

P9-2008-16

А. М. Кондратенко*, М. А. Кондратенко*, Ю. Н. Филатов

РАСЧЕТ МОЩНОСТИ СПИНОВЫХ РЕЗОНАНСОВ
НА УСКОРИТЕЛЕ COSY

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

*ГОО «Заряд», Новосибирск

Кондратенко А. М., Кондратенко М. А., Филатов Ю. Н. P9-2008-16
Расчет мощности спиновых резонансов на ускорителе COSY

В работах [1,2] изучалось влияние rf-диполя на спиновое движение на ускорителе COSY (Юлих, Германия). Было обнаружено расхождение теоретически рассчитанной мощности спинового резонанса для пучка дейтронов с экспериментально наблюдаемым значением [2]. В данной работе показано, что расчет с помощью функции отклика позволяет объяснить расхождение экспериментальных данных с теоретическими расчетами мощностей спиновых резонансов, индуцированных модулированным радиальным магнитным диполем.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий им. В.И.Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

Kondratenko A. M., Kondratenko M. A., Filatov Yu. N. P9-2008-16
The Spin Resonance Strength Calculation at the COSY Accelerator

Papers [1,2] study the effect of an rf-dipole on spin motion at the COSY accelerator (Jülich, Germany). A difference between a theoretically calculated value of spin resonance strength for a deuteron beam and an experimentally obtained value was found [2]. This paper shows that the difference between the experimental data and the theoretical calculation of the strength of a spin resonance, induced by modulated radial magnetic fields, can be explained by using the spin response function.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время ведутся исследования с поляризованными пучками дейтронов и протонов на ускорительном комплексе COSY (Юлих, Германия). Одним из направлений исследований является изучение методов управления вектором поляризации пучка с помощью радиальных и продольных магнитных полей, которые модулируются rf-диполями и rf-соленоидами [1,2]. Воздействие на спин происходит в области индуцированного спинового резонанса

$$\nu = k \pm \nu_{rf},$$

где $\nu = \gamma G = \gamma(g-2)/2$ — приведенная спиновая частота; ν_{rf} — приведенная частота модуляции поля rf-диполя или rf-соленоида.

В результате исследования было получено, что теоретически рассчитанная мощность резонанса для пучка дейтронов значительно превышала экспериментальное значение для радиального rf-диполя [2]. В данной статье показано, что экспериментальные данные согласуются с теоретическими расчетами мощности спинового резонанса, индуцированного модулированным магнитным полем.

1. ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ RF-РЕЗОНАНСА В COSY

На рис. 1 показан план ускорительного комплекса COSY. Кольцо COSY состоит из двух арок, которые соединены между собой двумя прямолинейными участками. Магнитная оптика в прямолинейных участках настраивается таким образом, чтобы набег бетатронных фаз в вертикальном и горизонтальном направлениях был равен 2π . При таком выборе бетатронное движение в арках эквивалентно движению в ускорителе с такими же арками без прямолинейных промежутков, бетатронные частоты $\nu_{x,z}^*$ в котором связаны с частотами реального ускорителя соотношением $\nu_{x,z}^* = \nu_{x,z} - 2$. Также на рис. 1 показано место размещения rf-диполя. В экспериментах rf-диполь был расположен на расстоянии 53,5 м от места инжекции.

Во время эксперимента использовалось следующее оборудование: rf-диполь со среднеквадратичным значением интеграла поля $\int B_{rms} dl = 0,6$ Тл·мм;

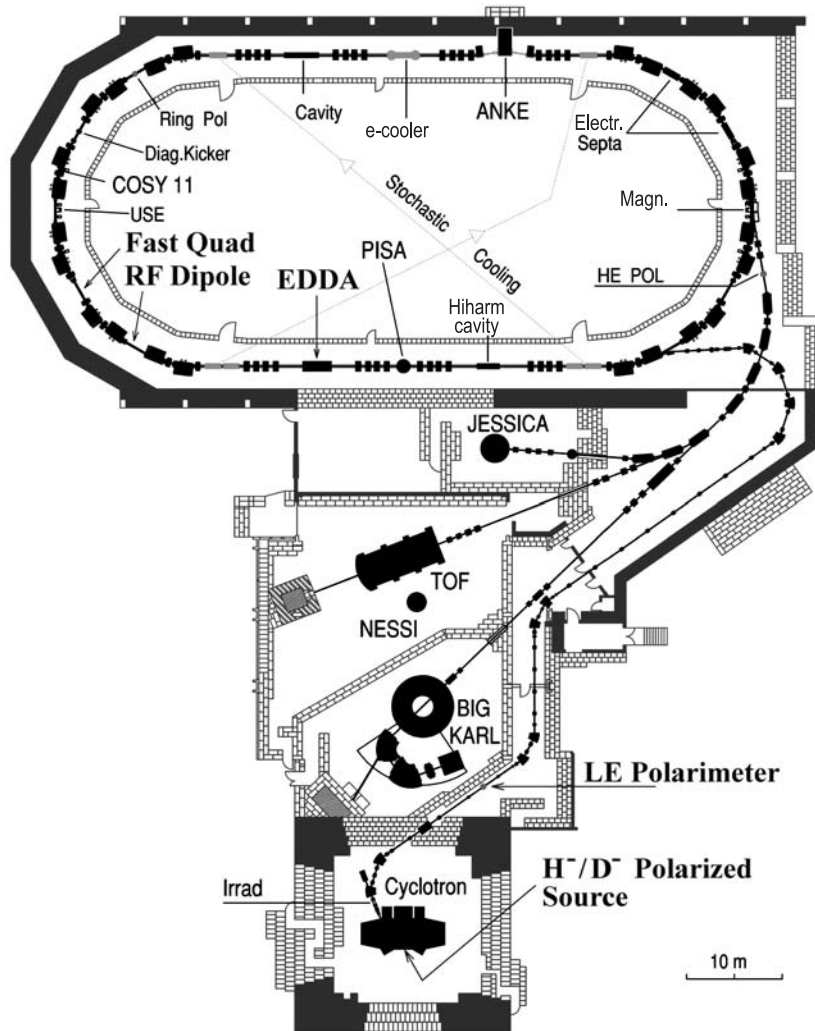


Рис. 1. План ускорительного комплекса COSY

поляриметр на низких энергиях (LEP), с помощью которого измерялась поляризация перед инжекцией пучка в кольцо COSY, и детектор EDDA, с помощью которого измерялась поляризация пучка до и после управления rf-диполем внутри кольца.

