

P11-2010-96

И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,
И. Сархадов, З. А. Шарипов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАТОРА СДВИГА

Направлено в журнал «Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика»

Квазипотенциальные уравнения широко применяются для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В работе с использованием оператора сдвига $\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon)$ исследованы решения краевых задач для квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом, содержащего оператор $ch\left(i\varepsilon \frac{d}{dr}\right)$, при различных значениях параметра ε . Установлено, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеется решение, которое стремится к решению уравнения Шредингера. Кроме того, обнаружены так называемые пограничные решения и переход одного типа решения в другой. Исследования проведены при использовании системы символьных вычислений MAPLE.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

The quasipotential equations are widely applied to the relativistic description of a system of two particles, for example, a quark and an antiquark. In the work, using the shift operator $\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon)$, the solutions of boundary problems for the quasipotential equation with the Coulomb potential, containing the functional $ch\left(i\varepsilon \frac{d}{dr}\right)$, at various values of parameter ε are investigated. It is established that, at $\varepsilon \rightarrow 0$ there is a solution which aspires to the Schrödinger equation solution. Besides, the so-called frontier layer solutions and transition of one type of the solution into another are found out. Investigations are carried out using the system of symbolical evaluations MAPLE.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой — решение уравнения Шредингера на собственные значения [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость учета релятивистских эффектов.

Квазипотенциальные уравнения [2] широко применяются для релятивистского описания системы двух частиц, например, кварка и антикварка. В данной работе, так же как и в предыдущих наших работах [4–13], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [2, 3]. В частном случае, для S -волны, оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)]\psi(r) = 0, \quad (1)$$

где $E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} [\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}$, $H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ch \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right]$, ε — безразмерный параметр, $V(r) = -\frac{2Z}{r}$ — кулоновский потенциал взаимодействия.

В уравнении (1), разлагая оператор $ch \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right)$ в ряд, можно свести его к дифференциальному уравнению бесконечного порядка [14]. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $E_\varepsilon \rightarrow q^2$, $H_\varepsilon \rightarrow -\frac{d^2}{dr^2}$, т. е. уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2 \right] \psi(r) = 0. \quad (2)$$

Задача Коши для таких систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в работах [15, 16]. Краевые задачи для сингулярно-возмущенных уравнений являются предметом изучения широкого круга работ [17, 18].

Обозначим $E_\varepsilon = -\alpha^2$ собственное значение, где $\alpha^2 > 0$. Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$\left[-\alpha^2 - H_\varepsilon + \frac{2Z}{r} \right] \psi(r) = 0. \quad (3)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В предыдущих наших работах [4–13] исследовались краевые задачи для дифференциального уравнения высокого порядка. В данной работе, используя оператор сдвига

$$\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon), \quad (4)$$

уравнение (3) исследуем со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ \psi'(0) &= 1, & \psi'(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ & \dots\dots\dots \end{aligned} \quad (5)$$

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Решение с n узлами ищем в виде

$$\psi_n(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \dots (1 - c_n r) \exp(-\kappa r), \quad (6)$$

где $\kappa, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — неизвестные постоянные. Подставляя это выражение в уравнение (3), используя оператор сдвига и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях r , получаем уравнения для нахождения параметров $\kappa, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$

$$\sin(\varepsilon\kappa) - \frac{Z\varepsilon}{n+1} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

уравнение для нахождения собственного значения

$$\alpha^2 - \frac{4}{\varepsilon^2} \sin^2(\varepsilon\kappa/2) = 0 \quad (8)$$

и систему n уравнений для нахождения $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$. При $n = 0$ — это безузловое решение, $n = 1$ — решение с одним узлом, $n = 2$ — решение с двумя узлами и т. д.

Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (3), (5) сводится к следующему:

1. Для заданных значений ε и n ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы $\kappa > 0$) решения уравнения (7).

2. Подставляя найденные решения κ в уравнение (8), находим собственные значения.

3. Решая систему уравнений для $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, находим ненормированное решение (6), которое удовлетворит граничным условиям $\psi'(0) = 1$.

4. Далее мы будем изучать свойства нормированных решений. Для этого умножаем функцию ψ на константу A , которая находится из условия

$A \sqrt{\int_0^\infty \psi^2 dr} = 1$. При этом граничное условие $\psi'(0) = 1$ переходит в $\psi'(0) = A$.

Анализ действительных и положительных решений уравнения (7) проводим графически. Для этого введем обозначения $x = \varepsilon\kappa, \beta = \frac{Z\varepsilon}{n+1}$ и перепишем уравнение (7) в виде

$$\sin(x) - \beta = 0. \quad (9)$$

Решениями трансцендентного уравнения (9) являются точки пересечений горизонтальных линий для различных значений β с графиком функции $\sin(x)$.

