонении от равномерного прямолинейного движения этот эффект будет носить более выраженный характер. При переходе к регулярному, повторяющемуся движению, например к орбитальному, поворот примет также регулярный характер, т. е. проявит себя как вращение. Другими словами, движение типа орбитального генерирует релятивистский поворот. Вот почему ни орбитальный момент, ни спин, а только их сумма может быть интегралом движения для одной частицы.

Таким образом, анализ группы σ-матриц Паули на основе КС (6), которые являются прямым следствием преобразований Лоренца и только, демонстрирует, что так называемый собственный момент частицы со спином 1/2 — следствие определенного характера (как минимум не свободного, не прямолинейного) движения этой частицы.

С таким выводом согласуется давно известный факт. Измерить магнитный момент электрона, связанный с собственным моментом, в пучке электронов не представляется возможным [6].

Явный вид операторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 для неприводимых представлений позволяет найти весовые числа, связанные с этими представлениями. В случае группы d_γ строятся операторы

$$\begin{array}{ll} H_+ = ia_1 - a_2, & F_+ = ib_1 - b_2, \\ H_- = ia_1 + a_2, & F_- = ib_1 + b_2, \\ H_3 = ia_3, & F_3 = ib_3. \end{array} \tag{8}$$

Весовые числа — это собственные числа операторов $H_3 = ia_3$ и $F_3 = ib_3$. В случае конечномерных представлений в качестве весовых чисел принято считать наибольшее значение из всех возможных для данного оператора. Так вычисление его для оператора H_3 при стандартном выборе σ-матриц дает $l_0 = 1/2$.

Любая перестановка операторов a_1, a_2, a_3 в формулах для H_1, H_2, H_3 не меняет значение l_0. Объясняется это исключительно тем, что эти три оператора являются однотипными, т. е. как элементы группы d_γ они имеют один и тот же порядок четыре.

Из структуры d_γ следует, что a_1, a_2, a_3 являются элементами подгруппы трехмерных вращений. И именно с ней связано происхождение первого весового числа l_0. Однако, как следует из изложенного, без релятивизма немыслима генерация спинового поворота. Поэтому спин на самом деле есть проявление релятивизма. Безусловно верно связывать спин со вполне определенным квантовым числом, если под квантовыми числами понимать индексы представлений групп [7]. Но наделять это понятие свойствами физической величины, реально существующей в отрыве от движения частицы как целого, — исходить из недоказанного предположения.

Итак, исходя из общепринятого формализма спина 1/2 и не сделав никаких дополнительных предположений, мы получаем одно из частных неприводимых представлений группы Лоренца и, как следствие, физическую интерпретацию σ-матриц Паули. Строго говоря, она применима для описания электронов или объектов, структура которых не принимается во внимание.

2. T-СОПРЯЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Исчерпывающий анализ группы γ-матриц Дирака, или, что то же самое, свободного уравнения Дирака, и последующие разработки [8–11] выявили существование групп, весьма близких по своим свойствам к группе d_γ, которые являются структурными составляющими лептонных уравнений. Группы были получены в явном виде и обозначены как $b_\gamma, f_\gamma, c_\gamma$. Очевидно, что все четыре группы связаны с четырьмя классами преобразований группы Лоренца. Принято различать эти классы по величине детерминанта (± 1) и изменению знака $(\pm)$ временного компонента четырехвектора при преобразованиях.

Все четыре группы $d_\gamma, b_\gamma, f_\gamma, c_\gamma$ связаны друг с другом дискретными преобразованиями (T)-, (P)- и (TP)-инверсиями [11]. Преобразования такого рода называют также аналитическими продолжениями по параметрам группы.

Алгебры и КС, построенные на $b_\gamma, f_\gamma, c_\gamma$ по аналогии с КС (6), практически совпадают, отличаясь лишь знаками в отдельных коммутаторах. Каждая из групп реализует неприводимое представление группы Лоренца с первым весовым числом $l_0 = 1/2$. Поскольку оно характеризует величину спина, то представляется интересным провести анализ аналогично группе d_γ.