Эксперимент по измерению мощности индуцированного резонанса заключался в следующем. Поляризованный пучок дейтронов ускоряли до энергии 1,85 ГэВ/с, чему соответствует спиновая частота $\nu = G\gamma = -0,2$. Далее

при помощи гf-диполя индуцировали спиновый резонанс $\nu = -\nu_{\text{rf}}$. Измерение мощности резонанса производили по результатам измерения начальной P_i и конечной P_f степеней поляризации в зависимости от времени пересечения спинового резонанса при фиксированном отклонении от резонансной частоты $\pm\Delta f/2 = \pm 150$ Гц, которая при этом вычисляется по модифицированной Froissart-Stora (FS) формуле [3, 4]:

$$P_f = P_i \left\{ (1 + \hat{\eta}) \exp \left[-\frac{(\pi w_{\text{FS}} f_c)^2}{\Delta f / \Delta t} \right] - \hat{\eta} \right\}, \quad (1.1)$$

где $\hat{\eta}$ — параметр, ограничивающий степень переворота спина после пересечения резонанса; f_c — частота обращения ускорителя. Пересечение резонанса обеспечивалось изменением частоты гf-диполя.

Полученный экспериментальный результат w_{FS} сравнивали с теоретическим расчетом мощности w_{rf} . Мощность индуцированного резонанса при этом рассчитывалась по формуле

$$w_{\text{rf}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \frac{1 + G\gamma}{B\rho} \int B_{\text{rms}} dl, \quad (1.2)$$

где $B\rho$ — магнитная жесткость ускорителя, которая равна 6,17 Тл · м.

После обработки экспериментальных данных для мощности резонанса, экстраполированной по формуле (1.1), было получено значение $w_{\text{FS}} = 1,39 \cdot 10^{-6}$, в то время как значение мощности резонанса, рассчитанное по формуле (1.2), равно $w_{\text{rf}} = 8,8 \cdot 10^{-6}$.

2. МОЩНОСТЬ УЕДИНЕННОГО РЕЗОНАНСА, ИНДУЦИРОВАННОГО RF-ДИПОЛЕМ

Отметим, что вычисление мощности спинового резонанса по формуле (1.2) учитывает лишь прямое действие гf-диполя, которое не является определяющим.

В общем случае, при отсутствии продольного поля B_y вдоль равновесной орбиты, мощность уединенного спинового резонанса (фурье-гармоника спинового возмущения) вычисляется по формуле [5–10]:

$$w_k = \frac{1}{R} \left\langle \left[\nu z'' - i G K_z z' - i (1 + G) K'_z z \right] e^{i\nu\Theta} \right\rangle, \quad (2.1)$$

где $K_z = B_z / \langle B_z \rangle$ — безразмерная кривизна равновесной плоской орбиты; $2\pi R$ — длина равновесной орбиты; скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по азимуту частицы θ ; z — вертикальное отклонение частицы от плоскости

орбиты; $z' \equiv \frac{dz}{d\theta}$, $z'' \equiv \frac{d^2z}{d\theta^2}$ — соответствующие производные вертикального отклонения по азимуту; $\Theta = \int_0^\theta K_z d\theta$ — магнитный азимут частицы.

Усреднение по азимуту в формуле (2.1) производится при значении спиновой частоты $\nu = \nu_k$, где ν_k — резонансная частота, равная целочисленной комбинации из частот орбитального движения.

Важным моментом при вычислении средних значений является то, что интегрирование в общем случае надо проводить в течение многих оборотов частиц в ускорителе (за исключением целых спиновых резонансов при $\nu = k$). Результат усреднения можно получить интегрированием по одному обороту ускорителя, если не учитывать «нерезонансную» гармонику возмущения. Вклад от нерезонансной гармоники при интегрировании уменьшается пропорционально числу оборотов и может быть отброшен сразу. Таким образом, заменяя формально вертикальное отклонение z на z_{res} , получаем формулу для вычисления средних значений интегрированием лишь по одному обороту ускорителя:

$$\langle A(\theta) e^{i\nu\Theta} \rangle = \langle A_{\text{res}}(\theta) e^{i\nu\Theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\text{res}}(\theta) e^{i\nu\Theta} d\theta. \quad (2.2)$$

Вывод выражения для мощности резонанса в работах [6–10] производился в «натуральной» системе координат (см. А.5), связанной с точным направлением скорости, в которой спиновое возмущение \vec{w} (отклонение угловой скорости вращения спина относительно равновесной частицы) равно (см. Приложение):

$$\vec{w} = \left\{ \nu \frac{z''}{R}; \quad G K_z \frac{z'}{R} + (1+G) K'_z \frac{z}{R}; \quad \nu \left(\frac{\Delta\gamma}{\gamma} K_z - \frac{x''}{R} \right) \right\}. \quad (2.3)$$

Компоненты спинового возмущения в (2.3) можно выразить и через значения магнитных полей на точной траектории частицы, если учесть, что величина $z'' = RB_x / \langle B_z \rangle$ связана с радиальной составляющей магнитного поля B_x , значение $\langle B_z \rangle K_z z' / R$ есть проекция вертикального поля на направление вдоль точной скорости, а $\langle B_z \rangle K'_z z / R$ — продольное поле B_y на краях поворотных магнитов.

Подчеркнем, что мощность резонанса является физической величиной, которая характеризует устойчивость спинового движения в кольце ускорителя, и ее значение не зависит от системы координат, в которой она вычисляется.

Используя тождество, справедливое при $\nu = \nu_k$:

$$\left\langle \frac{d}{d\theta} [z' e^{i\nu\Theta}] \right\rangle = \left\langle [z'' + i\nu K_z z'] e^{i\nu\Theta} \right\rangle = 0, \quad (2.4)$$

можно преобразовать выражение для мощности резонанса (2.1) к виду, приведенному в работе E. D. Courant и R. D. Ruth [11]:

$$w_k = \frac{1}{R} \left\langle \left[(1 + \nu) z'' + i(1 + \nu) K_z z' - i(1 + G) (K_z z)' \right] e^{i\nu\Theta} \right\rangle. \quad (2.5)$$

Вывод выражения для мощности резонанса (2.5) производился в «ускорительной» системе координат (см. А.3), связанной с плоской равновесной орбитой пучка, в которой спиновое возмущение \vec{w} равно

$$\vec{w} = \left\{ (1 + \nu) \frac{z''}{R}; \quad (1 + G) \left(K_z \frac{z}{R} \right)' - (1 + \nu) K_z \frac{z'}{R}; \right. \\ \left. - (1 + \nu) \frac{x''}{R} + \frac{\Delta\gamma}{\gamma} \nu K_z \right\}. \quad (2.6)$$

