

P11-2008-31

Х. Т. Мелемов¹, Т. Л. Бояджиев

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ОДУ
НА ВЛОЖЕННЫХ ИНТЕРВАЛАХ**

¹Пловдивский университет, Болгария

Мелемов Х. Т., Бояджиев Т. Л.

P11-2008-31

Численное решение систем ОДУ на вложенных интервалах

На базе непрерывного аналога метода Ньютона и метода сплайн-коллокации создан пакет программ для решения краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), заданных на вложенных интервалах изменения независимой переменной. В качестве конкретного примера приложения рассматривается задача о статических распределениях магнитных потоков в геометрически симметричном двухслойном джозефсоновском стеке, отдельные субконтакты которого имеют разную длину.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

Melemov H. T., Boyadjiev T. L.

P11-2008-31

Numerical Solution of Systems ODE's on Embedded Intervals

In this paper a program for numerical solution of boundary value problems for ODE systems given on the embedded intervals is described. Similar ODE's take place in physics of stacked Josephson junctions with different lengths of the layers.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заметное число моделей физики конденсированной материи, физики звезд и черных дыр, гидродинамики и теплопередачи и т. д. приводят к необходимости решать краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, заданных на перекрывающихся или вложенных областях изменения независимых переменных. Обзор работ по этой тематике, выполненных в ОИЯИ за последние годы, приведен в [1]. Алгоритмы решения таких задач, как правило, используют ньютоновскую итерационную процедуру, сводящую исходную задачу к последовательности линейных краевых задач, решение которых в общем случае возможно только численным путем. В пространственно-одномерном случае достаточно общая постановка линеаризованной задачи выглядит следующим образом.

Пусть \hat{I} , \check{I} и I — три конечных интервала на реальной прямой, такие, что $\hat{I} = I \setminus \check{I}$. Для указанной системы интервалов рассмотрим линейную краевую задачу вида

$$-\hat{A}\hat{y}_{xx} + \hat{B}\hat{y}_x + \hat{C}\hat{y} = \hat{F}, \quad x \in \hat{I}, \quad (1.1a)$$

$$\hat{G}\hat{y}_x + \hat{H}\hat{y} = \hat{R}, \quad x \in \partial I, \quad (1.1b)$$

$$-Ay_{xx} + By_x + Cy = F, \quad x \in \check{I}, \quad (1.1c)$$

$$Gy_x + Hy = R, \quad x \in \partial \check{I}. \quad (1.1d)$$

Здесь $y(x) = \{\hat{y}(x), \check{y}(x)\}$ — искомая вектор-функция размерности $\dim y = N$, $\dim \hat{y} = M$, $N \geq M$; $\hat{A}(x)$, $\hat{B}(x)$, $\hat{C}(x)$ — заданные квадратные M -матрицы, причем $\det \hat{A}(x) \neq 0$ для $x \in \hat{I}$; $\hat{F}(x)$ — заданная M -вектор-функция; \hat{G} и \hat{H} — заданные постоянные квадратные M -матрицы; \hat{R} — заданный постоянный M -вектор; $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — заданные квадратные N -матрицы; $\det A(x) \neq 0$ для $x \in \check{I}$; $F(x)$ — заданная N -вектор-функция; G и H — заданные постоянные $(N - M) \times N$ -матрицы; R — заданный $(N - M)$ -постоянный вектор. Координаты вектор-функции $\hat{y}(x)$ непрерывны вместе с первыми производными на границе $\partial \hat{I}$.

В общем случае задачу (1.1) можно интерпретировать как уравнения для неизвестных $\hat{y}(x)$ и $\check{y}(x)$, которые заданы на вложенных интервалах изменения независимой переменной x .

Если в частном случае $I = [-L, L]$, $\check{I} = [-l, l]$, $l \leq L$, $\hat{I} = [-L, -l) \cup (l, L]$, $N = 2$, $M = 1$, то при $x \in (-L, -l)$ и $x \in (l, L)$ имеем одно обыкновенное

дифференциальное уравнение (ОДУ) для координаты $y_1(x)$, а на интервале $x \in (-l, l)$ — систему двух ОДУ для скалярных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

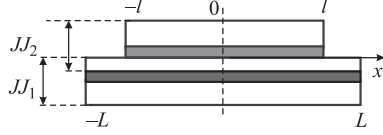


Рис. 1. Схема двухслойного контакта с субконтактами разной длины

К такой системе сводится, в частности, задача о стационарных состояниях в двухслойном геометрически симметричном джозефсоновском контакте, отдельные субконтакты которого JJ_1 и JJ_2 имеют разную длину. Упрощенная схема такого стека демонстрируется на рис. 1. Светлые прямоугольники изображают сверхпроводящие электроды, а за-

темненные — соответствующие барьерные слои. Причиной несимметрий могут быть, например, технологические трудности при изготовлении.

