P5-2007-31

Ломидзе И. Р.[1,2], Джавахишвили Дж. И.[1,2]

ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ ТРЕХМЕРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

[1]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2]Тбилисский государственный университет им. И. Джавахишвили, Грузия

Ломидзе И. Р., Джавахишвили Дж. И. P5-2007-31
Применение ортогональных инвариантов трехмерных операторов
для решения некоторых физических задач

На основе полного набора ортогональных инвариантов операторов, построенного в серии предыдущих работ одного из авторов (И. Л.), получена система нелинейных дифференциальных уравнений для инвариантов матрицы Якоби гидродинамической скорости барохронного течения идеального газа (жидкости). Показано, что существует только два режима такого течения — потенциальный и соленоидальный. В обоих режимах найдены точные решения построенной системы нелинейных дифференциальных уравнений; найдены полиномиальные соотношения для инвариантов матрицы Якоби и показано, что эти соотношения являются интегралами движения. С использованием полученных результатов решены трехмерные гидродинамические уравнения Эйлера и найдена зависимость от времени и от пространственных координат гидродинамической скорости течения и плотности среды. Показано, что при потенциальном барохронном течении зависимость гидродинамической скорости от радиуса-вектора (относительно произвольно выбранного начала координат) имеет вид нерелятивистского закона Хаббла. Этот результат представляется интересным, так как режим барохронного течения естественным образом моделирует крупномасштабную эволюцию Вселенной. Для соленоидального течения найдены необходимые и достаточные условия существования решений уравнений Эйлера вида простой либо двойной волны и показано, что это течение является изобарическим. Развитый подход применен также для описания динамики твердого тела.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2007

Lomidze I. R., Javakhishvili J. I. P5-2007-31
Application of Orthogonal Invariants of Operators in Solving Some Physical Problems

On the base of complete set of orthogonal invariants of operators which is built in the recently performed series of articles of one of the authors (I. L.) the system of nonlinear differential equations (NDE) for orthogonal invariants of ideal gas (liquid) hydrodynamic velocity's Jacobi matrix is obtained when the flow is barochronic. It is shown that only two regimes of barochronic flow are possible — a potential and/or a solenoidal one. Exact solutions of the NDE system are obtained; polynomial relations between the Jacobi matrix's invariants are found and it is proved that these relations are integrals of motion. Using the obtained results the 3-dimensional hydrodynamic Euler equations are solved and hydrodynamic velocity's and substance density's time and space dependence are found. It is shown that the hydrodynamic velocity of potential barochronic flow depends on radius-vector (for arbitrarily chosen origin of coordinates frame) and satisfies the nonrelativistic Hubble law. This result seems interesting taking into consideration that barochronic flow naturally describes long-scale evolution of the Universe. The sufficient and necessary conditions are found for the solution of hydrodynamic Euler equations of solenoidal barochronic stream having form of the primitive wave or of the double wave. It is shown that such a flow is isobaric.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2007

ВВЕДЕНИЕ

В цикле работ [1–4] был построен полный полиномиальный базис инвариантов операторов и их матриц при ортогональных преобразованиях в n-мерном евклидовом пространстве и решена задача классификации линейных операторов по их ортогональным инвариантам (в этих же работах доказаны также аналогичные теоремы и для группы унитарных преобразований в n-мерном унитарном векторном пространстве).

Развитый аппарат позволяет успешно решать разнообразные физические задачи, при этом в некоторых случаях полученные результаты существенно уточняют решения, построенные другими методами. Наш подход позволяет также находить новые решения, которые не «улавливались» при прежних исследованиях [5–8].

В настоящей работе ортогональные инварианты трехмерных матриц применяются для решения трехмерных нелинейных уравнений в частных производных, описывающих некоторые задачи гидро- и аэродинамики, а также твердого тела. Похожий метод применялся в работах [5–8], где были получены дифференциальные уравнения для алгебраических инвариантов матрицы Якоби поля скоростей непрерывной среды и изучены типы симметрии общих решений этой системы уравнений для некоторых гидро- и аэродинамических моделей. Однако существенно, что использованный в этих работах набор алгебраических инвариантов не является полным. Нами показано, что применение полного полиномиального базиса инвариантов позволяет найти все (гладкие) решения соответствующей физической задачи, причем в явно ковариантном виде. Количество произвольных параметров в найденных решениях в общем случае не может быть уменьшено.

I. Ниже использованы следующие основные результаты цикла работ [1–4].

1. Для произвольного оператора **T** в вещественном евклидовом пространстве существует канонический ортонормированный базис, определенный однозначно с точностью до одновременного отражения всех координатных осей, в котором матрица $T = [T_{lk}]$ (вообще говоря, несимметрическая) этого оператора имеет вид

$$T = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & s_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}, \qquad (1)$$
$$s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3,\ T_{12} \equiv \omega_3 \geqslant 0,\ T_{13} \equiv -\omega_2 \geqslant 0,$$

причем если $s_1 = s_2 < s_3$ (или если $s_1 < s_2 = s_3$), то соответствующим поворотом в координатной плоскости x_1Ox_2 (или, соответственно, в x_2Ox_3), не изменяющим значения $T_{12} \equiv \omega_3$ (соответственно, $T_{23} \equiv \omega_1$), всегда можно обратить в нуль элемент T_{13} (если же $s_1 = s_2 = s_3 = s$, то можно обратить в нуль элементы T_{13} и T_{23}).

2. Построен полный набор алгебраических (полиномиальных) ортогональных инвариантов данного оператора **T**, взаимно-однозначно (биективно) связанный с элементами матрицы этого оператора в каноническом базисе. В трехмерном вещественном евклидовом пространстве этот набор в общем случае состоит из следующих шести полиномиальных инвариантов ($\mathrm{tr}\, M = \sum M_{kk}$):

$$\mathrm{tr}\, S^\lambda, \quad (\lambda = \overline{1,3})\, \mathrm{tr}\, A^2, \quad \mathrm{tr}\,(SA^2), \quad \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2), \qquad (2)$$

где

$$S_{lk} = S_{kl} = (T_{lk} + T_{kl})/2, \quad A_{lk} = -A_{kl} = (T_{lk} - T_{kl})/2.$$

Легко видеть, что в каноническом базисе выполняются равенства [1]

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\, S^\lambda = s_1^\lambda + s_2^\lambda + s_3^\lambda, \quad \lambda = \overline{1,3};\\
&\mathrm{tr}\, A^2 = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \equiv -2\boldsymbol{\omega}^2;\\
&\mathrm{tr}\,(SA^2) = s_1\omega_1^2 + s_2\omega_2^2 + s_3\omega_3^2 - \boldsymbol{\omega}^2 \mathrm{tr}\, S;\\
&\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = \omega_1\omega_2\omega_3 \det \left[s_k^{l-1}\right]_{k,l=\overline{1,3}} = \omega_1\omega_2\omega_3(s_2 - s_1)(s_3 - s_1)(s_3 - s_2).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Уравнения (54) взаимно-однозначно связывают элементы матрицы в каноническом базисе и инварианты (2). Поскольку параметры $s_k, \omega_k,\ k = \overline{1,3}$, в формуле (1) произвольны, это означает, что множество (2) является полной системой функционально-независимых инвариантов — минимальным функциональным базисом (см. [1, 2]). Отсюда следует, что *два оператора (две матрицы) ортогонально подобны тогда и только тогда, когда они имеют совпадающий набор инвариантов* (2).

Эти утверждения являются частным случаем общих теорем, доказанных в работах [1–4] для операторов в евклидовом и унитарном пространстве произвольной размерности n.

Подчеркнем, что коэффициенты характеристического уравнения оператора **T** (матрицы) в общем случае не позволяют классифицировать операторы (матрицы) по признаку ортогонального подобия. Хорошо известно также (см., например, [9]), что такую классификацию не позволяет осуществить и более широкий набор инвариантов

$$\operatorname{tr} S^{\lambda}, \quad \left\langle \boldsymbol{\omega} S^{\lambda-1} \boldsymbol{\omega} \right\rangle = \operatorname{tr}(A^2 S^{\lambda-1}) + \boldsymbol{\omega}^2 \operatorname{tr} S^{\lambda-1}, \quad \lambda = \overline{1,3} \tag{4}$$

(здесь и далее скобками $\langle\ \rangle$ обозначено евклидово скалярное произведение векторов, а умножение матрицы на вектор понимается в смысле умножения на столбец, составленный из ортогональных компонент этого вектора). Это и понятно, так как набор (4) зависит только от квадрата антисимметрической части оператора (матрицы) и, следовательно, не позволяет различать взаимно транспонированные операторы (матрицы), которые не являются ортогонально подобными.

II. Применим развитый метод к задаче о *барохронном* течении идеального газа.

Определение. *Барохронным называется течение, при котором давление P и плотность ρ сплошной среды могут зависеть только от времени t и одинаковы во всех точках евклидового пространства* $\mathbb{E}^3$ [6].

Ясно, что трехмерное барохронное движение физически может осуществляться лишь в бесконечном однородном пространстве. В этом смысле изучение такого режима весьма интересно с точки зрения задач космологии, поскольку позволяет отделить эффекты, обусловленные гравитацией (искривлением пространства) от чисто кинематических эффектов в плоском бесконечном однородном пространстве.

Ясно также, что при нулевом градиенте давления и плотности движение может происходить только по инерции, при этом нетривиальная зависимость гидродинамической скорости от координат и времени обусловлена начальным полем скоростей, которое полагаем непрерывным и достаточно гладким.

Для идеального барохронного газа уравнения Эйлера и непрерывности [10] принимают вид нелинейных дифференциальных уравнений [5, 6]

$$\partial_t u_k + u_j \partial_j u_k = 0, \partial_t \rho + \rho \partial_j u_j = 0, \quad k = \overline{1,3}, \tag{5}$$

для компонент вектора гидродинамической скорости $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ и плотности $\rho = \rho(t)$, где $\partial_t \equiv \partial/\partial t$, $\partial_j \equiv \partial/\partial x_j$, $j = \overline{1,3}$. По повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

Составим матрицу Якоби

$$J(t, \mathbf{x}) = [\partial_l u_k]_{k,l=\overline{1,3}}. \tag{6}$$

Симметрическая и антисимметрическая части этой матрицы имеют вид

$$\begin{gathered} S_{lk} = S_{kl} = (\partial_l u_k + \partial_k u_l)/2, \\ A_{lk} = -A_{kl} = (\partial_l u_k - \partial_k u_l)/2 = e_{lkm}(\mathrm{rot}_m\, \mathbf{u})/2 = e_{lkm}\omega_m, \end{gathered} \tag{7}$$

где введено обозначение $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 2\boldsymbol{\omega}$.

Предложение 1. *При барохронном течении идеального газа зависимость от времени матрицы Якоби* (6) *определяется формулой*

$$J(t,\mathbf{x}) = J(0,\mathbf{x})\,(E_3 + tJ(0,\mathbf{x}))^{-1}\,, \tag{8}$$

где E_3 обозначает единичную 3×3 матрицу, причем матрица $(E_3 + tJ(0,\mathbf{x}))$ не сингулярна.

Доказательство. Перейдем к новым независимым переменным [6]

$$y_i = x_i - tu_i, \quad \upsilon_i(t,\mathbf{y}) = u_i(t,\mathbf{x}), \quad i = \overline{1,3}. \tag{9}$$

Преобразование (9) с учетом уравнений (5) дает

$$\begin{gathered}\frac{dy_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt} - u_i - t\frac{du_i}{dt} = -t\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) = 0,\\ 0 = \frac{du_i}{dt} = \frac{d\upsilon_i}{dt} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y_k}\frac{dy_k}{dt} \Rightarrow \partial_t \upsilon_i = 0, \quad i = \overline{1,3},\end{gathered} \tag{10}$$

откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial y_k} = \frac{\partial}{\partial y_k}\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = 0. \tag{11}$$

Кроме того, из (9) находим

$$J_{ik}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y_m}\left(\delta_{mk} - t\frac{\partial u_m}{\partial x_k}\right),$$

т. е.

$$J = J_\upsilon\,(E_3 - tJ)\,, \quad J_\upsilon = (E_3 + tJ_\upsilon)\,J. \tag{12}$$

Здесь $J_\upsilon = [\partial \upsilon_i/\partial y_k]$ — матрица Якоби в новых переменных, которая согласно (11) не зависит от времени явно, причем согласно (12) имеем

$$J_\upsilon = J(0,\mathbf{x}).$$

Подставляя этот результат во второе уравнение (12), получим (8). Из (12) следует также, что $\det\,(E_3 + tJ_\upsilon) \neq 0$, т. е. матрица $(E_3 + tJ(0,\mathbf{x}))$ имеет обратную. ■

Следствие 1. *Из формул* (12) *вытекает тождество*

$$(E_3 - tJ)\,(E_3 + tJ_\upsilon) = E_3, \tag{13}$$

согласно которому матрицы $J(0,\mathbf{x})$ и $J(t,\mathbf{x})$ *коммутируют и*

$$(E_3 - tJ(t,\mathbf{x})) = (E_3 + tJ(0,\mathbf{x}))^{-1}\,.$$

■

Из (8) вытекает следующая общая теорема.