Можно исключить слагаемое, содержащее производную z'' в выражении (2.1) или (2.5). Учитывая соотношение (2.4), получим

$$w_k = -\frac{i}{R} \left\langle \left[(\nu^2 + G) K_z z' + (1 + G) K_z' z \right] e^{i\nu\Theta} \right\rangle. \quad (2.7)$$

Применяя тождество, аналогичное (2.4),

$$\left\langle \frac{d}{d\theta} \left[K_z z e^{i\nu\Theta} \right] \right\rangle = \left\langle \left[(K_z' + i\nu K_z^2) z + K_z z' \right] e^{i\nu\Theta} \right\rangle = 0, \quad (2.8)$$

получим выражение для мощности резонанса, которое не содержит производных вертикального отклонения:

$$w_k = \frac{1}{R} \left\langle \left[\nu(\nu^2 + G) K_z^2 + i(\nu^2 - 1) K_z' \right] z e^{i\nu\Theta} \right\rangle. \quad (2.9)$$

Как видим из формул (2.4) и (2.8), существует жесткая связь между вкладом в мощность резонанса от радиального поля, от продольной проекции поля поворотных магнитов и от продольного поля, возникающего на краях поворотных магнитов:

$$\langle z'' e^{i\nu\Theta} \rangle = -i\nu \langle K_z z' e^{i\nu\Theta} \rangle = i\nu \langle K_z' z e^{i\nu\Theta} \rangle - \nu^2 \langle K_z^2 z e^{i\nu\Theta} \rangle. \quad (2.10)$$

Точно так же, как условным является разделение на прямое действие rf-диполя и индуцированное, условным является разделение на воздействие отдельных компонент возмущения. Мощность спинового резонанса является интегральной характеристикой спинового движения, определяющей жесткую связь между вкладом отдельных компонент магнитного поля. Более того, разделение вклада отдельных компонент магнитного поля не инвариантно и

зависит от системы координат, в которой проводится анализ. Так, в традиционной ускорительной системе координат вклад радиальной компоненты магнитного поля пропорционален фактору $(1 + \nu)$, в то время как в натуральной системе координат он пропорционален ν . Лишь принцип «простоты» уравнений может выделить более удобную систему координат, используемую при расчетах мощности спинового резонанса.

Учитывая сказанное, можно говорить о вкладе одной компоненты магнитного поля в предельных ситуациях. Например, при $\nu \gg 1$ основной вклад в мощность спинового резонанса дает радиальная компонента магнитного поля

$$w_k \approx \frac{\nu}{R} \langle z'' e^{i\nu\Theta} \rangle. \quad (2.11)$$

В этом предельном случае, учитывая соотношения (2.10), можно также утверждать, что основной эффект связан с компонентой вертикального поля вдоль скорости:

$$w_k \approx -\frac{i\nu^2}{R} \langle K_z z' e^{i\nu\Theta} \rangle. \quad (2.12)$$

Другой пример приведем при $\nu \rightarrow 0$. В этом случае основной вклад дает продольное поле на краях поворотных магнитов:

$$w_k \approx -\frac{i}{R} \langle K'_z z e^{i\nu\Theta} \rangle \rightarrow -\frac{i}{R} \langle K'_z z \rangle. \quad (2.13)$$

Однако с тем же основанием, используя соотношения (2.10), мы можем утверждать, что мощность спинового резонанса при достаточно малом значении ν определяется радиальной компонентой поля с множителем $-1/\nu$ ($\langle K'_z z \rangle \neq 0$):

$$w_k \approx -\frac{1}{\nu R} \langle z'' e^{i\nu\Theta} \rangle. \quad (2.14)$$

Мы можем объединить эти два предельных случая, и расчет по формуле

$$w_k \approx \left(\nu - \frac{1}{\nu} \right) \frac{1}{R} \langle z'' e^{i\nu\Theta} \rangle \quad (2.15)$$

будет правильным с точностью $\sim \nu$ при малых ν и с точностью $\sim 1/\nu$ при больших значениях ν . Ошибка в вычислениях мощности спинового резонанса по формуле (2.15) может быть значительной в случае, когда $\nu \sim 1$. Отметим также и случай, когда $\nu \rightarrow 0$, а гГ-диполь расположен в области орбиты, в которой основной вклад краевого продольного поля скомпенсирован: $\langle K'_z z \exp(i\nu\Theta) \rangle \rightarrow 0$. В этой ситуации формулы (2.13), (2.14) и (2.15) не верны, а мощность резонанса будет стремиться к нулю вместе с ν как $\nu G = \gamma G^2$.

При использовании вышеприведенных формул следует иметь в виду, что существует ограничение снизу при стремлении ν к нулю: $\nu \gg |w_k|$, которое означает, что действие возмущающих полей на движение спина мало в течение времени оборота частиц в ускорителе.

Использование эквивалентных формул (2.1), (2.5), (2.7), (2.9) при расчете мощности резонанса w_k определяется лишь удобством вычислений и приводит к одному результату.

3. О «ПРЯМОМ» ВОЗДЕЙСТВИИ РАДИАЛЬНОГО RF-ДИПОЛЯ

Как уже отмечалось, выделение в мощности спинового резонанса эффекта прямого воздействия rf-диполя является условным. Прямому действию короткого участка с радиальным rf-диполем неизбежно сопутствует так называемое «индуцированное» действие радиального поля, возникающего в квадруполях магнитной структуры ускорителя.

Для примера рассмотрим простую задачу о спиновом резонансе $\nu = k - \nu_{\text{rf}}$, индуцированном локальным rf-диполем в круглом ускорителе со сглаженной фокусировкой:

$$K_z = 1, \quad \Theta = \theta, \quad \beta = \frac{R}{\nu_z} = \text{const}, \quad (3.1)$$

где β — бета-функция вертикальных бетатронных колебаний.

Найдем решение уравнения для вертикального отклонения, индуцированного радиальным диполем длиной $\Delta\theta \rightarrow 0$, расположенным в начале координат $\theta = 0$:

$$z'' + \nu_z^2 z = R \varphi_x \cos(\nu_{\text{rf}} \theta) \sum_k \delta(\theta - 2\pi k), \quad (3.2)$$

где φ_x — максимальный угол поворота радиальным диполем:

$$\varphi_x = \frac{B_x \Delta\theta}{\langle B_z \rangle} = \frac{1}{B\rho} \int B dl = \frac{\sqrt{2}}{B\rho} \int B_{\text{rms}} dl. \quad (3.3)$$

Здесь $B_x = \vec{B} \vec{e}_x$, $B_z = \vec{B} \vec{e}_z$, \vec{e}_x и \vec{e}_z — соответственно радиальный и вертикальный орты в ускорительной системе координат.