Нетрудно показать, что в этом случае магнитные потоки $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ в слоях удовлетворяют следующей нелинейной краевой задаче:

$$\varphi_{1,x}(-L) = h_e, \quad (1.2a)$$

$$-\varphi_{1,xx} + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, \quad x \in (-L, -l), \quad (1.2b)$$

$$\varphi_{2,x}(-l+0) - s\varphi_{1,x}(-l+0) = (1-s)h_e, \quad (1.2c)$$

$$-A\varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad x \in (-l, l), \quad (1.2d)$$

$$\varphi_{2,x}(l-0) - s\varphi_{1,x}(l-0) = (1-s)h_e, \quad (1.2e)$$

$$-\varphi_{1,xx} + \sin \varphi_1 - \gamma = 0, \quad x \in (l, L), \quad (1.2f)$$

$$\varphi_{1,x}(L) = h_e. \quad (1.2g)$$

Здесь h_e — внешнее магнитное поле; γ — внешний ток и $\Gamma = \gamma(1, 1)^T$ (символом T обозначена операция транспонирования). Квадратная симметрическая матрица

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix}$$

зависит только от коэффициента индуктивной связи между слоями контакта $s \in (-1, 0]$, вектор токов Джозефсона $J_z = (\sin \varphi_1, \rho \sin \varphi_2)^T$, где параметр $\rho = L/l \geq 1$. Все величины записаны в безразмерном виде [2].

Равенства (1.2a) и (1.2g) — это краевые условия для функции $\varphi_1(x)$ на внешних границах $x = \pm L$ интервала I , а (1.2c) и (1.2e) — краевые условия для $\varphi_2(x)$ на $x = \pm l = \partial \tilde{I}$ с учетом взаимодействия между слоями. Отметим, что взаимодействие между слоями приводит к тому, что при $h_e = 0$ граничное значение поля для короткого контакта отлично от нуля, т. е. $\varphi_2'(\pm l) \neq 0$.

На границах $x = \pm l$ выполняются также обычные условия гладкости потока $\varphi_1(x)$, но ток $\varphi_{1,xx}(x)$ в этих точках может терпеть разрывы, порожденные условиями (1.3c) и (1.3e).

Численное решение нелинейной краевой задачи (1.2) основывается на применении непрерывного аналога метода Ньютона [1]. Стандартным образом в рассматриваемом случае на каждой итерации приходим к линейной краевой задаче вида

$$w_{1,x}(-L) = -\varphi_{1,x}(-L) + h_e, \quad (1.3a)$$

$$-w_{1,xx} + \cos \varphi_1 w_1 = \varphi_{1,xx} - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad (1.3b)$$

$$\begin{aligned} w_{2,x}(-l+0) - s w_{1,x}(-l+0) = \\ = -\varphi_{2,x}(-l+0) + s \varphi_{1,x}(-l+0) + (1-s) h_e, \end{aligned} \quad (1.3c)$$

$$-A(s)w_{xx} + Q(x)w = A(s)\varphi_{xx} - J_z(\varphi) - \Gamma, \quad (1.3d)$$

$$\begin{aligned} w_{2,x}(l-0) - s w_{1,x}(l-0) = \\ = -\varphi_{2,x}(l-0) + s \varphi_{1,x}(l-0) + (1-s) h_e, \end{aligned} \quad (1.3e)$$

$$-w_{1,xx} + \cos \varphi_1 w_1 = \varphi_{1,xx} - \sin \varphi_1 + \gamma, \quad (1.3f)$$

$$w_{1,x}(L) = -\varphi_{1,x}(L) + h_e, \quad (1.3g)$$

которая, очевидно, относится к задачам вида (1.1). При этом 2-матрица

$$Q(x) = \text{diag}(\cos \varphi_1(x), \rho \cos \varphi_2(x)).$$

Все выкладки ниже проводятся для частного случая задачи (1.3). Обобщение на общий случай (1.1) не представляет затруднений.

Для численного решения задачи (1.3) можно, например, продолжить функцию $\varphi_2(x)$ каким-либо гладким образом на весь интервал $[-L, L]$, а затем применить какой-нибудь метод дискретизации полученной «расширенной» краевой задачи. Однако сразу ясно, что соответствующая матрица системы линейных алгебраических уравнений будет содержать лишние нули, что как минимум увеличивает ее размерность.