Теорема 1. *При барохронном течении идеального газа для произвольных натуральных чисел* $l, m \in \mathrm{N}$ *матрица Якоби* (6) *удовлетворяет соотношениям*

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l = (-1)^m \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+m}, \qquad l, m = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{z-1} dx$ *— гамма-функция Эйлера.*

Доказательство. При $l = m = 1$ из (8) находим

$$\partial_t J(t,\mathbf{x}) = J(0,\mathbf{x})\partial_t\left(E_3 + tJ(0,\mathbf{x})\right)^{-1} = \\ = -\left[J(0,\mathbf{x})\right]^2\left(E_3 + tJ(0,\mathbf{x})\right)^{-2} = -\left[J(t,\mathbf{x})\right]^2.$$

Отсюда, допуская, что (14) выполняется при $l, m \geqslant 2$, согласно методу полной математической индукции получим

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l = (-1)^m \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}\frac{\partial}{\partial t}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+m} = \\ = (-1)^m \frac{(l+m)\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+m-1}\frac{\partial}{\partial t}J(t,\mathbf{x}) = \\ = (-1)^{m+1}\frac{\Gamma(l+m+1)}{\Gamma(l)}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+m+1}, \quad l, m \in \mathrm{N}.$$

Заметим, что формула (14) справедлива и при $l = 0, -1, \ldots$ В этом случае ее удобнее записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l = (-l)(-l-1)\cdots(-l-m+1)\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+m}, \qquad -l \in \mathrm{N}, \quad m \in \mathrm{N}. \tag{14'}$$

Следствие 2. *При барохронном течении идеального газа зависимость от времени величин* $\mathrm{tr}\,\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l$, $l \in \mathrm{N}$, *такова, что*

$$\partial_t \mathrm{tr}\,\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l = -l\,\mathrm{tr}\,\left[J(t,\mathbf{x})\right]^{l+1}. \tag{15}$$

Доказательство следует из (14) и линейности операций $(\partial/\partial t)^m$ и tr. ■

Следствие 3. *При барохронном течении идеального газа величины* $\mathrm{tr}\,\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l$ *не зависят от пространственных координат* x_j $(\partial_j \equiv \partial/\partial x_j)$:

$$\partial_j \mathrm{tr}\,\left[J(t,\mathbf{x})\right]^l = 0, \qquad j = \overline{1,3}; \quad l \in \mathrm{N}. \tag{16}$$

Доказательство. При произвольном $l \in \mathrm{N}$ имеем

$$\partial_t \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^l = \partial_t \left[J_{jk}^{l-1}(t,\mathbf{x}) J_{kj}(t,\mathbf{x}) \right] = l J_{jk}^{l-1}(t,\mathbf{x}) \partial_t u_{k,j}(t,\mathbf{x}).$$

Учитывая в правой части этого равенства уравнения (5), получим

$$\partial_t \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^l = -l J_{jk}^{l-1} \partial_j (u_m \partial_m u_k) = -l J_{jk}^{l-1} J_{mj} J_{km} - \, l u_m J_{jk}^{l-1} \partial_m u_{k,j}$$

и после соответствующих упрощений

$$\partial_t \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^l = -l \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^{l+1} - u_m \partial_m \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^l \,.$$

Сравнивая полученный результат с (15), в силу линейной независимости компонент гидродинамической скорости $u_m, m = \overline{1,3}$, получаем (16). ■

Следствие 4. m-кратное применение формулы (15) дает

$$\partial_t^m \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^l = (-1)^m \frac{\Gamma(l+m)}{\Gamma(l)} \mathrm{tr}\, [J(t,\mathbf{x})]^{l+m}\,, \quad l, m \in \mathrm{N}.$$

■

Теорема 1 и следствия 2–4 позволяют найти замкнутую систему дифференциальных уравнений для инвариантов (2) матрицы Якоби $J = [u_{j,k}]$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *При барохронном течении справедливы соотношения*

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) - \\
&\qquad - (\lambda+\eta) \mathrm{tr}\, (S^{\lambda+1} A^\zeta S^\mu A^\eta) - (\mu+\zeta) \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^\zeta S^{\mu+1} A^\eta) - \\
&\qquad\quad - \lambda \mathrm{tr}\, (S^{\lambda-1} A^{\zeta+2} S^\mu A^\eta) - -\mu \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^\zeta S^{\mu-1} A^{\eta+2}) - \\
&\quad - \zeta \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^{\zeta-1} SAS^\mu A^\eta) - \eta \mathrm{tr}\, (S^\lambda A^\zeta S^\mu A^{\eta-1} SA), \quad \lambda, \mu, \zeta, \eta \in \mathrm{N}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Доказательство. При произвольных λ, μ, ζ, $\eta \in \mathrm{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
\partial_t \mathrm{tr}(S^\lambda A^\zeta S^\mu A^\eta) &= \lambda (A^\zeta S^\mu A^\eta S^{\lambda-1})_{kj} \partial_t S_{jk} + \varsigma (S^\mu A^\eta S^\lambda A^{\zeta-1})_{kj} \partial_t A_{jk} + \\
&\quad + \mu (A^\eta S^\lambda A^\zeta S^{\mu-1})_{kj} \partial_t S_{jk} + \eta (S^\lambda A^\zeta S^\mu A^{\eta-1})_{kj} \partial_t A_{jk}.
\end{aligned}$$

Учитывая уравнения (5), находим

$$\partial_t \begin{pmatrix} S_{jk} \\ A_{jk} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \partial_t (u_{j,k} \pm u_{k,j}) = \frac{1}{2} (\partial_k \partial_t u_j \pm \partial_j \partial_t u_k) =$$

$$= -\frac{\partial_k (u_m \partial_m u_j) \pm \partial_j (u_m \partial_m u_k)}{2} = -u_m \partial_m \begin{pmatrix} S_{jk} \\ A_{jk} \end{pmatrix} - \frac{u_{j,m} u_{m,k} \pm u_{k,m} u_{m,j}}{2}.$$

Разбивая в последнем слагаемом матрицы Якоби на симметрическую и антисимметрическую части, после упрощений получаем (17). ■

Из (17) в частных случаях находим
$\zeta = \mu = 0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \eta = 2\nu \geqslant 0$:

$$\partial_t \mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu}) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu}) - \\ -(\lambda + 2\nu)\mathrm{tr}\,(S^{\lambda+1} A^{2\nu}) - \lambda \mathrm{tr}\,(S^{\lambda-1} A^{2\nu+2}) - 2\nu \mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu-1} SA); \quad (18)$$

$\lambda = \zeta = 1, \quad \mu = \eta = 2$:

$$\partial_t \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) - 3\mathrm{tr}\,(SAS^3A^2). \quad (19)$$

При выводе формулы (19) учтено, что (индекс T означает транспонирование)

$$\mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu}) = \mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu})^T = -\mathrm{tr}\,(A^{2\nu} S^\lambda) = -\mathrm{tr}\,(S^\lambda A^{2\nu}) = 0,$$
$$\mathrm{tr}\,(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu}) = \mathrm{tr}\,(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu})^T = -\mathrm{tr}\,(A^{2\nu} S^\lambda A S^\lambda) = -\mathrm{tr}\,(S^\lambda A S^\lambda A^{2\nu}) = 0,$$
$$\mathrm{tr}\,(SAS^2ASA) = \mathrm{tr}\,(SAS^2ASA)^T = -\mathrm{tr}\,(ASAS^2AS) = -\mathrm{tr}\,(SAS^2ASA) = 0.$$

Из (18) находим

$$\begin{aligned} &\partial_t \mathrm{tr}\,S^\lambda = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,S^\lambda - \lambda \mathrm{tr}\,S^{\lambda+1} - \lambda \mathrm{tr}\,(S^{\lambda-1}A^2), \quad \lambda = \overline{1,3}; \\ &\partial_t \mathrm{tr}\,A^2 = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,A^2 - 4\mathrm{tr}\,(SA^2); \\ &\partial_t \mathrm{tr}\,(SA^2) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,(SA^2) - 3\mathrm{tr}\,(S^2A^2) - \mathrm{tr}\,A^4 - 2\mathrm{tr}\,(SASA). \end{aligned} \quad (20)$$

Инварианты в правой части последней из формул (20) связаны соотношением

$$\mathrm{tr}\,(SASA) = 2\mathrm{tr}\,S\mathrm{tr}\,(SA^2) - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}^2\,S - \mathrm{tr}\,S^2)\mathrm{tr}\,A^2 - 2\mathrm{tr}\,(S^2A^2),$$

которое легко проверяется в каноническом базисе. Поэтому

$$\partial_t \mathrm{tr}\,(SA^2) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,(SA^2) + \mathrm{tr}\,(S^2A^2) - 4\mathrm{tr}\,S\mathrm{tr}\,(SA^2) + \\ + (\mathrm{tr}^2\,S - \mathrm{tr}\,S^2)\mathrm{tr}\,A^2 - (\mathrm{tr}\,A^2)^2/2. \quad (21)$$

Из (18) также следует

$$\partial_t \mathrm{tr}\,(S^2A^2) = -u_m \partial_m \mathrm{tr}\,(S^2A^2) - 4\mathrm{tr}\,(S^3A^2) - 2\mathrm{tr}\,(SA^4) - 2\mathrm{tr}\,(S^2ASA). \quad (22)$$

Чтобы упростить правую часть выражения (22), воспользуемся формулой Гамильтона–Кэли [11], которая в $\mathbb{E}^3$ имеет вид

$$S^3 - S^2S_1 + SS_2 - E_3S_3 = 0,$$

где S_1, S_2, S_3 — коэффициенты характеристического полинома матрицы S,

$$\det (S - \lambda E_3) = -\lambda^3 + \lambda^2 S_1 - \lambda S_2 + S_3,$$

а E_3 — единичная 3×3 матрица. Поскольку в $\mathbb{E}^3$ для антисимметрической матрицы $A_1 = \operatorname{tr} A = 0$, $A_3 = \det\, A = 0$, согласно формуле Гамильтона–Кэли получаем

$$A^3 = -AA_2, \quad A^4 = -A^2 A_2.$$

Легко видеть, что

$$S_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2 S - \operatorname{tr} S^2), \quad A_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tr} A^2$$

(эти соотношения — хорошо известные формулы Ньютона [12], также легко проверяемые в каноническом базисе).

На основании этих соотношений находим

$$\begin{gathered}\operatorname{tr} (S^3 A^2) = S_1 \operatorname{tr} (S^2 A^2) - S_2 \operatorname{tr} (SA^2) + S_3 \operatorname{tr} A^2 = \\ = S_1 \operatorname{tr} (A^2 S^2) - (S_1^2 - \operatorname{tr} S^2)\operatorname{tr} (A^2 S)/2 + (\operatorname{tr} S^3 - S_1 \operatorname{tr} S^2 + S_1 S_2)\operatorname{tr} A^2/3 = \\ = S_1 \operatorname{tr}(A^2 S^2) - (S_1^2 - \operatorname{tr} S^2)\operatorname{tr} (A^2 S)/2 + (2\operatorname{tr} S^3 - 3S_1 \operatorname{tr} S^2 + S_1^3)\operatorname{tr} A^2/6\end{gathered} \tag{23}$$

и

$$\operatorname{tr} (SA^4) = -A_2 \operatorname{tr} (SA^2) = \operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} (SA^2)/2. \tag{24}$$

Также (в каноническом базисе) проверяются соотношения [3]

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} (SAS^2 A) = -\left\{S_1 \operatorname{tr} (SASA) + S_3 \operatorname{tr} A^2\right\}/2 = \\ &= -S_1 \operatorname{tr} (A^2 S^2) + S_1^2 \operatorname{tr} (SA^2) + \\ &+ \frac{1}{2}\operatorname{tr} A^2 \left(S_1 \operatorname{tr} S^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr} S^3 - \frac{2}{3}S_1^3 - \frac{1}{5}S_1 \operatorname{tr} A^2\right);\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} (A^2 SAS^3) = A_{12}A_{23}A_{31} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1^3 & s_2^3 & s_3^3 \end{bmatrix} = \\ = A_{12}A_{23}A_{31} \det\, \left[s_k^{l-1}\right]_{k,l=\overline{1,3}} \operatorname{tr} S,\end{aligned} \tag{26}$$

откуда, учитывая последнее соотношение в (3), находим инвариантную формулу

$$\operatorname{tr} (A^2 SAS^3) = \operatorname{tr} (A^2 SAS^2)\operatorname{tr} S. \tag{27}$$

Отметим, что (26) является следствием общего соотношения [2, 12]

$$\mathrm{tr}\,(S^{\lambda}AS^{\mu}AS^{\nu}A) = A_{12}A_{23}A_{31}\det\begin{bmatrix} s_1^{\lambda} & s_2^{\lambda} & s_3^{\lambda} \\ s_1^{\mu} & s_2^{\mu} & s_3^{\mu} \\ s_1^{\nu} & s_2^{\nu} & s_3^{\nu} \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Окончательно, подставляя (23)–(25) и (27) в (19) и (22), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\partial_t \mathrm{tr}\, S = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\, S - \mathrm{tr}\, S^2 - \mathrm{tr}\, A^2; \quad (\mathrm{tr}\, S = \mathrm{tr}\,(S+A) = S_1)\\
&\partial_t \mathrm{tr}\, S^2 = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\, S^2 - 2\mathrm{tr}\, S^3 - 2\mathrm{tr}\,(SA^2);\\
&\partial_t \mathrm{tr}\, S^3 = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\, S^3 - 3\mathrm{tr}\, S^4 - 3\mathrm{tr}\,(S^2A^2) =\\
&\qquad = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\, S^3 - S_1^4/2 - 4S_1\mathrm{tr}\, S^3 + 3(S_1^2 - \mathrm{tr}\,(S^2/2)\mathrm{tr}\, S^2 - 3\mathrm{tr}\,(S^2A^2);\\
&\partial_t \mathrm{tr}\, A^2 = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\, A^2 - 4\mathrm{tr}\,(SA^2);\\
&\partial_t \mathrm{tr}\,(SA^2) = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\,(SA^2) + \mathrm{tr}\,(S^2A^2) - 4S_1\mathrm{tr}\,(SA^2) +\\
&\qquad\qquad + (S_1^2 - \mathrm{tr}\, S^2)\mathrm{tr}\, A^2 - (\mathrm{tr}\, A^2)^2/2;\\
&\partial_t \mathrm{tr}(S^2A^2) = -u_m\partial_m \mathrm{tr}(S^2A^2) -\\
&\qquad - 2S_1\mathrm{tr}\,(S^2A^2) - (2\mathrm{tr}\, S^2 + \mathrm{tr}\, A^2)\mathrm{tr}\,(SA^2) - \mathrm{tr}S^3\mathrm{tr}\, A^2 +\\
&\qquad\qquad + S_1\mathrm{tr}\, S^2\mathrm{tr}A^2 + S_1(\mathrm{tr}\, A^2)^2/5;\\
&\partial_t \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = -u_m\partial_m \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) - 3\mathrm{tr}\,(A^2SAS^2)\mathrm{tr}\, S.
\end{aligned} \tag{29}$$