На интервале $0 < \theta < 2\pi$ (вне зоны расположения радиального диполя) имеем следующее вынужденное решение уравнения (3.2):

$$z = z_+ + z_- = z_+ + z_+^*, \quad (3.4)$$

$$\frac{z_+}{R} = \frac{\varphi_x}{8\nu_z} e^{i\pi\nu_{\text{rf}}} \left[\frac{e^{i\nu_z(\pi-\theta)}}{\sin \pi(\nu_z + \nu_{\text{rf}})} + \frac{e^{-i\nu_z(\pi-\theta)}}{\sin \pi(\nu_z - \nu_{\text{rf}})} \right].$$

Здесь z_+ — резонансная гармоника вертикального отклонения со свойством

$$z_+(\theta + 2\pi) = z_+(\theta) e^{i 2\pi \nu_{rf}}, \quad (3.5)$$

с помощью которого возможно продлить z_+ на всю область значений азимута θ .

Отметим также, что отклонение z остается непрерывным при пролете короткого участка с радиальным диполем, в то время как отклонение направления скорости z'/R испытывает скачок и вызывает искажение орбиты в квадруполях.

Вычислим следующие интегралы по обороту в ускорителе ($\nu = \nu_k = k - \nu_{rf}$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} z_+'' e^{i \nu_k \theta} d\theta &= \frac{1}{2\pi R} \int_0^{\Delta\theta} z_+'' e^{i \nu_k \theta} d\theta - \frac{\nu_z^2}{2\pi R} \int_{\Delta\theta}^{2\pi} z_+ e^{i \nu_k \theta} d\theta = \\ &= \frac{\varphi_x}{4\pi} + \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{\nu_z^2}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2}, \quad (3.6) \\ \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} z_+' e^{i \nu_k \theta} d\theta &= \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{i G \gamma}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2}. \end{aligned}$$

Из формулы для мощности резонанса (2.5), выписанной в традиционной ускорительной системе, с помощью интегралов (3.6) окончательно получим:

$$\begin{aligned} w_k &= (1 + G\gamma) \frac{\varphi_x}{4\pi} + (1 + G\gamma) \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{\nu_z^2}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2} + i (G\gamma - G) \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{i \gamma G}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2} = \\ &= \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{\gamma G (\gamma^2 G^2 + G)}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2} = \frac{\varphi_x}{4\pi} \frac{\nu (\nu^2 + G)}{\nu^2 - \nu_z^2}. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Точно такой же результат (3.7) получается и для спинового резонанса $\nu_k = \nu_{rf} + k$. При этом в интегралах (3.6) следует заменить z_+ на $z_- = z_+^*$.

Первое слагаемое в (3.7) соответствует «прямому» действию rf-диполя, которое учитывается при вычислении по формуле (1.2). Второе и третье слагаемые обязаны учету магнитных полей, индуцированных rf-диполем вдоль всего кольца ускорителя. При приближении к внутреннему резонансу $\nu_k = \gamma G \rightarrow \nu_z$ эти слагаемые имеют растущие множители и превышают по величине прямое действие rf-диполя. При малых значениях γG «прямое» действие rf-диполя компенсируется радиальным полем, индуцированным вдоль оставшегося кольца (вторым слагаемым).

Таким образом, прямое воздействие гf-диполя не может рассматриваться отдельно от индуцированного этим же диполем радиального поля в квадруполях магнитной структуры ускорителя.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОЩНОСТИ СПИНОВОГО РЕЗОНАНСА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ОТКЛИКА

Найдем мощность гf-резонанса в ускорителе с произвольной фокусировкой. Для этого следует найти вынужденное решение уравнения для вертикального отклонения от плоскости орбиты z_s , индуцированного полем возмущения Q :

$$z_s'' + g_z z_s = Q R. \quad (4.1)$$

Это решение может быть выражено через собственные решения однородного уравнения, то есть через функцию Флоке $f_z(\theta)$. Функция Флоке обладает известным свойством [12]:

$$f_z(\theta + 2\pi) = e^{i 2\pi\nu_z} f_z(\theta), \quad (4.2)$$

где ν_z — приведенная частота вертикальных бетатронных колебаний. Комплексное решение Флоке удовлетворяет однородному уравнению

$$f_z'' + g_z f_z = 0 \quad (4.3)$$

и может быть выражено через β -функцию:

$$f_z(\theta) = \sqrt{\frac{\beta_z(\theta)}{R}} \exp\left(i \int_0^\theta \frac{R}{\beta_z} d\theta\right). \quad (4.4)$$

Из формулы (4.4) следует

$$\nu_z = \langle R/\beta_z \rangle. \quad (4.5)$$

С помощью функции Флоке вынужденное решение уравнения (4.1) для вертикального отклонения запишется следующим образом:

$$z_s = \frac{R}{2i} \left[f_z \int_{-\infty}^\theta Q f_z^* d\theta - f_z^* \int_{-\infty}^\theta Q f_z d\theta \right] = R \operatorname{Im} \left(f_z \int_{-\infty}^\theta Q f_z^* d\theta \right). \quad (4.6)$$

Решение (4.6) содержит лишь спектр частот возмущения $Q(\theta)$. Если возмущение $Q(\theta)$ можно разбить на две части $Q = Q_+ + Q_-$ со свойствами:

$$Q_+(\theta + 2\pi) = e^{i 2\pi\nu_{\text{гf}}} Q_+(\theta), \quad Q_-(\theta + 2\pi) = e^{-i 2\pi\nu_{\text{гf}}} Q_-(\theta), \quad (4.7)$$

то, соответственно, и искажение орбиты z_s можно разбить на аналогичные слагаемые с аналогичными свойствами (4.7), точно так же, как и в круглом ускорителе (см. 3.4).

Для вычисления мощности спинового резонанса найденное решение следует подставить в формулу (2.7) и усреднить по многим оборотам частиц. Лишь выделение резонирующей гармоники возмущения позволяет свести вычисления к интегрированию по одному обороту.

