

P9-2011-65

Н. С. Азарян, М. А. Батурицкий¹, Ю. А. Будагов,
В. В. Глаголев, Д. Л. Демин, И. Н. Кижлай², С. В. Колосов²,
А. А. Кураев², Т. Л. Попкова², А. О. Рак², А. К. Сеницын²,
Г. В. Трубников, Г. Д. Ширков

**РАСЧЕТ ОДНОЯЧЕЕЧНОГО СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО
НИОБИЕВОГО РЕЗОНАТОРА
ДЛЯ УСКОРИТЕЛЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ПОЗИТРОНОВ**

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

¹Национальный научно-учебный центр физики частиц и высоких энергий Белорусского государственного университета, Минск

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск

Азарян Н. С. и др.

P9-2011-65

Расчет одноячеечного сверхпроводящего ниобиевого резонатора для ускорителя электронов и позитронов

Произведены расчеты ускорительной секции международного линейного коллайдера (ILC), состоящей из сверхпроводящих ниобиевых резонаторов, в условиях максимальной передачи энергии электронам, пролетающим по оси резонатора. Создана математическая модель и пакеты программ для расчета электрических характеристик и профиля одноячеечного резонатора. Выполнен компьютерный синтез формы резонатора, обеспечивающей требуемые электрические характеристики. Найдены перспективные конструкции одноячеечного резонатора, при которых обеспечивается добротность до 10^{10} на рабочей частоте 1,3 ГГц, для оптимизации работы по конструированию и изготовлению одноячеечного резонатора. Рассчитаны электрические характеристики цепочки одноячеечных резонаторов.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем им. В.П. Дзелепова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2011

Azaryan N. S. et al.

P9-2011-65

The Modeling of the Single-Cell Superconducting Niobium Resonator for an Accelerator of Electrons and Positrons

The modeling of the accelerator section consisting of superconducting niobium resonators for the International Linear Collider (ILC) has been made in the conditions of a maximal energy transfer to electrons, travelling along the resonator axis. The mathematical model and the program package have been created for the modeling of the electric characteristics and the shape of the single-cell resonator. The computer-based synthesis of the resonator shape was developed providing the required electrical characteristics. The perspective design variants of a single-cell resonator have been found with the quality up to 10^{10} at working frequency 1.3 GHz for the design optimization and the elaboration of a single-cell resonator. The electric characteristics of a chain of single-cell resonators have been calculated.

The investigation has been performed at the Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Важность проблемы создания международного линейного коллайдера (International Linear Collider — ILC) понятна физикам всего мира, работающим в области физики частиц и высоких энергий. Очевидно, что без этого нового инструмента невозможно продвинуться в понимании всего комплекса проблем современной физики — от происхождения масс до размерности пространства. Этот прибор поможет радикально углубить наше понимание Вселенной [1, 2].

Ключевым элементом любого линейного ускорителя являются СВЧ ускорительные секции, в которых уже давно находят применение сверхпроводящие резонаторы (рис. 1). В 1981 г. вышла монография [3], которая обобщала весь накопленный в этой области опыт. Еще раньше сверхпроводящие резонаторы были описаны в вышедшей в 1973 г. монографии [4], а в 1976 г. появилась монография [5], где описаны СВЧ-приборы, построенные с использованием маломощных сверхпроводящих резонаторов (высокостабильные СВЧ-генераторы, гравиметры и пр.).

Данная работа посвящена поиску на основе вычислительного эксперимента перспективных вариантов параметров и профиля одноячеечного сверх-

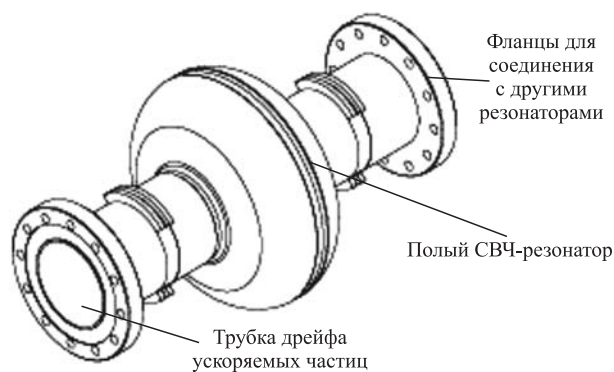


Рис. 1. Внешний вид одного из цепочки резонаторов

проводящего ниобиевого резонатора на частоту 1,3 ГГц для ускорителей электронов и позитронов. Для этого необходимо было решить следующие задачи:

- создания математической модели для расчета электрических характеристик одноячеечного резонатора;
- создания пакета программ расчета электрических характеристик и синтеза геометрических размеров и профиля одноячеечного резонатора, обеспечивающих требуемую добротность и рабочую частоту;
- компьютерного синтеза формы резонатора, обеспечивающей требуемые электрические характеристики на рабочей частоте — 1,3 ГГц;
- поиска перспективных конструкций одноячеечного резонатора, при которых обеспечивается добротность до 10^{10} на рабочей частоте 1,3 ГГц;
- разработки программы для исследования характеристик цепочки из одноячеечных резонаторов.

В работе представлены расчеты одноячеечного резонатора на частоту 1,3 ГГц с применением различных методов моделирования. Описаны методы моделирования и результаты расчетов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается распространение симметричных E -волн в круглом продольно-нерегулярном (нерегулярность есть функция от z, r) волноводе с учетом омических потерь в стенках (рис. 2).

Распространение таких волн описывается уравнениями Максвелла для электрической \mathbf{E} и магнитной \mathbf{B} компонент волны, которые в принятых безразмерных переменных имеют вид:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

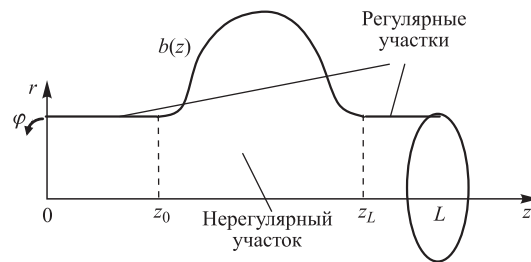


Рис. 2. Круглый продольно-нерегулярный волновод: $b(z)$ — профиль волновода; r, φ, z — цилиндрические координаты; $[z_0, z_L]$ — область резонатора

Периодические решения этих уравнений на рабочей частоте $\omega = W\omega_0$ представим в виде

$$\mathbf{E}, \mathbf{B} = \text{Re} \left\{ \left[\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}} \right] e^{jWt} \right\}.$$

В этом случае комплексные амплитуды $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}}$ удовлетворяют уравнениям

$$\text{rot } \dot{\mathbf{B}} = jW\dot{\mathbf{E}}, \quad \text{rot } \dot{\mathbf{E}} = -jW\dot{\mathbf{B}}, \quad (2)$$

при этом на стенке волновода выполняется условие Щукина–Леонтовича

$$\left[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{E}} \right] \Big|_{r=b(z)} = -\dot{Z}_\sigma \left[\mathbf{n}, \left[\mathbf{n}, \dot{\mathbf{B}} \right] \right] \Big|_{r=b(z)}. \quad (3)$$

Здесь приняты следующие обозначения и формулы перехода к безразмерным переменным (штрихом помечены размерные величины, точкой сверху — комплексные): $(r, x, y, z, b, L) = (r', x', y', z', b', L') \cdot \omega_0/c$, $\omega_0/c = 2\pi/\lambda_0$; $\omega_0 t' = t$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}'/E_m$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}'c/E_m$, $\mathbf{B}' = \mu_0 \cdot \mathbf{H}'$, $E_m = m_0\omega_0 c/e$, ω_0 и λ_0 — опорные частота и длина волны, c — скорость света; $\dot{Z}_\sigma = \dot{Z}_s/Z_0$, $Z_0 = 377$ [Ом] — импеданс свободного пространства, $\dot{Z}_s = R_s + jX_s$ [Ом] — поверхностный импеданс проводника, R_s — поверхностное сопротивление и X_s — поверхностный реактанс [4, 6].

Поверхностный импеданс \dot{Z}_s очень удобен для определения как добротности сверхпроводящих резонаторов, так и смещения частоты при изменении температуры. Для сверхпроводников величина \dot{Z}_s зависит от многих факторов — температуры, частоты СВЧ, напряженности электрического поля, индукции магнитного поля. Так, у ниобия характерные значения поверхностного импеданса в диапазоне температур ниже критической $T_{\text{кр}} = 9,25$ К представлены в табл. 1 [4, 6].