Для любого фиксированного значения ε в интервале $0 < \varepsilon < \frac{n+1}{Z}$ существует бесконечное число положительных решений κ уравнения (7), когда

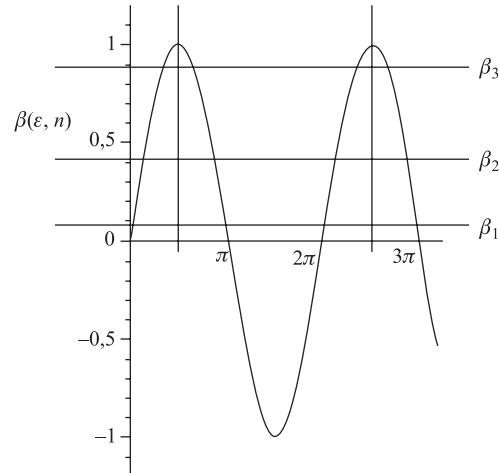


Рис. 1. График функции $\sin(x)$ и β

x находится в следующих интервалах:

$$2m\pi < x < \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (10)$$

и

$$\left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi < x < (2m + 1)\pi, \text{ где } m = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Мы специально разбили интервал на два подынтервала, так как решения в этих подынтервалах сильно отличаются друг от друга, что легче демонстрировать для решений с различными узлами. В дальнейшем решение задачи (3)–(5) будем сравнивать с решением уравнения Шредингера, поэтому ниже приведем необходимые значения параметров для решения уравнения Шредингера:

$\kappa = 1$, $\alpha^2 = 1$, $A = 2$ для решения без узлов;

$\kappa = \frac{1}{2}$, $c_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071067814$ для решения

с одним узлом;

$\kappa = \frac{1}{4}$, $c_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{3\sqrt{3}} \approx 0,5257834232$, $c_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3\sqrt{3}} \approx 0,1408832437$,

$\alpha^2 = \frac{1}{9}$, $A = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0,3849001795$ для решения с двумя узлами.

Теперь мы исследуем решения краевой задачи и подробно анализируем полученные результаты для решений следующих трех типов узлов:

1. Безузловое решение

а) *В интервале* $[0, \pi]$. Решение ищем в виде

$$\psi(r) = r \exp(-\kappa r). \quad (12)$$

Параметр κ находим, решая трансцендентное уравнение (7) при $n = 0$ и подставляя найденное решение в (8), находим собственное значение α^2 . Здесь коэффициент нормировки определяется по формуле $A = 2\kappa\sqrt{\kappa}$.

При анализе полученных решений установлено следующее:

а) При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ решение стремится к решению уравнения Шредингера; при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2m\pi + 0$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, собственные функции становятся погранслойными, собственные значения стремятся к собственному значению уравнения Шредингера; а при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow (2m + 1)\pi - 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, решения становятся погранслойными, причем собственные значения стремятся к бесконечности.

б) При $\varepsilon \rightarrow 1$ и $x \rightarrow \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \pm 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, два решения из разных интервалов (10) и (11) становятся практически одинаковыми.

Приведем решения для двух конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 1,000016667, \alpha^2 = 1,000025, A = 2,000050001 \text{ в } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\kappa = 313,1592487, \alpha^2 = 39998,99998, A = 11083,52383 \text{ в } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решение с вышеуказанными параметрами приведено на рис. 2.

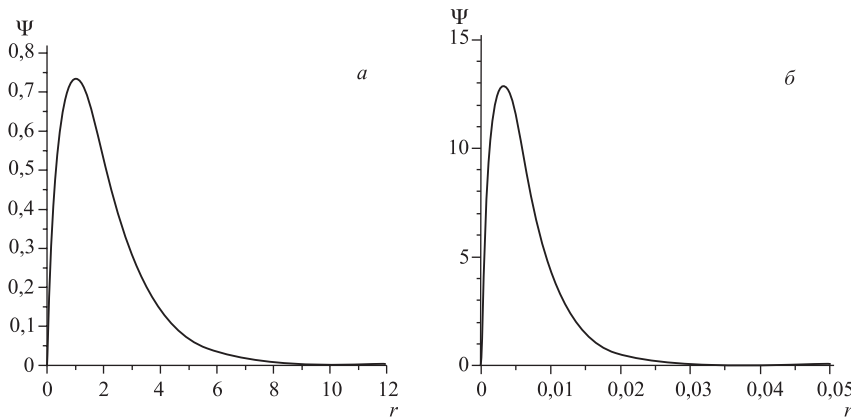


Рис. 2. *a* — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; *б* — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