Поскольку инварианты $S_1 = \mathrm{tr}\, S$, $\mathrm{tr}\, S^2$, $\mathrm{tr}\, S^3$, $\mathrm{tr}\, A^2$, $\mathrm{tr}\,(SA^2)$, $\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2)$ функционально независимы и согласно следствию 3

$$\partial_m \mathrm{tr}\, S^2 + \partial_m \mathrm{tr}\, A^2 = \partial_m \mathrm{tr}\,(S+A)^2 = 0,$$
$$\partial_m \mathrm{tr}\, S^3 + 3\partial_m \mathrm{tr}\,(SA^2) = \partial_m \mathrm{tr}\,(S+A)^3 = 0,$$

получаем

$$\partial_m S_1 = \partial_m \mathrm{tr} S = \partial_m \mathrm{tr} S^2 = \partial_m \mathrm{tr} S^3 = \partial_m \mathrm{tr} A^2 = \partial_m \mathrm{tr}(SA^2) = 0. \tag{30}$$

Отсюда, учитывая пятое уравнение в системе (29), получаем

$$\partial_m \mathrm{tr}\,(S^2A^2) = 0. \tag{31}$$

Из (30), (31), (23) и формулы Гамильтона–Кэли вытекает общее соотношение

$$\partial_m \mathrm{tr}\,(S^kA^2) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{32}$$

Предложение 2. *При произвольных целых показателях* λ, μ, $\nu \geqslant 0$

$$\partial_m \mathrm{tr}\,(S^\lambda A S^\mu A S^\nu A) = 0. \tag{33}$$

Доказательство. Действительно, из (28) следует

$$\mathrm{tr}^2\,(S^\lambda A S^\mu A S^\nu A) = \left(A_{12}A_{23}A_{31} \det \begin{bmatrix} s_1^\lambda & s_2^\lambda & s_3^\lambda \\ s_1^\mu & s_2^\mu & s_3^\mu \\ s_1^\nu & s_2^\nu & s_3^\nu \end{bmatrix} \right)^2 =$$

$$= \det{}^2 \begin{bmatrix} \omega_1 s_1^\lambda & \omega_2 s_2^\lambda & \omega_3 s_3^\lambda \\ \omega_1 s_1^\mu & \omega_2 s_2^\mu & \omega_3 s_3^\mu \\ \omega_1 s_1^\nu & \omega_2 s_2^\nu & \omega_3 s_3^\nu \end{bmatrix}.$$

Перемножая определители в правой части способом «строка на строку», получим

$$\mathrm{tr}^2(S^\lambda A S^\mu A S^\nu A) = \det \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{\omega} S^{2\lambda} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{\lambda+\mu} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{\lambda+\nu} \boldsymbol{\omega} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\omega} S^{\lambda+\mu} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{2\mu} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{\mu+\nu} \boldsymbol{\omega} \rangle \\ \langle \boldsymbol{\omega} S^{\nu+\lambda} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{\nu+\mu} \boldsymbol{\omega} \rangle & \langle \boldsymbol{\omega} S^{2\nu} \boldsymbol{\omega} \rangle \end{bmatrix}.$$

Отсюда на основании (4) и (32) при целых показателях вытекает (33). ■

Таким образом, доказана следующая основная теорема.

Теорема 3. *При барохронном течении идеального газа все алгебраические инварианты матрицы Якоби* $[\partial_k u_l]$ *зависят только от времени. Элементы полиномиального базиса инвариантов (2) удовлетворяют замкнутой системе обычных дифференциальных уравнений* $(f' \equiv \partial_t f)$:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{tr}\,S)' = -\mathrm{tr}\,S^2 - \mathrm{tr}\,A^2; \quad (\mathrm{tr}\,S = \mathrm{tr}\,(S+A) = S_1)\,; \\
&(\mathrm{tr}\,A^2)' = -4\mathrm{tr}\,(SA^2); \\
&(\mathrm{tr}\,S^2)' = -2\mathrm{tr}\,S^3 - 2\mathrm{tr}\,(SA^2); \\
&(\mathrm{tr}\,S^3)' = -3\mathrm{tr}S^4 - 3\mathrm{tr}(S^2A^2); \\
&\big(\mathrm{tr}\,S^4 = S_1^4/6 + 4/3 S_1 \mathrm{tr}\,S^3 - (S_1^2 - \mathrm{tr}\,S^2/2)\mathrm{tr}\,S^2\big)\,; \qquad (34) \\
&\mathrm{tr}\,(SA^2)' = \mathrm{tr}\,(S^2A^2) - 4S_1 \mathrm{tr}\,(SA^2) + (S_1^2 - \mathrm{tr}\,S^2)\mathrm{tr}\,A^2 - (\mathrm{tr}\,A^2)^2/2; \\
&\mathrm{tr}\,(S^2A^2)' = -2S_1 \mathrm{tr}\,(S^2A^2) - (2\mathrm{tr}\,S^2 + \mathrm{tr}\,A^2)\mathrm{tr}\,(SA^2) - \\
&\qquad\qquad - \mathrm{tr}\,S^3 \mathrm{tr}\,A^2 + S_1 \mathrm{tr}\,S^2 \mathrm{tr}\,A^2 + S_1(\mathrm{tr}\,A^2)^2/5; \\
&\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2)' = -3S_1 \mathrm{tr}\,(SAS^2A^2).
\end{aligned}$$

■

Введем обозначение

$$\gamma \equiv -\mathrm{tr}\, A^2 = 2\omega^2 = (\mathrm{rot}\,\mathbf{u})^2/2, \quad \gamma = \gamma(t) \geqslant 0. \tag{35}$$

Тогда первые пять уравнений в (34) примут вид

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\, S^2 = \gamma - S_1', \quad \mathrm{tr}\,(SA^2) = \gamma'/4,\\
&\mathrm{tr}\, S^3 = -\mathrm{tr}\,(SA^2) - (\mathrm{tr}\, S^2)'/2 = -3\gamma'/4 + S_1''/2;\\
&(\mathrm{tr}\, S^2A^2) = -\mathrm{tr}\, S^4 - (\mathrm{tr}\, S^3)'/3 = \gamma''/4 + S_1\gamma' + \gamma(S_1' + S_1^2) -\\
&\qquad\qquad - \gamma^2/2 - \{S_1''' + 4S_1S_1'' + 3(S_1')^2 + 6S_1^2S_1' + S_1^4\}/6;\\
&(\mathrm{tr} S^2A^2) = \gamma''/4 + S_1\gamma' + \gamma(S_1' + S_1^2) - \gamma^2/2.
\end{aligned} \tag{36}$$

Сравнивая две последние формулы, получим уравнение

$$S_1''' + 4S_1S_1'' + 3(S_1')^2 + 6S_1^2S_1' + S_1^4 = 0. \tag{37}$$

Из шестого уравнения в (34) после соответствующих упрощений находим

$$\gamma''' + 6S_1\gamma'' + 6\gamma'(S_1' + 2S_1^2) + 2\gamma(S_1'' + 3(S_1^2)' + 4S_1^3) - 4S_1\gamma^2/5 = 0. \tag{38}$$

Наконец, седьмое уравнение в (34) интегрируется непосредственно:

$$\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = C_7 \exp\left[-3\int S_1(t)dt\right]. \tag{39}$$

3. Уравнения (36)–(39) составляют замкнутую систему, решения которой полностью определяют полиномиальные инварианты матрицы Якоби $[\partial_k u_l]$.

Непосредственное решение этой нелинейной системы дифференциальных уравнений третьего порядка весьма затруднительно. Однако найти общее решение возможно, воспользовавшись зависимостью (8):

$$J(t,\mathbf{x}) = J(0,\mathbf{x})\left(E_3 + tJ(0,\mathbf{x})\right)^{-1}.$$

Действительно, учитывая, что $\det\,(E_3 + tJ(0,\mathbf{x})) = 1 + c_1t + c_2t^2 + c_3t^3 \equiv q(t) \neq 0$ (c_1, c_2, c_3, как и в [6], обозначают коэффициенты характеристического полинома матрицы $J(0,\mathbf{x})$), находим

$$\begin{aligned}
J(t,\mathbf{x}) = q^{-1}(t)J(0,\mathbf{x})\left(E_3 + t\mathrm{tr}\, J(0,\mathbf{x})E_3 - tJ(0,\mathbf{x}) + t^2\Delta^T(0,\mathbf{x})\right) =\\
= q^{-1}(t)\{(1+tc_1)J(0,\mathbf{x}) - tJ^2(0,\mathbf{x}) + t^2c_3E_3\},
\end{aligned} \tag{40}$$

где $\Delta(0,\mathbf{x}) = [\Delta_{ij}(0,\mathbf{x})]$ является матрицей, построенной из алгебраических дополнений элементов с номерами i, j в определителе $\det J(0,\mathbf{x})$:

$$\Delta_{ij}(0,\mathbf{x}) = \partial/\partial u_{i,j} \det J(0,\mathbf{x}), u_{i,j}\Delta_{ik}(0,\mathbf{x}) = \delta_{jk} \det\, J(0,\mathbf{x}) = \delta_{jk}c_3.$$

Соответственно, для симметрической и антисимметрической частей матрицы Якоби $J(t,\mathbf{x})$ после упрощений находим

$$\begin{aligned} S_{ij}(t,\mathbf{x}) &= q^{-1}(t)\left((1+tc_1)S_{ij}(0,\mathbf{x}) - tS^2_{ij}(0,\mathbf{x}) - tA^2_{ij}(0,\mathbf{x}) + t^2c_3\delta_{ij}\right), \\ A_{ij}(t,\mathbf{x}) &= q^{-1}(t)((1+tc_1)A_{ij}(0,\mathbf{x}) - tA_{ik}(0,\mathbf{x})S_{kj}(0,\mathbf{x}) - \\ &\quad - tS_{ik}(0,\mathbf{x})A_{kj}(0,\mathbf{x})). \end{aligned} \tag{41}$$

Отсюда легко найти зависимость инвариантов $S_1(t)$ и $\gamma(t)$ от времени:

$$S_1(t) = \operatorname{tr} S(t,\mathbf{x}) = q^{-1}(t)(c_1 + 2c_2t + 3c_3t^2) = q'(t)/q(t), \tag{42_1}$$

$$\gamma(t) = -\operatorname{tr} A^2(t,\mathbf{x}) = q^{-2}(t)(b_0 + b_1t + b_2t^2). \tag{42_2}$$

Формулы (42) дают общее решение уравнений (37)–(38) и содержат шесть постоянных, выражающихся через пространственные производные $u_{i,j}(0,\mathbf{x})$ от начального (гладкого) поля гидродинамической скорости. Так и должно быть с математической точки зрения, поскольку три из девяти величин $u_{i,j}(0,\mathbf{x})$ определяются выбором (ортонормированной) системы координат, а инварианты $\operatorname{tr} S$ и $\operatorname{tr} A^2$ от этого выбора не зависят. Однако постоянные $c_1, c_2, c_3,\ b_0,\ b_1, b_2$ не могут быть выбраны произвольно, они ограничены условиями, налагаемыми уравнениями (37)–(38).

Подставляя (42_1) в (38), после упрощений получаем уравнение

$$q^2\gamma''' + 3(q^2)'\gamma'' + 3(q^2)''\gamma' + (q^2)'''\gamma - 4qq'\gamma^2/5 = 0,$$

которое согласно формуле Лейбница для n-й производной от произведения двух функций можно записать в виде

$$(q^2\gamma)''' - 4(q^2\gamma)^2q^{-3}q'/5 = 0.$$

Подставляя сюда (42_2), получаем условия

$$\gamma(t) = 0 \Leftrightarrow b_0 = b_1 = b_2 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0 \tag{43_1}$$

и/или

$$q'(t) = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0. \tag{43_2}$$

Таким образом, показано, что справедлива следующая важная теорема.

Теорема 4. *Гладкое векторное поле, описывающее гидродинамическую скорость течения барохронного идеального газа, является либо потенциальным, либо соленоидальным.* ■

Рассмотрим по отдельности каждую из этих двух возможностей.

А. При потенциальном барохронном течении идеального газа, т. е. если

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \operatorname{grad}\varphi(t,\mathbf{x}),$$

из уравнений (34) получаем

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tr} A^2 = (\operatorname{tr} A^2)' = \operatorname{tr}(SA^2) = \operatorname{tr}(SA^2)' = \operatorname{tr}(S^2A^2) = \operatorname{tr}(S^2A^2)' = 0,\\
&A_{lk} = (u_{l,k} - u_{k,l})/2 = 0, \quad u_{l,k} = u_{k,l} = S_{lk};\\
&\operatorname{tr}(SAS^2A^2) = \operatorname{tr}(SAS^2A^2)' = 0;\\
&\operatorname{tr} S^2 = -(\operatorname{tr} S)' = -S_1';\\
&\operatorname{tr} S^3 = -(\operatorname{tr} S^2)'/2 = S_1''/2;\\
&(\operatorname{tr} S^3)' = -3\operatorname{tr} S^4 = -S_1^4/2 - 4S_1 \operatorname{tr} S^3 + 3(2S_1^2 - \operatorname{tr} S^2)\operatorname{tr} S^2/2 = S_1'''/2.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Отсюда следует теорема.