В настоящей работе численное решение задачи (1.3) проводится при помощи метода сплайн-коллокации в виде, предложенном в работе [3], без лишнего увеличения размера матрицы дискретизации.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Введем на отрезке $[-L, L]$ сетку Δ из n узлов

$$\{x_{i+1} = x_i + h_i, i = 1, 2, \dots, n-1, x_1 = -L, x_n = L\}$$

с переменным в общем случае шагом h_i , $1 \leq i \leq n-1$. Отметим, что точки $x_k = -l$ и $x_r = l$ при $1 \leq k < l \leq n$ также выбраны быть узлами сетки.

Учитывая возможные разрывы второй производной функции $\varphi_1(x)$ при $x = \pm l$, на каждом подынтервале $[x_i, x_{i+1}] \in \hat{I}$ приближенное решение (1.3) целесообразно искать в виде кубического эрмитова сплайна [4]

$$S_1(x) = \Phi(t)u_i + \Psi(t)h_i m_i + \bar{\Phi}(t)u_{i+1} + \bar{\Psi}(t)h_i m_{i+1}, \quad (2.1)$$

где через $t = (x - x_i)/h_i$, $t \in [0, 1]$, обозначена локальная координата, $\{u_i, m_i\}$ — значения сплайна $S_1(x)$ и его производной $m(x) \equiv S_{1,x}(x)$ в узлах $i = 1, 2, \dots, k-1$ и $i = r+1, \dots, n$ сетки. Базисные функции $\Phi(t) = (1-t)^2(1+2t)$ и $\Psi(t) = t(1-t)^2$ удовлетворяют условиям $\Phi(0) = 1$ и $\dot{\Psi}(0) = 1$ (точкой сверху обозначено дифференцирование по локальной переменной t), а остальные значения функций и их производных в узлах элемента равны нулю. Для функций $\bar{\Phi}(t)$ и $\bar{\Psi}(t)$, участвующих в (2.1), выполнены соотношения $\bar{\Phi}(t) = \Phi(1-t)$, $\bar{\Psi}(t) = -\Psi(1-t)$.

Аналогично на любом подынтервале внутреннего отрезка $\check{I} = [-l, l]$ приближенное решение ищем в виде

$$S(x) = \begin{pmatrix} S_1(x) \\ S_2(x) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u_{1,i} \\ u_{2,i} \end{pmatrix} + \Psi(t)h_i \begin{pmatrix} m_{1,i} \\ m_{2,i} \end{pmatrix} + \bar{\Phi}(t) \begin{pmatrix} u_{1,i+1} \\ u_{2,i+1} \end{pmatrix} + \bar{\Psi}(t)h_i \begin{pmatrix} m_{1,i+1} \\ m_{2,i+1} \end{pmatrix}.$$

Точками коллокации являются узлы Гаусса $t_j = (1 \pm \sqrt{3}/3)/2$, $j = 1, 2$, на отрезке $[0, 1]$. Совместно с условиями гладкости искомых функций, а также с учетом всех краевых условий метод коллокации приводит к блочно-диагональной системе алгебраических уравнений вида

$$WU = P.$$

Здесь U — вектор узловых неизвестных, а матрица W имеет следующую структуру:

$$W = \begin{pmatrix} e_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1 & B_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & A_{k-1} & B_{k-1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & e_s & e_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_s & B_s & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & e_s & e_0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & A_r & 0 & B_r & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & A_{n-1} & B_{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & e_0 \end{pmatrix},$$

где 2-векторы $e_0 = (0, 1)$, $e_s = (0, -s) = -se_0$, а остальные элементы W представляют собой 2-матрицы с элементами

$$\begin{aligned} A_{i,j1} &= -\frac{1}{h_i^2} \ddot{\Phi}_j + \Phi_j c_{ij}, \\ A_{i,j2} &= -\frac{1}{h_i} \ddot{\Psi}_j + \Psi_j h_i c_{ij}, \\ B_{i,j1} &= -\frac{1}{h_i^2} \ddot{\bar{\Phi}}_j + \bar{\Phi}_j c_{ij}, \\ B_{i,j2} &= -\frac{1}{h_i} \ddot{\bar{\Psi}}_j a_{ij} + \bar{\Psi}_j h_i c_{ij} \end{aligned}$$

