Р11-2009-120

Э. А. Айрян[1,а], А. А. Егоров[2,б], А. Л. Севастьянов[3,в],
К. П. Ловецкий[3,г], Л. А. Севастьянов[1,3,д]

АДИАБАТИЧЕСКИЕ МОДЫ ПЛАВНО-НЕРЕГУЛЯРНОГО ОПТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА: НУЛЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ ТЕОРИИ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

[1]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна
[2]Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН, Москва
[3]Российский университет дружбы народов, Москва
[а]E-mail: ayrjan@jinr.ru
[б]E-mail: yegorov@kapella.gpi.ru
[в]E-mail: alsevastyanov@gmail.com
[г]E-mail: lovetskiy@gmail.com
[д]E-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru

Айрян Э. А. и др. Р11-2009-120
Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического
волновода: нулевое приближение векторной теории

На основе адиабатического представления собственных мод интегрально-оптического многослойного волновода для вертикального распределения электромагнитного поля в волноводе получены обыкновенные дифференциальные уравнения и граничные условия. Для плавно-нерегулярных волноводов применен асимптотический метод и выделены вклады нулевого порядка малости в дифференциальных уравнениях и граничных условиях. Получены явные выражения для вертикального распределения электромагнитного поля в волноводе и граничных условий на границах слоев. В итоге задача сведена к решению однородной системы линейных алгебраических уравнений, зависящей от спектрального параметра, и к поиску значений параметра, при которых система нетривиально разрешима. В заключение приведены методы и алгоритмы решения обеих задач.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2009

Ayrjan E. A. et al. P11-2009-120
Zero Approximation of Vector Model
for Smoothly Irregular Optical Waveguide

On the basis of the adiabatic representation for eigenmodes of the integrated optical multilayer waveguide, differential equations and boundary conditions to vertical distribution of the electromagnetic field in the waveguide are presented. An asymptotic method is applied to smoothly irregular waveguides, and zero approximation parts of differential equations and boundary conditions are determined. Exact expressions are considered for the vertical distribution of the electromagnetic field in a waveguide and for boundary conditions. Finally, the problem is reduced to the solution of a homogeneous system of linear algebraic equations depending on a spectral parameter and to the search for the parameter values.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2009

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] описана адиабатическая модель собственных мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода. Примером такого волновода является тонкопленочная волноводная линза (ТВЛ) Люнеберга [5]. Анализ трансформации адиабатических мод при прохождении через область нерегулярности ТВЛ Люнеберга показал [3], что имеется малый безразмерный параметр δ, по степеням которого можно разложить напряженности электромагнитного поля в асимптотическом методе решения уравнений для адиабатических мод.

Уравнения Максвелла для непоглощающей неоднородной изотропной среды в системе СИ в отсутствие источников можно записать в следующем виде:

$$\operatorname{rot}\tilde{\mathbf{H}} = \varepsilon\partial\,\tilde{\mathbf{E}}/\partial t, \quad \operatorname{rot}\tilde{\mathbf{E}} = -\mu\partial\,\tilde{\mathbf{H}}/\partial t, \tag{1}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ — диэлектрическая проницаемость среды; $\mu = \mu_r\mu_0$ — магнитная проницаемость среды; $\varepsilon_r,\ \mu_r$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно; ε_0 и μ_0 — это электрическая и магнитная постоянные соответственно; $\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = nk_0$, n — показатель преломления среды (слоя), $k_0 = 2\pi/\lambda = \omega/c$ — модуль волнового вектора $\mathbf{k}_0$, λ_0 — длина волны монохроматического света в вакууме, c — скорость света в вакууме, $\omega = 2\pi f$, f — частота электромагнитного поля; $\mathbf{E},\ \mathbf{H}$ — векторы напряженностей электрического и магнитного полей; символ тильда над векторами полей отражает их комплексный характер.

В многослойном интегрально-оптическом волноводе электромагнитное поле, являющееся решением системы (1), на границах раздела слоев должно удовлетворять тангенциальным граничным условиям

$$\mathbf{E}^{\tau}\Big|_1 = \mathbf{E}^{\tau}\Big|_2, \quad \mathbf{H}^{\tau}\Big| = \mathbf{H}^{\tau}\Big|_2. \tag{2}$$

Решения уравнений Максвелла (1) ищем в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{E}\,(x,\,y,\,z,\,t) \\ \mathbf{H}\,(x,\,y,\,z,\,t) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \mathbf{E}\,(x;\,y,\,z) \\ \mathbf{H}\,(x;\,y,\,z) \end{array}\right\} \frac{\exp\{i\omega t - i\varphi(y,\,z)\}}{\sqrt{\beta(y,\,z)}}, \tag{3}$$

где $\beta_y(y,\,z) = \dfrac{1}{k_0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\beta_z(y,\,z) = \dfrac{1}{k_0}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$, $\beta(y,\,z) = \dfrac{1}{k_0}\sqrt{\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}$.