Можно получить более прямую формулу для вычисления мощности спинового резонанса $\nu = \nu_k$ с помощью периодической функции отклика $F(\theta)$ [7–10]. Интегрируя (2.7) по частям и используя формулу (4.6) для вертикального отклонения, получаем

$$w_k = \langle Q F e^{i\nu_k \Theta} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{\text{res}} F e^{i\nu_k \Theta} d\theta, \quad (4.8)$$

где функция $F(\theta) = F(\theta + 2\pi)$ вычисляется по формуле

$$F = \frac{e^{-i\nu\Theta}}{2} \left[f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} [(\nu^2 + G) f_z' K_z + (1 + G) f_z K_z'] e^{i\nu\Theta} d\theta - \right. \\ \left. - f_z \int_{-\infty}^{\theta} [(\nu^2 + G) f_z^* K_z + (1 + G) f_z^* K_z'] e^{i\nu\Theta} d\theta \right] \quad (4.9)$$

и определяется магнитной структурой кольца. Функция отклика является такой же характеристикой спинового движения, как и функция Флоке f_z для вертикального бетатронного движения.

Если исходить из разных систем координат (которым соответствуют формулы (2.1), (2.5), (2.7), (2.9)), можно выписать соответствующие формулы для функции отклика, которые численно совпадают с (4.9). Например, аналогичная формула имеет вид

$$F = \frac{e^{-i\nu\Theta}}{2i} \left[f_z \int_{-\infty}^{\theta} [\nu(\nu^2 + G) K_z^2 + i(\nu^2 - 1) K_z'] f_z^* e^{i\nu\Theta} d\theta - \right. \\ \left. - f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} [\nu(\nu^2 + G) K_z^2 + i(\nu^2 - 1) K_z'] f_z e^{i\nu\Theta} d\theta \right]. \quad (4.10)$$

Для локального диполя, расположенного в месте орбиты с азимутом θ_{rf} , имеем

$$Q = \varphi_x \cos(\nu_{\text{rf}} \theta) \sum_k \delta(\theta - \theta_{\text{rf}} - 2\pi k), \quad w_{\text{rf}} = \frac{\varphi_x}{4\pi} |F(\theta_{\text{rf}})|. \quad (4.11)$$

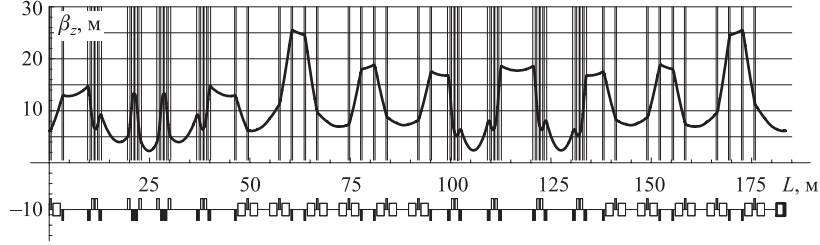


Рис. 2. β_z -функция в COSY

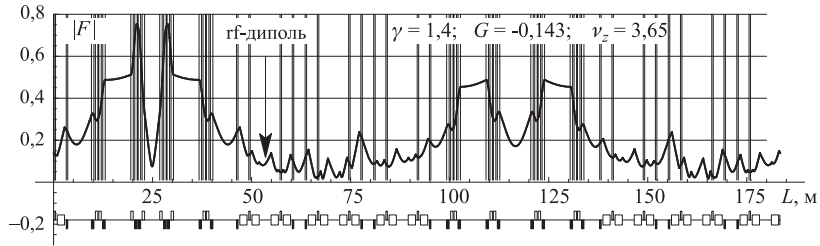


Рис. 3. Модуль функции отклика в COSY

В круглом ускорителе со сглаженной фокусировкой функция отклика равна ($f_z = 1/\sqrt{\nu_z} \exp(i \nu_z \theta)$)

$$F = \frac{\gamma G(\gamma^2 G^2 + G)}{\gamma^2 G^2 - \nu_z^2} = \frac{\nu(\nu^2 + G)}{\nu^2 - \nu_z^2}. \quad (4.12)$$

Подставив значение (4.12) в формулу (4.11), получим значение мощности резонанса (3.7).

На рис. 2 и 3 приведены графики для вертикальной β_z -функции и модуля функции отклика $|F|$ для дейтронов в структуре COSY в зависимости от координаты вдоль равновесной орбиты. При расчетах вертикальной β_z -функции и модуля функции отклика предполагалось, что поворотные магниты имеют резкие края.

Подставив значения интегралов полей, используемых в эксперименте, получим следующую формулу для расчета:

$$w_{rf} = 11,12 \cdot |F(\theta_{rf})| \cdot 10^{-6}. \quad (4.13)$$

Значение модуля функции отклика в месте расположения rf-диполя примерно равно 0,09, и получаем, что значение мощности rf-резонанса равно $w_{rf} = 10^{-6}$.

Отличие полученного результата от экспериментального вполне объясняется выбранным приближением при расчетах. Учет «выпадения» магнитного

поля на краях поворотных магнитов, а также конечность длины гГ-диполя могут изменить полученное значение мощности резонанса (для примера, значение модуля функции отклика в пустом промежутке, где установлен гГ-диполь, изменяется в интервале от 0,09 до 0,15).

Важно отметить, что функция отклика дейтронов при малых энергиях ($\nu = \gamma G \ll 1$) в основном определяется продольным полем на краях поворотных магнитов $B_y = \langle B_z \rangle K'_z z$ (или компонентой магнитного поля диполей на точное направление скорости):

$$F \approx i F_0, \quad F_0 = \text{Im} \left(f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} K'_z f_z d\theta \right) = -\text{Im} \left(f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} K_z f'_z d\theta \right). \quad (4.14)$$

Модуль функции отклика F почти во всех точках определяется значением $|F_0|$. Исключением являются точки, в которых $F_0(\theta) = 0$ и в которых модуль функции отклика пропорционален ν . Формула (4.14) позволяет вычислять функцию отклика с точностью $\sim \nu$. Однако при расположении гГ-диполя в точках орбиты, в которых $F_0(\theta_{\text{rf}}) = 0$, требуется повысить точность вычисления. Можно пользоваться формулой (2.15), которая обязана резонансной гармонике продольного поля, возникающей на краях поворотных магнитов с той условностью, о которой сказано выше.