для $i = 1, \dots, k-1$ и $i = r, \dots, n-1$, а $c_{ij} = \cos \varphi_1(x_{ij})$. Элементы W при $i = k, \dots, r-1$ суть 4-матрицы с элементами

$$\begin{aligned} [A_{i,j1}]_{mn} &= -\frac{1}{h_i^2} \ddot{\Phi}_j a_{mn} + \Phi_j q_{mn,ij}, \\ [A_{i,j2}]_{mn} &= -\frac{1}{h_i} \ddot{\Psi}_j a_{mn} + \Psi_j h_i q_{mn,ij}, \\ [B_{i,j1}]_{mn} &= -\frac{1}{h_i^2} \ddot{\bar{\Phi}}_j a_{mn} + \bar{\Phi}_j q_{mn,ij}, \\ [B_{i,j2}]_{mn} &= -\frac{1}{h_i} \ddot{\bar{\Psi}}_j a_{mn} + \bar{\Psi}_j h_i q_{mn,ij} \end{aligned}$$

для $i = k, \dots, r-1$, $j = 1, 2$. Величины $\{a_{mn}\}$, $m, n = 1, 2$ — элементы матрицы A и $\{q_{mn,ij}\}$ — значения элементов матрицы $Q(x)$ в соответствующих гауссовых узлах.

Число блоков W соответствует числу $n-1$ подынтервалов сетки. Число столбцов каждого блока фиксировано, число строк блоков зависит от номера блока. На внешних интервалах \hat{I} блоки имеют по две строки, за исключением первого и последнего блоков. Эти два блока содержат дополнительные строки, которые учитывают краевые условия (1.3а) и (1.3г) для длинного субконтакта. Внутренние блоки на интервале \check{I} имеют по четыре строки. Блоки на границах $x = \pm l$ имеют по три строки: по две строки от дискретизации (1.3б) и (1.3ф) и по одной строке от краевых условий (1.3с) и (1.3е) для функции $\varphi_2(x)$. Общее число узловых неизвестных есть $2(k-1) + 4(r-k+1) + 2(n-r)$.

Для решения такой системы алгебраических уравнений используется специализированная подпрограмма `CWIDTH`, которая подробно описана в книге [4]. Эта программа реализует модифицированный для специальных блочно-диагональных матриц (а именно, с одинаковым числом столбцов в каждом блоке) метод Гаусса с выбором главного элемента.

С использованием представленного алгоритма создана программа для исследования статических распределений магнитного потока в двухслойном джозефсоновском стеке, субконтакты которого имеют неодинаковую длину.

3. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основными численными характеристиками любого решения нелинейной краевой задачи (1.2) являются следующие.

1. Полная энергия контакта F , парциальные энергии субконтактов F_1 и F_2 , а также энергия связи F_{12} между субконтактами

$$F = F_1 + F_2 + F_{12}, \quad (3.1)$$

$$F_1[\varphi_1] = \int_{-L}^L \left(\frac{1}{2} \varphi_{1,x}^2 + 1 - \cos \varphi_1 - \gamma \varphi_1 \right) dx - h_e \Delta \varphi_1, \quad (3.2a)$$

$$F_2[\varphi_2] = \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} \varphi_{2,x}^2 + \rho (1 - \cos \varphi_2) - \gamma \varphi_1 \right] dx - h_e \Delta \varphi_2, \quad (3.2b)$$

$$F_{12}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{s}{1-s^2} \int_{-l}^l \left[\frac{s}{2} (\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{2,x}^2) - \varphi_{1,x} \varphi_{2,x} \right] dx + \frac{s}{1+s} h_e [\varphi_1(l) - \varphi_1(-l) + \Delta \varphi_2]. \quad (3.2c)$$

2. Полные магнитные потоки через контакты

$$\Delta \varphi_1 = \int_{-L}^L \varphi_{1,x}(x) dx = \varphi_1(L) - \varphi_1(-L), \quad (3.3a)$$

$$\Delta \varphi_2 = \int_{-l}^l \varphi_{2,x}(x) dx = \varphi_2(l) - \varphi_2(-l). \quad (3.3b)$$

3. Средние магнитные потоки через контакты (числа флюксонов в слоях) [1]

$$N_1[\varphi_1] = \frac{1}{2L\pi} \int_{-L}^L \varphi_1(x) dx, \quad (3.4a)$$

$$N_2[\varphi_2] = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi_2(x) dx. \quad (3.4b)$$

Отметим, что уравнения (1.2) непосредственно вытекают из вариационной задачи об экстремуме функционала (3.1) на множестве гладких на соответствующих отрезках функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. При этом (1.2b), (1.2d) и (1.2f) суть уравнения Эйлера–Лагранжа, (1.2a) и (1.2g) — условия Вейерштрасса–Эрдмана на вертикальных прямых $x = \pm L$, а (1.2c) и (1.2e) — условия Вейерштрасса–Эрдмана на прямых $x = \pm l$ соответственно.