Подстановка (3) в (1) приводит после несложных преобразований к следующим результатам. Для компонент поля $E_x(x;\,y,\,z)$, $E_y(x;\,y,\,z)$, $H_y(x;\,y,\,z)$, $H_x(x;\,y,\,z)$ получаем выражения через продольные компоненты $E_z(x;\,y,\,z)$, $H_z(x;\,y,\,z)$ и их производные:

$$\chi_z^2 H_y = \left(p_y p_z + \frac{\partial p_z}{\partial y}\right) H_z - ik_0\varepsilon\frac{dE_z}{dx}, \quad \chi_z^2 H_x = p_z\frac{dH_z}{dx} + ik_0\varepsilon p_y E_z, \tag{4}$$

$$\chi_z^2 E_y = ik_0\mu\frac{dH_z}{dx} + \left(p_y p_z + \frac{\partial p_z}{\partial y}\right) E_z, \quad \chi_z^2 E_x = p_z\frac{dE_z}{dx} - ik_0\mu p_y H_z. \tag{5}$$

Для продольных компонент $E_z(x;\,y,\,z)$, $H_z(x;\,y,\,z)$ получаем следующие уравнения второго порядка:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \chi^2 E_z = -p_y\chi_z^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right)E_z - \frac{c}{i\omega\varepsilon}\left(\chi_z^2 p_z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right)\right)\frac{\partial H_z}{\partial x}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \chi^2 H_z = -p_y\chi_z^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right)H_z + \frac{c}{i\omega\mu}\left(\chi_z^2 p_z\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right)\right)\frac{\partial E_z}{\partial x}. \tag{7}$$

В соотношениях (4)–(7) использованы обозначения $\chi_z^2 = k_0^2\varepsilon\mu + p_z p_z + \partial p_z/\partial z$, $\chi^2 = \chi_z^2 + p_y p_y + \partial p_y/\partial y$, $p_y = -ik_0\beta_y - (2\beta)^{-1}\partial\beta/\partial y$, $p_z = -ik_0\beta_z - (2\beta)^{-1}\partial\beta/\partial z$, с помощью которых производные от напряженностей E_i выражаются следующим образом: $\partial E_i/\partial y = p_y E_i$, $\partial^2 E_i/\partial y^2 = (p_y p_y + \partial p_y/\partial y)E_i$, $\partial E_i/\partial z = p_z E_i$, $\partial^2 E_i/\partial z^2 = (p_z p_z + \partial p_z/\partial z)E_i$. Производные от напряженностей H_i выражаются аналогичным образом.

В работе рассматривается трех-, четырехслойный диэлектрический волновод следующей структуры. На подложку бесконечной вниз толщины из материала с оптическим показателем преломления n_s, размещенную в области $I_s = \{(x,\,y,\,z) : x \in (-\infty,\,-d]\,;\, y,\,z \in (-\infty,\,+\infty)\}$, нанесен основной волноводный слой толщиной d из материала с оптическим показателем преломления $n_f \geqslant n_s$, размещенный в области $I_f = \big\{(x,\,y,\,z) : x \in [-d,\,0];\ y,\,z \in (-\infty,\,+\infty)\big\}$. Сверху на основной волноводный слой нанесен дополнительный волноводный слой из материала с оптическим показателем преломления $n_l \geqslant n_s$ переменной толщины $x = h\,(y,\,z)$ (область ненулевой толщины ограничена в плоскости yOz), размещенный в области $I_l = \{(x,\,y,\,z) : x \in [0,\,h\,(y,\,z)]\,;\, y,\,z \in (-\infty,\,+\infty)\}$. Еще выше расположен покровный слой бесконечной вверх толщины из материала с оптическим показателем преломления $n_c \leqslant n_s$, размещенный в области $I =$

$\{(x,\, y,\, z) : x \in [h(y,\, z), +\infty)\, y,\, z \in (-\infty,\, +\infty)\}$. На каждой из границ раздела двух сред (границ между областями I_j) выполняются тангенциальные граничные условия

$$\mathbf{E}^{\tau}\Big|_{-d-0} = \mathbf{E}^{\tau}\Big|_{-d+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{-d-0} = \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{-d+0}, \tag{8}$$

$$\mathbf{E}^{\tau}\Big|_{-0} = \mathbf{E}^{\tau}\Big|_{+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{-0} = \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{+0}, \tag{9}$$

$$\mathbf{E}^{\tau}\Big|_{h(y,\,z)-0} = \mathbf{E}^{\tau}\Big|_{h(y,\,z)+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{h(y,\,z)-0} = \mathbf{H}^{\tau}\Big|_{h(y,\,z)+0}. \tag{10}$$

Кроме того, выполняются граничные условия (асимптотические) на бесконечности

$$\left|\mathbf{E}^{\tau}\Big|_{x\to\pm\infty}\right| < +\infty, \quad \left|\mathbf{H}^{\tau}\Big|_{x\to\pm\infty}\right| < +\infty.$$

Касательные плоскости к границам раздела для условий (8), (9) являются горизонтальными, поэтому система (8), (9) разделяется на независимые подсистемы для ТЕ- и ТМ-мод [6–8]. Касательные плоскости к границам раздела для условий (10) не являются горизонтальными, поэтому тангенциальные компоненты полей являются линейными комбинациями всех трех декартовых компонент полей с нетривиальными коэффициентами. Это не позволяет разделить систему уравнений (10) на две независимые подсистемы для ТЕ- и ТМ-мод, что приводит к гибридизации распространяющихся в нерегулярном интегрально-оптическом волноводе собственных (и вытекающих) мод [3].