Таблица 1. Поверхностный импеданс ниобия ($f=11,2$ ГГц, $T_{\text{кр}} = 9,25$ К)

$T/T_{\text{кр}}$	R_s , Ом	X_s , Ом $\cdot 10^3$
0,96	$2,25 \cdot 10^{-3}$	7,9
0,90	$1,00 \cdot 10^{-3}$	6,39
0,80	$4,07 \cdot 10^{-4}$	5,15
0,70	$1,99 \cdot 10^{-4}$	4,53
0,6	$1,01 \cdot 10^{-4}$	4,16
0,45	$3,29 \cdot 10^{-5}$	3,87
0,4	$1,88 \cdot 10^{-5}$	3,81
0,3	$4,4 \cdot 10^{-6}$	3,76
0,2	$2,46 \cdot 10^{-7}$	3,74
0,1	$3,25 \cdot 10^{-11}$	3,74

Значения R_s на других частотах можно получить, исходя из формулы [4]:

$$R_s(f) = R_s|_{f=11,2} \frac{f^2}{11,2^2}, \quad X_s(f) = X_s|_{f=11,2} \frac{f}{11,2}.$$

Например, для частоты $f = 1,3$ ГГц значения R_s табл. 1 нужно уменьшить в 74,2 раза, а значения X_s в 8,6 раза.

Добротность резонатора определяется как отношение запасенной энергии W_V к энергии, поглощаемой в стенках за период высокочастотных колебаний P_σ/ω . В ускорительной секции используются резонаторы с собственной модой симметричного E -типа (азимутально-однородные), близкой к моде типа E_{010} обычного цилиндрического резонатора. При условиях Шукина–Леонтовича (3) выражение собственной добротности через безразмерную компоненту B_φ рабочей моды симметричного E -типа имеет вид [4]

$$Q_s = \frac{\omega W_V}{P_\sigma} = \frac{\frac{\omega \mu_0}{2} \int_V \dot{\mathbf{H}}'^2 dV'}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{2\sigma}} \int_{S'} \dot{\mathbf{H}}_\tau'^2 dS'} = 2 \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} \frac{\int_V \dot{\mathbf{H}}'^2 dV'}{\int_{S'} \dot{\mathbf{H}}_\tau'^2 dS'} = \frac{2}{\delta_{\text{ск}}} \frac{c}{\omega_0} \frac{\int_V \dot{B}_\varphi^2 dV}{\int_S \dot{B}_\varphi^2 dS}.$$

Для сверхпроводника вводят понятие эффективной глубины проникновения $\delta_{\text{ск}} = 2R_s/(\omega_s \mu_0)$ [4]. В результате выражение для собственной добротности сверхпроводящих резонаторов получают заменой поверхностного сопротивления обычных металлов в выражении для толщины скин-слоя $\delta_{\text{ск}}$ реальной частью поверхностного импеданса сверхпроводника R_s [4]:

$$Q_s = \frac{\mu_0 \omega_s}{R_s} \frac{c}{\omega_0} \frac{\int_V \dot{\mathbf{H}}'^2 dV'}{\int_{S'} \dot{\mathbf{H}}_\tau'^2 dS'} = \frac{Z_0}{R_s} W_s \frac{\int_V \dot{B}_\varphi^2 dV}{\int_S \dot{B}_\varphi^2 dS} = \frac{Z_0}{R_s} A_Q. \quad (4)$$

Здесь $Z_0 A_Q$ [Ом] — геометрический фактор резонатора, зависящий только от формы, размеров резонатора и типа колебаний в нем. Для колебания рассматриваемого типа безразмерный геометрический фактор A_Q выражается через безразмерную магнитную компоненту поля:

$$A_Q = W_s \frac{\int_V \dot{B}_\varphi^2 dV}{\int_S \dot{B}_\varphi^2 dS}. \quad (5)$$

Поэтому для расчета добротности сверхпроводящего резонатора нестандартной формы (рис. 2) достаточно рассчитать его геометрический фактор A_Q

при небольших значениях \dot{Z}_σ , например, медного резонатора, после чего оценивать добротность по формуле (5), подставляя значение R_s из табл. 1.

Как показали приведенные ниже расчеты, для рассматриваемого нами резонатора геометрический фактор находится в диапазоне 0,7–0,8. Поэтому, исходя из таблицы для R_s и X_s , можно ожидать, что величина собственной добротности, большая чем 10^{10} , должна достигаться при температуре 2,3 К и ниже.

Для резонатора кроме добротности важными являются приведенные ниже следующие характеристики, выраженные через принятые здесь безразмерные переменные, с учетом того, что в этих переменных пролетная длина одной ячейки $z_L - z_0 = \pi$ [7, 8].

Ускоряющее напряжение (accelerating voltage) V_0 :

$$V_0[B] = (z'_L - z'_0) \frac{E_m}{\pi} \int_{z_0}^{z_0+\pi} |\dot{E}(0, z)| \sin(z - z_0) dz; \quad (6)$$

ускоряющий градиент (accelerating gradient) E_{acc} :

$$E_{\text{acc}} \left[\frac{\text{МВ}}{\text{м}} \right] = E_{\text{acc}} \frac{1}{10} \left[\frac{\text{кВ}}{\text{см}} \right] = \frac{V_0}{z'_L - z'_0}; \quad (7)$$

сопротивление резонатора (resonant resistance) R : $R[\text{Ом}] = QZ = \frac{V_0^2}{2P_\sigma}$;

собственный импеданс (intrinsic impedance) Z :

$$Z[\text{Ом}] = \frac{R}{Q_s} = \frac{V_0^2}{\omega W_V} = \frac{Z_0 \left[\int_{z_0}^{z_0+\pi} |\dot{E}(0, z)| \sin(z - z_0) dz \right]^2}{\int_V \dot{B}_\varphi^2 dV}. \quad (8)$$

Значения таких важных величин, как максимальная напряженность электрического поля на оси резонатора $E_{z \text{ max}} = \max |\dot{E}_z(0, z)|$, максимальное электрическое поле на стенке резонатора $E_{g \text{ max}}$, максимальная индукция магнитного поля на стенке резонатора $B_{g \text{ max}}$, а также E_{acc} , V_0 , зависят от величины вводимой в резонатор мощности P_σ как [4]

$$u = \alpha_u \sqrt{Q_s P_\sigma}, \quad (9)$$

где $u = \{B_{g \text{ max}}, E_{g \text{ max}}, E_{z \text{ max}}, E_{\text{acc}}, V_0\}$, α_u — соответствующий коэффициент пропорциональности. Из этой формулы, в частности, следует, что чем больше добротность, тем меньшая требуется вводимая мощность для достижения нужной величины ускоряющего поля E_{acc} .

Поэтому важны относительные характеристики, не зависящие от вводимой мощности, например, такие как

$$\frac{B_{g \max}}{E_{\text{acc}}} \left[\frac{\text{мТл}}{\text{МВ/м}} \right] = \frac{B_{g \max}}{E_{\text{acc}}} \cdot 10^4 \left[\frac{\text{Тл}}{\text{кВ/см}} \right]; \quad \frac{E_{g \max}}{E_{\text{acc}}}. \quad (10)$$

Пропорциональность (9) дает возможность по величине u^0 для резонатора, имеющего добротность Q_0 , например медного, получить значение u^s для сверхпроводящего резонатора, имеющего добротность Q_s , по формуле $u^s = u^0 \sqrt{Q_s/Q_0}$. Также она позволяет определить ту вводимую в резонатор мощность, при которой будет разрушаться сверхпроводящее состояние или наступит электрический пробой, например, зная критические значения $B_{g \max}$ или $E_{g \max}$ ниобиевого сверхпроводника. Полученные данные [4] указывают на то, что основным ограничивающим фактором является не электрический пробой, а критические магнитные поля ($B'_{g \max} \leq 0,1$ Тл).

Заряженные частицы (например, электроны с отрицательным зарядом e), пролетая по оси резонатора под действием силы $F = -e \cdot \left| \dot{E}'_z(0, z) \right| \times \sin(\omega t' - \vartheta)$, получают дополнительную энергию и ускоряются тем больше, чем больше затраченная на ускорение энергия eV_0 , где V_0 — ускоряющее напряжение — при правильно подобранной фазе влета в резонатор ϑ и его длине выражается по формуле (6). В качестве целевой функции при оптимизации профиля $b(z)$ удобно выбирать более простое выражение

$$E_{z \text{ int}} = \int_{z_0}^{z_L} \left| \dot{E}'_z(0, z) \right| dz. \quad (11)$$

2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА

2.1. Преобразование координат. Метод преобразования координат приводит задачу на нерегулярной области к задаче на цилиндре единичного радиуса для преобразованных уравнений Максвелла, что в последующем позволяет использовать эффективные методы расчета.