Предположим сначала, что субконтакты имеют одинаковую длину ($l = L$) и $s = 0$, т. е. отсутствует взаимодействие между слоями JJ_1 и JJ_2 (см. рис. 1). Пусть при заданном поле h_e и токе γ в одиночном субконтакте имеются m различных распределений магнитного потока $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. Тогда при условии, что для $s \neq 0$ нет бифуркации по параметру s , в стеке возможны m^2 пар состояний. Поэтому исследование контактов данного вида представляет собой сложную задачу, тем более при учете неодинаковости длин и возможных бифуркаций по параметру s .

Ниже коротко рассмотрим влияние неодинаковости длин субконтактов на некоторые из типичных состояний в стеке, не комментируя их устойчивость, анализ которой будет предметом дальнейших исследований. Все численные результаты, приведенные ниже, получены для «достаточно длинного» контакта ($2L = 10$) и коэффициента индуктивной связи между субконтактами $s = -0,3$.

В табл. 1 приведены в порядке убывания значения энергий, вычисленных по формулам (3.2). Аналогично в табл. 2 даны соответствующие «геометрические» характеристики (3.3) и (3.4), а также потоки в центре контактов $\varphi(0)$. Величины в обеих таблицах нормированы на соответствующие значения единичного флаксона $\varphi_\infty(x) = 4 \arctan \exp \{x\}$, который есть точное аналитическое решение в «бесконечном» единичном контакте: $F[\varphi_\infty] = 8$, $\Delta\varphi_\infty = 2\pi$, $N[\varphi_\infty] = 1$ и $\varphi_\infty(0) = \pi$.

Таблица 1. Энергетические характеристики некоторых решений в двухслойном JJ

Тип	F_1	F_2	F_{12}	F
(B^1, B^{-1})	1,922	2,135	-0,33	3,727
(Φ^2, Φ^{-1})	2,081	1,135	-0,62	2,954
(Φ^1, Φ^1)	1,022	1,132	0,371	2,525
(M, B^1)	0,026	2,128	0,021	2,174
(Φ^1, Φ^{-1})	1,011	1,125	-0,278	1,858
(M, Φ^1)	0,011	1,118	0,031	1,16

Рассмотрим конкретные пары распределений по мере усложнения их структуры.

При $h_e = 0$ и $\gamma = 0$ задача (1.2) имеет математически тривиальные, но физически важные мейсснеровские решения $\varphi_{1,2}(x) = m\pi$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В дальнейшем для сокращения записи такие решения при $m = 0$ будем обозначать через M . Нетрудно показать [1], что в единичном контакте M -решения являются устойчивыми независимо от длины контакта. В случае пары (M, M) числовые значения функционалов (3.1)–(3.4) равны нулю для любого допустимого $s \in (-1, 0]$. Решения с нечетным m и, в частности, решения M_π и $M_{-\pi}$ при $m = \pm 1$ в единичном контакте неустойчивы [1].

Таблица 2. Численные характеристики некоторых решений в двухслойном JJ

Тип	N_1	N_2	$\Delta\varphi_1$	$\Delta\varphi_2$	$\varphi_1(0)$	$\varphi_2(0)$
(B^1, B^{-1})	1,234	-0,882	0	0	1,959	-1,636
(Φ^2, Φ^{-1})	2	-1	2,881	-1,054	2	1
(Φ^1, Φ^1)	1	1	0,967	0,932	1	1
(M, B^1)	10^{-4}	1,002	0	0	-0,08	1,673
(Φ^1, Φ^{-1})	1	-1	0,99	-0,987	1	-1
(M, Φ^1)	0	1	-0,01	0,961	0	1

Из табл. 1 хорошо заметно, что M -распределение потока наиболее индифферентно (имеет наименьшую энергию взаимодействия F_{12}) в отношении присутствия иных типов распределений в соседнем субконтакте.

Иной важный вид распределений магнитного потока — это «бризерные» распределения $B^{\pm 1}$ с нулевым полным потоком $\Delta\varphi$ и средним потоком $N[B^{\pm 1}] = \pm 1$ при $s = 0$.