1. АНАЛИЗ ПОРЯДКА МАЛОСТИ СЛАГАЕМЫХ В КОЭФФИЦИЕНТАХ КВАЗИВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнения (6), (7) и выражения (4), (5) являются точными и справедливы для любого нерегулярного волновода с дифференцируемой нерегулярностью толщин многослойного волновода. Для ряда интегрально-оптических устройств коэффициент фазового замедления $\beta\,(y,\, z)$ изменяется мало на расстояниях порядка длины волны λ_0. Это дает возможность использовать асимптотический метод решения системы (4)–(7). Достаточным условием применимости асимптотического метода является оценка $|\Delta\varphi| \ll |\nabla\varphi|^2$ (см., например, [9, 10]). Для тех случаев, когда нерегулярность волновода удовлетворяет условию малости изменения коэффициента фазового замедления на горизонтальных расстояниях порядка длины волны, введем безразмерный малый параметр

$$\delta \equiv \max_{y,z} \frac{\left|\Delta\varphi\right|}{\left|\nabla\varphi\right|^2} \equiv \max_{y,z} \frac{\left|(\boldsymbol{\nabla},\, \boldsymbol{\beta})\right|}{k_0\beta^2}.$$

Разложим уравнения (6), (7) и выражения (4), (5) в асимптотический ряд по малому параметру δ. После этого можно выписать соотношения (4)–(7) в нулевом, первом и более высоких порядках малости по параметру δ. Для этого разложения оценим порядки малости вкладов в основополагающие характеристики:

$$p_y,\, p_z,\, \chi_z^2,\, p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z},\, p_y^2 + \frac{\partial p_y}{\partial y},\, \frac{\partial p_z}{\partial y},\, \frac{\partial p_y}{\partial z},\, \frac{p_y}{\chi_z^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right),\, \frac{p_z}{\chi_z^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\chi_z^2}\right).$$

После подстановки разложений для указанных характеристик в соотношения (4), (5) и уравнения (6), (7) получим громоздкие выражения. Сгруппируем их по порядку малости относительно δ и выделим из них слагаемые нулевого порядка малости.

В каждой из областей I_j с постоянными ε и μ: $\varepsilon_1\mu_1 = n_s^2$, $\varepsilon_2\mu_2 = n_f^2$, $\varepsilon_3\mu_3 = n_f^2$, $\varepsilon_4\mu_4 = n_c^2$ для нулевых приближений величин E_x, E_y, H_y, H_x справедливы выражения

$$E_y^0 = \frac{1}{k_0^2\left(\varepsilon\mu - \beta_z^2\right)}\left(ik_0\mu\frac{dH_z^0}{dx} + k_0^2\beta_y\beta_z E_z^0\right), \tag{11}$$

$$E_x^0 = \frac{1}{k_0^2\left(\varepsilon\mu - \beta_z^2\right)}\left(-ik_0\beta_z\frac{dE_z^0}{dx} - k_0^2\mu\beta_y H_z^0\right), \tag{12}$$

$$H_y^0 = \frac{1}{k_0^2\left(\varepsilon\mu - \beta_z^2\right)}\left(-k_0^2\beta_y\beta_z H_z^0 - ik_0\varepsilon\frac{dE_z^0}{dx}\right), \tag{13}$$

$$H_x^0 = \frac{1}{k_0^2\left(\varepsilon\mu - \beta_z^2\right)}\left(-ik_0\beta_z\frac{dH_z^0}{dx} + k_0^2\varepsilon\beta_y E_z^0\right). \tag{14}$$

Уравнения (6), (7) принимают в нулевом приближении (по порядку малости δ) простой вид уравнения линейного осциллятора (в текстах по планарным и интегрально-оптическим волноводам они называются волновыми уравнениями):

$$\frac{d^2E_z^{(0)}}{dx^2} + k_0^2\left(\varepsilon_j\mu_j - \beta^2\right)E_z^{(0)} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{d^2H_z^{(0)}}{dx^2} + k_0^2\left(\varepsilon_j\mu_j - \beta^2\right)H_z^{(0)} = 0. \tag{16}$$

Тангенциальные граничные условия в нулевом приближении имеют вид

$$\mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{-d-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{-d+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{-d-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{-d+0}, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{+0}, \tag{18}$$

$$\mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{h(y,z)-0} = \mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{h(y,z)+0}, \qquad \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{h(y,z)-0} = \mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{h(y,z)+0}. \tag{19}$$

Кроме того, выполняются граничные условия (асимптотические) на бесконечности

$$\left|\mathbf{E}^{\tau(0)}\Big|_{x\to\pm\infty}\right| < +\infty, \quad \left|\mathbf{H}^{\tau(0)}\Big|_{x\to\pm\infty}\right| < +\infty.$$

Рассмотрим более подробно условия (19). В точке $(h(y,\,z),\,y,\,z)'$ границы раздела $x = h(y,\,z)$ касательная плоскость задается уравнением $dx - (\partial h/\partial y)dy - (\partial h/\partial z)dz = 0$. Граничные условия на границе раздела в нулевом приближении выражаются через тангенциальные составляющие напряженностей электрического $\mathbf{E}^{\tau(0)}$ и магнитного $\mathbf{H}^{\tau(0)}$ полей, которые полностью задаются [1] парами независимых компонент $E_y^{\tau(0)}$, $E_z^{\tau(0)}$ и $H_y^{\tau(0)}$, $H_z^{\tau(0)}$:

$$E_y^{\tau(0)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial y}E_x^{(0)} + \left[1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]E_y^{(0)} - \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}E_z^{(0)}}{1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2},$$

$$E_z^{\tau(0)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial z}E_x^{(0)} - \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}E_y^{(0)} + \left[1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]E_z^{(0)}}{1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2},$$

$$H_y^{\tau(0)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial y}H_x^{(0)} + \left[1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]H_y^{(0)} - \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}H_z^{(0)}}{1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2},$$

$$H_z^{\tau(0)} = \frac{\dfrac{\partial h}{\partial z}H_x^{(0)} - \dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}H_y^{(0)} + \left[1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]H_z^{(0)}}{1 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial z}\right)^2}.$$