Введем наряду с исходной системой координат r, φ, z криволинейные координаты ρ, ψ, ζ [9],

$$r = \rho b(\zeta), \quad \varphi = \psi, \quad z = \zeta, \quad (12)$$

в которых нерегулярный волновод (рис. 2) отображается на цилиндр единичного радиуса ($\rho \leq 1$). Как известно [9, 10], векторы $\dot{\mathbf{E}}, \dot{\mathbf{B}}$ в преобразованной системе можно представить в виде

$$\dot{\mathbf{B}} = \dot{B}_r \cdot \mathbf{r}_0 + \dot{B}_\varphi \cdot \varphi_0 + \dot{B}_z \cdot \mathbf{z}_0 = B_1 \cdot \mathbf{a}^1 + B_2 \cdot \mathbf{a}^2 + B_3 \cdot \mathbf{a}^3 = B_\rho \cdot \mathbf{a}^1 + \rho B_\psi \cdot \mathbf{a}^2 + B_\zeta \cdot \mathbf{a}^3,$$

$$\dot{\mathbf{E}} = E_r \cdot \mathbf{r}_0 + E_\varphi \cdot \boldsymbol{\varphi}_0 + E_z \cdot \mathbf{z}_0 = E_1 \cdot \mathbf{a}^1 + E_2 \cdot \mathbf{a}^2 + E_3 \cdot \mathbf{a}^3 = E_\rho \cdot \mathbf{a}^1 + \rho E_\psi \cdot \mathbf{a}^2 + E_\zeta \cdot \mathbf{a}^3,$$

где $\mathbf{a}^1 = \frac{\mathbf{r}_0}{b} - \rho \frac{b'}{b} \mathbf{z}_0$; $\mathbf{a}^2 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_0}{\rho b}$; $\mathbf{a}^3 = \mathbf{z}_0$ — взаимная система базисных векторов (здесь $b' = \partial b / \partial z$).

После введения в преобразованной системе расчетных векторов $\dot{\mathbf{B}}^p(\rho, z) = \dot{B}_\psi \cdot \boldsymbol{\psi}_0$, $\dot{\mathbf{E}}^p(\rho, z) = \dot{E}_\rho \cdot \boldsymbol{\rho}_0 + \dot{E}_\zeta \cdot \boldsymbol{\zeta}_0$ для симметричных E -волн уравнения Максвелла (2) преобразуются к виду [9]

$$\text{rot } \dot{\mathbf{B}}^p = jW \tilde{g} \dot{\mathbf{E}}^p; \quad \tilde{g} \cdot \text{rot } \dot{\mathbf{E}}^p = -jW \dot{\mathbf{B}}^p. \quad (13)$$

Здесь $\tilde{g} = \begin{bmatrix} 1 + \rho^2 b' & 0 & -\rho b b' \\ 0 & 1 & 0 \\ -\rho b b' & 0 & b^2 \end{bmatrix}$ — тензор преобразования, $\tilde{g} = \tilde{g}^{-1}$.

Граничное условие на стенке волновода (3) принимает вид

$$\dot{E}_\zeta \Big|_{\rho=1} = -\dot{Z}_\sigma \frac{\sqrt{1+b'^2}}{b} \dot{B}_\psi \Big|_{\rho=1}. \quad (14)$$

Связь компонент в исходной и преобразованной системах такова:

$$\dot{E}_r = \dot{E}_\rho / b(z); \quad \dot{B}_\varphi = \dot{B}_\psi / b(z); \quad \dot{E}_z = \dot{E}_\zeta - \dot{E}_\rho \cdot b'(z) / b(z). \quad (15)$$

2.2. Метод Галеркина. Полученную задачу для преобразованных уравнений Максвелла (13), (14) можно решить проекционным методом, используя тот факт, что для нее имеется подходящая система базисных функций, представляющих поперечные сечения собственных волн регулярного волновода единичного радиуса.

Как известно, собственные симметричные E_{0i} -волны регулярного волновода радиуса b ($0 < \rho = r/b \leq 1$), являющиеся решением (здесь безразмерных) уравнений Максвелла: $\text{rot } \dot{\mathbf{B}}^0 = jW \dot{\mathbf{E}}^0$, $\text{rot } \dot{\mathbf{E}}^0 = -jW \dot{\mathbf{B}}^0$ при однородных граничных условиях $[\mathbf{r}_0 \cdot \dot{\mathbf{E}}^0]_{\rho=1} = 0$ можно записать в виде [9]

$$\dot{\mathbf{E}}_{0i}^0 = [\pm j k_{0i}^e b \cdot \mathbf{e}_{0i}^e(\rho) + \nu_{0i} \psi_{0i}^e(\rho) \mathbf{z}_0] e^{\mp j k_{0i}^e z}, \quad \dot{\mathbf{B}}_{0i}^0 = jW b \cdot \mathbf{h}_{0i}^e(\rho) e^{\mp j k_{0i}^e z}, \quad (16)$$

а их мембранные функции как

$$\mathbf{e}_{0i}^e = J_1(\nu_{0i} \rho) \mathbf{r}_0; \quad \boldsymbol{\psi}_{0i}^e = J_0(\nu_{0i} \rho) \mathbf{z}_0; \quad \mathbf{h}_{0i}^e = J_1(\nu_{0i} \rho) \boldsymbol{\varphi}_0.$$

В соответствии с проекционным методом Галеркина–Канторовича решение задачи (13), (14) будем искать в виде разложения по мембранным функциям

$$\begin{aligned}\dot{E}_\rho &= - \sum_i \dot{A}_i(z) \cdot J_1(\nu_{0i}\rho); & \dot{E}_\zeta &= \sum_i \dot{C}_i(z) \cdot J_0(\nu_{0i}\rho); \\ \dot{B}_\psi &= -j \sum_i \dot{V}_i(z) \cdot J_1(\nu_{0i}\rho).\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь ν_{0i} — i -й корень функции Бесселя $J_0(x)$.

В результате применения к задаче (13), (14) стандартной проекционной процедуры получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд $\dot{A}_i, \dot{C}_i, \dot{V}_i$ возбуждаемых волн в нерегулярном волноводе [9].

Опуская громоздкие описания проекционной процедуры, приведем здесь полученную самосогласованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для расчетных амплитуд возбуждаемых волн $i = 1 \dots M_s$, которая описывает процессы возбуждения симметричных E_{0i} -волн на частоте W в отрезке продольно нерегулярного круглого волновода с учетом омических потерь в стенке:

$$\frac{d\dot{A}_i}{dz} = \left(W\dot{V}_i + \nu_{0i}\dot{C}_i \right) + (1-j)2S_\sigma \frac{\sqrt{1 + (\partial b/\partial z)^2}}{b} \sum_k \dot{V}_k \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\frac{d\dot{V}_i}{dz} &= -W \left\{ \dot{A}_i + \left(\frac{\partial b}{\partial z} \right)^2 \left[\dot{A}_i \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{\nu_{0i}^2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{k \neq i} \frac{4 \cdot (\nu_{0i}^2 + \nu_{0k}^2)}{(\nu_{0i}^2 - \nu_{0k}^2)^2} \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{A}_k \right] - \right. \\ &\quad \left. - b \frac{\partial b}{\partial z} \left(-\frac{\dot{C}_i}{\nu_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot \nu_{0k}}{\nu_{0i}^2 - \nu_{0k}^2} \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{C}_k \right) \right\};\end{aligned}$$

$$\dot{C}_i = -\frac{\nu_{0i} \dot{V}_{si}}{W \cdot b^2} + \frac{\partial b}{b \partial z} \times \left(-\frac{\dot{A}_i}{\nu_{0i}} + \sum_{k \neq i} \frac{2 \cdot \nu_{0i}}{\nu_{0k}^2 - \nu_{0i}^2} \frac{J_1(\nu_{0k})}{J_1(\nu_{0i})} \dot{A}_k \right).$$

Сформулируем общие *граничные условия* излучения для амплитуд $\dot{A}(z), \dot{V}(z)$ на открытых концах отрезка нерегулярного волновода. Предполагаем, что при $z \leq 0$ и $z \geq L$ волновод регулярный и решение здесь представляет суперпозицию собственных E_{0i} -волн (16). Обозначим амплитуды этих прямой и встречной волн как \dot{a}_{0i}^\pm для $z \leq 0$, \dot{a}_{Li}^\pm для $z \geq L$.