На рис. 2 показаны пары бризерных распределений (B^1, B^{-1}) и «сопряженные» с ними (B^{-1}, B^1) . Такие пары оказываются сильно взаимодействующими

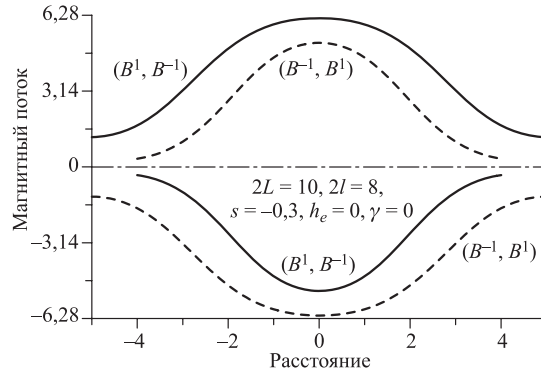


Рис. 2. Магнитный поток для распределений вида (B^1, B^{-1})

щими (см. первые строчки в таблицах). Соответствующие свойства симметрии имеют вид

$$\begin{aligned} B^{-1}(x) &= -B^1(x), & B^{\pm 1}(x) &= B^{\pm 1}(-x), \\ B_x^{-1}(x) &= -B_x^1(x), & B_x^{\pm 1}(x) &= -B_x^{\pm 1}(-x). \end{aligned}$$

На рис. 3 демонстрируются конкретные примеры взаимодействия бризеров $B^{\pm 1}$ с устойчивым мейснеровским распределением M в двухслойном контакте (см. соответствующие числовые характеристики в четвертых строках таблиц).

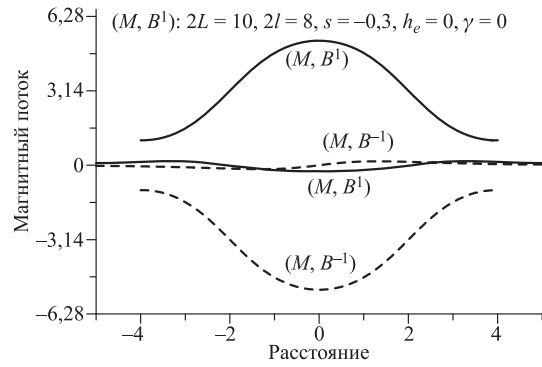


Рис. 3. Распределения вида $(M, B^{\pm 1})$

Численный эксперимент показывает, что решения вида $(M, B^{\pm 1})$ и «сопряженные» им $(B^{\pm 1}, M)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$N_i [(M, B^1)] + N_i [(M, B^{-1})] = 0,$$

$$N_i [(B^1, M)] + N_i [(B^{-1}, M)] = 0, \quad i = 1, 2.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для функционалов вида $\varphi(0)$.

Важную роль в теории и приложениях играют вихревые (флаксонные) распределения магнитного потока. Хорошо известно, что в «бесконечном» единичном контакте ($L \rightarrow \infty$), описываемом «обычным» уравнением sine-Gordon, методом обратной задачи рассеяния [5] установлен счетный набор флаксонных решений. В контактах конечной длины такие решения деформируются за счет взаимодействия с границами, а также под влиянием внешнего поля h_e и тока γ . При этом, если $\gamma = 0$, то средний магнитный поток через контакт (3.4) и значения потоков в центре контакта $\varphi(0)$ не зависят от длины последнего [1]

$$N [\Phi^{\pm n}] = N [\Phi_{\infty}^{\pm n}] = \pm n, \quad (3.5a)$$

$$\Phi^{\pm n}(0) = \Phi_{\infty}^{\pm n}(0) = \pm n. \quad (3.5b)$$

Здесь и далее вихревые решения обозначаем через $\Phi^{\pm n}$, где $n = 1, 2, \dots$, а через $\Phi_{\infty}^{\pm n}$ обозначены «соответствующие» решения в «бесконечном» контакте.

Соотношения (3.5а) позволяют интерпретировать функционалы вида (3.4) как число флаксонов, содержащихся в каждом конкретном распределении магнитного потока [1].