Из трех компонент тангенциального поля $\mathbf{E}^{\tau(0)}$ лишь две линейно независимы. Следовательно, достаточно выписать граничные условия лишь для $E_y^{\tau(0)}$, $E_z^{\tau(0)}$:

$$E_y^{\tau(0)}\,(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)-0} = E_y^{\tau(0)}\,(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)+0}, \tag{20}$$

$$E_z^{\tau(0)}\,(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)-0} = E_z^{\tau(0)}\,(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)+0}. \tag{21}$$

Аналогично из трех компонент магнитного поля лишь две $\left(H_y^{\tau(0)}\text{ и } H_z^{\tau(0)}\right)$ являются линейно независимыми. Следовательно, граничные условия достаточно выписать лишь для них:

$$H_y^{\tau(0)}(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)-0} = H_y^{\tau(0)}(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)+0}, \tag{22}$$

$$H_z^{\tau(0)}(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)-0} = H_z^{\tau(0)}(x;\,y,\,z)\Big|_{x=h(y,z)+0}. \tag{23}$$

2. РЕШЕНИЕ АДИАБАТИЧЕСКИХ МОД В НУЛЕВОМ ВЕКТОРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения (15), (16) для продольных декартовых компонент электромагнитного поля являются обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, фундаментальные системы решений которых состоят из двух независимых решений, явный вид которых зависит от знака вещественного сомножителя $k_0^2\left(\varepsilon_j\mu_j-\beta^2\right)$ перед искомой функцией. Если сомножитель положителен, уравнение является уравнением линейного осциллятора с частотой, равной корню квадратному из обсуждаемого сомножителя, а фундаментальная система состоит из косинуса и синуса упомянутой частоты. Если сомножитель отрицателен, то фундаментальная система состоит из экспонент с положительным и отрицательным показателем, величина которого равна корню квадратному из абсолютной величины обсуждаемого сомножителя [11].

Следует отметить, что коэффициент фазового замедления $\beta(y,\,z)$, входящий в обсуждаемый сомножитель, остается пока неопределенным. Он будет найден из условия разрешимости системы граничных уравнений (условий). При этом (в случае собственных мод изучаемого многослойного волновода) существует [12] ряд ограничений на $\beta(y,\,z)$. В случае $n_c\leqslant n_s\leqslant\beta\leqslant\max\left(n_f,\,n_l\right)$ решения уравнений (15) и (16) осциллируют по переменной x и являются стоячими волнами в вертикальном направлении, в случае $\beta\geqslant\max\left(n_f,\,n_l\right)$ уравнения (15) и (16) имеют лишь тривиальные решения, в случае $\beta\leqslant n_c,\,n_s$ решения уравнений (15) и (16) являются экспонентами с вещественными показателями, из которых асимптотическим граничным условиям на бесконечности удовлетворяют лишь те, что убывают при удалении от волновода в вертикальном направлении.

В дальнейшем будем рассматривать для определенности случай $n_c\leqslant n_s\leqslant\beta\leqslant n_f\leqslant n_l$, для которого введем следующие обозначения:

$$\left(\chi_s^{(0)}\right)^2=k_0^2\left(n_s^2-\beta^2\right)=-\left(\gamma_s^{(0)}\right)^2<0,\left(\chi_f^{(0)}\right)^2=k_0^2\left(n_f^2-\beta^2\right)>0,$$
$$\left(\chi_l^{(0)}\right)^2=k_0^2\left(n_l^2-\beta^2\right)>0,\left(\chi_c^{(0)}\right)^2=k_0^2\left(n_c^2-\beta^2\right)=-\left(\gamma_c^{(0)}\right)^2<0.$$

Тогда общее решение уравнения (15) имеет вид

$$E_{zs}^{(0)} = A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right),$$

$$E_{zf}^{(0)} = A_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right) + A_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right), \text{ если } \beta \leqslant n_f \leqslant n_l, \text{ и}$$

$$E_{zf}^{(0)} = A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) + A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right), \text{ если } n_f \leqslant \beta \leqslant n_l,$$

$$E_{zl}^{(0)} = A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right),$$

$$E_{zc}^{(0)} = A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right).$$

Соответственно, общее решение уравнения (16) имеет вид

$$H_{zs}^{(0)} = B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right),$$

$$H_{zf}^{(0)} = B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right), \text{ если } \beta \leqslant n_f \leqslant n_l, \text{ и}$$

$$H_{zf}^{(0)} = B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right), \text{ если } n_f \leqslant \beta \leqslant n_l,$$

$$H_{zl}^{(0)} = B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right),$$

$$H_{zc}^{(0)} = B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right).$$

Выражения для нулевых приближений поперечных и вертикальных декартовых компонент электромагнитного поля согласно выражениям (11)–(14) принимают следующий вид.

Для поперечной компоненты напряженности электрического поля

$$E_{ys}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2 \beta_y \beta_z A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right) + i k_0 \mu \gamma_s^{(0)} B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right)\right),$$

$$E_{yf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right) + A_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right)\right) + \\ + i k_0 \mu \chi_f^{(0)} \left(-B_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right) + B_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right)\right) \end{array}\right),$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l,$ и

$$E_{yf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) + A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) + \\ + i k_0 \mu \gamma_f^{(0)} \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) - B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) \end{array}\right),$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l,$

$$E_{yl}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} k_0^2\beta_y\beta_z \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)}x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right) + \\ +ik_0\mu\chi_l^{(0)} \left(-B_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)}x\right) + B_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$E_{yc}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2\beta_y\beta_z A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right) - ik_0\mu\gamma_c^{(0)} B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)\right).$$