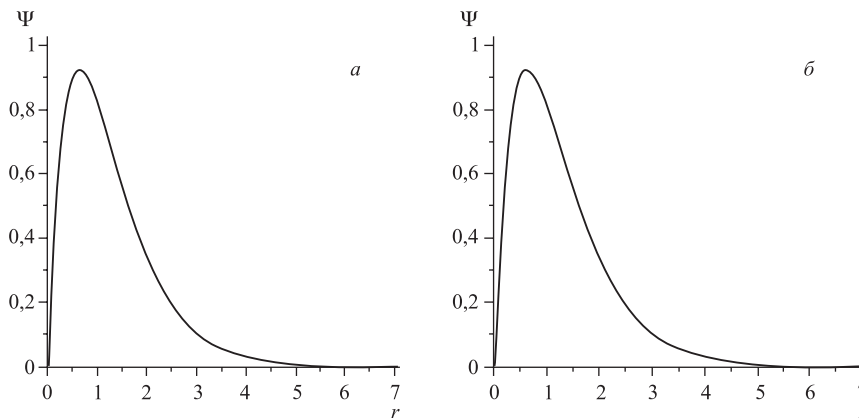


Рис. 3. *a* — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; *б* — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

При $\varepsilon = 0,99999$ в двух интервалах находим параметры

$$\kappa = 1,566339851, \alpha^2 = 1,991095574, A = 3,920658284 \text{ в } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\kappa = 1,575284219, \alpha^2 = 2,008984428, A = 3,954288749 \text{ в } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решение с этими параметрами приведено на рис. 3.

б) В интервале $[2\pi, 3\pi]$. Отличие от решения в интервале $[0, \pi]$ в этом интервале при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2\pi + 0$, только собственное значение стремится к собственному значению решения уравнения Шредингера, а собственная функция становится погранслошной. Остальные свойства решений сохраняются.

Как в интервале $[0, \pi]$, так и здесь, приведем решения для двух конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 629,3185475, \alpha^2 = 1,00002543, A = 31574,44991$$

$$\text{в интервале } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2};$$

$$\kappa = 941,4777795, \alpha^2 = 39998,99998, A = 57775,68552$$

$$\text{в интервале } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi.$$

Решение с этими параметрами приведено на рис. 4

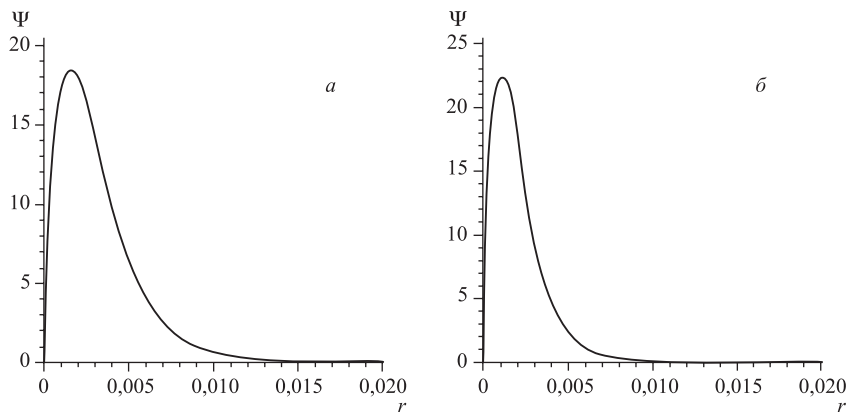


Рис. 4. *a* — решение в интервале $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$; *б* — решение в интервале $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$

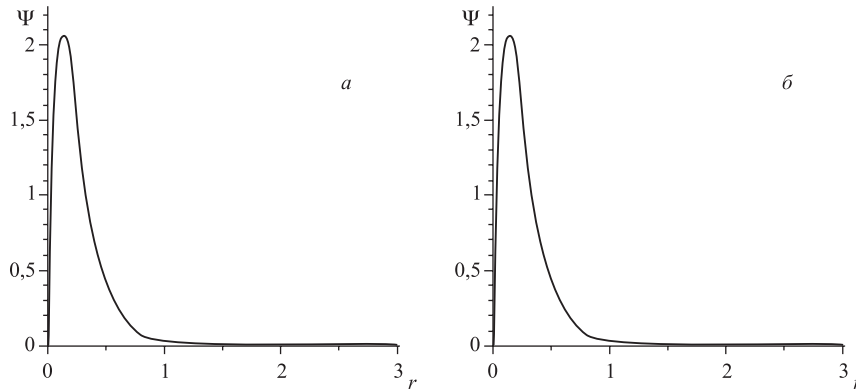


Рис. 5. *a* — решение в интервале $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$; *b* — решение в интервале $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$