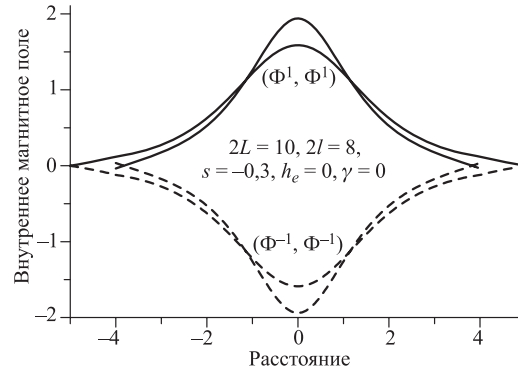


Рис. 4. Магнитные поля распределений вида $(\Phi^{\pm 1}, \Phi^{\pm 1})$

Вихревые решения вида $(\Phi^{\pm 1}, \Phi^{\pm 1})$ из двух флаксонов одинаковой ориентации, по одному в каждом слое, демонстрируются на рис. 4. Из табл. 1 видно, что уменьшение полудлины l приводит к возрастанию амплитуды магнитного поля в коротком субконтакте и, как следствие, — к монотонному возрастанию полной энергии в широком интервале изменения l (см. рис. 5). При этом как частичная, так и полная энергия стека выше, чем в стеке из контактов одинаковой длины. Это в свою очередь означает, что вихревые распределения в стеке из контактов разной длины менее устойчивы и, следовательно, имеют меньшие критические токи, чем аналогичные в стеке из контактов одинаковой длины.

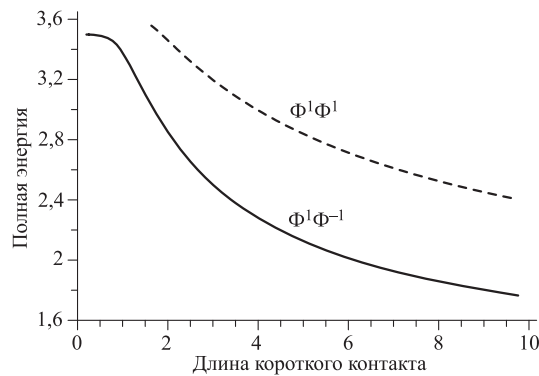


Рис. 5. Зависимость $F(l)$

Свойства симметрии

$$\pi - \Phi^1(-x) = -\pi + \Phi^1(x), \quad \Phi_x^1(x) = \Phi_x^1(-x).$$

Сохранение центров флаксонов вида Φ^1 при изменении параметра l демонстрируется на рис. 6 и 7.

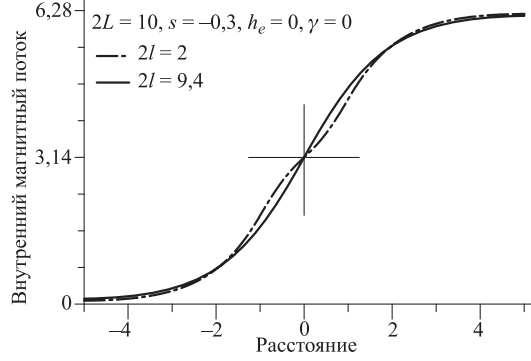


Рис. 6. Центр $\varphi_1(x)$ сохраняется при варьировании l

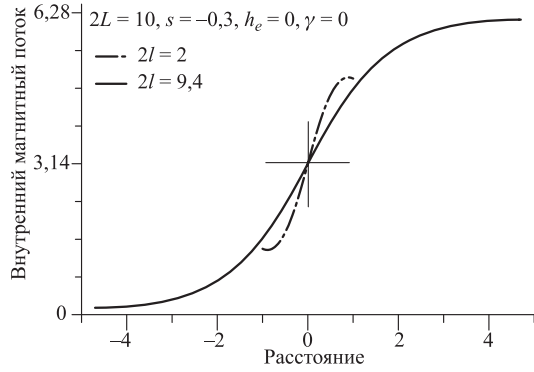


Рис. 7. Центр $\varphi_2(x)$ сохраняется при варьировании l

Аналогичные выводы можно сделать и для решений в виде пары разнополярных флаксонов (см. рис. 8 и пятые строчки в таблицах). Отметим, что из-за разности длин «традиционная» симметрия флаксона и антифлаксона относительно горизонтальной оси x в этом случае отсутствует — уменьшение длины требует увеличения амплитуды магнитного поля (градиента магнитного потока) для того, чтобы в контакт поместился один и тот же магнитный поток.