Для вертикальной компоненты напряженности электрического поля

$$E_{xs}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2\mu\beta_y B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)}x\right) - ik_0\beta_z\gamma_s^{(0)} A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)}x\right)\right),$$

$$E_{xf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} -k_0^2\mu\beta_y \left(B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)}x\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)}x\right)\right) + \\ +ik_0\beta_z\chi_f^{(0)} \left(A_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)}x\right) - A_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)}x\right)\right) \end{pmatrix},$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$E_{xf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} -k_0^2\mu\beta_y \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)}x\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)}x\right)\right) + \\ -ik_0\beta_z\gamma_f^{(0)} \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)}x\right) - A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)}x\right)\right) \end{pmatrix},$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$,

$$E_{xl}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} -k_0^2\mu\beta_y \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)}x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right) + \\ +ik_0\beta_z\chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)}x\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right) \end{pmatrix},$$

$$E_{xc}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2\mu\beta_y B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right) + ik_0\beta_z\gamma_c^{(0)} A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)\right).$$

Для вертикальной компоненты напряженности магнитного поля

$$H_{xs}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2\varepsilon\beta_y A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)}x\right) - ik_0\beta_z\gamma_s^{(0)} B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)}x\right)\right),$$

$$H_{xf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} k_0^2\varepsilon\beta_y \left(A_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)}x\right) + A_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)}x\right)\right) + \\ +ik_0\beta_z\chi_f^{(0)} \left(B_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)}x\right) - B_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)}x\right)\right) \end{pmatrix},$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{xf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} k_0^2 \varepsilon \beta_y \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) + A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) + \\ -ik_0 \beta_z \gamma_f^{(0)} \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) - B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right),$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$,

$$H_{xl}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} k_0^2 \varepsilon \beta_y \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \beta_z \chi_l^{(0)} \left(B_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - B_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right),$$

$$H_{xc}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2 \varepsilon \beta_y A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + ik_0 \beta_z \gamma_c^{(0)} B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right).$$

Для поперечной компоненты напряженности магнитного поля

$$H_{ys}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2 \beta_y \beta_z B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right) - ik_0 \varepsilon \gamma_s^{(0)} A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x\right)\right),$$

$$H_{yf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_f^{(0)} \left(A_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)} x\right) - A_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right),$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{yf}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) - \\ -ik_0 \varepsilon \gamma_f^{(0)} \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x\right) - A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right),$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$,

$$H_{yl}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right),$$

$$H_{yc}^{(0)} = \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2 \beta_y \beta_z B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + ik_0 \varepsilon \gamma_c^{(0)} A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right).$$

Здесь использованы обозначения

$$\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2 = k_0^2 \left(n_s^2 - \beta_z^2\right) = -\left(\gamma_{zs}^{(0)}\right)^2 < 0, \left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2 = k_0^2 \left(n_f^2 - \beta_z^2\right) > 0,$$
$$\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2 = k_0^2 \left(n_l^2 - \beta_z^2\right) > 0, \left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2 = k_0^2 \left(n_c^2 - \beta_z^2\right) = -\left(\gamma_{zc}^{(0)}\right)^2 < 0.$$

3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА РЕГУЛЯРНЫХ ГРАНИЦАХ В НУЛЕВОМ ВЕКТОРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим сначала уравнения (17) граничных условий на горизонтальной границе раздела подложки и первого волноводного слоя, пересекающей ось Ox в точке x_1:

$$E_{zs}^{(0)} = E_{zf}^{(0)} \Leftrightarrow A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) = A_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) + A_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right), \quad (24а)$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$E_{zs}^{(0)} = E_{zf}^{(0)} \Leftrightarrow A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) = A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) + A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right), \quad (24б)$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$H_{ys}^{(0)} = H_{yf}^{(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2}\left(-k_0^2 \beta_y \beta_z B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) - \right.$$
$$\left. - ik_0 \varepsilon \gamma_s^{(0)} A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right)\right) + \\ + ik_0 \varepsilon \chi_f^{(0)} \left(A_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) - A_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right)\right) \end{array}\right), \quad (25а)$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{ys}^{(0)} = H_{yf}^{(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2}\left(-k_0^2 \beta_y \beta_z B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) - \right.$$
$$\left. - ik_0 \varepsilon \gamma_s^{(0)} A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right)\right) - \\ -ik_0 \varepsilon \gamma_f^{(0)} \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) - A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right)\right) \end{array}\right), \quad (25б)$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$H_{zs}^{(0)} = H_{zf}^{(0)} \Leftrightarrow B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) = B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right), \quad (26а)$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{zs}^{(0)} = H_{zf}^{(0)} \Leftrightarrow B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) = B_f^{+} \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) + B_f^{-} \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right), \tag{26б}$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$\begin{gathered} E_{ys}^{(0)} = E_{yf}^{(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2}\Big(k_0^2 \beta_y \beta_z A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) + \\ + ik_0 \mu \gamma_s^{(0)} B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right)\Big) = \\ = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_f^{+} \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) + A_f^{-} \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right)\right) + \\ + ik_0 \mu \chi_f^{(0)} \left(-B_f^{+} \sin\left(\chi_f^{(0)} x_1\right) + B_f^{-} \cos\left(\chi_f^{(0)} x_1\right)\right) \end{array} \right), \end{gathered} \tag{27а}$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$\begin{gathered} E_{ys}^{(0)} = E_{yf}^{(0)} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\chi_{zs}^{(0)}\right)^2}\Big(k_0^2 \beta_y \beta_z A_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right) + \\ + ik_0 \mu \gamma_s^{(0)} B_s \exp\left(\gamma_s^{(0)} x_1\right)\Big) = \\ = \frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_f^{+} \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) + A_f^{-} \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right)\right) + \\ + ik_0 \mu \gamma_f^{(0)} \left(B_f^{+} \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_1\right) - B_f^{-} \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_1\right)\right) \end{array} \right), \end{gathered} \tag{27б}$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$.