При постановке краевой задачи для (18) на входе (при $z=0$) задается амплитуда прямой волны \dot{a}_{0i}^+ , а на выходе контролируется величина амплитуды встречной волны \dot{a}_{Li}^- (при условии согласования $\dot{a}_{Li}^- = 0$). В этом случае граничные условия на открытых концах волновода можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} W \cdot \dot{A}_i(0) + jk_{0i}^e \cdot \dot{V}_i(0) &= jk_{0i}^e W \cdot 2b(0)\dot{a}_{0i}^+, \\ -W \cdot \dot{A}_i(L) + jk_{Li}^e \cdot \dot{V}_i(L) &= jk_{Li}^e W \cdot 2b(L)\dot{a}_{Li}^-. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$k_{0i}^e = \begin{cases} \sqrt{W^2 - (\nu_{0i}/b)^2}, & \text{если } W > \nu_{0i}/b \text{ — распространяющиеся} \\ \text{волны;} \\ -j\sqrt{(\nu_{0i}/b)^2 - W^2}, & \text{если } W < \nu_{0i}/b(0) \text{ — закрытые} \\ \text{волны.} \end{cases} \quad (20)$$

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода, в выбранных переменных имеет вид

$$P(z) = \sum_i e_{0i} \cdot \text{Im} \left[\dot{A}_i(z) \cdot \dot{V}_i^*(z) \right]; \quad e_{0i} = 0,5J_1^2(\nu_{0i}). \quad (21)$$

Таким образом, для системы уравнений амплитуд (18) поставлена краевая задача. Для ее решения разработан эффективный прямой (не итерационный) метод блочной матричной прогонки.

Запишем систему дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд (18) в стандартном векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dz} = G(z)\mathbf{u}, \quad (22)$$

$$\mathbf{u} = \{u^1, \dots, u^{2M}\} = \{\dot{A}_1, \dot{V}_1, \dot{A}_2, \dot{V}_2, \dots, \dot{A}_j, \dot{V}_j, \dots, \dot{A}_M, \dot{V}_M\}. \quad (23)$$

Элементы комплексной матрицы G размером $2M$ (здесь $M = M_s$) получены приведением подобных членов системы (18) в соответствии с представлением вектора (23) и являются функциями от z . Граничные условия к (22) получим исходя из (19) в общем виде:

$$\alpha_j^0 u^{2j-1}(0) + \beta_j^0 u^{2j}(0) = \gamma_j^0; \quad \alpha_j^L u^{2j-1}(L) + \beta_j^L u^{2j}(L) = \gamma_j^L; \quad j = 1 \dots M. \quad (24)$$

Для численного решения краевой задачи (22), (24) выберем равномерную сетку: $\{z_i = (i-1)h, h = L/n, i = 1 \dots n+1\}$ — и будем находить

$\{u_i = u(z_i)\}$ — таблицу значений искомого решения в узлах сетки. Для расчетов используем конечно-разностную неявную схему второго порядка точности, представляющую векторно-матричную систему линейных алгебраических уравнений:

$$-\left(E + \frac{h}{2}G_i\right)u_i + \left(E - \frac{h}{2}G_{i+1}\right)u_{i+1} = 0, \quad (25)$$

где $i = 2 \dots n$; E — единичная диагональная матрица.

Систему (25) следует дополнить граничными условиями, получаемыми аппроксимацией (24):

$$\alpha_j^0 u_1^{2j-1} + \beta_j^0 u_1^{2j} = \gamma_j^0; \quad \alpha_j^L u_{n1}^{2j-1} + \beta_j^L u_{n1}^{2j} = \gamma_j^L. \quad (26)$$

Для решения системы линейных уравнений (25), (26), матрица которой имеет блочно-ленточную структуру, была разработана экономичная модификация метода Гаусса — метод блочной матричной прогонки [11].

2.3. Сеточный метод. Регулярность границы в задаче (13), (14) позволяет использовать метод сеток, который является более эффективным, чем применяемый для нерегулярных волноводов метод конечных треугольных элементов. При этом для двумерной задачи предложен прямой (без итераций) метод решения системы конечно-разностных уравнений [11]. Для его использования векторные уравнения (13) приведем к одному уравнению второго порядка относительно $\dot{\mathbf{V}}^p$, после чего воспользуемся азимутальной однородностью симметричных E -волн и выразим все компоненты через одну компоненту B_ψ . Из первого уравнения (13) выразим $\dot{\mathbf{E}}^p = -\frac{j}{W}(\tilde{g} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}}^p)$, подставим во второе, получим

$$\operatorname{rot}(\tilde{g} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{B}}^p) - W^2 \tilde{g} \dot{\mathbf{B}}^p = 0. \quad (27)$$

В случае симметричных E -волн $\dot{\mathbf{B}}^p = \dot{B}_\psi(\rho, z) \psi_0$ (т. е. имеется только одна компонента B_ψ) $\dot{\mathbf{E}}^p = \dot{E}_\rho(\rho, z) \rho_0 + \dot{E}_z(\rho, z) z_0$. В результате (27) представляет только одно скалярное уравнение относительно $\dot{B}_\psi(\rho, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \dot{B}_\psi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b'}{b} \frac{\partial \rho \dot{B}_\psi}{\partial \rho} \right) - \frac{b'}{b} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \dot{B}_\psi}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho b^2} \frac{\partial \rho \dot{B}_\psi}{\partial \rho} \right) + W^2 \dot{B}_\psi = 0. \end{aligned}$$

Введем замену переменных $u = u_{re} + j u_{im} = \rho \dot{B}_\psi$ и преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho b^2} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{W^2}{\rho} u = 0. \quad (28)$$

Выражения расчетных компонент поля через функцию u таковы:

$$\dot{E}^p = \dot{E}_\rho \rho_0 + \dot{E}_\zeta z_0 = -\frac{j}{W} \left\{ \left(-\frac{\partial u}{\rho \partial z} + \frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho_0 + \left(-\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1 + \rho^2 b'^2}{b^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) z_0 \right\};$$

$$\dot{B}^p = \dot{B}_\psi(\rho, z) \psi_0 = u(\rho, z) / \rho \cdot \psi_0.$$

Граничные условия для уравнения (28) следующие.

Условие на стенке волновода при $\rho = 1$ получается из (14):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} - \frac{bb'}{1+b'^2} \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\rho=1} + jZ_\sigma W \frac{b}{\sqrt{1+b'^2}} u|_{\rho=1} = 0. \quad (29)$$

Условие симметрии на оси волновода: при $\rho = 0$ $u = 0$.

Парциальные условия излучения на открытых концах отрезка волновода сформулируем при тех же предположениях, что и в методе Галеркина. Решение задачи представим в виде разложения по мембранным функциям (16)

$$u(z, \rho) = \rho \dot{B}_\psi(z, \rho) = \sum_i \dot{V}_i(z) \rho J_1(\nu_{0i} \rho). \quad (30)$$

В этом случае выражение коэффициентов разложения через решение $u(z, \rho)$ имеет вид

$$\dot{V}_i(z) = \frac{1}{e_{0i}} \int_0^1 u(z, \rho) J_1(\nu_{0i} \rho) d\rho; \quad e_{0i} = \int_0^1 J_1^2(\nu_{0i} \rho) \rho d\rho = \frac{J_1^2(\nu_{0i})}{2}.$$

На регулярных участках $z < 0$, $z > L$ волновое поле представляется в виде разложения по системе собственных E_{0i} -волн и амплитуды V_i имеют вид

$$\dot{V}_i(z) = Wb (a_i^+ e^{-jk_i z} + a_i^- e^{+jk_i z}); \quad (31)$$

$$k_i = \begin{cases} +\sqrt{W^2 - (\nu_{0i}/b)^2}, & W > \nu_{0i}/b, \text{ распространяющиеся волны;} \\ -j\sqrt{(\nu_{0i}/b)^2 - W^2}, & W < \nu_{0i}/b, \text{ закритические волны.} \end{cases}$$

Здесь a_i^\pm — амплитуды прямой и обратной собственных волн; k_i — их волновые числа.