При этом приближенная функция отклика, с точностью порядка ν^2 , примет вид

$$F \approx \frac{e^{-i\nu\Theta}}{2} \left[f_z^* \int_{-\infty}^{\theta} f_z K'_z e^{i\nu\Theta} d\theta - f_z \int_{-\infty}^{\theta} f_z^* K'_z e^{i\nu\Theta} d\theta \right]. \quad (4.15)$$

Для обсуждаемых экспериментов в COSY точность вычисления по формуле (4.15) составляет несколько процентов.

Именно такая ситуация в эксперименте в COSY. В выбранном месте расположения гГ-диполя ($L = 53,5$ м) функция отклика пропорциональна аномальной части гиромагнитного отношения G и при $G \rightarrow 0$ величина $|F(\theta_{\text{rf}})| \rightarrow 0$. Однако это не так, если гГ-диполь расположен в других местах орбиты.

Для сравнения на рис. 4 приведен график модуля величины F_0 , на котором видим, что предельная функция отклика F_0 при $L = 53,5$ м стремится к нулю. В других местах орбиты функция отклика F практически совпадает с предельной функцией F_0 .

Интересно проследить за слагаемым

$$w_1 = \frac{1}{R} \langle \nu z' e^{i\nu\Theta} \rangle, \quad (4.16)$$

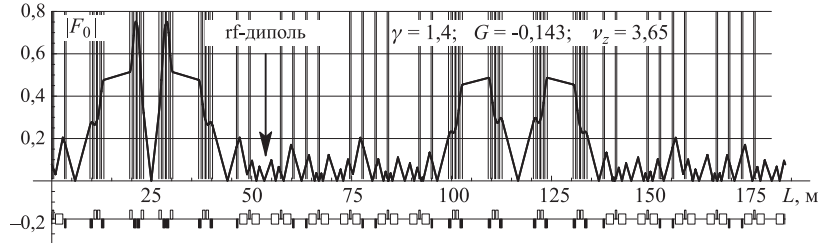


Рис. 4. Модуль предельной функции отклика для гипотетической частицы в COSY

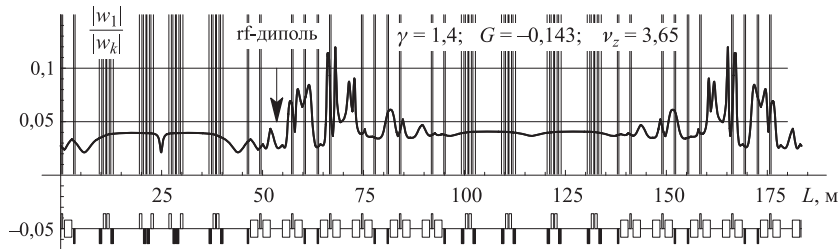


Рис. 5. Доля в мощности резонанса, обязанная радиальному полю, в зависимости от места расположения rf-диполя в кольце COSY

учитывающим вклад радиального поля в натуральной системе координат в полное значение мощности резонанса (2.1). На рис.5 показано отношение $|w_1|/|w_k|$ в зависимости от места расположения rf-диполя, из которого следует, что «вклад радиального» поля в мощность резонанса при расположении rf-диполя в любом месте орбиты мал (менее 12%). Как следует из формулы (2.15), отношение $|w_1|/|w_k|$ при $\nu \rightarrow 0$ составляет примерно величину $\nu^2 = 0,04$. Отклонение от указанной величины происходит в местах, где вклад в мощность резонанса от краевых продольных полей стремится к нулю и использование формулы (2.15) становится некорректным.

В заключение отметим, что функция отклика позволяет легко находить мощность спинового резонанса для любого количества rf-диполей. При этом мощность rf-резонанса определяется не только модулем функции отклика, но и ее фазой. Становится реальной задача эффективного воздействия на спиновое движение при условии компенсации резонансного возбуждения вертикального движения с помощью нескольких rf-диполей.

5. МОЩНОСТЬ РЕЗОНАНСА, ИНДУЦИРОВАННОГО RF-ДИПОЛЕМ, ВБЛИЗИ ВНУТРЕННЕГО РЕЗОНАНСА

В работе [2] измерялась зависимость мощности rf-резонанса от значения вертикальной бетатронной частоты ν_z при приближении к внутреннему

резонансу:

$$\nu_k = kN \pm \nu_z^* = kN \pm (\nu_z - 2), \quad (5.1)$$

где N — количество суперпериодов, которое при значении вертикальной бетатронной частоты $\nu_z = 3,6$ равно 6.

Функцию отклика (4.9) в пределе при приближении к внутреннему резонансу ($\nu \rightarrow \nu_k$) можно выразить через значение мощности этого резонанса $|w_k^{\text{intr}}|$ (2.7):

$$|F| \rightarrow \frac{R|f_z|}{2|a_z|} \frac{|w_k^{\text{intr}}|}{|\nu - \nu_k|}, \quad (5.2)$$

где амплитуда бетатронных колебаний a_z определяется нормализованным эмиттансом пучка ϵ_N :

$$|a_z| = \sqrt{\frac{\epsilon_N R}{4\pi(\beta\gamma)}}. \quad (5.3)$$

Следовательно, мощность gf-резонанса в пределе $\nu \rightarrow kN \pm (\nu_z - 2)$ может быть выражена через мощность ближайшего внутреннего спинового резонанса в соответствии с результатом S. Y. Lee (см. (16) и (17) в работе [13]):

$$|w_{\text{rf}}| \rightarrow \frac{\varphi_x}{8\pi} \frac{R|f_z|}{|a_z|} \frac{|w_k^{\text{intr}}|}{|\nu - \nu_k|}. \quad (5.4)$$

Использование соотношения (5.4) вместо общей формулы (4.11) вблизи несуперпериодных резонансов с малой мощностью w_m ($\nu_m = m \pm \nu_z^*$, при $m \neq kN$) является проблематичным, так как это соотношение справедливо лишь в узкой полосе по $\Delta\nu = |\nu - \nu_m|$:

$$\Delta\nu \ll \left| \frac{w_m}{w_k^{\text{intr}}} \right|. \quad (5.5)$$

В указанной узкой полосе (5.5) требуется проводить более точный анализ.

Именно такая ситуация характерна для дейтронов в структуре COSY при $\nu = -0,2$. Ближайший резонанс $\nu_k = \nu_z - 4$ является несуперпериодным с достаточно малой мощностью, при этом ближайшим суперпериодным является резонанс $\nu_k^{\text{intr}} = \nu_z - 2$ с достаточно большой мощностью. Соотношение (5.4) будет справедливым лишь в узкой полосе $\Delta\nu \ll 0,01$.