При $\varepsilon = 0,99999$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 7,849587991, \alpha^2 = 1,991095576, A = 43,98456374$$

в интервале $2\pi < x < \frac{5\pi}{2}$;

$$\kappa = 7,85853236, \alpha^2 = 2,008984434, A = 44,05976378$$

в интервале $\frac{5\pi}{2} < x < 3\pi$.

Решение с такими параметрами приведено на рис. 5.

2. Одноузловое решение

a) В интервале $[0, \pi]$. Решение ищем в виде

$$\psi(r) = r(1 - c_1 r) \exp(-\kappa r). \quad (13)$$

Параметр κ находим, решая трансцендентное уравнение (7) при $n = 1$ и подставляя найденное решение в (8), находим собственное значение α^2 , а параметр c_1 находится из формулы

$$c_1 = \frac{Z}{2 \cos(\varepsilon \kappa)}. \quad (14)$$

Здесь коэффициент нормировки определяется по формуле

$$A = \frac{2\kappa^2 \sqrt{\kappa}}{\sqrt{\kappa^2 - 3c_1 \kappa + 3c_1^2}}.$$

Анализ решений задачи позволяет сделать следующие утверждения:

а) При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ решения стремятся к решению уравнения Шредингера, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2m\pi + 0$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, собственные значения стремятся к собственному значению решения уравнения Шредингера, собственные функции становятся погранслойными, причем точки пересечения узлов с осью остаются неизменными; при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow (2m + 1)\pi - 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, решения являются безузловыми, так как константа c_1 является отрицательной, и становятся погранслойными, а собственные значения стремятся к бесконечности.

б) При $\varepsilon \rightarrow 2$ и $x \rightarrow \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \pm 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, решения из интервала (10) являются одноузловыми (хотя узел стремится к нулю, так как точка пересечения оси $x = \frac{1}{c_1}$, а $c_1 \rightarrow \infty$), а из интервала (11) — безузловыми.

Приведем решения для двух конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 0,5000020834, \quad c_1 = 0,5000062500, \quad \alpha^2 = 0,2500015626,$$

$$A = 0,7071023624 \text{ в } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\kappa = 313,6592633, \quad c_1 = -0,50000625, \quad \alpha^2 = 39999,75,$$

$$A = 11083,56654 \text{ в } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решения с этими параметрами приведены на рис. 6.

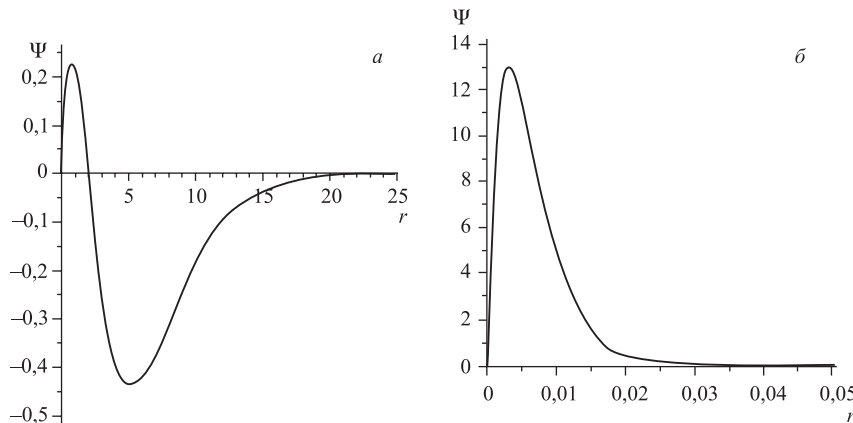


Рис. 6. а — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; б — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