Продифференцируем (30) с условием (31), получим

$$\frac{\partial u(\rho, z)}{\partial z} = \sum_i Wb (-jk_i a_i^+ e^{-jk_i z} + jk_i a_i^- e^{+jk_i z}) \rho J_1(\nu_{0i} \rho).$$

Условие набегания слева E_{0r} -волн при $z = 0$ (при $z < 0$ $a_{0r}^+ \neq 0$, $a_{0i(i \neq r)}^+ = 0$):

После очевидных преобразований

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, z)}{\partial z} &= \sum_i Wb (-jk_i a_i^+ e^{-jk_i z} - jk_i a_i^+ e^{-jk_i z} + jk_i a_i^+ e^{-jk_i z} + \\ &\quad + jk_i a_i^- e^{+jk_i z}) \rho J_1(\nu_{0i} \rho) = \\ &= -2jWb \sum_i (k_i a_i^+ e^{-jk_i z}) \rho J_1(\nu_{0i} \rho) + j \sum_i k_i \dot{V}_i(z) \rho J_1(\nu_{0i} \rho) = \\ &= j \sum_i k_i \rho J_1(\nu_{0i} \rho) \frac{1}{e_{0i}} \int_0^1 u(z, \bar{\rho}) J_1(\nu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} - \\ &\quad - 2jWb \sum_r (k_r a_{0r}^+ e^{-jk_r z}) \rho J_1(\nu_{0r} \rho) \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, 0)}{\partial z} &= \sum_{i=1}^{m_S} \frac{jk_i}{e_{0i}} \rho J_1(\nu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, 0) J_1(\nu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} - \\ &\quad - 2jWb(0) \sum_r k_r a_{0r}^+ \rho J_1(\nu_{0r} \rho). \quad (32) \end{aligned}$$

Условие набегания справа E_0 -волн при $z = L$ (при $z > L$ $a_{Lp}^- \neq 0$, $a_{Li(i \neq p)}^- = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(\rho, L)}{\partial z} &= - \sum_{i=1}^{m_S} \frac{jk_i}{e_{0i}} \rho J_1(\nu_{0i} \rho) \int_0^1 u(\bar{\rho}, L) J_1(\nu_{0i} \bar{\rho}) d\bar{\rho} + \\ &\quad + 2jWb(L) \sum_p k_p a_{Lp}^- \rho J_1(\nu_{0p} \rho) \quad (33) \end{aligned}$$

получается аналогично.

Заметим, что здесь в граничных условиях (32), (33) наряду с распространяющимися учтены и закритические волны, которые присутствуют вблизи концов нерегулярного участка. Ввиду этого их можно ставить непосредственно на концах нерегулярного отрезка, что позволяет значительно уменьшить расчетную область, особенно вблизи границы полосы прозрачности.

Безразмерная мощность, переносимая волновым полем через поперечное сечение волновода, в выбранных переменных имеет вид

$$P_s = \text{real} \int_0^b \left[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{B}}^* \right]_z r dr = \text{imag} \left\{ \frac{1}{W} \int_0^1 \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} u^* + \frac{b'}{b \partial \rho} u^* \right) d\rho \right\}. \quad (34)$$

Рассмотрим решение краевой задачи для уравнения (28) *методом блочно-матричной прогонки* Для этого выберем на интервале $\{0 \leq \rho \leq 1\}$ *равномерную сетку* $\{\rho_j = j h_r, h_r = 1/m, j = 0 \dots m\}$ и обозначим $\mathbf{u} = \{u(z, \rho_1), \dots, u(z, \rho_m)\} = \{u_1, \dots, u_m\}$.

Аппроксимируем (28) конечно-разностной схемой второго порядка точности. После приведения к матричному виду получаем систему ОДУ

$$\frac{d}{dz} \left(E(z) \frac{d\mathbf{u}}{dz} \right) + \frac{d}{dz} (Q(z)u) + D(z) \frac{d\mathbf{u}}{dz} + G(z)\mathbf{u} = 0; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right) &\simeq \frac{d}{dz} \left(E \frac{d\mathbf{u}}{dz} \right); \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) &\simeq -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{b'}{b} \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h_r} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (Q(z)\mathbf{u}); \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{b'}{b} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) &\simeq -\frac{b'}{b} \frac{u'_{j+1} - u'_{j-1}}{2h_r} \\ -\frac{bb'}{1 + (b')^2} \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\rho=1} &= -\frac{bb'}{1 + (b')^2} u'_m \end{aligned} \right\} = D(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z};$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(c \frac{\partial u}{\partial \rho} \right); \quad c = \frac{1 + (b'\rho)^2}{\rho};$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{W^2 u}{\rho} + \frac{1}{b^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(c \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) &\simeq \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} + j Z_\sigma W \frac{b}{\sqrt{1 + b'^2}} u \Big|_{\rho=1} &\simeq \\ \simeq \left[\frac{c_{j-1/2} u_{j-1}}{b^2 h_r^2} + \left(\frac{W^2}{\rho_j} - \frac{c_{j-1/2} + c_{j+1/2}}{b^2 h_r^2} \right) u_j + \frac{c_{j+1/2} u_{j+1}}{b^2 h_r^2} \right] & \\ \simeq \frac{3u_m - 4u_{m-1} + u_{m-2}}{2h_r} + j Z_\sigma W \frac{b}{\sqrt{1 + b'^2}} u_m & \end{aligned} \right\} = G\mathbf{u}.$$

Матрица E имеет только диагональные ненулевые элементы

$$e_{j,j} = \frac{1}{(z)\rho_j}; \quad j = 2 \dots m-1.$$

Матрица Q имеет следующие ненулевые коэффициенты:

$$q_{1,2} = -\frac{b'}{b2h_r}; \quad q_{j,j-1} = \frac{b'}{b2h_r}; \quad q_{j,j+1} = -\frac{b'}{b2h_r}; \quad j = 2 \dots m-1;$$

Матрица D имеет следующие ненулевые коэффициенты:

$$d_{1,2} = -\frac{b'}{b2h_r}; \quad d_{j,j-1} = \frac{b'}{b2h_r}; \quad d_{j,j+1} = -\frac{b'}{b2h_r}; \\ j = 2 \dots m-1; \quad d_{m,m} = -\frac{bb'}{1+(b')^2}.$$

Матрица $G(z_i)$ имеет следующие ненулевые коэффициенты:

$$g_{1,1} = -\frac{W^2}{\rho_1} - \frac{c_{1/2} + c_{1+1/2}}{b^2h_r^2}; \quad g_{1,2} = \frac{c_{1+1/2}}{b^2h_r^2}; \\ g_{j,j-1} = \frac{c_{j-1/2}}{b^2h_r^2}; \quad g_{j,j} = \frac{W^2}{\rho_j} - \frac{c_{j-1/2} + c_{j+1/2}}{b^2h_r^2}; \quad g_{j,j+1} = \frac{c_{j+1/2}}{b^2h_r^2}; \\ j = 2 \dots m-1; \quad g_{m,m} = \frac{3}{2h_r} + jZ_\sigma W \frac{b}{\sqrt{1+b'^2}}; \\ g_{m,m-1} = \frac{-4}{2h_r}; \quad g_{m,m-2} = \frac{1}{2h_r}.$$

Введем сетку по z $\{z_k = (k-1)h_z, h_z = L/n, k = 1 \dots n+1\}$ и построим для (35) конечно-разностную схему:

$$\frac{E^{k+1/2}(u^{k+1} - u^k) - E^{k-1/2}(u^k - u^{k-1})}{h_z^2} + \frac{Q^{k+1}u^{k+1} - Q^{k-1}u^{k-1}}{2h_z} + \\ + D^k \frac{u^{k+1} - u^{k-1}}{2h_z} + G^k u^k = 0.$$

После приведения подобных членов получим расчетную схему:

$$\left[E^{k-1/2} - \frac{1}{2}h_z (Q^{k-1} + D^k) \right] u^{k-1} + \left[-E^{k-1/2} - E^{k+1/2} + h_z^2 G^k \right] u^k + \\ + \left[E^{k+1/2} + \frac{1}{2}h_z (Q^{k+1} + D^k) \right] u^{k+1}. \quad (36)$$

Для аппроксимации парциальных условий излучения выражения (32), (33) приведем к следующему матричному виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}^1}{dz} + \beta^0 \mathbf{u}^1 &= \boldsymbol{\gamma}^0; & \frac{d\mathbf{u}^{n+1}}{dz} + \beta^L \mathbf{u}^{n+1} &= \boldsymbol{\gamma}^L; \\ \beta_{kl}^0 &= -h_r \sum_{i=1}^{m_s} \frac{jk_i^0}{h_{0i}} J_1(\nu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\nu_{0i} \rho_l); \\ \beta_{kl}^L &= h_r \sum_{i=1}^{m_s} \frac{jk_i^L}{h_{0i}} J_1(\nu_{0i} \rho_k) \rho_k J_1(\nu_{0i} \rho_l); & k &= 1 \dots m, \quad l = 1 \dots m-1; \\ \gamma_k^0 &= -2jWb(0) \sum_r k_r^0 a_r^+ \rho_k J_1(\nu_{0r} \rho_k), & \gamma_k^L &= 2jWb(L) \sum_p k_p^L a_p^- \rho_k J_1(\nu_{0p} \rho_k), \end{aligned} \quad (37)$$

где m_s — количество учитываемых собственных волн (распространяющиеся + закрытые).