На рис. 6 приведены графики расчета мощности gf-резонанса. Сплошная линия соответствует расчету мощности резонанса по общей формуле (4.11) (при отсутствии импульсного разброса), пунктирная линия соответствует расчету по приближенной формуле (5.4). На графике также присутствуют точки, которые соответствуют экспериментальным результатам.

Видим, что данные находятся в удовлетворительном согласии с опытом. Как уже отмечалось выше, расчет по приближенной формуле (5.4) совпадает с расчетом по общей формуле (4.11) лишь в узкой полосе. Отметим,

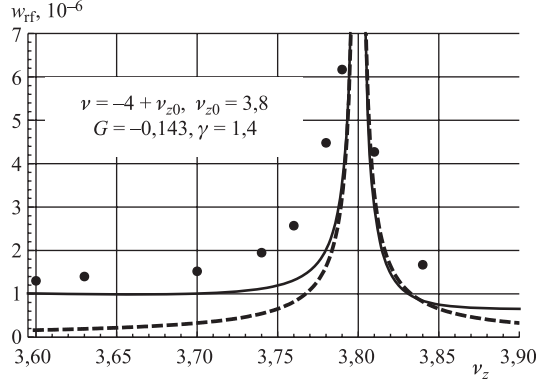


Рис. 6. Мощность rf-резонанса индуцированного вблизи резонанса $\nu = \nu_{z0} - 4$ в зависимости от вертикальной бетатронной частоты ν_z . Сплошная линия соответствует мощности резонанса w_{rf} по (4.11), пунктирная линия — по (5.4). Точки соответствуют экспериментальным результатам

что эксперимент происходил при выключенном охлаждении пучка. Отличие экспериментальных значений в первом приближении объясняется неучтенной при расчетах коррекцией магнитной структуры COSY, при которой проводились эксперименты. Следует учесть реальную длину rf-диполя, фазовый разброс частиц в густке, разброс отстройки спинового резонанса как по энергии, так и из-за хроматичности вертикальных бетатронных колебаний. В реальном ускорителе принципиальным может быть учет медленной синхротронной модуляции фазы и энергии частиц. Неточность может вносить также обработка экспериментальных результатов по модифицированной FS-формуле (1.1). При приближении частоты прецессии к внутреннему резонансу, а также к целому или полужелому значению, необходимо проанализировать задачу о пересечении «сдвоенных» (неизолированных) резонансов.

ПРИЛОЖЕНИЕ. СПИНОВОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ В НАТУРАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Текст данного приложения основывается на работах [6–10] и др.

В лабораторной системе координат уравнение Томаса–ВМТ выглядит следующим образом [14, 15]:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} \equiv \dot{\vec{S}} = [\vec{\Omega} \times \vec{S}], \quad \vec{\Omega} = -\frac{e}{\gamma m} \left[(1 + \nu)\vec{B}_T + (1 + G)\vec{B}_L \right], \quad (\text{A.1})$$

где \vec{B}_T и \vec{B}_L — поперечная и продольная компоненты магнитного поля от-

носителем точной скорости движения частицы \vec{v}

$$\vec{B}_L = (\vec{B} \vec{\tau}) \vec{\tau}, \quad \vec{B}_T = \vec{B} - \vec{B}_L, \quad \vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}. \quad (\text{A.2})$$

Если движение спина описывать относительно «натуральной» системы ортов, связанной с точным направлением скорости, мы должны вычесть скорость вращения «натурального» базиса относительно неподвижной системы координат. Натуральный базис, кроме направления по точной скорости, требует определения двух других ортогональных к скорости ортов. Желательно, чтобы они мало отличались от ускорительного базиса, определяемого Frenel–Serret координатами [12]:

$$\vec{r}(x, \theta, z) = \vec{r}_0(\theta) + x \vec{e}_x(\theta) + z \vec{e}_z(\theta), \quad \vec{e}_y = \frac{1}{R} \frac{d\vec{r}_0}{d\theta} \equiv \frac{\vec{r}_0'}{R}, \quad (\text{A.3})$$

где \vec{r}_0 — вектор, связанный с замкнутой, плоской равновесной орбитой; x и z означают радиальное и вертикальное отклонения от плоскости орбиты; $2\pi R$ — длина равновесной орбиты. В нашем случае

$$\vec{e}_x' = K_z \vec{e}_y, \quad \vec{e}_y' = -K_z \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z' = 0, \quad K_z(\theta) = \frac{B_z(\vec{r}_0)}{\langle B_z(\vec{r}_0) \rangle}. \quad (\text{A.4})$$

Здесь K_z — безразмерная кривизна замкнутой орбиты.

Отметим, что некоторый произвол в выборе двух других ортогональных к скорости ортов в нашем случае не сказывается на формуле для вычисления мощности спинового резонанса. Поэтому выберем «натуральную» систему координат для описания спинового движения, например, в виде

$$\vec{a} = [\vec{\tau} \times \vec{e}_z], \quad \vec{\tau}, \quad \vec{b} = [\vec{a} \times \vec{\tau}]. \quad (\text{A.5})$$

Базис $\{\vec{a}, \vec{\tau}, \vec{b}\}$ практически не отличается от «ускорительного» базиса $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$:

$$\vec{a} \approx \vec{e}_x - \frac{x'}{R} \vec{e}_y, \quad \vec{\tau} \approx \vec{e}_y + \frac{x'}{R} \vec{e}_x + \frac{z'}{R} \vec{e}_z, \quad \vec{b} \approx \vec{e}_z - \frac{z'}{R} \vec{e}_y. \quad (\text{A.6})$$

Чтобы не загромождать формулы излишними обобщениями, учтем лишь вертикальное искажение траектории частиц радиальным полем при отсутствии на плоской равновесной орбите продольной компоненты магнитного поля.

Угловая частота вращения натурального базиса становится следующей:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_b &= \frac{1}{2} \left([\vec{a} \times \dot{\vec{a}}] + [\vec{b} \times \dot{\vec{b}}] + [\vec{\tau} \times \dot{\vec{\tau}}] \right) = [\vec{\tau} \times \dot{\vec{\tau}}] + (\vec{\tau} \vec{e}_z) \left([\vec{\tau} \times \dot{\vec{\tau}}] \vec{e}_z \right) \vec{\tau} = \\ &= -\frac{e}{\gamma m} \vec{B}_T - \frac{e}{\gamma m} (\vec{\tau} \vec{e}_z) (\vec{B}_T \vec{e}_z) \vec{\tau} = -\frac{e}{\gamma m} \vec{B}_T - \frac{e}{\gamma v m} \dot{z} B_z \vec{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

При выводе (A.7) было использовано соотношение

$$\left[\vec{\tau} \times \dot{\vec{\tau}} \right] = -\frac{e}{\gamma m} \vec{B}_T. \quad (\text{A.8})$$

К частоте вращения базиса добавляется поправка вдоль точного направления скорости, связанная с отклонением движения частицы от плоскости орбиты (направление скорости уже не ортогонально направлению \vec{e}_z).