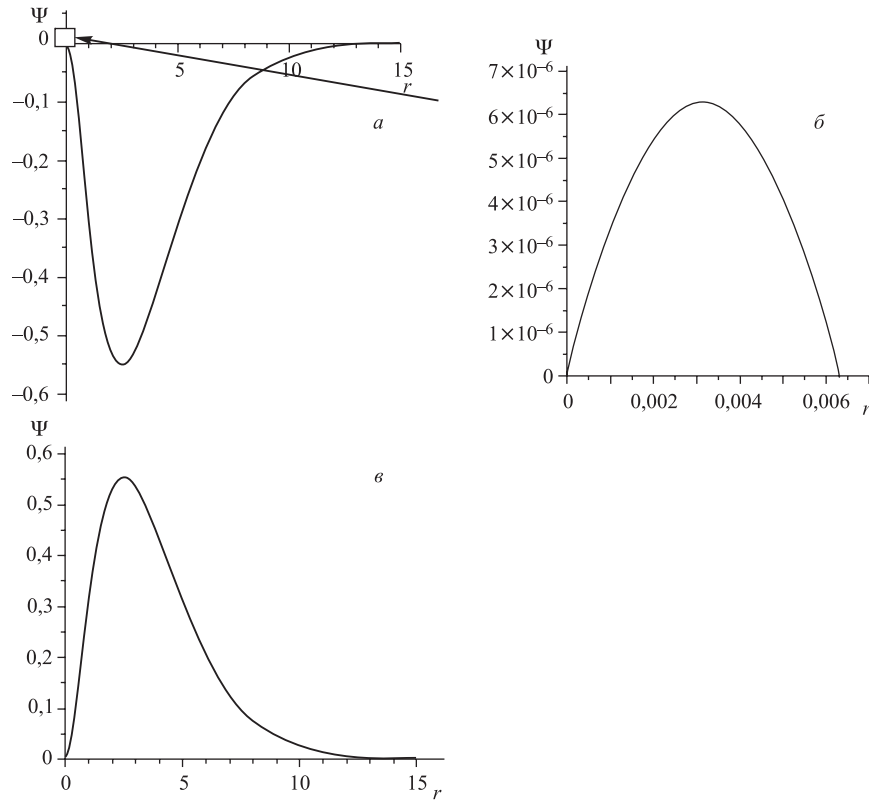


Рис. 7. *a* — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; *б* — узел решения *a* (в крупном масштабе); *в* — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

При $\varepsilon = 1,99999$ имеем следующие параметры:

$$\kappa = 0,783820943, \quad c_1 = 158,1140898, \quad \alpha^2 = 0,4984238476,$$

$$A = 0,003982156375 \quad \text{в } 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

$$\kappa = 0,7869832379, \quad c_1 = -158,1140693, \quad \alpha^2 = 0,5015861528,$$

$$A = 0,004002512 \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решения с такими параметрами приведены на рис. 7.

б) В интервале $[2\pi, 3\pi]$. Так же как и для безузлового решения, здесь есть отличие от решения в интервале $[0, \pi]$, в этом интервале при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2\pi + 0$ только собственное значение стремится к собственному зна-

чению решения уравнения Шредингера, а собственная функция становится погранслоной.

Приведем решения для двух конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 628,8185329, c_1 = 0,50000625, \alpha^2 = 0,2500015612,$$

$$A = 31574,47923 \text{ в } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2},$$

$$\kappa = 941,9777941, c_1 = -0,500006250, \alpha^2 = 39999,75,$$

$$A = 57775,7107 \text{ в } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi.$$

При $\varepsilon = 1,99999$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 3,925429305, c_1 = 158,1141308, \alpha^2 = 0,498423848,$$

$$A = 0,2257511164 \text{ в } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2},$$

$$\kappa = 3,9285916, c_1 = -158,1140282, \alpha^2 = 0,5015861532,$$

$$A = 0,2206572241 \text{ в } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi.$$

3. Решение с двумя узлами

а) В интервале $[0, \pi]$. Решение ищем в виде

$$\psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r) \exp(-\kappa r). \quad (15)$$

Параметр κ находим, решая трансцендентное уравнение (7) при $n = 2$ и подставляя найденное решение в (8), находим собственное значение α^2 .

Постоянные коэффициенты c_1, c_2 находим решая следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= -a, \\ c_1 c_2 &= b, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{где } a = -\frac{18Z \cos(\varepsilon\kappa)}{27 \cos^2(\varepsilon\kappa) - Z^2 \varepsilon^2}, b = \frac{2Z^2}{27 \cos^2(\varepsilon\kappa) - Z^2 \varepsilon^2}.$$

Здесь коэффициент нормировки определяется по формуле

$$A = \frac{2\kappa^3 \sqrt{2\kappa}}{\sqrt{2\kappa^4 - 6(c_1 + c_2)\kappa^3 + 6(c_1^2 + 4c_1 c_2 + c_2^2)\kappa^2 - 30(c_1^2 c_2 + c_1 c_2^2)\kappa + 45c_1^2 c_2^2}}.$$

В отличие от случая решения с одним узлом здесь важную роль играют знаки констант c_1 и c_2 . Причем при $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1$, где $2,598076211 < \varepsilon_1 < 2,598076212$ в

$0 < x < \frac{\pi}{2}$, двухузловое решение переходит в одноузловое, так как c_2 меняет свой знак (т.е. становится отрицательным), а в $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ безузловое решение переходит в одноузловое, так как здесь c_1 меняет свой знак (т.е. становится положительным).