Теорема 5. *При потенциальном барохронном течении идеального газа коэффициенты характеристического полинома матрицы* $S = [u_{l,k} + u_{k,l}]/2$

$$
S_1 = \operatorname{tr} S, \quad S_2 = \left(S_1^2 - (\operatorname{tr} S^2)\right)/2,
$$
$$
S_3 = \det\, S = \left((\operatorname{tr} S^3) - S_1(\operatorname{tr} S^2) + S_2 S_1\right)/3
$$

зависят только от времени и удовлетворяют замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ср. $[5, 6]$)

$$
\begin{aligned}
&\partial_t S_1 = 2S_2 - S_1^2, \quad \partial_t S_2 = 3S_3 - S_1 S_2, \quad \partial_t S_3 = -S_1 S_3,\\
&\partial_j S_1 = \partial_j S_2 = \partial_j S_3 = 0, \quad i = \overline{1, 3},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

решения которой, с учетом условия потенциальности течения, имеют вид

$$
S_1 = 3(t + t_0)^{-1}, \quad S_2 = 3(t + t_0)^{-2}, \quad S_3 = (t + t_0)^{-3}, \quad t_0 \geqslant 0. \tag{46}
$$

Решения (46) *однозначно определяются гидродинамическими уравнениями Эйлера* (5), *а потенциал скорости* $\varphi(t, \mathbf{x})$ *и гидродинамическая скорость* $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ *барохронного течения имеют следующий вид* (t_0 и $\mathbf{R}$ — *произвольные константы*):

$$
\varphi(t, \mathbf{x}) = \mathrm{const} - \frac{3\mathbf{R}^2 - \mathbf{x}^2}{2(t + t_0)}, \quad \mathbf{R}^2 \geqslant 0, \tag{47}
$$

$$
\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{t + t_0}. \tag{48}
$$

При этом зависимость плотности от времени описывается формулами

$$
\begin{aligned}
&\rho = \rho_0 |1 + t/t_0|^{-3} \quad \textit{при} \quad |t_0| = -3\rho_0/\rho_0' > 0,\\
&\rho(t) = \rho_1 t^{-3}, \quad \rho_1 > 0, \quad \textit{при} \quad t_0 = 0.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Доказательство. Действительно, уравнения (45) вытекают из (44) или, что то же самое, из уравнений Эйлера (5). В силу независимости инвариантов S_1, S_2, S_3 от пространственных координат имеем

$$
\operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = S_1(t) = f(t), \tag{50}
$$

откуда, в силу барохронности течения, следует, что в произвольной точке пространства в произвольной системе координат потенциал скорости $\varphi(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi(t, \mathbf{x}) \equiv \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(t, \mathbf{x}) = f(t), \tag{51}$$

общее решение которого можно представить в виде

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \varphi_0(t, \mathbf{x}) - (4\pi)^{-1}\partial_t f(t) \int_V |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-1}\, d^3\xi.$$

Здесь $V \in \mathrm{E}^3$ обозначает шар радиусом $R > 0$ с центром в произвольной точке $O \in \mathrm{E}^3$, а функция $\varphi_0(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi_0(t, \mathbf{x}) = 0$ и, как всюду регулярная гармоническая функция, является тождественно постоянной:

$$\varphi_0(t, \mathbf{x}) = \mathrm{const}.$$

Разбивая промежуток интегрирования на два $\xi \in [0, R] = [0, |\mathbf{x}|) \bigcup (|\mathbf{x}|, R]$ и разлагая в каждом из них множитель $(4\pi|\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}|)^{-1}$ в ряд по сферическим функциям (см., например, [13, с. 137]),

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{x}) = \mathrm{const} - f(t) \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \Bigg\{ &|\mathbf{x}|^{-l-1} \int_0^{|\mathbf{x}|} \xi^{l+2} d\xi \times \\ &\times \int d\Omega_\xi Y^*_{lm}(\Omega_\xi) Y_{lm}(\Omega_x) + \\ &+ |x|^l \int_{|\mathbf{x}|}^R \xi^{-l+1} d\xi \int d\Omega_\xi Y_{lm}(\Omega_\xi) Y^*_{lm}(\Omega_x) \Bigg\},\end{aligned}$$

учитывая ортонормированность системы функций $Y_{lm}(\Omega)$ и значение $Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}$, получим

$$\begin{aligned}\varphi(t, \mathbf{x}) &= \mathrm{const} - f(t) \left\{ |\mathbf{x}|^{-1} \int_0^{|\mathbf{x}|} \xi^2 d\xi + \int_{|\mathbf{x}|}^R \xi d\xi \right\} = \\ &= \mathrm{const} - f(t) \left\{ \frac{\mathbf{R}^2}{2} - \frac{\mathbf{x}^2}{6} \right\}\end{aligned} \tag{52}$$

и согласно формуле $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = \operatorname{grad}\varphi(t, \mathbf{x})$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = f(t)\mathbf{x}/3. \tag{53}$$

Подставляя (53) в уравнение Эйлера (5), найдем ($\mathbf{r} = \mathbf{x}$)

$$\frac{1}{3}f'(t)\mathbf{r} + \frac{1}{9}f^2(t)\left\langle \mathbf{r}\nabla \right\rangle \mathbf{r} = 0, \quad f(t) = -\frac{\rho'(t)}{\rho(t)},$$

и после упрощений получим уравнения для функций $f(t) = S_1(t)$ и $\rho(t)$

$$f'(t) + f^2(t)/3 = 0, \quad f(t) = -\rho'(t)/\rho(t),$$

которые имеют следующие общие решения:

$$\begin{aligned}
&S_1(t) = f(t) = 3(t + t_0)^{-1};\\
&\rho(t) = \rho_0|1 + t/t_0|^{-3}, \quad \rho_0 = \rho(0) > 0, \quad t_0 \neq 0;\\
&\rho(t) = \rho_1 t^{-3}, \quad \rho_1 = \rho(1), \quad \rho_0 = +\infty, \quad t_0 = 0.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в (45), (52) и (53), получим (46)–(48). ■

Замечание. При $t_0 = 0$ (48) дает $u_i = x_i/t$, т. е. имеем сингулярность при $t = 0$. В этом случае из преобразования (9) находим $y_i(t) = 0$. Матрица $[E_3 - tJ(t, \mathbf{x})] = 0$ и скорость $\boldsymbol{\upsilon}(t, \mathbf{y})$ (как и матрица Якоби $[\partial_{y_k}\upsilon_i] = J(0, \mathbf{x})$) при этом не определена.

Следствие 5. *При потенциальном барохронном течении идеального газа в произвольный момент времени инварианты* (46) *связаны полиномиальными соотношениями — так называемыми сизигиями* (см., например, [14]):

$$3S_2(t) = S_1^2(t), \quad 27S_3(t) = S_1^3(t). \tag{54}$$

Доказательство вытекает из формул (46). ■

B. В случае соленоидального течения из формул (42) и (43_2) имеем

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0, \quad q(t) = 1, \quad \gamma(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \tag{55}$$

и, учитывая соотношения (ср. с (2))

$$\left\langle \boldsymbol{\omega} S^\mu \boldsymbol{\omega} \right\rangle - \boldsymbol{\omega}^2 \mathrm{tr}\, S^\mu = \mathrm{tr}\,(S^\mu A^2), \quad \mu = 0, 1, \ldots, \tag{56}$$

в каноническом базисе тензора $J(0, \mathbf{x})$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\, S_{|t=0} = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} s_k^0 = 0; \quad \omega^2_{|t=0} = \gamma(0)/2 = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} (\omega_k^0)^2 = b_0/2;\\
&\mathrm{tr} S^2_{|t=0} = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} (s_k^0)^2 = b_0; \quad \left\langle \boldsymbol{\omega} S \boldsymbol{\omega} \right\rangle_{|t=0} = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} s_k^0 (\omega_k^0)^2 = b_1/4;\\
&\mathrm{tr}\, S^3_{|t=0} = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} (s_k^0)^3 = -3b_1/4; \quad \left\langle \boldsymbol{\omega} S^2 \boldsymbol{\omega} \right\rangle_{|t=0} = \sum\nolimits_{k=\overline{1,3}} (s_k^0 \omega_k^0)^2 = b_2/2,
\end{aligned} \tag{57}$$

где по определению канонического базиса (см. (1)) $s_1^0 \leqslant s_2^0 \leqslant s_3^0$, $\omega_2^0 \leqslant 0$, $\omega_3^0 \geqslant 0$ (в дальнейшем индекс 0 для краткости опускаем).

Из (39), учитывая условие $S_1(t) = \operatorname{div} \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = 0$, находим $\operatorname{tr}(SAS^2A^2) = C_7$ и из (56) и (57) получаем

$$\begin{gathered}\left(\operatorname{tr}(SAS^2A^2)\right)^2 = C_7^2 = [\omega_1\omega_2\omega_3(s_3 - s_2)(s_3 - s_1)(s_2 - s_1)]^2 = \\ = \det\left[\left\langle \boldsymbol{\omega}\, S^{i+k-2}\boldsymbol{\omega}\right\rangle\right]_{i,k=\overline{1,3}} = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^2 & \langle\boldsymbol{\omega}S\boldsymbol{\omega}\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^2\boldsymbol{\omega}\right\rangle \\ \langle\boldsymbol{\omega}S\boldsymbol{\omega}\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^2\boldsymbol{\omega}\right\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^3\boldsymbol{\omega}\right\rangle \\ \left\langle\boldsymbol{\omega}S^2\boldsymbol{\omega}\right\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^3\boldsymbol{\omega}\right\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^4\boldsymbol{\omega}\right\rangle \end{bmatrix} = \\ = \det\begin{bmatrix} b_0/2 & b_1/4 & b_2/2 \\ b_1/4 & b_2/2 & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^3\boldsymbol{\omega}\right\rangle \\ b_2/2 & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^3\boldsymbol{\omega}\right\rangle & \left\langle\boldsymbol{\omega}S^4\boldsymbol{\omega}\right\rangle \end{bmatrix}. \quad (58)\end{gathered}$$

Скалярные произведения в правой части этой формулы вычисляются при помощи (56) и (57) и формулы Гамильтона–Кэли

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(S^3A^2) = -S_2\operatorname{tr}(SA^2) + \operatorname{tr}A^2 \det S = \operatorname{tr}S^2\left\langle\boldsymbol{\omega}S\boldsymbol{\omega}\right\rangle/2 - 2\boldsymbol{\omega}^2\operatorname{tr}S^3/3, \\ \left\langle\boldsymbol{\omega}S^3\boldsymbol{\omega}\right\rangle = \operatorname{tr}(S^3A^2) + \boldsymbol{\omega}^2\operatorname{tr}S^3 = 3b_0b_1/8 + b_0/2\cdot(-3b_1/4) = 0;\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{tr}(S^4A^2) = -S_2\operatorname{tr}(S^2A^2) + \operatorname{tr}(SA^2)\det S = \\ = \left(\left\langle\boldsymbol{\omega}S^2\boldsymbol{\omega}\right\rangle + \operatorname{tr}S^2\operatorname{tr}A^2/2\right)\operatorname{tr}S^2/2 + \operatorname{tr}(SA^2)\operatorname{tr}S^3/3, \quad (59)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\left\langle\boldsymbol{\omega}S^4\boldsymbol{\omega}\right\rangle = \operatorname{tr}(S^4A^2) + \boldsymbol{\omega}^2\operatorname{tr}S^4 = \\ = b_0b_2/4 - b_1^2/16, \quad \operatorname{tr}S^4 = -S_2\operatorname{tr}S^2 = \operatorname{tr}(S^2)^2/2.\end{gathered}$$

Подставляя (59) в (58), после упрощений получим

$$\left(\operatorname{tr}(SAS^2A^2)\right)^2 = C_7^2 = \left[(4b_0b_2 - b_1^2)/16\right]^2 - (b_2/2)^3 \geqslant 0. \quad (60)$$

Введем обозначения

$$s_j = p_j\sqrt{b_0/6}, \quad \omega_j^2 = r_jb_0/6, \quad j = \overline{1,3}; \quad (61)$$

$$\delta = b_1(3/2b_0)^{3/2}, \quad \alpha = 18b_2/b_0^2, \quad b_0 \neq 0. \quad (62)$$

В этих обозначениях (57) принимает вид

$$\begin{aligned}&p_1 + p_2 + p_3 = 0; \quad r_1 + r_2 + r_3 = 3; \\ &p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 6; \quad r_1p_1 + r_2p_2 + r_3p_3 = 2\delta; \\ &p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 = -6\delta; \quad r_1p_1^2 + r_2p_2^2 + r_3p_3^2 = \alpha.\end{aligned} \quad (63)$$

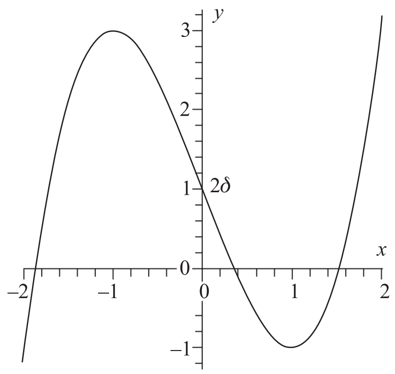

Рис. 1.

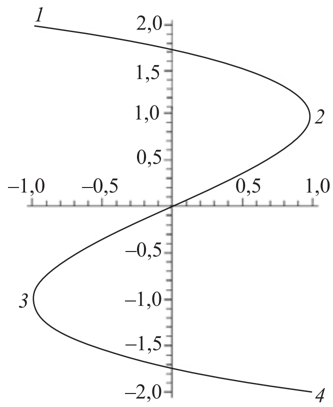

Рис. 2. *1–2* — $p_1(\delta)$; *2–3* — $p_2(\delta)$; *3–4* — $p_3(\delta)$

Система (63_{1-3}) однозначно определяет значения $p_j = s_j\sqrt{6/b_0}$, $j = \overline{1,3}$, как корни кубического уравнения

$$p^3 - 3p + 2\delta = 0. \tag{64}$$

Как известно, все корни этого уравнения вещественны в том и только в том случае, если выполнены условия

$$\delta^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant b_1^2 \leqslant (2b_0/3)^3. \tag{65}$$

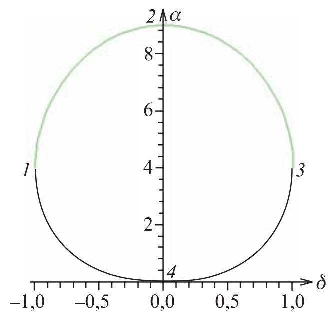

Рис. 3. *1–3* — $\alpha_1(\delta)$; *1–4–3* — $\alpha_2(\delta)$

Условие (60) дает ограничения на значения постоянной $b_2 > 0$:

$$\left[(4b_0b_2 - b_1^2)/16\right]^2 \geqslant (b_2/2)^3 \Leftrightarrow 4b_2(b_0 - \sqrt{2b_2}) \geqslant b_1^2 \Leftrightarrow \alpha(3 - \sqrt{\alpha}) \geqslant 4\delta^2. \tag{66}$$

Соотношения (64) и (66) удобно исследовать графически. График кубической параболы $y = x^3 - 3x + 2\delta$ (рис. 1) проясняет геометрический смысл параметра δ в уравнении (64) и условия (65). Рис. 2 показывает зависимость трех (вещественных) корней уравнения (64) от параметра δ.