Две из трех групп, именно b_γ и f_γ, являются подструктурами группы γ-матриц Дирака. Группа b_γ, как и d_γ, содержит в своем составе подгруппу кватернионов, но центр ее имеет элементы только второго порядка. В результате получается следующий набор коммутаторов на основе b_γ:

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b'_1, b'_2] = 2a_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = 2a_2, \\
[a_1, b'_1] = 0, & [a_2, b'_2] = 0, & [a_3, b'_3] = 0, \\
[a_1, b'_2] = 2b'_3, & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\
[a_2, b'_3] = 2b'_1, & [a_2, b'_1] = -2b'_3, & \\
[a_3, b'_1] = 2b'_2, & [a_3, b'_2] = -2b'_1. &
\end{array} \tag{9}$$

Очевидно, что (6) переходит в (9) при замене

$$b_k \to b'_k = i b_k \quad (k = 1, 2, 3). \tag{10}$$

При этом происходит переход одной группы в другую $d_\gamma \to b_\gamma$. Различие КС (6) и (9) заключается в противоположных знаках трех коммутаторов, расположенных во второй верхней строке. Время как параметр преобразований проявляется начиная с этой строки. Поэтому данный тип неприводимых представлений был назван (T)-сопряженным по отношению к стандартному, который реализуются на группе d_γ. Все остальные коммутаторы, расположенные ниже, являются следствием первых шести операторов, расположенных в двух верхних строчках.

Аналог σ-матриц для данного представления, т. е. b'_1, b'_2, b'_3 в матричной записи, имеет вид

$$b'_1 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}; \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(T)-сопряжение не затрагивает операторы a_1, a_2, a_3, поэтому оно не меняет величину $l_0 = 1/2$ и не меняет тип спина, т. е. все три пространственных оси остаются одинаково возможными для выбора оси квантования. Это является причиной того, что частицы и античастицы имеют одинаковые спиновые свойства [11].

3. P-СОПРЯЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Следующий тип коммутационных соотношений был получен на основе группы f_γ.

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\
[b'_1, b'_2] = -2a'_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = -2a'_2, \\
[a_1, b'_1] = 0, & [a'_2, b'_2] = 0, & [a'_3, b'_3] = 0, \\
[a_1, b'_2] = 2b'_3, & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\
[a'_2, b'_3] = -2b'_1, & [a'_2, b'_1] = -2b'_3, & \\
[a'_3, b'_1] = 2b'_2, & [a'_3, b'_2] = 2b'_1. &
\end{array} \tag{11}$$

Данный вид представления был назван P-сопряженным по отношению к d_γ, так как различие возникает уже в первой строке КС (11), т.е. на уровне подгруппы трехмерных вращений. Имеется в виду изменение знака второго коммутатора в первой строке. Переход от КС (6) к (11) равносилен замене $a_2 \to ia'_2$, и по определению получаем $a_3 \to ia'_3$. Все дальнейшие отклонения от стандарта (6) являются следствиями первичного изменения в подгруппе трехмерных вращений. При этом подгруппа кватернионов $Q_2[a_1, a_2]$ переходит в подгруппу $q_2[a_1, a'_2]$ с теми же самыми определяющими отношениями (первые два равенства из (5)) между генераторами. Но есть и отличия. Можно показать [10], что элементы a_1, a_2, a_3 группы d_γ имеют четвертый порядок, тогда как элементы a_2, a_3 группы f_γ имеют порядок два и только элемент a_1 имеет порядок четыре, как прежде. Вследствие этого мы получаем в подобных случаях неэквивалентность пространственных направлений или, как принято говорить, асимметрию между левым и правым. Согласно равенствам (8) для группы f_γ первое весовое число получается равным $l_0 = 1/2$ только при $H_3 = ia_1$. Для двух других операторов (a'_2, a'_3) число l_0 становится мнимым, т.е. не имеет физического смысла для подгруппы трехмерных вращений.

Аналогичная неэквивалентность наблюдается при этом и для значений b'_1, b'_2, b'_3. Явный вид их для группы f_γ таков:

$$b'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad b'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b'_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом структура коммутационных соотношений в целом не меняется.

4. (PT)-СОПРЯЖЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Четвертый тип КС, связанных с группой c_γ, имеет вид [9]:

$$\begin{array}{lll} [a_1, a'_2] = 2a'_3, & [a'_2, a'_3] = -2a_1, & [a'_3, a_1] = 2a'_2, \\ [b''_1, b''_2] = 2a'_3, & [b''_2, b''_3] = -2a_1, & [b''_3, b''_1] = 2a'_2, \\ [a_1, b''_1] = 0, & [a'_2, b''_2] = 0, & [a'_3, b''_3] = 0, \\ [a_1, b''_2] = 2b''_3, & [a_1, b''_3] = -2b''_2, & \\ [a'_2, b''_3] = -2b''_1, & [a'_2, b''_1] = -2b''_3, & \\ [a'_3, b''_1] = 2b''_2, & [a'_3, b''_2] = 2b''_1. & \end{array} \qquad (12)$$

Они были названы (PT)-сопряженными по отношению к стандартным (6), потому что представляют собой последовательное действие T- и P-сопряжения по отношению к группе d_γ. Очевидно, что обе операции коммутируют, поэтому можно условно записать (TP)=(PT). Сравнение КС (11) и (12) показывает, что f_γ и c_γ T-сопряжены между собой так же, как d_γ и b_γ.