Свойства симметрии для пар вида (Φ^{-1}, Φ^1)

$$-\pi - \Phi^{-1}(-x) = +\pi + \Phi^{-1}(x), \quad \pi - \Phi^1(-x) = -\pi + \Phi^1(x),$$

$$\Phi_x^{\pm 1}(x) = \Phi_x^{\pm 1}(-x).$$

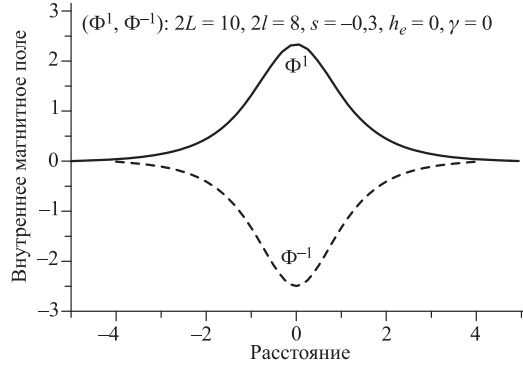


Рис. 8. Распределения вида (Φ^1, Φ^{-1})

Отметим, что параметрические зависимости функционалов (3.1) от полудлины l (см. рис. 5) представляют собой пример бифуркации решений нелинейной краевой задачи (1.2) при изменении длины l короткого субконтакта. Область существования по параметру l однополярных пар решений вида $(\Phi^{\pm 1}, \Phi^{\pm 1})$ ограничена снизу (в конкретном примере $l_{\min} \approx 1,55$). Для разнополярных пар $(\Phi^{\pm 1}, \Phi^{\mp 1})$ численный эксперимент показывает, что $F(l)$ определена в достаточно малой окрестности точки $l = 0$, в которой меняется уже вид системы (1.2).

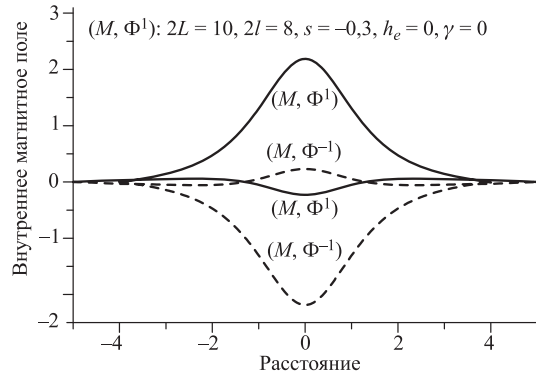


Рис. 9. (M, Φ^1) -распределения магнитного поля

Примеры взаимодействия однофаксонных распределений $\Phi^{\pm 1}$ с мейснеровским M приведены на рис. 9. Численный эксперимент показывает, что пары вида $(M, \Phi^{\pm 1})$ и $(\Phi^{\pm 1}, M)$ — наиболее энергетически выгодные состояния в стеке после «тривиальной» пары (M, M) (см. шестые строчки в таблицах). Соответственно, вероятность реализации пар $(M, \Phi^{\pm 1})$ или $(\Phi^{\pm 1}, M)$

меньше вероятности пары (M, M) , но больше вероятности всех остальных возможных пар распределений в стеке.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Разработан пакет программ для решения класса нелинейных краевых задач для систем ОДУ, заданных на вложенных интервалах изменения независимой переменной. Алгоритм использует НАМН и коллокацию кубическими эрмитовыми сплайнами для дискретизации линеаризованных задач.

В качестве конкретного примера рассмотрена задача о моделировании статических вихрей в двухслойном геометрически симметричном джозефсоновском контакте, субконтакты которого имеют неодинаковую длину.

Численный эксперимент показывает, что различие в длинах оказывает значительное влияние на состояния магнитного потока в слоях. В частности обнаружено, что для некоторых пар распределений потока имеется бифуркация по длине короткого субконтакта — существует минимальная длина, обеспечивающая существование заданной пары.

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. Ю. М. Шукринову (ЛТФ ОИЯИ) за физическую постановку задачи, а также проф. И. В. Пузынину (ЛИТ ОИЯИ) за внимание к настоящей работе и ценные обсуждения.

Настоящая работа частично финансировалась Софийским университетом, грант № 107/2007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пузынин И. В. и др. О методах вычислительной физики для исследования моделей сложных физических процессов // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38, вып. 1. С. 70–116.
2. Licharev K. K. Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. N. Y.: Gordon and Breach, 1986. 634 p.
3. Бояджиев Т. Л. Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ P2-2002-101. Дубна, 2002.
4. de Boor K. Практическое руководство по сплайнам. М., 1987.
5. Iliev I. D., Khristov E. Kh., Kirchev K. P. Spectral methods in soliton equations. Wiley: Longman Sci. & Techn., 1994.

Получено 26 февраля 2008 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 13.05.2008.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,12. Тираж 310 экз. Заказ № 56166.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/