Границы интервала $[\alpha_1; \alpha_2]$, определенного неравенством (66), также зависят от параметра δ. Эта зависимость показана на рис. 3, в частности,

$$\alpha \in [0, 9], \quad 0 \leqslant b_2 \leqslant b_0^2/2 \quad \text{при} \quad \delta = 0; \quad \alpha = 4, \quad b_2 = 2b_0^2/9 \quad \text{при} \quad \delta^2 = 1.$$

Подстановка найденных из (64) корней p_1, p_2, p_3 в уравнения (63_{4-6}) дает линейную относительно неизвестных $r_j = 6\omega_j^2/b_0, j = \overline{1,3}$, систему с определителем

$$\det\,[p_j^{k-1}]_1^3 = (p_3 - p_1)(p_3 - p_2)(p_2 - p_1).$$

Поэтому следует различать следующие частные случаи:

1) $0 \leqslant b_1^2 = (2b_0/3)^3$. Тогда уравнение (64) имеет кратные корни и из формул (59) и (60) находим

$$\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = C_7 = 0 \tag{67}$$

или

$$4b_2\left(b_0 - \sqrt{2b_2}\right) = (2b_0/3)^3. \tag{67$'$}$$

Существует три возможности:

$$\begin{aligned}
&a) \quad s_1 = s_2 = s_3 = 0;\\
&б) \quad s_1 = s_2 < 0, \quad s_3 = -2s_1 > 0;\\
&в) \quad s_1 < 0, \quad s_2 = s_3 = -s_1/2 > 0.
\end{aligned}$$

В случае $a)$ из (57) получаем

$$\begin{gathered}
b_0 = 0 \Leftrightarrow b_1 = b_2 = 0 \Leftrightarrow\\
s_1 = s_2 = s_3 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0 \Leftrightarrow\\
J(0,\mathbf{x}) = J(t,\mathbf{x}) = 0.
\end{gathered}$$

В этом тривиальном случае гидродинамическая скорость барохронного течения тождественно постоянна

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathrm{const}.$$

В случае $б)$ матрица тензора $J(0,\mathbf{x})$, как отмечено выше, в соответствующим образом выбранном базисе имеет вид [2]

$$J(0,\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & 0\\ -\omega_3 & s_1 & \omega_1\\ 0 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}, \quad s_1 < 0 < s_3, \quad \omega_3 \geqslant 0.$$

В этом каноническом базисе система (63) принимает вид

$$\begin{aligned}
&2p_1 + p_3 = 0; \quad r_1 + r_3 = 3;\\
&2p_1^2 + p_3^2 = 6; \quad r_1p_1 + r_3p_3 = 2\delta;\\
&2p_1^3 + p_3^3 = -6\delta; \quad r_1p_1^2 + r_3p_3^2 = \alpha.
\end{aligned} \tag{68}$$

Отсюда находим (система уравнений (68) совместна, если $b_0 \neq 0$, $\delta = -1$, $\alpha = 4$)

$$p_1 = -1, \quad p_3 = 2; r_1 = \frac{8}{3}, \quad r_3 = \frac{1}{3}.$$

Соответственно, из формул (61) получаем

$$\begin{aligned} &s_1 = s_2 = -(b_0/6)^{1/2} < 0, \quad s_3 = 2(b_0/6)^{1/2} > 0, \\ &\omega_1^2 = \frac{4}{9}b_0, \quad \omega_3^2 = \frac{1}{18}b_0, \quad \omega_2 = 0, \end{aligned} \tag{69}$$

а из формул (62) — условия совместности системы уравнений (57):

$$b_1 = -(2b_0/3)^{3/2} < 0, \quad b_2 = 2(b_0/3)^2 > 0 \tag{70}$$

(условие (67′) вытекает из соотношений (70)).

В случае *в*), аналогично случаю *б*), матрица тензора $J(0, \mathbf{x})$ в каноническом базисе приводится к следующему виду:

$$J(0, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & 0 \\ -\omega_3 & s_3 & \omega_1 \\ 0 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}, \quad s_1 < 0 < s_3, \quad \omega_3 \geqslant 0, \tag{71}$$

а система (63) в этом базисе имеет вид

$$\begin{aligned} &p_1 + 2p_3 = 0; \quad r_1 + r_3 = 3; \\ &p_1^2 + 2p_3^2 = 6; \quad r_1 p_1 + r_3 p_3 = 2\delta; \\ &p_1^3 + 2p_3^3 = -6\delta; \quad r_1 p_1^2 + r_3 p_3^2 = \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$p_1 = -2, \quad p_3 = 1; \quad r_1 = 1/3, \quad r_3 = 8/3,$$

или

$$\begin{aligned} &s_1 = -2(b_0/6)^{1/2} < 0, \quad s_2 = s_3 = (b_0/6)^{1/2} > 0, \\ &\omega_1 = (b_0/18)^{1/2} > 0, \quad \omega_3 = 2b_0^{1/2}/3 > 0, \quad \omega_2 = 0. \end{aligned} \tag{72}$$

Условия совместности системы уравнений (71) имеют вид $\delta = +1$, $\alpha = 4$, или

$$b_1 = (2b_0/3)^{3/2} > 0, b_2 = 2(b_0/3)^2 > 0. \tag{73}$$

Условие (67′) автоматически выполняется и в этом случае.

Таким образом, в нетривиальных случаях *б*) и *в*) все алгебраические инварианты матрицы Якоби $[u_{i,j}(t,\mathbf{x})]$ определяются через единственную постоянную $b_0 = \operatorname{tr} S^2(0) > 0$ и элементы базиса инвариантов (2) связаны полиномиальными соотношениями — сизигиями:

$$\begin{gathered} \operatorname{tr} A^2 = -\operatorname{tr} S^2; \quad 18\operatorname{tr}(S^2A^2) = -7\left(\operatorname{tr} S^2\right)^2; \\ \left(\operatorname{tr} S^2\right)^3 = 6\left(\operatorname{tr} S^3\right)^2 = 54\left(\operatorname{tr}(SA^2)\right)^2 \end{gathered} \tag{74}$$

(при этом $\operatorname{tr}(SAS^2A^2) = 0$ и $\operatorname{tr}S^3 > 0$, $\operatorname{tr}(SA^2) < 0$, если $s_1 = s_2 < 0 < s_3$; $\operatorname{tr} S^3 < 0$, $\operatorname{tr}(SA^2) > 0$, если $s_1 = s_2 < 0 < s_3$).

2) Пусть теперь $0 \leqslant b_1^2 < (2b_0/3)^3$. Тогда уравнение (64) имеет простые корни и матрица тензора $J(0,\mathbf{x})$ в каноническом базисе имеет вид (1)

$$J(0,\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} s_1 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & s_2 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & s_3 \end{bmatrix}, \quad s_1 < s_2 < s_3, \quad \omega_3 \geqslant 0, \quad \omega_2 \leqslant 0.$$

Следовательно, система уравнений (63_{4-6}) имеет определитель, не равный нулю, и возможно применить выведенную в работе [4] формулу

$$r_j \det \begin{bmatrix} T_3 & p_j \\ -p_j^T & 0 \end{bmatrix} = \det T_3, \quad j = \overline{1,3} \tag{75}$$

(здесь суммирования по повторяющемуся индексу j нет!), где T_3 обозначает [4] матрицу $T_3 = \left[\sum_{i=1}^{3} r_i p_i^{j+k-2}\right]_{j,k=\overline{1,3}}$. Учитывая обозначения (61), (62) и соотношения (58) и (59), получим

$$T_3 = \left[(6/b_0)^{(j+k)/2}\left\langle \boldsymbol{\omega} S^{j+k-2}\,\boldsymbol{\omega}\right\rangle\right]_{j,k=\overline{1,3}} = \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha \\ 2\delta & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 \end{bmatrix}.$$

В результате уравнение (75) для каждого $j = \overline{1,3}$ примет следующий вид:

$$r_j \det \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha & 1 \\ 2\delta & \alpha & 0 & p_j \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 & p_j^2 \\ -1 & -p_j & -p_j^2 & 0 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 3 & 2\delta & \alpha \\ 2\delta & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 3\alpha - 4\delta^2 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Поскольку значения p_1, p_2, p_3 определяются параметром δ, формула (76) определяет величины $r_j, j = \overline{1,3}$, в зависимости от δ и α. На рис. 4, *а–в* показана, соответственно, зависимость $r_1(\delta,\alpha)$, $r_2(\delta,\alpha)$, $r_3(\delta,\alpha)$.

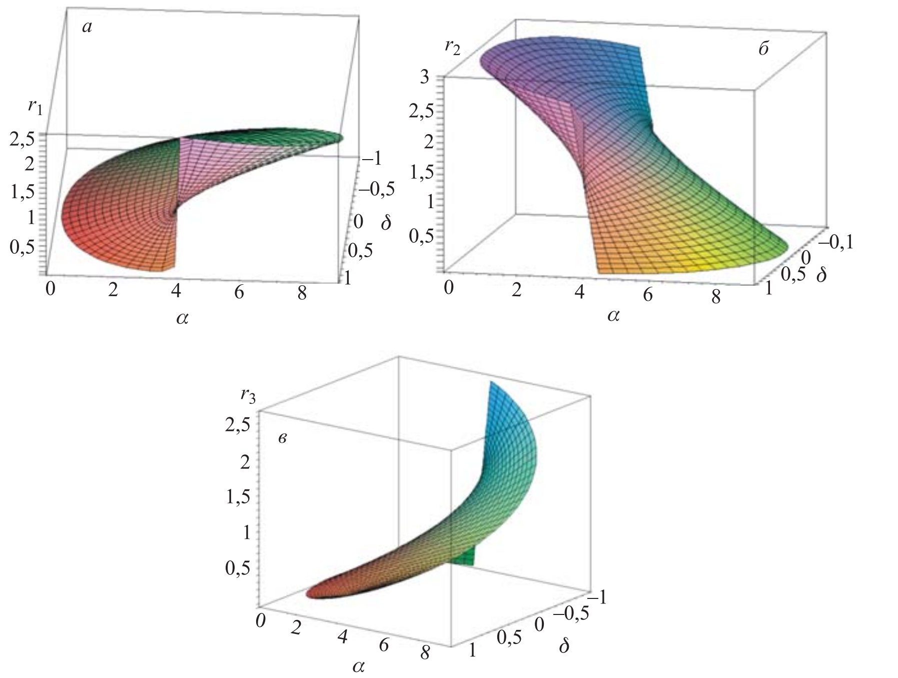

Рис. 4.

Формула (76) упрощается, если $\delta = 0 \Leftrightarrow b_1 = 0$. В этом случае из (64) находим

$$p_1 = -p_3 = -\sqrt{3}, \quad p_2 = 0$$

и (76) дает

$$r_1 = r_3 = \alpha/6, \quad r_2 = 3 - \alpha/3 \Leftrightarrow$$

$$s_1 = -s_3 = -\left(b_0/2\right)^{1/2}, \quad s_2 = 0, \omega_1^2 = \omega_3^2 = b_2/2b_0, \quad \omega_2^2 = (b_0^2 - 2b_2)/2b_0,$$

$$0 \leqslant b_2 \leqslant b_0^2/2, \quad b_1 = 0.$$

Этим решениям соответствуют сизигии (полиномиальные соотношения между элементами базиса инвариантов)

$$\mathrm{tr}\, S = \mathrm{tr}\, S^3 = \mathrm{tr}\,(SA^2) = 0; \quad \mathrm{tr}\, S^2 = -\mathrm{tr}\, A^2;$$

$$\left(4\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2)\right)^2 = \left(-4\mathrm{tr}\,(S^2A^2) - (\mathrm{tr}\,S^2)^2\right)\left((\mathrm{tr}\,S^2)^2 + 2\mathrm{tr}\,(S^2A^2)\right)^2, \quad (77)$$

$$0 \leqslant b_2 \leqslant b_0^2/2, \quad b_1 = 0.$$

В общем случае соленоидального барохронного течения сизигии имеют вид

$$(4\mathrm{tr}\,(S^A S^2 A^2))^2 = \left[\mathrm{tr}\,S^2\left(2\mathrm{tr}\,(S^2A^2) - \mathrm{tr}\,A^2\mathrm{tr}\,S^2\right) - \left(2\mathrm{tr}\,(SA^2)\right)^2\right]^2 - \\ - 2\left(2\mathrm{tr}\,(S^2A^2) - \mathrm{tr}\,A^2\mathrm{tr}S^2\right)^3;$$

$$\mathrm{tr}\,S^2 = -\mathrm{tr}\,A^2, \quad \mathrm{tr}\,S^3 = -3\mathrm{tr}\,(SA^2), \quad \mathrm{tr}\,S = 0. \tag{78}$$

Сизигии (74), (77), (78) связывают значения инвариантов матрицы Якоби при $t = 0$ (при $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$). Зависимость этих инвариантов от времени, вытекающая из уравнений (36)–(39) (см. приложение, табл. 1), показывает, что справедливо следующее предложение.

Предложение 3. *При соленоидальном течении идеального газа сизигии* (74), (77), (78) *выполняются в произвольный момент времени.* ■

Из формул (55) следует, что при соленоидальном барохронном течении все три коэффициента характеристического полинома матрицы Якоби $J(0,\mathbf{x})$ равны нулю:

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

и, следовательно, матрица $J(0,\mathbf{x})$ имеет ранг $\leqslant 2$.