Для (37) используем аппроксимацию второго порядка точности

$$\begin{aligned} (-3\mathbf{u}^1 + 4\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^3) + 2h_z \beta^0 \mathbf{u}^1 &= 2h_z \boldsymbol{\gamma}^0; \\ (3\mathbf{u}^{n+1} - 4\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n-1}) + 2h_z \beta^L \mathbf{u}^{n+1} &= 2h_z \boldsymbol{\gamma}^L. \end{aligned} \quad (38)$$

Полученная конечно-разностная система уравнений (36), (38) имеет слабо заполненную матрицу с блочно-ленточной структурой и решается эффективным прямым методом блочно-матричной прогонки [11]. Рассмотренный сеточный метод легко обобщается на случай полого волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На основе предложенных методов созданы два оригинальных пакета программ, позволяющие производить синтез профиля резонатора, удовлетворяющего требуемым критериям качества и получать все необходимые электрические характеристики, как локальные, так и интегральные.

На основе процедуры оптимизации многопараметрической функции программы позволяют производить синтез параметров резонатора по заданным критериям качества. Наличие различных пакетов программ позволяет контролировать точность расчетов, выявлять погрешности модели. При оптимизации используется целевая функция (11).

В качестве исходных данных при проведении тестовых расчетов был взят вариант имеющегося экспериментального макета резонатора, изготовленного в лаборатории Fermilab (г. Батавия, США) [7, 8]. Его профиль представлен на рис. 3. В табл. 2 указаны ориентировочные значения размерных величин

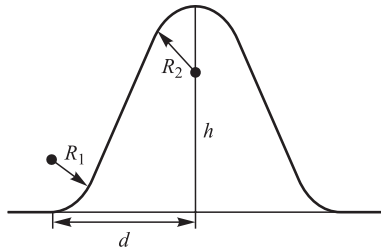


Рис. 3. Рассчитываемый профиль резонатора

и соответствующие им безразмерные параметры, которые задавались как исходные в расчетах.

Расчеты для резонатора из меди по программам на основе метода Галеркина и сеточного метода производились следующим образом. При фиксированных $R1$, $R2$ высота h подбиралась из условия $\max E_{z \text{ int}}$, что соответствует условию резонанса. Таким образом для различных $R1$, $R2$ при условии резонанса вычислялись значения $E_{g \text{ max}}$, $B_{g \text{ max}}$, E_{acc} и другие важные характеристики.

Таблица 2. Исходные данные для расчета

Наименование	Размерное значение	Безразмерное значение для $f = 1,3$ ГГц
Радиус трубки дрейфа b_0	39 мм	1,063
Удельная проводимость меди σ	$5,6 \cdot 10^7$ См/м	—
Поверхностное сопротивление R_s	$1 \cdot 10^{-4}$ Ом	—
Поверхностный реактанс X_s	$4 \cdot 10^3$ Ом	—
Длина волны λ_0	23,077 см	$W_s = 1$
Амплитуда волны, вводимой в резонатор, $A1(a_{01}^+, a_{L1}^-)$	—	0,01–0,1
Ширина резонатора $L_v = z_4 - z_1$	115,4 мм	π
Радиус нижнего скругления $R1$	$\approx 11,39$ мм	0,31
Радиус верхнего скругления $R2$	$\approx 40,4$ мм	1,1
Высота резонатора h	64,5 мм; 57,04 мм	1,755; 1,553

Для выяснения закономерностей поведения основных характеристик найденного варианта резонатора был проведен ряд вычислительных экспериментов.

Вначале было выяснено, на каком расстоянии от резонатора следует подводить к нему мощность через трубку дрейфа. Результат расчета с достаточно длинным участком трубки дрейфа представлен на рис. 4. Подвод мощности осуществляется с двух сторон симметрично — через сечение $z = 0$ и через сечение $z = L$. Видно, что амплитуда подводимой волны вначале уменьшается, прежде чем волна достигнет области резонатора. Точка минимума,

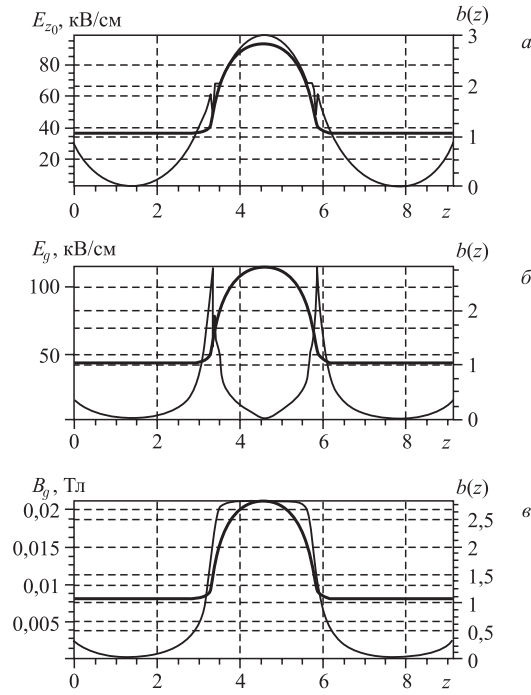


Рис. 4. Вариант расчета по методу Галеркина: а) распределение напряженности электрического поля на оси; б) распределение поля E на границе резонатора; в) распределение индукции магнитного поля на границе; $b_0 = 1,063$, $R1 = 0,31$, $R2 = 1,1$, $h = 1,755$, $W = 1$, $A1 = 0,1$; $P_{\text{int}} = 52101$ Вт, $A_Q = 0,756$, $Q = 29702$, $E_{z \text{ int}} = 1,77$

по-видимому, и является наилучшей для подвода. Для трубки дрейфа используемого радиуса она находится на расстоянии $2 \times \lambda/2\pi \cong 73$ мм от начала резонатора.

При выбранной безразмерной амплитуде подводимой волны $A1 = 0,1$ мощность, вводимая в резонатор с каждой из сторон, равна примерно 52 кВт. При этом максимальное значение напряженности поля на оси резонатора равно примерно 90 кВ/см. Распределение напряженности поля вдоль границы резонатора имеет два характерных максимума в области сопряжения резонатора с трубкой дрейфа, причем максимальное значение E_g примерно равно максимальному значению на оси. Распределение магнитной индукции B_g на границе также имеет характерный вид — в центре резонатора наблюдается едва заметный провал, и имеются соответственно два слабо выраженных максимума [8], которые на рис. 4 ввиду малого разрешения не видны.

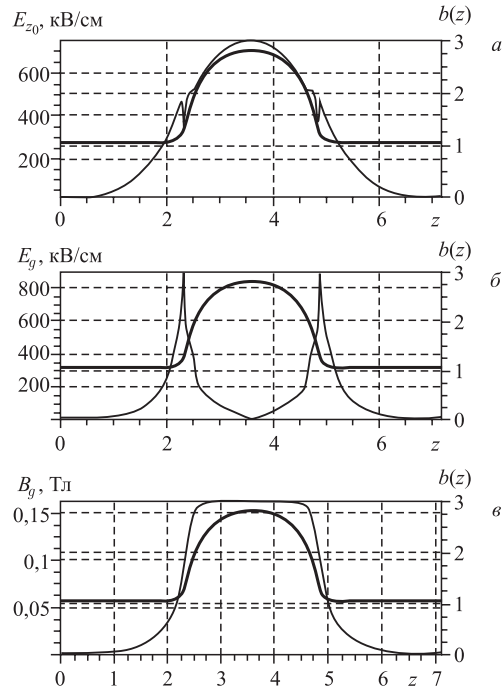


Рис. 5. Вариант расчета по методу Галеркина: $b_0 = 1,063$, $R1 = 0,31$, $R2 = 1,1$, $h = 1,755$, $W = 1$, $A1 = 0,1$; $P_{\text{int}} = 3004924$ Вт, $A_Q = 0,756$, $Q = 29785$, $E_{z \text{ int}} = 13,5$

Расчетному значению геометрического фактора $A_Q = 0,756$ соответствует добротность $Q = 29702$.