При анализе решений установлено, что

а) При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ решения стремятся к решению уравнения Шредингера, а при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2m\pi + 0$, где $m = 1, 2, 3, \dots$, собственные значения стремятся к собственному значению решения уравнения Шредингера, собственные функции становятся погранслойными, причем точки пересечения узлов с осью остаются неизменными; при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow (2m + 1)\pi - 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, решения являются безузловыми, так как константы c_1, c_2 имеют отрицательные знаки, и становятся погранслойными.

б) При $\varepsilon > \varepsilon_1$ в обоих интервалах решения становятся одноузловыми.

в) При $\varepsilon \rightarrow 3$ и $x \rightarrow \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \pm 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, два решения из разных интервалов (10) и (11) становятся практически одинаковыми, решения являются одноузловыми.

Приведем решения для нескольких конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\kappa = 0,3333339506, c_1 = 0,5257890044, c_2 = 0,1408838352,$$

$$\alpha^2 = 0,1111114197, A = 0,3848955467 \text{ в } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\kappa = 313,8259314, c_1 = -0,1408838352, c_2 = -0,5257890044,$$

$$\alpha^2 = 39999,88889, A = 11083,57445 \text{ в } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решения с этими параметрами приведены на рис. 8.

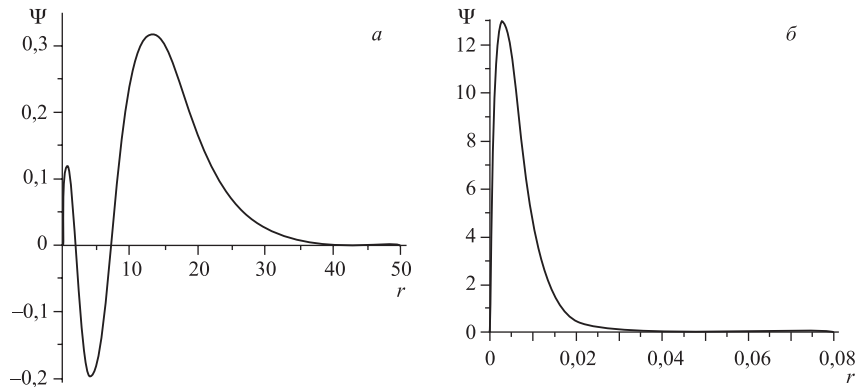


Рис. 8. а — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; б — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

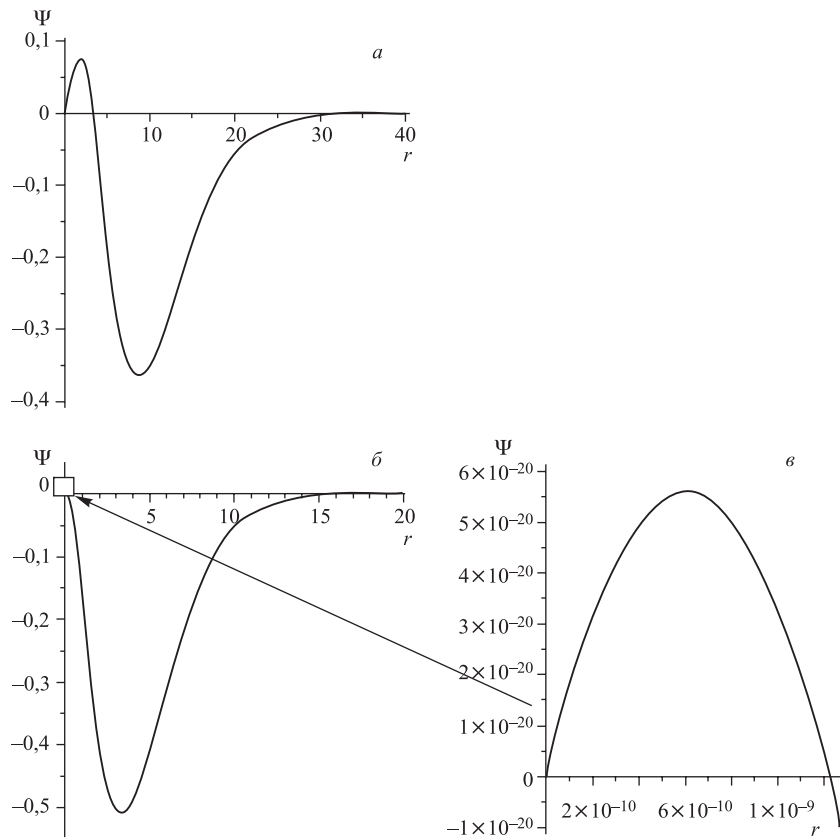


Рис. 9. *a* — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; *b* — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$; *v* — узел решения *b* в крупном масштабе