Далее рассмотрим уравнения (18) граничных условий на горизонтальной границе раздела первого волноводного слоя и второго волноводного слоя, пересекающей ось Ox в точке x_2.

$$\begin{gathered} E_{zf}^{(0)} = E_{zl}^{(0)} \Leftrightarrow \\ A_f^{+} \cos\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) + A_f^{-} \sin\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) = A_l^{+} \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + A_l^{-} \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right), \end{gathered} \tag{28а}$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$E_{zf}^{(0)} = E_{zl}^{(0)} \Leftrightarrow$$
$$A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_2\right) + A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_2\right) = A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right), \tag{28б}$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$H_{yf}^{(0)} = H_{yl}^{(0)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x_2\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_f^{(0)} \left(A_f^+ \sin\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) - A_f^- \cos\left(\chi_f^{(0)} x_2\right)\right) \end{array} \right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right)\right) \end{array} \right), \tag{29а}$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{yf}^{(0)} = H_{yl}^{(0)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_2\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_2\right)\right) - \\ -ik_0 \varepsilon \gamma_f^{(0)} \left(A_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_2\right) - A_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_2\right)\right) \end{array} \right) =$$
$$= \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{c} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right)\right) \end{array} \right), \tag{29б}$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$H_{zf}^{(0)} = H_{zl}^{(0)} \Leftrightarrow$$
$$B_f^+ \cos\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) + B_f^- \sin\left(\chi_f^{(0)} x_2\right) = B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right), \tag{30а}$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$H_{zf}^{(0)} = H_{zl}^{(0)} \Leftrightarrow$$
$$B_f^+ \exp\left(\gamma_f^{(0)} x_2\right) + B_f^- \exp\left(-\gamma_f^{(0)} x_2\right) =$$
$$= B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x_2\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x_2\right), \tag{30б}$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$;

$$E_{yf}^{(0)} = E_{yl}^{(0)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{l} k_0^2\beta_y\beta_z\left(A_f^+\cos\left(\chi_f^{(0)}x_2\right)+A_f^-\sin\left(\chi_f^{(0)}x_2\right)\right)+ \\ +ik_0\mu\chi_f^{(0)}\left(-B_f^+\sin\left(\chi_f^{(0)}x_2\right)+B_f^-\cos\left(\chi_f^{(0)}x_2\right)\right)\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{l} k_0^2\beta_y\beta_z\left(A_l^+\cos\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)+A_l^-\sin\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)\right)+ \\ +ik_0\mu\chi_l^{(0)}\left(-B_l^+\sin\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)+B_l^-\cos\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)\right)\end{array}\right), \quad (31а)$$

если $\beta \leqslant n_f \leqslant n_l$, и

$$E_{yf}^{(0)} = E_{yl}^{(0)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\left(\chi_{zf}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{l} k_0^2\beta_y\beta_z\left(A_f^+\exp\left(\gamma_f^{(0)}x_2\right)+A_f^-\exp\left(-\gamma_f^{(0)}x_2\right)\right)+ \\ +ik_0\mu\gamma_f^{(0)}\left(B_f^+\exp\left(\gamma_f^{(0)}x_2\right)-B_f^-\exp\left(-\gamma_f^{(0)}x_2\right)\right)\end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{l} k_0^2\beta_y\beta_z\left(A_l^+\cos\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)+A_l^-\sin\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)\right)+ \\ +ik_0\mu\chi_l^{(0)}\left(-B_l^+\sin\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)+B_l^-\cos\left(\chi_l^{(0)}x_2\right)\right)\end{array}\right), \quad (31б)$$

если $n_f \leqslant \beta \leqslant n_l$.

4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ГРАНИЦАХ В НУЛЕВОМ ВЕКТОРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим уравнения (19) граничных условий на негоризонтальной границе раздела первого волноводного слоя и второго волноводного слоя, пересекающей ось Ox в точке x_3. Заметим, что левую и правую части уравнений можно разделить на общий ненулевой множитель $\left(1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right)$, после чего уравнения (20)–(23) для величин

$$\tilde{E}_y^{\tau(0)} = \frac{\partial h}{\partial y}E_x^{(0)} + \left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]E_y^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}E_z^{(0)},$$

$$\tilde{E}_z^{\tau(0)} = \frac{\partial h}{\partial z}E_x^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}E_y^{(0)} + \left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right]E_z^{(0)},$$

$$\tilde{H}_y^{\tau(0)} = \frac{\partial h}{\partial y} H_x^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] H_y^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_z^{(0)},$$
$$\tilde{H}_z^{\tau(0)} = \frac{\partial h}{\partial z} H_x^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_y^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] H_z^{(0)}$$

принимают следующий вид (значения слева берутся при $x_3 - 0$, справа при $x_3 + 0$).