Рис. 5 иллюстрирует перенесение точки входа в оптимальное сечение. Заметим, что при этом положение точки резонанса не изменилось. При той же амплитуде $A1 = 0,1$ подводимая в резонатор мощность возросла в 60 раз и в соответствии с формулой (7) все электрические величины возросли в $\sqrt{60} = 7,7$ раз, соответственно $E_{z0 \text{ max}}$ достигла 750 кВ/см. При этом индукция магнитного поля достигла предельной для ниобия ($B_{\text{пред}} = 0,15$ Тл).

Рис. 6 иллюстрирует результат просчета варианта рис. 5 по программе, реализующей метод сеток. Заметим, что для поиска резонанса при тех же геометрических размерах пришлось скорректировать значение резонансной частоты ($W = 1,003$), а при фиксированной резонансной частоте пришлось скорректировать высоту резонатора ($h = 1,763$, $\Delta h = 0,3$ мм). Подводимая мощность практически такая же, как и на рис. 5.

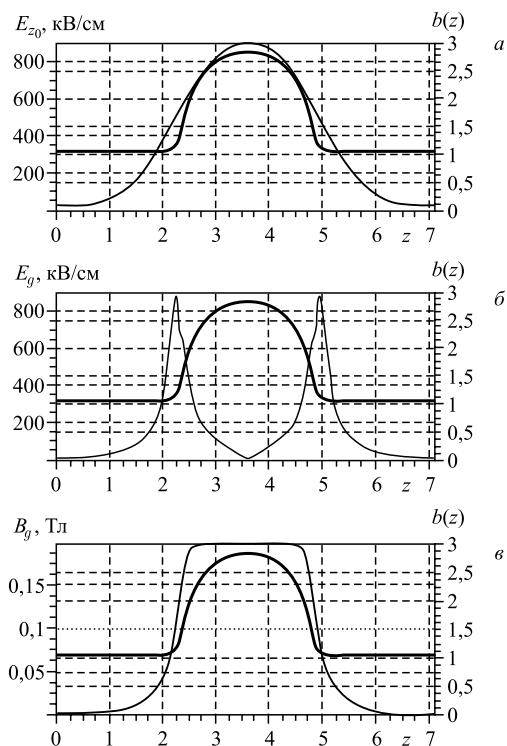


Рис. 6. Вариант расчета по методу сеток: $b_0 = 1,063$, $R1 = 0,31$, $A1 = 0,1$; $E_{acc} = 58,3$ МВ/м, $R/Q_s = 417$ Ом, $E_{g\ max}/E_{acc} = 1,74$, $B_{g\ max}/E_{acc} = 3,9$ мТл/(МВ/м), $A_Q = 0,73$. Параметры, заметно изменяющиеся при корректировке резонанса частотой: $h = 1,755$, $W = 1,005$; $P_{int} = 4024006$ Вт, $Q = 28398$, $E_{z\ int} = 18,8$; при корректировке резонанса высотой: $h = 1,763$, $W = 1,0$; $P_{int} = 3971096$ Вт, $Q = 28506$, $E_{z\ int} = 18,6$

Таблица 3. Изменение характеристик с изменением геометрических параметров $A1 = 0,01$ ($P_{int} \sim 30\text{--}45$ кВт)

$R1$	$R2$	h	A_Q	$E_{z_0\ max}$	$E_{g\ max}$	E_{int}
0,31	1,1	1,77	0,725	0,73	0,71	1,83
0,31	1,0	1,79	0,708	0,70	0,65	1,74
0,31	0,9	1,83	0,692	0,675	0,603	1,67
0,32	1,0	1,79	0,707	0,697	0,647	1,73
0,30	1,1	1,77	0,726	0,636	0,616	1,59
0,30	1,2	1,76	0,747	0,775	0,807	1,97

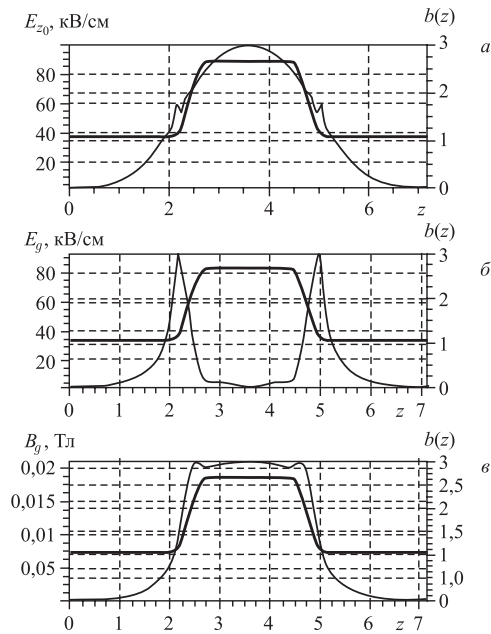


Рис. 7. Вариант расчета трапециевидного резонатора по методу Галеркина: $b_0 = 1,063$, $\Delta = 0,5$, $h = 1,595$, $W = 1$, $A_1 = 0,012$, $P_{\text{int}} = 53472$ Вт, $A_Q = 0,749$, $Q = 29435$, $E_{z \text{ int}} = 1,84$

Таким образом, хотя оба метода довольно точно находят точку минимума, у них имеется небольшая разбежка по максимальным значениям получаемых электрических величин и добротности, которые отличаются на 4–6 %.

Для исследования влияния геометрических размеров на характеристики резонатора были выполнены расчеты, представленные в табл. 3. Изменялись размеры R_1 , R_2 около выбранного начального варианта. Резонанс находился при $W = 1$ коррекцией высоты h . В таблице приведены безразмерные значения $E_{z_0 \text{ max}}$, $E_{g \text{ max}}$ и E_{int} . Анализ вариантов из табл. 3 указывает на то, что с увеличением R_2 и уменьшением R_1 как геометрический фактор, так и величина E_{int} возрастают. Однако уже при $R_2 > 1,15$ при уменьшении $R_1 < 0,305$ значение $E_{g \text{ max}}$ становится большим, чем $E_{z_0 \text{ max}}$, что нежелательно ввиду возможности возникновения пробоя. Поэтому можно рекомендовать для резонатора параметры $R_1 = 0,3\text{--}0,31$, $R_2 = 1,2\text{--}1,1$.

Для сравнения был выполнен расчет трапециевидного резонатора, боковые стенки которого задавались полиномом 5-й степени, обеспечивающим гладкое сопряжение верхнего и нижнего оснований. Крутизна боковых стенок задавалась параметром $\Delta = L_T/L_B$; L_T и L_B — длины верхнего и

Таблица 4. Изменение характеристик резонатора при изменении его геометрических параметров. $A_1 = 0,012$ ($P_{\text{int}} \sim 50\text{--}70$ кВт). Расчет по методу Галеркина

Δ	H	A_Q	$E_{z_0 \text{ max}}$	$E_{g \text{ max}}$	E_{int}
0,4	1,699	0,719	0,588	0,487	1,4
0,5	1,595	0,749	0,714	0,673	1,8
0,6	1,553	0,755	0,776	0,717	2,0
0,7	1,516	0,757	0,835	1,032	2,2

нижнего основания. На рис. 7 и в табл. 4 приведены характеристики этого резонатора.

С увеличением крутизны боковых стенок резонансная высота уменьшается, но при этом возрастает геометрический фактор A_Q (следовательно, добротность) и максимальное значение ускоряющего напряжения $E_{z_0 \text{ max}}$. Однако при $\Delta > 0,65$ величина максимальной напряженности поля на стенке резонатора становится большей, чем на оси $E_{g \text{ max}} > E_{z_0 \text{ max}}$, что, как уже отмечалось ранее, нежелательно. Сравнение с характеристиками «классического» резонатора показывает, что у трапециевидного резонатора они даже лучше.