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *При соленоидальном барохронном течении идеального газа все три коэффициента характеристического полинома матрицы Якоби* $[u_{j,k}(t,\mathbf{x})]$ *равны нулю в произвольный момент времени*:

$$k_1(t) = k_2(t) = k_3(t) = 0, \Rightarrow r = \mathrm{rank}[u_{i,j}(t,\mathbf{x})]_{i,j=\overline{1,3}} \leqslant 2, \tag{79}$$

$$S_1 = \mathrm{div}\,\mathbf{u} = u_{j,j} = 0.$$

При этом возможны следующие случаи:

1. $r = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\,S^2 = -\mathrm{tr}A^2 = 0 \Leftrightarrow S = A = 0$;

2. $r = 1 \Leftrightarrow \mathrm{tr}\,S^2 = -\mathrm{tr}\,A^2 > 0, \quad \mathrm{tr}\,S^3 = \mathrm{tr}\,(SA^2) = 0$ (*тогда, очевидно*, $\mathrm{tr}\,(S^2A^2) = -(\mathrm{tr}\,S^2)^2/2 < 0$, $\mathrm{tr}\,(SAS^2A^2) = 0$);

3. $r = 2$ *во всех остальных случаях.*

Предварительно докажем, что справедлива следующая лемма.

Лемма. *При соленоидальном барохронном течении идеального газа ранг матрицы Якоби* $[u_{j,k}(t,\mathbf{x})]$ *не зависит от времени:*

$$\mathrm{rank}\,J(t,\mathbf{x}) = \mathrm{rank}\,J(0,\mathbf{x}). \tag{80}$$

Доказательство леммы. По условиям леммы имеем $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $q(t) = 1$ и тогда из (40) получаем

$$J(t,\mathbf{x}) = J(0,\mathbf{x}) - tJ^2(0,\mathbf{x}) = J(0,\mathbf{x})\left[E - tJ(0,\mathbf{x})\right]. \tag{81}$$

Поскольку

$$\det\left[E - tJ(0,\mathbf{x})\right] = 1 - c_1 t + c_2 t^2 - c_3 t^3 = 1 \neq 0,$$

по формуле Бинэ–Коши [11] из (81) получаем (80). ■

Доказательство теоремы 6. При соленоидальном барохронном течении из (81), учитывая сизигии (78), находим

$$k_1(t) = \mathrm{tr}\,J(t,\mathbf{x}) = \mathrm{tr}\,J(0,\mathbf{x}) - t\mathrm{tr}\,J^2(0,\mathbf{x}) = -t\left(\mathrm{tr}\,S^2(0,\mathbf{x}) + \mathrm{tr}\,A^2(0,\mathbf{x})\right) = 0,$$
$$k_3(t) = \det J(t,\mathbf{x}) = \det J(0,\mathbf{x}) \det\left[E - tJ(0,\mathbf{x})\right] = 0.$$

Для вычисления $k_2(t)$ воспользуемся формулами Ньютона [12]:

$$2k_2(t) = \left(\mathrm{tr}^2 J(t,\mathbf{x}) - \mathrm{tr}\,J^2(t,\mathbf{x})\right) = -\mathrm{tr}\,\left(J(0,\mathbf{x}) - tJ^2(0,\mathbf{x})\right)^2.$$

Но согласно формуле Гамильтона–Кэли при соленоидальном течении имеем

$$J^l(0,\mathbf{x}) = c_1 J^{l-1}(0,\mathbf{x}) - c_2 J^{l-2}(0,\mathbf{x}) + c_3 J^{l-3}(0,\mathbf{x}) = 0, l \geqslant 3.$$

Следовательно, согласно сизигиям (78)

$$k_2(t) = -\mathrm{tr}\,J^2(0,\mathbf{x})/2 = -\left(\mathrm{tr}\,S^2(0,\mathbf{x}) + \mathrm{tr}\,A^2(0,\mathbf{x})\right)/2 = 0,$$

и соотношения (79) доказаны.

По доказанной лемме ранг матрицы Якоби достаточно вычислить при $t = 0$.

В каноническом базисе согласно системе уравнений (57) имеем

$$b_0 = 0 \Rightarrow J(0,\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow r = 0.$$

Обратно, из $r = 0$, очевидно, следует $J(0,\mathbf{x}) = 0$, т. е. случай 1 доказан.

Пусть $b_0 = \mathrm{tr}\,S^2 = -\mathrm{tr}\,A^2 > 0$. Тогда $1 \leqslant r \leqslant 2$. Если $r = 1$, тогда все три главных минора матрицы Якоби $\Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = 0$. Это невозможно, если уравнение (64) имеет кратные корни. Действительно, если $s_1 = s_2 = -2s_3 > 0$, то $\Delta_{33} = s_1 s_2 + \omega_3^2 > 0$, если же $2s_1 = -s_2 = -s_3 < 0$, то $\Delta_{11} = s_2 s_3 + \omega_1^2 > 0$. Случай $s_1 = s_2 = s_3$ в силу условия соленоидальности $\mathrm{tr}\,S = 0$ сводится к случаю 1. Поэтому (см. формулу (65) и рис. 1) имеем

$$r = 1 \Rightarrow s_1 < s_2 < s_3 \Rightarrow 0 \leqslant b_1^2 < (2b_0/3)^3.$$

Но если здесь $b_1 > 0$, то знаки двух корней совпадают и либо $\Delta_{33} > 0$, либо $\Delta_{11} > 0$.

Остается единственная возможность (см. рис. 1 и формулу (76)):

$$r = 1 \Rightarrow 0 = b_1^2 < (2b_0/3)^3 \Leftrightarrow s_2 = 0,$$
$$s_1 = -s_3 = -(b_0/2)^{1/2} < 0, \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2^2 = b_0/2 = s_1^2 = s_3^2.$$

Отсюда согласно (57_3), (57_5), (57_6) и (59) получаем

$$\operatorname{tr} S^3 = \operatorname{tr}(SA^2) = 0, \quad \left\langle \boldsymbol{\omega}\, S^2 \boldsymbol{\omega} \right\rangle = 0 = b_2/2 \Leftrightarrow$$
$$\operatorname{tr}(S^2A^2) = -(\operatorname{tr} S^2)^2/2 = -b_0^2/2 < 0, \quad \operatorname{tr}(SAS^2A^2) = 0.$$

Обратно, если $b_1 = b_2 = 0, b_0 > 0$, то из (57) (или из (63)) находим

$$s_1 = -s_3 = -\left(b_0/2\right)^{1/2}, \quad s_2 = 0, \omega_1 = \omega_3 = 0, \omega_2 = -b_0/2 \Rightarrow$$
$$J(0) = \sqrt{b_0/2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow r = \operatorname{rank} J(0) = 1.$$

Отсюда (или из формул (57)–(59)) получаем

$$\operatorname{tr}(S^2A^2) = -(\operatorname{tr} S^2)^2/2 = -b_0^2/2 < 0, \quad \operatorname{tr}(SAS^2A^2) = 0.$$

В силу леммы то же справедливо и для матрицы $J(t, \mathbf{x})$. ■

Из доказанной теоремы 6 вытекает несколько следствий.

Следствие 7. *При соленоидальном барохронном течении идеального газа матрица Якоби* $J(t, \mathbf{x}) = [u_{j,k}(t, \mathbf{x})]$ *зависит только от времени и с точностью до вещественного ортогонального преобразования однозначно определяется тремя независимыми инвариантами матрицы Якоби* $J(0, \mathbf{x})$, *которые не зависят от пространственных координат*:

$$\operatorname{tr} S^2 = -\operatorname{tr} A^2, \quad 3\operatorname{tr}(SA^2) = -\operatorname{tr} S^3, \quad \operatorname{tr}(SAS^2A^2),$$

причем при соленоидальном барохронном течении инвариант $\operatorname{tr}(S^2A^2)$ *связан с инвариантами базиса* (2) *неравенствами* (65):

$$\left(4\operatorname{tr}(SAS^2A^2)\right)^2 = \left[\operatorname{tr} S^2 \left(2\operatorname{tr}(S^2A^2) - \operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} S^2\right) - \left(2\operatorname{tr}(SA^2)\right)^2\right]^2 -$$
$$- 2\left(2\operatorname{tr}(S^2A^2) - \operatorname{tr} A^2 \operatorname{tr} S^2\right)^3;$$

$$0 \leqslant 6\left(\operatorname{tr} S^3\right)^2 = 54\left(\operatorname{tr}(SA^2)\right)^2 \leqslant \left(\operatorname{tr} S^2\right)^3 = -\left(\operatorname{tr} A^2\right)^3 \geqslant 0, \quad \operatorname{tr} S = 0.$$

■

Следствие 8. *При соленоидальном барохронном течении идеального газа гидродинамическая скорость* $u_j(t, \mathbf{x})$, $j = \overline{1,3}$, *описывается формулами*

$$u_j(t, \mathbf{x}) = \left(J_{jk}(0) - tJ_{jk}^2(0)\right)(x_k - u_k^0 t) + u_j^0, \quad j = \overline{1,3}, \tag{82}$$

где $u_j^0 = u_j(0, \mathbf{0})$, $j = \overline{1,3}$ *и* $J_{jk}(0)$ *обозначает матрицу Якоби* $[u_{j,k}(t, \mathbf{x})]$ *в начальный момент времени в начале координат (которое согласно условию барохронности можно выбрать произвольно).*

Доказательство. Согласно (12) имеем $J(0,\mathbf{x}) = J_\upsilon(\mathbf{y}) = [\partial_{y_k}\upsilon_j(\mathbf{y})]$. Поскольку компоненты s_j, ω_j, $j=\overline{1,3}$, тензора $\upsilon_{j,k}(\mathbf{y})$ в каноническом базисе тензора $J(0,\mathbf{x})$ вполне определяются его инвариантами и согласно теореме 3 не зависят от пространственных переменных $\mathbf{y}$, интегрируя $\upsilon_{j,k}(\mathbf{y})$ по y_j, $j=\overline{1,3}$, находим

$$\begin{aligned} \upsilon_1(\mathbf{y}) &= s_1y_1 - \omega_2y_3 + \omega_3y_2 + C_1,\\ \upsilon_2(\mathbf{y}) &= s_2y_2 - \omega_3y_1 + \omega_1y_3 + C_2,\\ \upsilon_3(\mathbf{y}) &= s_3y_3 - \omega_1y_2 + \omega_2y_1 + C_3. \end{aligned} \tag{83}$$

Учитывая, что в каноническом базисе тензор $J(0,\mathbf{x}) = J(\mathbf{y})$ имеет вид (ср. с (1))

$$[J_{jk}(0,\mathbf{x})] = [J_{jk}(\mathbf{y})] = \operatorname{diag}\{s_1,s_2,s_3\} + ie_{jkl}\omega_l = [J_{jk}(0,\mathbf{0})], \tag{84}$$

формулы (83) можно представить в ковариантном виде

$$\upsilon_j(\mathbf{y}) = S_{jk}y_k - e_{jkl}\omega_k y_l + C_j = J_{jk}(\mathbf{y})y_k + C_j, \quad j=\overline{1,3}.$$

Воспользовавшись в последней формуле преобразованием (9), получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $u_j(t,\mathbf{x})$

$$u_j(t,\mathbf{x}) = J_{jk}(0,\mathbf{x})\,(x_k - tu_k(t,\mathbf{x})) + C_j, \quad j=\overline{1,3}.$$

Отсюда находим значения постоянных интегрирования $C_j = u_j(0,\mathbf{0}) = u_j^0$, $j=\overline{1,3}$, и, учитывая соотношения (13) и (12), получаем

$$\begin{aligned} u_j(t,\mathbf{x}) &= (E_3 + tJ(0,\mathbf{x}))^{-1}_{jl}\,(J_{lk}(0,\mathbf{x})x_k + u_l^0) =\\ &= (E_3 - tJ(t,\mathbf{x}))_{jl}\,J_{lk}(0,\mathbf{x})x_k + (E_3 - tJ(t,\mathbf{x}))_{jl}\,u_l^0 =\\ &= J_{jk}(t,\mathbf{x})(x_k - tu_k^0) + u_j^0, \quad j=\overline{1,3}. \end{aligned} \tag{85}$$

Подставляя выражения (81) и (84) в правую часть (85), получаем (82). ■

Замечание. Если определить оператор $\mathbf{J} : \mathrm{E}^3 \to \mathrm{E}^3$, матрица которого в ортонормированном базисе $\{\mathbf{e}_k | \mathbf{e}_k \in \mathbf{E}^3, k=\overline{1,3}\}$ совпадает с матрицей Якоби $[u_{j,k}(0,\mathbf{0})]$,

$$\langle \mathbf{e}_j |\, J \,| \,\mathbf{e}_k\rangle = J_{jk}(0,\mathbf{0}) = u_{j,k}(0,\mathbf{0}), \quad j,k=\overline{1,3},$$

то можно записать формулу (82) в векторном виде

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = (\mathbf{J} - t\mathbf{J}^2)(\mathbf{x} - \mathbf{u}^0 t) + \mathbf{u}^0. \tag{82$'$}$$

4. Легко проверить, что поле $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$, определяемое формулой (82′), удовлетворяет уравнениям Эйлера (5) и в соответствии с условием соленоидальности течения

$$\partial_k u_k(t,\mathbf{r}) = \operatorname{tr} J = 0$$

плотность (а значит, и давление) газа остаются постоянными:

$$\rho'(t) = 0, \quad \rho(t) = \rho_0 > 0. \tag{86}$$

Движения газа, удовлетворяющие условию (86), называют *изобарическими.* Таким образом, показано, что справедливо следующее предложение.

Предложение 4. *Соленоидальное барохронное течение идеального газа является изобарическим.* ■

Изобарические движения изучались в работе [5]. В частности, в [5] были найдены решения $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ уравнений Эйлера (5) типа простых волн и/или двойных волн. По определению (см., например, [6]), решение $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ называется двойной волной, если ранг матрицы Якоби $r = \operatorname{rank}[u_{j,k}(t,\mathbf{x})] = 2$, если же $r = 1$, то простой волной. Теорема 6 дает необходимые и достаточные условия и критерии существования решений типа простых и/или двойных волн на языке инвариантов матрицы Якоби $[u_{j,k}(t,\mathbf{x})]$. В частности, необходимые и достаточные условия существования простой волны согласно теореме 6 имеют вид $\operatorname{tr} S^3 = \operatorname{tr}(SA^2) = 0$.

Из леммы, теоремы 6 и предложения 3 вытекает, что решения типа простых и/или двойных волн не могут смешиваться, если только течение остается барохронным, так как соответствующие критерии, имеющие вид некоторых сизигий, не могут выполняться одновременно и не изменяются со временем.