Соотношение

$$\tilde{E}_{zl}^{\tau(0)} = \tilde{E}_{zc}^{\tau(0)} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial z} E_{xl}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{yl}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] E_{zl}^{(0)} =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial z} E_{xc}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{yc}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] E_{zc}^{(0)}$$

записываем, используя явные выражения для $E_z^{(0)}$, $H_z^{(0)}$, $E_y^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $E_x^{(0)}$, $H_x^{(0)}$, в виде

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} -k_0^2 \mu \beta_y \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \beta_z \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{pmatrix} -$$
$$-\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \begin{pmatrix} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \mu \chi_l^{(0)} \left(-B_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{pmatrix} +$$
$$+ \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2 \mu \beta_y B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + ik_0 \beta_z \gamma_c^{(0)} A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) -$$
$$-\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2 \beta_y \beta_z A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) - ik_0 \mu \gamma_c^{(0)} B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) +$$
$$+ \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right). \quad (32)$$

Соотношение

$$\tilde{E}_{yl}^{\tau(0)} = \tilde{E}_{yc}^{\tau(0)} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y} E_{xl}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] E_{yl}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{zl}^{(0)} =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial y} E_{xc}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] E_{yc}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{zc}^{(0)}$$

записываем, используя явные выражения для $E_z^{(0)}$, $H_z^{(0)}$, $E_y^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $E_x^{(0)}$, $H_x^{(0)}$, в виде

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} -k_0^2 \mu \beta_y \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ + i k_0 \beta_z \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right) +$$
$$+ \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \times$$
$$\times \left(\begin{array}{l} k_0^2 \beta_y \beta_z \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ + i k_0 \mu \chi_l^{(0)} \left(-B_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right) -$$
$$- \left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2 \mu \beta_y B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + i k_0 \beta_z \gamma_c^{(0)} A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) +$$
$$+ \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2 \beta_y \beta_z A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) -\right.$$
$$\left. - i k_0 \mu \gamma_c^{(0)} B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) - \left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right); \quad (33)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} E_{xl}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] E_{yl}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{zl}^{(0)} =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial y} E_{xc}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] E_{yc}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} E_{zc}^{(0)}.$$

Соотношение

$$\tilde{H}_{zl}^{\tau(0)} = \tilde{H}_{zc}^{\tau(0)} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial z} H_{xl}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_{yl}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] H_{zl}^{(0)} =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial z} H_{xc}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_{yc}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] H_{zc}^{(0)}$$

записываем, используя явные выражения для $E_z^{(0)}$, $H_z^{(0)}$, $E_y^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $E_x^{(0)}$, $H_x^{(0)}$, в виде

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} k_0^2 \varepsilon \beta_y \left(A_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + A_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \beta_z \chi_l^{(0)} \left(B_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - B_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right) -$$
$$-\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2} \left(\begin{array}{l} -k_0^2 \beta_y \beta_z \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) + \\ +ik_0 \varepsilon \chi_l^{(0)} \left(A_l^+ \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right) - A_l^- \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) \end{array} \right) +$$
$$+ \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] \left(B_l^+ \cos\left(\chi_l^{(0)} x\right) + B_l^- \sin\left(\chi_l^{(0)} x\right)\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(k_0^2 \varepsilon \beta_y A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + ik_0 \beta_z \gamma_c^{(0)} B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) -$$
$$- \left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right) \frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2} \left(-k_0^2 \beta_y \beta_z B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right) + \right.$$
$$\left. + ik_0 \varepsilon \gamma_c^{(0)} A_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right)\right) + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2\right] B_c \exp\left(-\gamma_c^{(0)} x\right). \quad (34)$$

Соотношение

$$\tilde{H}_{yl}^{\tau(0)} = \tilde{H}_{yc}^{\tau(0)} \Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial y} H_{xl}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] H_{yl}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_{zl}^{(0)} =$$
$$= \frac{\partial h}{\partial y} H_{xc}^{(0)} + \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right] H_{yc}^{(0)} - \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z} H_{zc}^{(0)}$$

записываем, используя явные выражения для $E_z^{(0)}$, $H_z^{(0)}$, $E_y^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $E_x^{(0)}$,

$H_x^{(0)}$, в виде

$$\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2}\left(\begin{array}{l} k_0^2\varepsilon\beta_y\left(A_l^+\cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)+A_l^-\sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right)+ \\ +ik_0\beta_z\chi_l^{(0)}\left(B_l^+\sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)-B_l^-\cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right)\end{array}\right)+$$

$$+\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]\frac{1}{\left(\chi_{zl}^{(0)}\right)^2}\times$$

$$\times\left(\begin{array}{l} -k_0^2\beta_y\beta_z\left(B_l^+\cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)+B_l^-\sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right)+ \\ +ik_0\varepsilon\chi_l^{(0)}\left(A_l^+\sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)-A_l^-\cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right)\end{array}\right)-$$

$$-\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\left(B_l^+\cos\left(\chi_l^{(0)}x\right)+B_l^-\sin\left(\chi_l^{(0)}x\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2}\left(k_0^2\varepsilon\beta_yA_c\exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)+ik_0\beta_z\gamma_c^{(0)}B_c\exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)\right)+$$

$$+\left[1+\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]\frac{1}{\left(\chi_{zc}^{(0)}\right)^2}\left(-k_0^2\beta_y\beta_zB_c\exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)+\right.$$

$$\left.+ik_0\varepsilon\gamma_c^{(0)}A_c\exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right)\right)-\left(\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial z}\right)B_c\exp\left(-\gamma_c^{(0)}x\right). \quad (35)$$

После приведения подобных членов в уравнениях граничных условий (32)–(35) получаем однородные линейные уравнения для неопределенных амплитудных коэффициентов A_s, B_s, $A_f^{\pm}$, $B_f^{\pm}$, $A_l^{\pm}$, $B_l^{\pm}$, A_c, B_c.