Первые строки (11) и (12) совпадают, поэтому все сказанное о первом весовом числе l_0 для f_γ в полной мере относится к c_γ. Тем самым подтверждается правило, что T-сопряжение не меняет спиновых свойств.

Изучение возможных типов лептонных уравнений [8–11] показало, что наличие в их структуре группы c_γ приводит к описанию частиц, имеющих только продольную поляризацию. Явный вид операторов b''_1, b''_2, b''_3 в матричном представлении имеет вид

$$b''_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad b''_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad b''_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Данное представление так же, как T- и P-сопряженные, разрушает условный рефлекс [12], который выражается формулой (спин 1/2 $\Rightarrow$ матрицы Паули).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для получения КС (6) нет никакой необходимости использовать положения квантовой механики [4]. Поэтому тождественное совпадение σ-матриц Паули с матричной реализацией одного из неприводимых представлений группы Лоренца с первым весовым числом $l_0 = 1/2$ не оставляет места для слов о «собственном моменте», фигурирующих в определении спина [3]. При этом слова о «квантовой природе» отодвигаются до того момента времени, когда у частицы в силу требований релятивистской кинематики появится специфический механический момент, вызванный неравномерным движением. Таким образом в определении спина возникают понятия «группа Лоренца» и «неприводимые представления».

Предложенная интерпретация формализма матриц Паули не отменяет ничего, что связано с наличием у электрона спина 1/2 до тех пор, пока он находится в составе атома или другой системы, связывающей этот электрон. Отличие от устоявшихся представлений возникает тогда, когда мы мыслим электрон свободным.

Истоки общепринятой установки, сложившейся давно, достаточно определенно выражаются словами авторитетов: «...едва ли можно себе представить, что в атоме электрон обладает четырьмя степенями свободы, а в свободном состоянии — тремя» [6]. Разумеется, эти слова не могут служить доказательством того, что электрон обладает четырьмя степенями свободы, а «представить себе» оказалось вполне возможно. Дело в том, что только во взаимодействиях во всей полноте проявляются свойства частиц.

Свободное уравнение Дирака описывает как электрон, так и позитрон, а отличить один от другого можно с помощью электромагнитного поля. Свободные состояния должны фиксировать и содержать необходимые условия для проявления различных свойств, которые будут наблюдаться во взаимодействиях. В этом их необходимость, а при последующем успехе еще и адекватность. Именно такое положение наблюдается в случае свободного уравнения Дирака. Поэтому уточнение такой детали, как интерпретация состояния свободного электрона, оказывается принципиальным для дальнейших построений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Uhlenbeck G. E., Goudsmit S.* Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhalters jedes einzelnen Elektrons // Naturwissenschaften. 1925. Bd. 13. S. 953–954; Spinning electrons and the structure of spectra // Nature. 1926. V. 117. P. 264–265.

2. *Pauli W.* Zur Quantenmechanik des magnetischen Electrons // Z. Phys. 1927. Bd. 43. S. 601–623.

3. Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1984. С. 713.

4. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: ФМ, 1958. С. 88.

5. *Меллер К.* Теория относительности. 2-е изд. М.: Атомиздат, 1975. С. 39.

6. *Мотт Н, Месси Г.* Теория атомных столкновений. 3-е изд. М.: Мир, 1969. С. 204.

7. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М., 1986. С. 16.

8. *Космачев О. С.* Физическая интерпретация некоторых групповых алгебр // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т. 1, № 5(122). С. 50–57.

9. *Космачев О. С.* Об инвариантах уравнений типа Дирака: Препринт ОИЯИ Р2-2002-217. Дубна, 2002.

10. *Космачев О. С.* Ковариантная формулировка волнового уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов: Препринт ОИЯИ Р4-2003-127. Дубна, 2003.

11. *Космачев О. С.* Волновое уравнение для квартета нейтрино // Письма в ЭЧАЯ. 2004. Т.1, № 5(122). С. 58–65.

12. *Павлов И. П.* Избранные труды. М.: Акад. пед. наук, 1951. С. 364.

Получено 27 января 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 24.02.2005.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,58. Тираж 415 экз. Заказ № 54803.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/