Нетривиальная зависимость гидродинамической скорости барохронного течения идеального газа $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ от времени и от пространственных координат при нулевом значении градиента давления (плотности) обусловлена начальным полем скоростей $\mathbf{u}(0,\mathbf{x})$, которое описывается в явном виде формулами

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{x}/t_0, \text{ если течение потенциально } (\operatorname{rot}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0, t_0 \neq 0),$$

$$\mathbf{u}(0,\mathbf{x}) = \mathbf{J}\mathbf{x} + \mathbf{u}(0,\mathbf{0}), \text{ если течение соленоидально } (\operatorname{div}\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = 0).$$

Здесь матрица оператора $\mathbf{J} : \mathrm{E}^3 \to \mathrm{E}^3$ определена (с точностью до вещественного ортогонального преобразования) своей канонической формой и условиями теоремы 6. В этих условиях существуют нестационарные решения гидродинамических уравнений Эйлера (5), которые определяются начальными значениями гидродинамической скорости и ее пространственных производных (т. е. начальными значениями элементов матрицы Якоби $u_{j,k}(0,\mathbf{x})$). При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 7. *При барохронном течении идеального газа общее решение гидродинамических уравнений Эйлера* $\mathbf{u}(t,\mathbf{x})$ *содержит не более чем шесть произвольных постоянных. Количество этих постоянных в общем случае не может быть уменьшено.*

Доказательство. Инварианты (2) матрицы Якоби позволяют определить режим барохронного течения:

а) течение потенциально, если $\mathrm{tr}\, A^2 = (\mathrm{rot}\, \mathbf{u})^2 = 0$; тогда среди инвариантов (2) независимым является только один ($S_1 = \mathrm{tr}\, S$), причем его начальное значение $S_1(0) = 3t_0^{-1}$ определяет начальные значения и зависимость от времени остальных инвариантов (см. формулы (46) и (54)), а также гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ и плотность газа $\rho(t)$ (см. формулы (48) и (49));

б) течение соленоидально, если $\mathrm{tr}\, S = \mathrm{div}\, \mathbf{u} = 0$; тогда среди инвариантов (2) (и их начальных значений) независимых не более чем три (см. (74), (77), (78)):

$$\mathrm{tr}\, S^2 = -\mathrm{tr}\, A^2 = b_0, \quad \mathrm{tr}\, (SA^2) = -\frac{\mathrm{tr}\, S^3}{3} = \frac{b_1}{4},$$
$$\mathrm{tr}\, (SAS^2A^2) = \left\{ \frac{(4b_0b_2 - b_1^2)^2}{2^8} - \frac{b_2^3}{2^3} \right\}^{1/2}.$$

Значения инвариантов (2) однозначно определяют матрицу Якоби $[u_{j,k}(0, \mathbf{x})]$ в каноническом (ортонормированном) базисе [1–4] и, следовательно, вместе с постоянными $u_j^0 = u_j(0, \mathbf{0})$, $j = \overline{1, 3}$ (начальными значениями скорости), позволяют по формулам (82) найти гидродинамическую скорость $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$. Шесть вещественных постоянных b_0, b_1, b_2, u_1^0, u_2^0, u_3^0, вообще говоря, независимы, т. е. в общем случае их количество не может быть уменьшено. ■

Как отмечено выше, трехмерное барохронное движение физически может осуществляться лишь в бесконечном однородном пространстве, в качестве которого в настоящей работе взято трехмерное евклидово пространство E^3. На наш взгляд, представляется весьма интересным, что в чисто кинематическом подходе, в отсутствие каких-либо взаимодействий и при нулевом градиенте давления, для такого течения, как вытекает из теоремы 5 (см. формулу (48)), установлено, что *существует нестационарное* (*потенциальное*) *решение уравнений Эйлера для гидродинамической скорости идеального газа*, *которое удовлетворяет* (*формально*) *известному закону Хаббла в нерелятивистской форме*

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{r}|t + t_0|^{-1} \equiv H\mathbf{r} \tag{87}$$

(см., например, [15], с. 177–198).

Отметим, что «постоянная Хаббла» H в формуле (87) обратно пропорционально зависит от времени:

$$H = |t + t_0|^{-1},$$

вследствие чего режим расширения такой «барохронной Вселенной» имеет характер равномерного (потенциального) течения с постоянной во времени скоростью расширения $\mathbf{u}_0$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}_0 t. \tag{88}$$

5. Проиллюстрируем применение полного полиномиального базиса ортогональных инвариантов к задаче описания вращения асимметричного волчка — одной из центральных задач аналитической механики.

Физические величины, фигурирующие в описывающих динамику этой системы уравнениях Эйлера, составляют симметрический тензор инерции I_{kl} и аксиальный вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, который представим в виде антисимметрического тензора $\Omega_{kl} = e_{klm}\omega_m$ (см., например, [16], § 28–29).

Полиномиальный базис инвариантов пары тензоров I_{kl}, Ω_{kl} суть шесть ортогональных инвариантов вида (2) для матрицы

$$T = [I_{kl}] + [\Omega_{kl}]. \tag{89}$$

Канонический базис этой матрицы определяется главными осями инерции волчка, занумерованными и ориентированными так, что выполняются условия

$$I_1 < I_2 < I_3, \quad \omega_3^0 > 0, \quad \omega_2^0 < 0,$$

где $I_k > 0$ и $\omega_k^0, k = \overline{1,3}$, соответственно, главные моменты инерции волчка и проекции вектора угловой скорости на эти оси. Уравнения, связывающие инварианты (2) с элементами матрицы (89) в каноническом базисе, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tr} I^\lambda = I_1^\lambda + I_2^\lambda + I_3^\lambda, \quad \lambda = \overline{1,3};\\
&\operatorname{tr}\Omega^2 = -2(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = -2\boldsymbol{\omega}^2;\\
&\operatorname{tr}(I\Omega^2) = -\boldsymbol{\omega}^2 \operatorname{tr} I + \sum\nolimits_{k=1}^3 I_k\omega_k^2 = 2\mathsf{E}_{\rm rot} - \boldsymbol{\omega}^2 \operatorname{tr} I;\\
&\operatorname{tr}(I\Omega I^2\Omega^2) = \omega_1\omega_2\omega_3 \det [I_k^{l-1}]_{k,l=\overline{1,3}} = \omega_1\omega_2\omega_3(I_3 - I_2)(I_3 - I_1)(I_2 - I_1)
\end{aligned} \tag{90}$$

(индекс 0 в дальнейшем для краткости опускаем). Здесь

$$\mathsf{E}_{\rm rot} = \sum\nolimits_{k=1}^3 I_k\omega_k^2/2 = \langle\boldsymbol{\omega} I \boldsymbol{\omega}\rangle/2 = \operatorname{tr}(\Omega^2 I) + \boldsymbol{\omega}^2 \operatorname{tr} I \tag{91}$$

обозначает кинетическую энергию вращающегося волчка.

Квадрат момента импульса (кинетического момента) волчка

$$L^2 = \sum\nolimits_{k=1}^3 I_k^2\omega_k^2 = \left\langle\boldsymbol{\omega} I^2\, \boldsymbol{\omega}\right\rangle = \operatorname{tr}(\Omega^2 I^2) + \boldsymbol{\omega}^2 \operatorname{tr} I^2 \tag{92}$$

связан с инвариантами (90) полиномиальным соотношением

$$\left\{\det\begin{bmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3\\ I_1\omega_1 & I_2\omega_2 & I_3\omega_3\\ I_1^2\omega_1 & I_2^2\omega_2 & I_3^2\omega_3\end{bmatrix}\right\}^2 = \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^2 & 2\mathsf{E}_{\rm rot} & L^2\\ 2\mathsf{E}_{\rm rot} & L^2 & I_k^3\omega_k^2\\ L^2 & I_k^3\omega_k^2 & I_k^4\omega_k^2\end{bmatrix} =$$
$$= [\operatorname{tr}(I\Omega I^2\Omega^2)]^2,$$

где, как и в (58), (59),

$$I_k^3\omega_k^2 = \mathrm{tr}\,(\Omega^2 I^3) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathrm{tr}\, I^3, \quad I_k^4\omega_k^2 = \mathrm{tr}\,(\Omega^2 I^4) + \boldsymbol{\omega}^2 \mathrm{tr}\, I^4.$$

Применяя формулу Гамильтона–Кэли, после несложных вычислений отсюда получаем

$$[\mathrm{tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2)]^2 = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^2 & 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}} & L^2 \\ 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}} & L^2 & A + \boldsymbol{\omega}^2 \det\, I \\ L^2 & A + \boldsymbol{\omega}^2 \det\, I & B + \boldsymbol{\omega}^2 \mathrm{tr}\, I \det\, I \end{bmatrix}, \tag{93}$$

где

$$\begin{aligned} A &= L^2 \mathrm{tr}\, I - \mathsf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\mathrm{tr}^2 I - \mathrm{tr}\, I^2), \\ B &= L^2(\mathrm{tr}^2 I + \mathrm{tr} I^2)/2 + 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}}\,(\mathrm{tr} I^3 - \mathrm{tr}^3 I)/3. \end{aligned} \tag{94}$$

Уравнения движения для инвариантов (90) легко получаются из динамических уравнений Эйлера ([16], с. 127–128)

$$\begin{aligned} I_1\partial_t\omega_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= N_1, \\ I_2\partial_t\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= N_2, \\ I_3\partial_t\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned} \tag{95}$$

(здесь N_1, N_2, N_3 обозначают проекции вектора момента внешней силы $\mathbf{N}$ на главные оси инерции волчка). Умножая k-е уравнение системы (95) на $I_k^{\mu-1}\omega_k$, $k = \overline{1,3}$, и суммируя по k, получим уравнение

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(I_k^\mu\omega_k^2\right) + \omega_1\omega_2\omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ I_1^{\mu-1} & I_2^{\mu-1} & I_3^{\mu-1} \end{bmatrix} = \sum\nolimits_{k=1}^{3} N_k I_k^{\mu-1}\omega_k,$$

которое, учитывая соотношения (56) и (28), можно представить в инвариантном виде

$$\partial_t \mathrm{tr}\,(I^\mu\Omega^2)/2 + \mathrm{tr}\, I^\mu \partial_t \boldsymbol{\omega}^2/2 + \mathrm{tr}\,(I\Omega I^{\mu-1}\Omega^2) = \left\langle \mathbf{N} I^{\mu-1}\boldsymbol{\omega}\right\rangle. \tag{96}$$

В этом виде это уравнение справедливо в произвольной ортонормированной системе координат в отличие от уравнений Эйлера (95), выполняющихся только в системе координат, построенной на главных осях инерции волчка.

При $\mu = 1, 2 \quad \mathrm{tr}\,(I\Omega^3) = \mathrm{tr}\,(I\Omega I\Omega^2) = 0$ и уравнение (96) дает соотношения

$$\partial_t \mathsf{E}_{\mathrm{rot}} = \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\omega}\rangle\,, \quad \partial_t L^2 = 2\,\langle \mathbf{N} I\boldsymbol{\omega}\rangle = 2\,\langle \mathbf{N}\mathbf{L}\rangle\,, \tag{97}$$

которые для свободного волчка сводятся к законам сохранения энергии (91) и квадрата кинетического момента (92).

При $\mu = 0$ уравнение (96) принимает вид

$$\partial_t \mathrm{tr}\,\Omega^2/2 + 3\partial_t \boldsymbol{\omega}^2/2 + \mathrm{tr}\,(I\Omega I^{-1}\Omega^2) = \left\langle \mathbf{N} I^{-1} \boldsymbol{\omega} \right\rangle$$

(обратный тензор $I^{-1} : \mathsf{E}^3 \to \mathsf{E}^3$ существует, так как по условию $\det I = I_1 I_2 I_3 > 0$). Воспользуемся здесь формулой (28), которая в данном случае дает

$$\mathrm{tr}\,(I\Omega I^{-1}\Omega^2) = \omega_1\omega_2\omega_3 \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ I_1 & I_2 & I_3 \\ I_1^{-1} & I_2^{-1} & I_3^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{I_1 I_2 I_3} \det \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_3 \\ I_1^2 & I_2^2 & I_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det{}^{-1} I \mathrm{tr}\,(I\Omega I^2 \Omega^2).$$

Учитывая также, что $\mathrm{tr}\,\Omega^2 = -2\boldsymbol{\omega}^2$, получим уравнения, описывающие эволюцию квадрата угловой скорости волчка:

$$\partial_t \omega^2/2 + \det{}^{-1} I \mathrm{tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2) = \left\langle \mathbf{N} I^{-1}\boldsymbol{\omega} \right\rangle, \tag{98}$$

$$-\partial_t \mathrm{tr}\,\Omega^2/4 + \det{}^{-1} I \mathrm{tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2) = \left\langle \mathbf{N} I^{-1}\boldsymbol{\omega} \right\rangle, \tag{98$'$}$$

справедливые, как и (96), в произвольной ортонормированной системе координат.