При $\varepsilon_1 < \varepsilon = 2,598076212$ в двух интервалах имеем значения параметров:

$$\kappa = 0,4030665256, \quad c_1 = 0,3, \quad c_2 = -4,090909089 \cdot 10^8, \quad \alpha^2 = 0,0911721326,$$

$$A = 2,431744880 \cdot 10^{-10} \quad \text{в } 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\kappa = 0,8061330504, \quad c_1 = 8,181818178 \cdot 10^8, \quad c_2 = -1,045821404,$$

$$\alpha^2 = 0,4444444444, \quad A = 1,836259113 \cdot 10^{-10} \quad \text{в } \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

Решения с этими параметрами приведены на рис. 9.

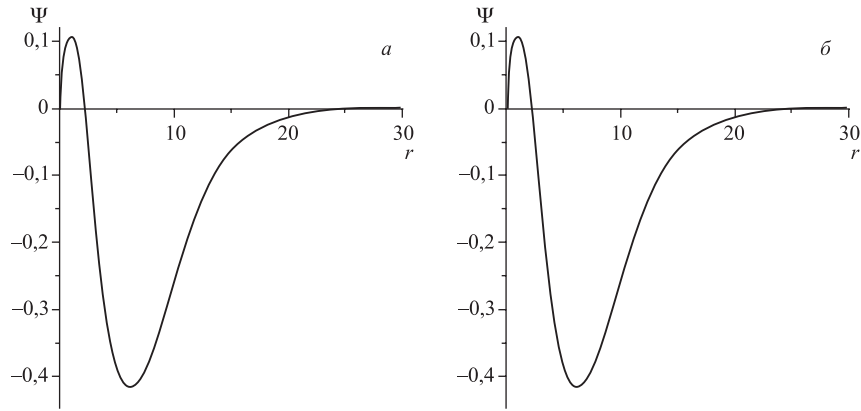


Рис. 10. *a* — решение в интервале $0 < x < \frac{\pi}{2}$; *б* — решение в интервале $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

При $\varepsilon = 2,99999$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\begin{aligned} \kappa &= 0,5227398591, \quad c_1 = 0,4688358346, \quad c_2 = -0,4739999202, \\ \alpha^2 &= 0,2216499279, \quad A = 0,2288360637 \text{ в } 0 < x < \frac{\pi}{2}; \\ \kappa &= 0,5244611829, \quad c_1 = 0,4739999206, \quad c_2 = -0,4688358342, \\ \alpha^2 &= 0,2227974796, \quad A = 0,2297753833 \text{ в } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{aligned}$$

Решения с такими параметрами приведены на рис. 10.

б) В интервале $[2\pi, 3\pi]$. Отличие от решения в интервале $[0, \pi]$ здесь при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2\pi + 0$, только собственное значение стремится к собственному значению решения уравнения Шредингера, а собственная функция становится погранслошной.

Приведем решения для нескольких конкретных значений параметра ε .

При $\varepsilon = 0,01$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\begin{aligned} \kappa &= 628,6518648, \quad c_1 = 0,5257890044, \quad c_2 = 0,1408838352, \\ \alpha^2 &= 0,1111114197, \quad A = 31574,48466 \text{ в } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}; \\ \kappa &= 942,1444622, \quad c_1 = -0,1408838352, \quad c_2 = -0,5257890044, \\ \alpha^2 &= 39999,88889, \quad A = 57775,71536 \text{ в } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi. \end{aligned}$$