Второй дополнительный член вдоль скорости частицы не поправляет прецессию спина в месте расположения rf-диполя, однако вертикальное искажение орбиты, вызываемое rf-диполем, существенно изменяет движение спина в течение каждого оборота частицы в ускорителе. Уравнение для спина становится следующим:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \left[(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_b) \times \vec{S} \right], \quad (\text{A.9})$$

где

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} - \vec{\Omega}_b &= -\frac{e}{\gamma m} \left(\gamma G \vec{B}_T + \left[G (\vec{\tau} \vec{e}_z) (\vec{B}_T \vec{e}_z) + (1 + G) \vec{B}_y \right] \vec{\tau} \right) = \\ &= -\frac{e}{m} G \vec{B}_T - \frac{e}{\gamma v m} \left[G B_z \dot{z} + (1 + G) \dot{B}_z z \right] \vec{\tau}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Вертикальное отклонение z от плоскости орбиты вне зоны rf-диполя следует также учитывать. В круглом ускорителе $\dot{B}_z = 0$ и мощность спинового резонанса пропорциональна аномальному магнитному моменту G .

Перейдем вместо переменной времени t к новой независимой переменной — обобщенному азимуту частицы θ . Уравнение для спина в натуральной системе координат становится следующим:

$$\frac{d\vec{S}}{d\theta} = \left[\vec{W} \times \vec{S} \right], \quad (\text{A.11})$$

где приведенная угловая скорость вращения спина будет, очевидно, равна

$$\vec{W} = \frac{\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_b}{\dot{\theta}}. \quad (\text{A.12})$$

Для плоской равновесной орбиты частота вращения частицы $\dot{\theta}$ определяется хорошо известным выражением [12]:

$$\dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{(R + K_z x)^2 + x'^2 + z'^2}}. \quad (\text{A.13})$$

Используя уравнение движения частицы в магнитном поле для вертикального отклонения z от плоскости орбиты, получаем

$$\begin{aligned}\vec{W} \vec{a} &= \nu \frac{z''}{R}, & \vec{W} \vec{\tau} &= G K_z \frac{z'}{R} + (1 + G) K_z' \frac{z}{R}, \\ \vec{W} \vec{b} &= \nu \left(K_z - \frac{x''}{R} \right).\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Фурье-гармоника w_k спинового резонанса $\nu = \nu_k$ равна

$$\begin{aligned}w_k &= \left\langle \left[(\vec{W} \vec{a} - i \vec{W} \vec{\tau}) e^{i\nu(\Theta - \theta)} \right] e^{i\nu_k \theta} \right\rangle_{\nu=\nu_k} = \\ &= \left\langle \left[\nu \frac{z''}{R} - i G K_z \frac{z'}{R} - i(1 + G) \left(K_z' \frac{z}{R} + K_y \right) \right] e^{i\nu_k \Theta} \right\rangle,\end{aligned}\quad (\text{A.15})$$

где ν — спиновая частота, ν_k — целочисленная комбинация частот орбитального движения. Мощность уединенного спинового резонанса равна величине $|w_k|$.

Выражаем благодарность Я. С. Дербеневу, А. D. Krisch, Е. D. Courant, В. С. Морозову, М. А. Леоновой, Ю. Ф. Орлову, А. W. Chao, D. W. Sivers, S. Y. Lee, А. Lehgach, А. U. Luccio и другим участникам телеконференции SPIN@COSY, принявшим активное участие в обсуждении результатов данной работы и стимулировавшим публикацию этой статьи. Нам приятно поблагодарить также С. С. Шиманского за обсуждения и постоянный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Leonova M. A. et al.* Unexpected enhancement and reduction of rf spin resonance strengths // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2006. V. 9. P. 051001.
2. *Krisch A. D. et al.* Unexpected reduction of rf spin resonance strength for stored deuteron beams // Phys. Rev. ST Accel. Beam. 2007. V. 10. P. 071001.
3. *Froissart M., Stora R.* Depolarization d'un faisceau de protons polarises dans un synchrotron // Nuclear Instruments and Methods. 1960. V. 7, No. 3. P. 297–305.
4. *Blinov B. B. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2906.
5. *Дербенев Я. С., Кондратенко А. М., Скринский А. Н.* Динамика поляризации частиц вблизи спиновых резонансов // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 4. С. 1216–1227.
6. *Kondratenko A. M.* Reduction of the spin perturbations at using the intrinsic framework // HESP, Workshops, Bonn, V. 2. P. 140–142, Springer-Verlag, 1991.

7. *Derbenev Ya. S., Kondratenko A. M., Skrinsky A. N.* Radiative polarization at ultra-high energies // Particle Accelerators. 1979. V. 9. P. 247–266.
8. *Кондратенко А. М.* Устойчивость поляризации встречных пучков // ЖЭТФ. 1974. Т. 66, № 4. С. 1211–1218.
9. *Issinskii I.B. et al.* Deuterons resonance depolarization degree in JINR Nuclotron // Proc. of VI Workshop on HESP, Protvino, 1996. P. 207–211.
10. *Голубева Н. И. и др.* Исследование деполяризации пучков дейтронов и протонов в кольце нуклотрона. Препринт ОИЯИ Р9-2002-289. Дубна, 2002.
11. *Courant E. D., Ruth R. D.* BNL Report BNL 51270, 1980.
12. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматгиз, 1962.
13. *Lee S. Y.* Spin resonance strength of a localized rf magnetic field // Phys. Rev. ST Accel. Beams 2006. V. 9. P. 074001.
14. *Thomas L. H.* The kinematics of an electron with an axis // Philosophical Magazine, 1927. V. 3. P. 1–22.
15. *Bargmann V., Michel L., Telegdi V. L.* Precession of the polarization of particles moving in a homogeneous electromagnetic field // Phys. Rev. Lett. 1959. V. 2, No. 10. P. 435–436.

Получено 6 февраля 2008 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 07.05.2008.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,37. Уч.-изд. л. 1,64. Тираж 270 экз. Заказ № 56161.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/