Предложение 5. *Для свободного волчка* (98), (98′) *сводятся к уравнению для эллиптической функции Вейерштрасса* $\mathsf{P}(t) = \mathsf{P}(t; g_2, g_3)$ (см., например, [17, 13.13.4–13.13.5]):

$$\mathsf{P}'^2(t) = 4(\mathsf{P}(t) - e_1)(\mathsf{P}(t) - e_2)(\mathsf{P}(t) - e_3) = 4\mathsf{P}^3(t) - g_2\mathsf{P}(t) - g_3,$$
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad g_2 = -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3), \quad g_3 = 4e_1e_2e_3.$$

Доказательство. Согласно (93) имеем

$$[\mathrm{tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2)]^2 = -(\boldsymbol{\omega}^2)^3 \det{}^2 I + (\boldsymbol{\omega}^2)^2 c_1 \det I - \boldsymbol{\omega}^2 c_2 + c_3, \tag{99}$$

где коэффициенты c_1, c_2, c_3 не зависят от $\boldsymbol{\omega}^2(t)$ и определяются инвариантами $\mathrm{tr}\, I^\lambda$, $\lambda = \overline{1,3}$, $\mathsf{E}_{\mathrm{rot}}$ и L^2 (не зависящими от времени, если волчок свободный):

$$c_1 = 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}}(\mathrm{tr}^2 I - \mathrm{tr}\, I^2) - L^2 \mathrm{tr}\, I,$$
$$c_2 = \mathsf{E}_{\mathrm{rot}}^2[(\mathrm{tr}^2 I - \mathrm{tr} I^2)^2 + 4\mathrm{tr}\, I \det I] - 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}} L^2(\mathrm{tr}^3 I - 2\mathrm{tr}\, I \mathrm{tr}\, I^2 + \mathrm{tr}\, I^3) +$$
$$+ L^4(\mathrm{tr}^2 I - \mathrm{tr}\, I^2)/2,$$
$$c_3 = 8\mathsf{E}_{\mathrm{rot}}^3(\mathrm{tr}^3 I - \mathrm{tr}\, I^3)/3 - 2\mathsf{E}_{\mathrm{rot}}^2 L^2(3\mathrm{tr}^2 I - \mathrm{tr}\, I^2) + 4\mathsf{E}_{\mathrm{rot}} L^4 \mathrm{tr}\, I - L^6,$$
$$\det I = (2\mathrm{tr}\, I^3 - 3\mathrm{tr}\, I^2 \mathrm{tr} I + \mathrm{tr}^3 I)/6.$$

Подстановка

$$\boldsymbol{\omega}^2(t) = -\mathsf{P}(t) + c_1(3\det\, I)^{-1} = \\ = -\mathsf{P}(t) + (3\det\, I)^{-1}(2\mathsf{E}_{\rm rot}(\mathrm{tr}^2\, I - \mathrm{tr}\, I^2) - L^2 \mathrm{tr}\, I) \quad (100)$$

приводит (99) к виду

$$[\mathrm{tr}\,(I\Omega I^2 \Omega^2)]^2 = \\ = \mathsf{P}^3(t) - \mathsf{P}(t)\mathrm{det}^{-2}\, I\left(\frac{c_1^2}{3} - c_2\right) - \mathrm{det}^{-3}\, I\left(\frac{c_1 c_2}{3} - \frac{2c_1^3}{27} - c_3 \det\, I\right),$$

и из (98) при $\mathbf{N} = 0$ (т. е. для свободного волчка) получаем

$$-\partial_t \mathsf{P}(t) + 2\Bigg[\mathsf{P}^3(t) - \mathsf{P}(t)\mathrm{det}^{-2}\, I\left(\frac{c_1^2}{3} - c_2\right) - \\ - \mathrm{det}^{-3}\, I\left(\frac{c_1 c_2}{3} - \frac{2c_1^3}{27} - c_3 \det\, I\right)\Bigg]^{1/2} = 0.$$

Последнее уравнение совпадет с уравнением для функции Вейерштрасса, если положить

$$4\left(\frac{c_1^2}{3} - c_2\right)\mathrm{det}^{-2}\, I = g_2, \quad 4\left(\frac{c_1 c_2}{3} - \frac{2c_1^3}{27} - c_3 \det\, I\right)\mathrm{det}^{-3}\, I = g_3.$$

■

Таким образом, уравнение (96), все члены которого являются ортогональными инвариантами, при $\mu = 0, 1, 2$ полностью описывает движение волчка. Зависимость от времени компонент угловой скорости волчка $\omega_j(t)$, $j = \overline{1,3}$, вытекает из (100) (т. е. из решения уравнения (98) и системы уравнений (ср. с (63_{4-6}))

$$\begin{aligned} &\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 = \boldsymbol{\omega}^2(t), \\ &I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2\mathsf{E}_{\rm rot}, \\ &I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L^2. \end{aligned} \quad (101)$$

Как и (63_{4-6}), решение системы уравнений (101) можно найти по формулам (75), поскольку определитель этой системы

$$\det[I_k^{l-1}]_{k,l=\overline{1,3}} = (I_3 - I_1)(I_3 - I_2)(I_2 - I_1) \neq 0.$$

Отличие заключается лишь в том, что коэффициенты системы уравнений (101) — главные моменты инерции I_1, I_2, I_3 — величины строго положительные, в то время как p_1, p_2, p_3 в уравнениях (63) могут иметь произволный знак.

Учитывая (93) и (94), для каждого значения $j = \overline{1,3}$ находим

$$\omega_j^2(t) \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}^2(t) & 2\mathsf{E}_{\rm rot} & L^2 & 1 \\ 2\mathsf{E}_{\rm rot} & L^2 & A + \boldsymbol{\omega}^2 \det I & I_j \\ L^2 & A + \boldsymbol{\omega}^2 \det I & B + \boldsymbol{\omega}^2 {\rm tr}\, I \det I & I_j^2 \\ -1 & -I_j & -I_j^2 & 0 \end{bmatrix} = [{\rm tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2)]^2, \tag{102}$$

причем, по определению канонического базиса [1], здесь, как и в формуле (1),

$$I_1 < I_2 < I_3, \quad \omega_3 = \Omega_{12} > 0, \quad \omega_2 = -\Omega_{13} < 0,$$

а знак элемента $\Omega_{23} = \omega_1$ совпадает со знаком инварианта ${\rm tr}\,(I\Omega I^2\Omega^2)$. Следовательно, формула (102) для каждого момента времени t позволяет однозначно выразить каждую из трех проекций вектора угловой скорости на главные оси инерции волчка $\omega_j(t)$ через ортогональные инварианты (90)–(92) и соответствующий главный момент инерции I_j, $j = \overline{1,3}$.

6. Таким образом, полиномиальный базис ортогональных инвариантов, построенный для тензора второго ранга общего вида $T_{kl} \neq T_{lk}$ (либо для пары симметрического и антисимметрического тензоров (S_{kl}, A_{kl}), $S_{kl} = S_{lk}, A_{kl} = -A_{lk}$), позволяет получить и использовать дополнительные (по сравнению с применявшимися ранее) условия, налагаемые на описывающие физическую систему динамические параметры требованием ортогональной инвариантности.

В случае барохронного течения идеального газа этот подход, в частности, приводит к построению интегрируемой системы дифференциальных уравнений, эквивалентной трехмерной нелинейной системе гидродинамических уравнений Эйлера, которая позволяет найти все элементы матрицы Якоби $[\partial_l u_k]$ и в результате полностью определить характер зависимости поля гидродинамической скорости от времени. Получающиеся при этом результаты, по нашему мнению, представляют и определенный самостоятельный интерес. Особенно интригующим выглядит совпадение динамики потенциального барохронного течения с законом (нерелятивистским) космологического расширения, если принять во внимание соответствие модели барохронного течения динамике бесконечной однородной сплошной среды в евклидовом пространстве. Весьма интересным представляется задача обобщения полученных результатов на релятивистский случай и на неевклидову геометрию, что, возможно, позволит учесть эффекты гравитации.

Применение развитого аппарата к описанию вращения твердого тела дает единое уравнение, содержащее закон изменения кинетической энергии, квадрата момента импульса и квадрата угловой скорости волчка.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Характер зависимости от времени матрицы Якоби, ее симметрической и антисимметрической частей, инвариантов, гидродинамической скорости и плотности идеального газа при потенциальном и соленоидальном (изобарическом) режимах барохронного течения идеального газа

Вид течения Физическая величина	Потенциальное, $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0$ $(t_0 \geqslant 0)$	Соленоидальное (изобарическое), $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$ $(b_0, b_2 \geqslant 0)$
$J(t, \mathbf{x}) = [\partial_k u_l(t, \mathbf{x})]$	$\|t + t_0\|^{-1} E_3$ $(t_0 > 0)$	$J(0, \mathbf{0}) - tJ^2(0, \mathbf{0})$.
$S(t, \mathbf{x}) = \left[u_{(i,j)}(t, \mathbf{x})\right]$	$\|t + t_0\|^{-1} E_3$	$S(0, \mathbf{0}) - t(S^2(0, \mathbf{0}) + A^2(0, \mathbf{0}))$.
$A(t, \mathbf{x}) = \left[u_{[i,j]}(t, \mathbf{x})\right]$	0	$A(0, \mathbf{0}) -$ $t\,(S(0, \mathbf{0})A(0, \mathbf{0}) + A(0, \mathbf{0})S(0, \mathbf{0}))$.
$\mathrm{tr} S^2$	$3\|t + t_0\|^{-2}$	$\gamma(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$
$\mathrm{tr} SA^2$	0	$\gamma'(t)/4 = b_1/4 + b_2 t/2$
$\mathrm{tr} S^3$	$3\|t + t_0\|^{-3}$	$-3\gamma'(t)/4 = -3b_1/4 - 3b_2 t/2$
$\mathrm{tr}(AS^2A^2S)$	0	$C_7 = \left\{ \left[(4b_0 b_2 - b_1^2)/16\right]^2 - (b_2/2)^3 \right\}^{1/2} =$ $= \mathrm{const}$
$\mathrm{tr}(S^2A^2)$	0	$b_2/2 - \gamma^2(t)/2 =$ $= b_2/2 - (b_0 + b_1 t + b_2 t^2)^2/2$
k_2	$3\|t + t_0\|^{-2} = S_2$	0
k_3	$\|t + t_0\|^{-3} = S_3$	0
S_2	$3\|t + t_0\|^{-2}$	$-\gamma(t)/2 = -(b_0 + b_1 t + b_2 t^2)/2$
S_3	$\|t + t_0\|^{-3}$	$\mathrm{tr}\, S^3/3 = -\gamma'(t)/4 = -b_1/4 - b_2 t/2$
$u_j(t, \mathbf{x}), j = \overline{1,3}$	$x_k \|t + t_0\|^{-1}$	$u_j(t, \mathbf{x}) = \Big(J_{jk}(0, \mathbf{0}) - tJ^2_{jk}(0, \mathbf{0})\Big) \times$ $\times (x_k - u_k^0 t) + u_j^0$
$\rho(t)$	$\rho_0 \|1 + t/t_0\|^{-3}$ $(t_0 \neq 0)$ $\rho_1 t^{-3}$ $(\rho_0 = +\infty, t_0 = 0)$	$\rho_0 = \mathrm{const} > 0$

Таблица 2. Соотношения между начальными значениями инвариантов различных степеней и элементами базиса инвариантов (2) при соленоидальном барохронном течении

$\mathrm{tr}\,(S^2A^2) = -b_0^2/2 + b_2/2$, $\quad$ $\mathrm{tr}\,(ASAS) = \mathrm{tr}\,(SASA) = b_0^2/2 - b_2$;

$\mathrm{tr}\,(SAS^2A) = -b_0 b_1/8$, $\quad$ $\mathrm{tr}\,(A^2S^3) = 3b_0 b_1/8$;

$\mathrm{tr}\,(SA^2SA^2) = b_0^3/4 - b_0 b_2/2 + b_1^2/16$, $\quad$ $\mathrm{tr}\,(S^2AS^2A) = b_0 b_2/2 - b_0^3/4 - b_1^2/8$;

$\mathrm{tr}\,(SA^2S^2A^2) = -3b_0^2 b_1/16 + b_1 b_2/8$, $\quad$ $\mathrm{tr}\,(SASASA^2) = \mathrm{tr}\,(SASA)\mathrm{tr}(SA^2) =$
$= b_0^2 b_1/16 - b_1 b_2/8$;

$$\mathrm{tr}\,(SASAS^2A^2) = tr\,(ASASA^2S^2) = \mathrm{tr}\,(ASAS)\mathrm{tr}\,(A^2S^2)/2 = \\ = 3b_0^2b_2/8 - b_0^4/8 - b_2^2/4,$$

$$\mathrm{tr}\,(SASASASA) = \mathrm{tr}\,(SA)^4 = (\mathrm{tr}\,(SASA))^2/2 = (b_0^2/2 - b_2)^2/2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lomidze I. R.* Criteria of Unitary and Orthogonal Equivalence of Operators // Bull. Acad. Sci. Georgia. 1991. V. 141, No 3. P. 481–483.
2. *Ломидзе И. Р.* О некоторых свойствах матрицы Вандермонда // Докл. расширенных заседаний семинара ИПМ ТГУ им. И. Н. Векуа. Тбилиси, 1986. Т. 2, № 3. С. 69–72.
3. *Lomidze I.* On Some Generalisations of the Vandermonde Matrix and Their Relations with the Euler Beta-function // Georgian Math. J. 1994. V. 1, No. 4. P. 405–417.
4. *Lomidze I.* Criteria of Unitary Equivalence of Hermitian Operators with Degenerate Spectrum // Georgian Math. J. 1996. V. 3, No. 2. P. 141–152; http//www.jeomj.rmi.acnet.ge/GMJ/
5. *Овсянников Л. В.* Изобарические движения газа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 10. С. 1792–1799.
6. *Ovsyannikov L. V., Chupakhin A. P.* // J. Nonlinear Math. Phys. 1995. V. 2, No. 3/4. P. 236–246.
7. *Чупахин А. П.* Алгебраические инварианты в задачах динамики жидкости и газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.
8. *Овсянников Л. В.* Симметрия барохронных движений газа // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, № 5. С. 1098–1109.
9. *Lagally M.* Vorlesungen über Vektor-rechnung. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, M.B.H., 1928 (рус. пер.: М. Лагалли. Векторное исчисление. М.–Л.: ОНТИ СССР, 1936).
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, 3-е изд., переработ. М.: Наука, 1986.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, 4-е изд. М.: Наука, 1988.
12. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. СМБ. М.: ГИФМЛ, 1962.
13. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. II. Теория поля, 7-е изд. М.: Наука, 1988.
14. *Гуревич Г. Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
15. *Климишин И. А.* Релятивистская астрономия. 2-е изд., переработ. и доп. М.: Наука, 1989.

16. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. 3-е изд. М.: Наука, 1989.

17. *Erdélyi A. et al.* // HTF. V. 3. N.Y.: McGraw-Hill Book Co., 1953 (рус. пер.: Г. Бейтмен, А. Эрдейи // ВТФ. Т. 3. М.: Наука, 1974).

Получено 26 февраля 2007 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 01.11.2007.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,37. Уч.-изд. л. 2,90. Тираж 315 экз. Заказ № 55936.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/