При $\varepsilon_1 < \varepsilon = 2,598076212$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\begin{aligned} \kappa &= 2,821465678, \quad c_1 = 0,2, \quad c_2 = -1,38461538 \cdot 10^8, \\ \alpha^2 &= 0,0317018243, \quad A = 1,349069374 \cdot 10^{-7} \quad \text{в } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}; \\ \kappa &= 3,224532202, \quad c_1 = 5,294117645 \cdot 10^8, \quad c_2 = -0,3, \\ \alpha^2 &= 0,444444444, \quad A = 3,292170435 \cdot 10^{-8} \quad \text{в } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = 2,99999$ в двух интервалах находим следующие параметры:

$$\begin{aligned} \kappa &= 2,617141943, \quad c_1 = 0,4688358354, \quad c_2 = -0,4739999194, \\ \alpha^2 &= 0,2216499279, \quad A = 9,272379479 \quad \text{в } 2\pi < x < \frac{5\pi}{2}; \\ \kappa &= 2,618863267, \quad c_1 = 0,4739999214, \quad c_2 = -0,4688358334, \\ \alpha^2 &= 0,2227974796, \quad A = 9,336110063 \quad \text{в } \frac{5\pi}{2} < x < 3\pi. \end{aligned}$$

ВЫВОДЫ

В работе с использованием оператора сдвига $\exp\left(\pm i\varepsilon \frac{d}{dr}\right) f(r) = f(r \pm i\varepsilon)$ исследованы решения краевых задач для квазипотенциального уравнения с кулоновским потенциалом при различных значениях параметра ε . Исследования проведены при использовании системы символьных вычислений MAPLE. По полученным результатам можно сделать следующие выводы:

1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 0$ решения стремятся к решению уравнения Шредингера, при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow 2m\pi + 0$, $m = 1, 2, 3, \dots$, собственные значения стремятся к собственному значению решения уравнения Шредингера, собственные функции становятся погранслойными, причем точки пересечения узлов (для $n = 1, 2, \dots, n$) с осью остаются неизменными; а при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $x \rightarrow (2m+1)\pi - 0$, где $m = 0, 1, 2, \dots$, решения становятся погранслойными (их бесконечно много), причем собственные значения стремятся к бесконечности.

2. При переходе ε через значения ε_1 меняется тип решения (т. е. это точка бифуркации).

3. При $\varepsilon \rightarrow \frac{n+1}{Z}$ и $x \rightarrow \left(2m + \frac{1}{2}\right)\pi \pm 0$, где $n = 0, 2, 4, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots$, два решения из разных интервалов (10) и (11) становятся практически одинаковыми, а для $n = 1, 3, 5, \dots$ решения в этих интервалах остаются

разными, хотя собственные значения и коэффициенты нормировки стремятся друг к другу.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00800-а и 10-01-00467-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В.* Потенциальные модели кваркония // УФН. 1984. Т. 143(5). С. 3–32.
2. *Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B.* Quasipotential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions // Nuovo Cim. A. 1968. V. 55, No. 2. P.233–257.
3. *Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б.* Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. С. 637–390.
4. *Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V.* Computer Physics Communications the Factorization Method and Particular Solutions of the Relativistic Schrödinger Equation of n th Order ($n = 4, 6$). 2000. V. 126, No. 1, 2. P. 12–15.
5. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В.* Исследование решения краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения Шредингера. Сообщение ОИЯИ Р11-2000-154. Дубна, 2000. 10 с.
6. *Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е.* Асимптотическая аппроксимация решений и собственных значений краевой задачи для сингулярно-возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера // Дифф. Урав. 2000. Т. 37, № 1. С. 83–90.
7. *Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е.* Асимптотика собственных функций и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера при произвольном потенциале // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 9. С. 3–16.
8. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Саркар Н. Р., Сархадов И.* Исследование краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных. Сообщение ОИЯИ Р11-2004-147. Дубна, 2004. 22 с.
9. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 11. С. 65–79.
10. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Решение краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка. Сообщение ОИЯИ Р11-2007-148. Дубна, 2007. 16 с.
11. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Исследование решений краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала. Препринт ОИЯИ Р11-2008-103. Дубна, 2008. 18 с.

12. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала. Препринт ОИЯИ Р11-2009-150. Дубна, 2009. 16 с.
13. *Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А.* Исследование решений краевых задач для дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала. Вестник РУДН, Серия: Математика. Информатика. Физика. 2010. № 3, вып. 2, С. 16–20.
14. *Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катышев Ю. В.* К вопросу о предельном переходе $c \rightarrow \infty$ в релятивистском предельном переходе // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2. С. 191–196.
15. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. Сбор. 1948. Т. 22(64), № 2. С. 193–204.
16. *Тихонов А. Н.* О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. Сбор. 1950. Т. 27(69), № 1. С. 147–156.
17. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12, вып. 5(77). С. 3–122.
18. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990, 208 с.

Получено 12 августа 2010 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 13.10.2010.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,19. Уч.-изд. л. 1,4. Тираж 310 экз. Заказ № 57117.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/