В целом можно отметить, что при значительном изменении формы резонатора его геометрический фактор (и добротность) изменяются в пределах 20 %, а максимум ускоряющего напряжения — в пределах 30 %. Максимальные добротность и ускоряющее напряжение достигаются у резонатора с наибольшей крутизной стенок. Однако увеличение крутизны стенки приводит к резкому уменьшению радиуса сопряжения резонатора с трубой дрейфа, и в этом месте наблюдается увеличение напряженности на стенке, которое может провоцировать электрический пробой. Выбор этого радиуса определяется компромиссом между величиной ускоряющего напряжения и риском возможности пробоя. Как отмечается в литературе [8], выбор радиуса сопряжения между ячейками многозвенной ускорительной цепочки влияет на условия ее возбуждения.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА МНОГОЯЧЕЕЧНОГО РЕЗОНАТОРА

Разработанные программы позволяют производить синтез и рассчитывать многоячейчные резонаторы, используя отработанную методику оптимизационного поиска параметров, при которых реализуется резонанс. В качестве иллюстрации на рис. 8 приведен результат расчета трехзвенной цепочки из трапециевидных резонаторов. Геометрический фактор (следовательно, и добротность) такой цепочки близок к геометрическому фактору одной ячейки. Однако величина ускоряющей силы $E_{z \text{ int}}$ примерно в 2–2,5 раза больше, чем у одной ячейки, при одинаковой входной мощности.

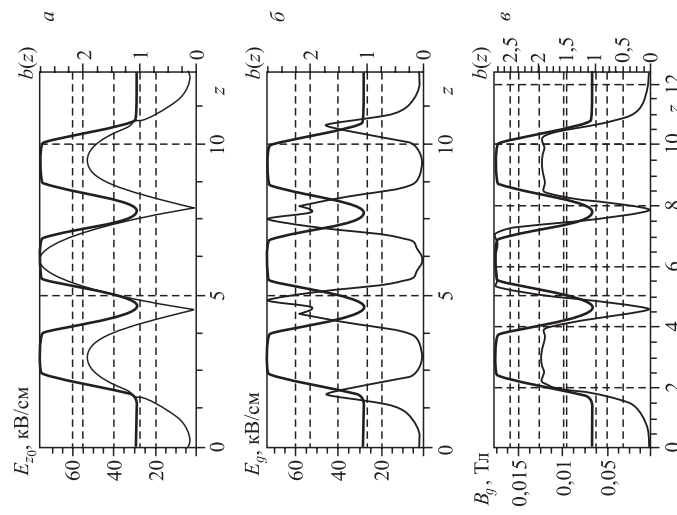


Рис. 8. Вариант расчета трехзвенного трапециевидного резонатора по методу Галеркина: $b_0 = 1,063$, $\Delta = 0,3$, $h = 1,676$, $W = 1$, $A_1 = 0,012$, $P_{\text{int}} = 56156$ Вт, $A_Q = 0,72$, $Q = 28317$, $E_{z \text{ int}} = 3,4$

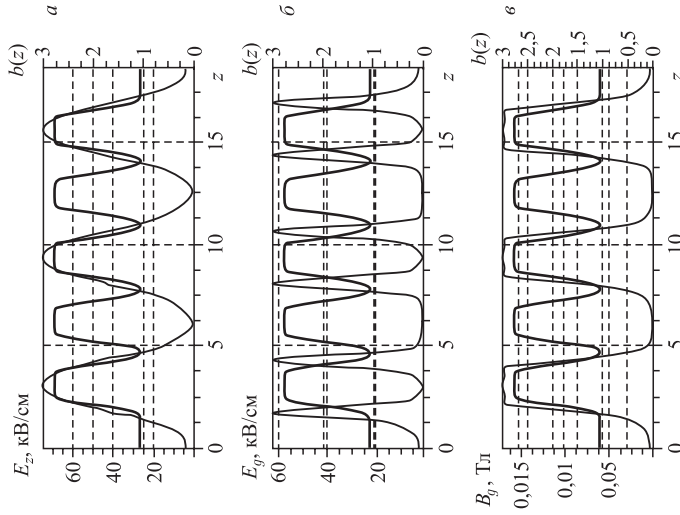


Рис. 9. Вариант расчета пятизвенного трапециевидного резонатора по методу Галеркина: $b_0 = 1,063$, $\Delta = 0,3$, $h = 1,70$, $W = 1$, $A_1 = 0,012$, $P_{\text{int}} = 97164$ Вт, $A_Q = 0,72$, $Q = 28250$, $E_{z \text{ int}} = 4,5$

При возбуждении пятизвенной цепочки возможны различные режимы [8]. Поэтому, как оказалось, расчет уже пятизвенной ячейки вызывает значительные затруднения в нахождении условий, при которых возбуждается нужная мода. Например, полученный нами при расчетах режим, представленный на рис. 9, оказался трехмодовым.

Работы по нахождению и исследованию нужных режимов возбуждения таких многоячеечных резонаторов продолжаются, результаты этих расчетов будут представлены в дальнейшем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате расчетов был получен требуемый профиль базовой детали, эскиз которой показан на рис. 10.

Изготовление этих деталей планируется методом гидроударной штамповки, где роль пуансона выполняет жидкость. Такой подход исключает возможность «травмирования» рабочей поверхности резонатора, к качеству которой предъявляются крайне жесткие требования. К тому же при применении данной технологии штамповая оснастка в 2–4 раза дешевле инструментальных штампов.

Соединение базовых деталей предлагается осуществить методом электронно-лучевой сварки. Эта технология в настоящее время является наиболее приемлемой, так как дает наилучшие результаты по качеству сварного шва и исключает его загрязнение посторонними элементами.

Для экспериментального исследования электродинамических характеристик резонатора подготовлено техническое задание на создание криогенного и ВЧ-стендов. В ходе работы планируется изготовить и протестировать три опытных образца одноячеечного резонатора.

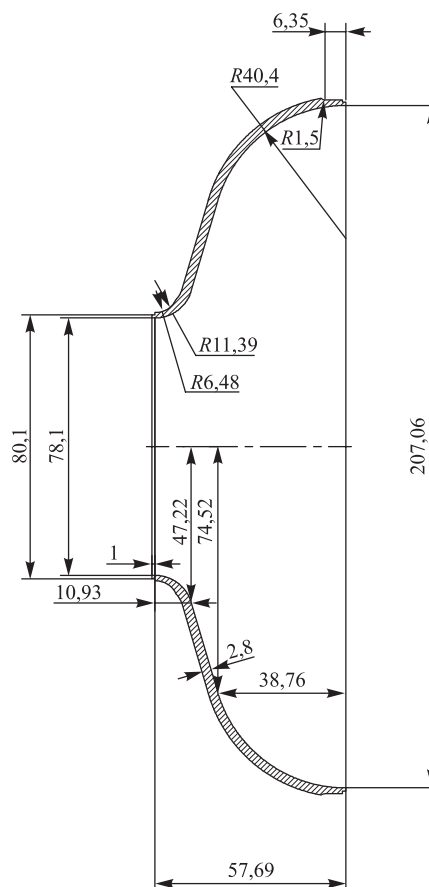


Рис. 10. Эскизный чертеж половинки резонатора

ЛИТЕРАТУРА

1. The International Linear Collider. Gateway to Quantum Universe. Draft February 2007. Global design Effort. <http://www.linearcollider.org>.
2. *Trubnikov G. V. et al.* International Linear Collider // Under General Editorship of A. N. Sissakian and G. D. Shirkov. Dubna: JINR, 2008.
3. *Диденко А. Н., Севрюкова Л. М., Ятис А. А.* Сверхпроводящие ускоряющие СВЧ-структуры. М.: Энергоиздат, 1981. С. 208.
4. *Диденко А. Н.* Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. М.: Сов. радио, 1973. С. 255.
5. *Менде Ф. Ф., Бондаренко И. Н., Трубицын А. В.* Сверхпроводящие и охлаждаемые резонансные системы. Киев: Наук. думка, 1976.
6. *Кравченко В. Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. С. 270.
7. *Podlech H.* Status and the Development of the Superconducting CH-Structure. Presentation of the Report on HIPPI Meeting 29.09–01.10.2004, Frankfurt, Germany.
8. Handbook of Accelerator Physics and Engineering / Ed. A. W. Chao and M. Tigner. Singapore: World Scientific, 1999. P. 679.
9. *Кураев А. А., Попкова Т. Л., Сеницын А. К.* Электродинамика и распространение радиоволн. Минск: Бестпринт, 2004. С. 357.
10. *Стрэттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948. С. 535.
11. *Наранович О. И., Сеницын А. К.* Решение двумерного уравнения эллиптического типа методом блочной матричной прогонки // Докл. АН. 2007. № 3 (19). С. 18–23.

Получено 1 июля 2011 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 15.09.2011.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,69. Уч.-изд. л. 2,03. Тираж 250 экз. Заказ № 57430.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/