5. МЕТОД И АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АДИАБАТИЧЕСКИХ МОД В НУЛЕВОМ ВЕКТОРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

5.1. Метод решения исходной задачи. Мы получили решение системы уравнений Максвелла (1) в виде (3) в нулевом приближении в четырех областях I_j, причем общий вид решений в областях I_s и I_c получен с учетом граничных условий на бесконечности. Решения $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{H}_j$ в областях I_j зависят от двенадцати амплитудных коэффициентов A_s, B_s, $A_f^{\pm}$, $B_f^{\pm}$, $A_l^{\pm}$, $B_l^{\pm}$, A_c, B_c и от коэффициента фазового замедления $\beta\,(y,\,z)$. Частичные решения $\mathbf{E}_j$, $\mathbf{H}_j$ задают решение во всем пространстве, если они удовлетворяют двенадцати уравнениям (24)–(35) граничных условий. Уравнения (24)–(35) образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\hat{M}(\beta)\left(\mathbf{A},\,\mathbf{B}\right)^t=\vec{0} \quad (36)$$

относительно двенадцатимерного вектора $(\mathbf{A},\, \mathbf{B})^t$, которая обладает нетривиальным решением в случае, если определитель системы равен нулю:

$$\det(\hat{M}(\beta)) = 0. \tag{37}$$

Равенство нулю определителя (37) является условием разрешимости системы (36). И сама матрица $\hat{M}(\beta)$, и ее определитель $\det(\hat{M}(\beta))$ зависят от вещественного параметра $\beta \in [n_s,\, n_l]$. Значения $\beta_k(y,\, z)$, при которых выполняется (37), т. е. разрешима (36), являются искомыми значениями коэффициента фазового замедления $\beta_k(y,\, z)$. В свою очередь, корни $\beta_k(y,\, z)$ уравнения (37) параметрически зависят от d и $h(y,\, z)$, эта зависимость называется в интегральной оптике дисперсионной зависимостью $\beta(d,\, h)$.

5.2. Алгоритмы решения исходной задачи. Решаем уравнение (37) модифицированным методом деформируемого многогранника [13]. Вычисленные значения $\beta_k(y,\, z)$ подставляем в систему (36).

Полученную конкретную однородную систему линейных алгебраических уравнений решаем методом тихоновской регуляризации [14]

$$\left(\hat{M}\left(\beta_k\right)^T \hat{M}\left(\beta_k\right) + \alpha \hat{I}\right) \left(\mathbf{A},\, \mathbf{B}\right)^t = \hat{M}\left(\beta_k\right)^T \left(\mathbf{A}_0,\, \mathbf{B}_0\right)^t,$$

что эквивалентно минимизации тихоновского функционала [13, 14]

$$\left\| \hat{M}\left(\beta_k\right) \left(\mathbf{A},\, \mathbf{B}\right)^t \right\|^2 + \alpha \left\| \left(\mathbf{A},\, \mathbf{B}\right)^t - \left(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0\right)^t \right\|^2 \xrightarrow[(\mathbf{A},\mathbf{B})^t]{} \min.$$

Вычисленные коэффициенты A_s, B_s, $A_f^{\pm}$, $B_f^{\pm}$, $A_l^{\pm}$, $B_l^{\pm}$, A_c, B_c вместе с вычисленным значением $\beta_k(y,\, z)$ подставляем в формулы для компонент электромагнитного поля из п. 2, это завершает этап вычисления вертикального распределения электромагнитного поля в выражениях (3).

Вопрос вычисления фазы $\phi(y,\, z)$ электромагнитного поля в выражениях (3) будет рассмотрен в одной из следующих публикаций.

Следует отметить, что вычисленные дисперсионные соотношения $\beta_k(d,\, h)$ являются необходимой составной частью той информации, которая нужна для проектирования и тестирования плавно-нерегулярных интегрально-оптических устройств, обеспечивающих адекватное векторное электродинамическое описание трансформации электромагнитного поля, распространяющегося в изучаемых устройствах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 07-01-00738а и 08-01-00800а) и при частичной поддержке РФФИ (грант № 07-02-00778а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Севастьянов Л. А., Егоров А. А.* Теоретический анализ волноводного распространения электромагнитных волн в диэлектрических плавно-нерегулярных интегральных структурах // Оптика и спектроскопия. 2008. Т. 105. С. 632.
2. *Егоров А. А., Севастьянов Л. А., Севастьянов А. Л.* Исследование электродинамических свойств планарной тонкопленочной линзы Люнеберга // Журнал радиоэлектроники. 2008. № 6. С. 1–20.
3. *Егоров А. А., Севастьянов Л. А.* Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырехслойного трехмерного волновода // Квантовая электроника. 2009. Т. 39. С. 566.
4. *Egorov A. A. et al.* Propagation of Electromagnetic Waves in Thin-film Structures with Smoothly Irregular Sections // ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics 2008, September 15–18, 2008, St. Petersburg. St. Petersburg: ITMO, 2008. P. 231.
5. *Хансперджер Р.* Интегральная оптика: теория и технология. М.: Мир, 1985.
6. *Дерюгин Л. Н., Марчук А. Н., Сотин В. Е.* Свойства плоских несимметричных диэлектрических волноводов на подложке из диэлектрика // Изв. вузов: Радиоэлектроника. 1967. Т. 10. С. 134.
7. *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М.: Мир, 1974.
8. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
9. *Блохинцев Д. И.* Основы квантовой механики. М.: Высш. шк., 1961.
10. *Фреман Н., Фреман П. У.* ВКБ-приближение. М.: Мир, 1967.
11. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
12. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М.: Иностр. лит., 1962.
13. *Севастьянов Л. А. и др.* Алгоритмы вычислительного эксперимента для проектирования оптических наноструктур. М.: ИПК РУДН, 2008.
14. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

Получено 7 августа 2009 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 05.11.2009.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,37. Уч.-изд. л. 1,65. Тираж 310 экз. Заказ № 56762.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/